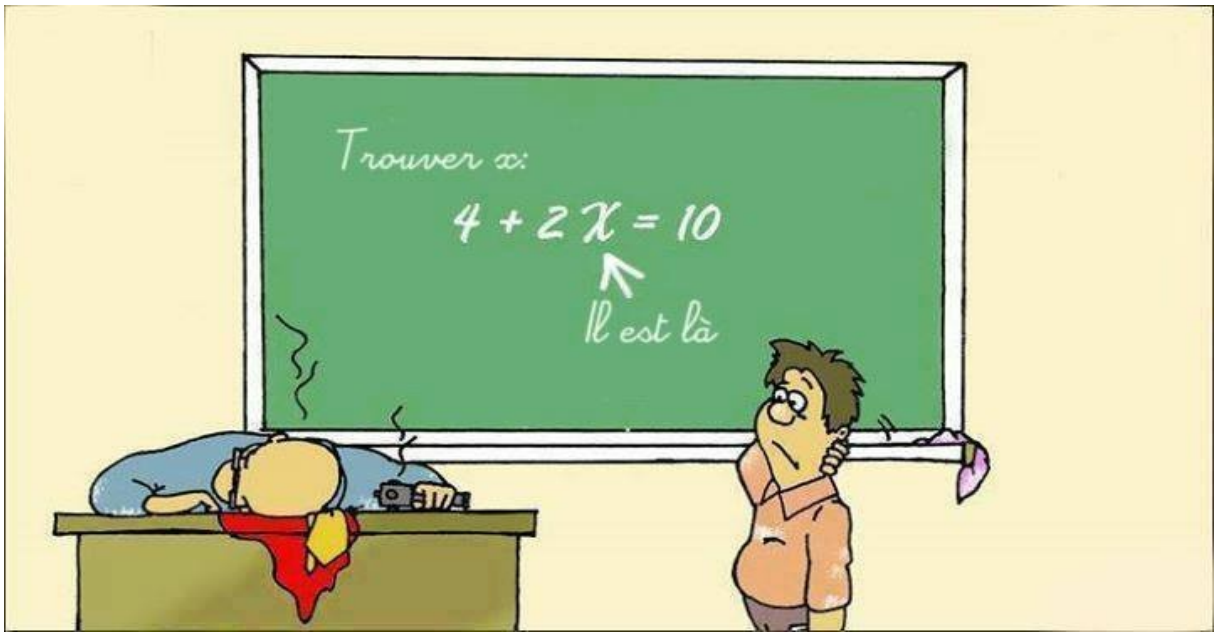


Deux ou trois choses à savoir en mathématiques pour le brevet des collèges …

Edition 2018

« L'essence des mathématiques, c'est la liberté !»

Georg Cantor

Arithmétique

La division euclidienne

a et b deux nombres entiers positifs $b \neq 0$
Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver les deux uniques nombres entiers positifs q et r vérifiant l'égalité euclidienne :

$$a = bq + r \qquad 0 \leqslant r < b$$

a est le dividende — *q est le quotient*
b est le diviseur — *r est le reste*

Exemple :

567 (dividende)	65 (diviseur)
- 520	8 (quotient)
47 (reste)	

$$567 = 65 \times 8 + 47$$

Diviseur, multiple

a et b deux nombres entiers positifs
Si il existe un nombre entier q tel que a=bq
Alors on dit que :
- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- a est un multiple de b.
Dans ce cas le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.

Exemple :

2016	63
- 189	32
126	
-126	
0	

$$2016 = 63 \times 32$$

2016 est divisible par 63
2016 est un multiple de 63
63 est un diviseur de 2016

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4 6 ou 8.

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 4 si ses chiffres des dizaines et des unités forment un nombre multiple de 4.

Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2016 est divisible par 2, 3, 4 et 9 — *735 est divisible par 3 et 5*

Nombres premiers

Un nombre entier est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

1 ne possède qu'un seul diviseur, il n'est pas premier.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 sont des nombres premiers.
2017 est un nombre premier.

Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier se décompose de manière unique en un produit de nombres premiers

$$2016 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \qquad 2015 = 5 \times 13 \times 31$$

Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si elle n'est pas simplifiable. Dans ce cas 1 est le seul diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{210}{315} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{2}{3} \qquad \frac{765}{621} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 23} = \frac{5 \times 17}{3 \times 23} = \frac{85}{69}$$

Opérations sur les nombres relatifs

Addition de nombres relatifs

Pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on additionne leur distance à zéro et on garde le signe commun.

Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires, on soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande et on prend le signe de celui qui à la plus grande distance à zéro.

(+7)+(+4)=(+11) (+7)+(-4)=(+3)

(-7)+(-4)=(-11) (-7)+(+4)=(-3)

(-5)+(+8)+(-7)+(-3)+(+9)=(-15)+(+17)

Opposé d'un nombre relatif

L'opposé d'un nombre relatif est le nombre de signe contraire qui a la même distance à zéro.

(-3) est l'opposé de (+3) ; (+7) est l'opposé de (-7)

Soustraction de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

$(+7)-(-3)=(+7)+(+3)=(+10)$ $(-7)-(+3)=(-7)+(-3)=(-10)$

$(+7)-(+3)=(+7)+(-3)=(+4)$ $(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=(-4)$

Écriture simplifiée des sommes de relatifs

(-5) + (+7) + (-6) = -5 +7 -6 (+11) - (+6) - (-4) = 11 -6 +4

Une astuce pour simplifier :
- deux signes identiques peuvent se remplacer par un +
- deux signes différents peuvent se remplacer par un -

Multiplication de nombres relatifs

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leur distance à zéro et on applique la règle des signes suivante :
- le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif;
- le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

Multiplier un nombre relatif par -1 revient à prendre son opposé.

Le produit de plusieurs nombres relatifs est :
- positif s'il comporte un nombre pair de facteurs négatifs;
- négatif s'il comporte un nombre impair de facteurs négatifs.

$(+7)\times(+3)=(+21)$
$(-7)\times(-3)=(+21)$
$(-7)\times(+3)=(-21)$
$(+7)\times(-3)=(-21)$

Quotient de nombres relatifs

Pour calculer le quotient d'un nombre relatif par un nombre relatif non nul, on divise leur distance à zéro et on applique la règle des signes suivante :
- le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif;
- le quotient de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

$(+15)\div(+3)=(+5)$ $(-15)\div(-3)=(+5)$

$(+15)\div(-3)=(-5)$ $(-15)\div(+3)=(-5)$

Les fractions

Définition

a et b sont deux nombres relatifs non nuls

La fraction $\frac{a}{b}$ désigne l'unique nombre vérifiant : $b \times \frac{a}{b} = a$

$2 \times \frac{3}{2} = 3$ $\quad -7 \times \frac{8}{-7} = 8$ $\quad 5 \times \frac{4}{5} = 4$

Egalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs non nuls

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

Exemples de simplification de fraction :

$\frac{56}{72} = \frac{8 \times 7}{8 \times 9} = \frac{7}{9}$ $\quad \frac{48}{54} = \frac{6 \times 8}{6 \times 9} = \frac{8}{9}$

Somme algébrique de fractions

a, b et c des nombres entiers relatifs non nuls

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Exemples de somme simple :

$\frac{5}{7} - \frac{11}{7} = -\frac{6}{7}$

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

$\frac{-7}{15} + \frac{11}{15} - \frac{9}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$

$\frac{3}{7} \times \frac{-6}{5} = -\frac{18}{35}$

Exemples de passage au même dénominateur

$\frac{3}{7} - \frac{9}{14} = \frac{2 \times 3}{2 \times 7} - \frac{9}{14} = \frac{6}{14} - \frac{9}{14} = -\frac{3}{14}$

$-\frac{11}{6} + \frac{7}{5} = -\frac{5 \times 11}{6 \times 5} + \frac{7 \times 6}{5 \times 6} = -\frac{55}{30} + \frac{42}{30} = -\frac{13}{30}$

$3 - \frac{2}{5} = \frac{3}{1} - \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$

Produit de fractions

a, b, c et d des nombres entiers relatifs non nuls

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Il faut penser à simplifier avant d'effectuer un produit !

$\frac{48}{49} \times \frac{63}{64} = \frac{6 \times 8 \times 7 \times 9}{7 \times 7 \times 8 \times 8} = \frac{6 \times 9}{7 \times 8} = \frac{2 \times 3 \times 9}{7 \times 2 \times 4} = \frac{27}{28}$

Définition

a un nombre entier relatif non nul

L'inverse du nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Inverse d'une fraction

a et b des nombres entiers non nuls

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

$\frac{1}{4}$ est l'inverse de 4 $\quad -\frac{1}{3}$ est l'inverse de -3 $\quad \frac{5}{3}$ est l'inverse de $\frac{3}{5}$ $\quad 1$ est l'inverse de 1

Quotient de deux fractions

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse

a, b, c et d des nombres entiers non nuls

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$\frac{6}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times 3 = 5$

Égalité des fractions et produits en croix

a, b, c et d des nombres entiers relatifs non nuls

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est équivalent à $a \times d = b \times b$

$34 \times 13 = 442$ et $21 \times 21 = 441$

On en déduit que $\frac{34}{21} \neq \frac{21}{13}$

Définition

Pour $n \geqslant 2$ et a un nombre quelconque

$$a^n = \underbrace{a \times \ \ldots \ \times a}_{n \ fois}$$

On dit a exposant n

Exemples :

$$3^5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5 \ fois} = 243$$

$7^2 = 7 \times 7 = 49$ 7 exposant 2 se dit 7 au carré

$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ 6 exposant 3 se dit 6 au cube

$(-1)^6 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^7 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

Les 12 premiers carrés parfaits

1² = 1	7² = 49
2² = 4	8² = 64
3² = 9	9² = 81
4² = 16	10² = 100
5² = 25	11² = 121
6² = 36	12² = 144

Les puissances de 10

n : nano	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$	un milliardième
μ : micro	$10^{-6} = 0,000\ 001$	un millionième
m : milli	$10^{-3} = 0,001$	un millième
c : centi	$10^{-2} = 0,01$	un centième
d : deci	$10^{-1} = 0,1$	un dixième
	$10^{0} = 1$	
da : deca	$10^{1} = 10$	une dizaine
h : hecto	$10^{2} = 100$	une centaine
k : kilo	$10^{3} = 1\ 000$	un millier
M : Méga	$10^{6} = 1\ 000\ 000$	un million
G : Giga	$10^{9} = 1\ 000\ 000\ 000$	un milliard

Les puissances de 10

Pour n un entier

$$10^n = \underbrace{10 \ \ldots \ 0}_{n \ zéros}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,0 \ \ldots \ 1}_{1 \ en \ n^{ième} \ position}$$

10^{-n} est l'inverse de 10^n

Pour n et p des entiers relatifs

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$$

$$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$$

$$(10^n)^p = 10^{n \times p}$$

L'écriture scientifique

$2\ 017\ 000\ 000 = 2,017 \times 10^9$

$0,000\ 002\ 017 = 2,017 \times 10^{-6}$

$2\ 017 = 2,017 \times 10^3$

$0,020\ 17 = 2,017 \times 10^{-2}$

Tout nombre décimal peut s'écrire :

$$a \times 10^n$$

$-10 < a \leqslant -1$ ou $1 \leqslant a < 10$

Calcul littéral

La distributivité simple

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

Devant une parenthèse ou entre un nombre et
une lettre on n'écrit pas le symbole de multiplication

$$k(a+b) = ka + kb$$

Développer c'est écrire un produit de facteurs en une somme de termes

Factoriser c'est écrire une somme de termes en un produit de facteurs

Exemples :

$5(x+4) = 5x + 20$ On effectue les multiplications de tête !

$2x(3x-7) = 6x^2 - 14x$

$-8(3t-4) = -24t + 32$

$5(2y-7) = 10y - 35$

$x = 1x$
$x \times x = x^2$
$x - x = 0$
$x + x = 2x$

Réduire une expression littérale

On ne peut ajouter et réduire que des termes de même nature

$A = -3x^2 + 4x - 7 + 9 - 3x + 4x^2 - 6x^2 - 3$

$A = (-3+4-6)x^2 + (4-3)x + (-7+9-3)$

On factorise les termes de même nature

$A = -5x^2 + x - 1$

La double distributivité

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

$B = (x+2)(x+3)$
$B = x^2 + 3x + 2x + 6$
$B = x^2 + 5x + 6$

$C = (3x-1)(2x+3)$
$C = 6x^2 + 9x - 2x - 3$
$C = 6x^2 + 7x - 3$

$D = (4x-5)(5x-6)$
$D = 20x^2 - 24x - 25x + 30$
$D = 20x^2 - 49x + 30$

$E = (-5-6x)(-7-3x)$
$E = 35 + 15x + 42x + 18x^2$
$E = 18x^2 + 57x + 35$

Attention à la règle des signes dans la multiplication !

La gestion des parenthèses

$$(2x-6) + (5x+3) - (6x-5) = 2x - 6 + 5x + 3 - 6x + 5$$

Pas de signe : donc +

+ devant la parenthèse

- devant la parenthèse

l'expression ne change pas

l'expression devient son opposé

Exemples :

$F = -(2x-3) - (5x-3) + 2(5x-2) - 3(x-1)$
$F = -2x + 3 - 5x + 3 + 10x - 4 - 3x + 3$
$F = 5$

$G = (x-3)(5x-1) - 3(x-3)$
$G = 5x^2 - x - 15x + 3 - 3x + 9$
$G = 5x^2 - 19x + 12$

$H = (4-x)(5x-1) - (4x+3)(3x-1)$

$H = (20x - 4 - 5x^2 + x) - (12x^2 - 4x + 9x - 3)$

$H = 20x - 4 - 5x^2 + x - 12x^2 + 4x - 9x + 3$

$H = -17x^2 + 16x - 1$

Résoudre une équation du premier degré

$$\underbrace{3x-7}_{Premier\ terme} = \underbrace{5x+2}_{Second\ terme}$$

Résoudre une équation c'est trouver tous les nombres x tels que l'égalité soit vraie. Pour une équation du premier degré il y a une ou aucune solution.

1. On peut ajouter ou soustraire la même expression aux deux termes d'une équation.
2. On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une équation par la même expression non nulle.

$$3x-7=5x+2$$

$$\boxed{1}\quad 3x-7-5x=5x+2-5x$$

$$-2x-7=2$$

$$\boxed{1}\quad -2x-7+7=2+7$$

$$-2x=9$$

$$\boxed{2}\quad x=\frac{9}{-2}$$

$$x=-4,5$$

-4,5 est la solution de cette équation

$$7(3-2x)=4(2x-1)$$

$$21-14x=8x-4$$

$$\boxed{1}\quad 21-14x-8x=8x-4-8x$$

$$21-22x=-4$$

$$\boxed{1}\quad 21-22x-21=-4-21$$

$$-22x=-25$$

$$\boxed{2}\quad x=\frac{-25}{-22}$$

$$x=\frac{25}{22}$$

$\frac{25}{22}$ est la solution de cette équation

Résoudre une inéquation du premier degré

$$\underbrace{3x-7}_{Premier\ terme} < \underbrace{5x+2}_{Second\ terme}$$

Résoudre une inéquation c'est trouver tous les nombres x tels que l'inégalité soit vraie. Pour une inéquation du premier degré il y a aucune ou une infinité de solutions.

1. On peut ajouter ou soustraire la même expression aux deux termes d'une inéquation.
2. On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une inéquation par la même expression strictement positive.
3. On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une inéquation par la même expression strictement négative, le symbole de comparaison est alors modifié en son contraire.

$$3x-7<5x+2$$

$$\boxed{1}\quad 3x-7-5x<5x+2-5x$$

$$-2x-7<2$$

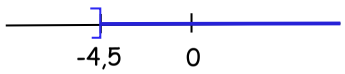
$$\boxed{1}\quad -2x-7+7<2+7$$

$$-2x<9$$

$$\boxed{3}\quad x>\frac{9}{-2}$$

$$x>-4,5$$

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à -4,5



$$7x-11\geqslant 4x+7$$

$$\boxed{1}\quad 7x-11-4x\geqslant 4x+7-4x$$

$$3x-11\geqslant 7$$

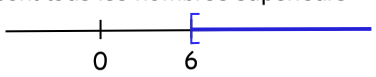
$$\boxed{1}\quad 3x-11+11\geqslant 7+11$$

$$3x\geqslant 18$$

$$\boxed{2}\quad x\geqslant\frac{18}{3}$$

$$x\geqslant 6$$

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 6



Généralités sur les fonctions

Une fonction est un programme de calcul qui a un nombre de départ associe un unique résultat.

On note $f : x \to f(x)$

f est la fonction qui à x associe le nombre $f(x)$

f une fonction
x et y deux nombres tels que $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f

On dit que x est un antécédent de y par la fonction f

Un nombre possède une seule image par une fonction

Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents

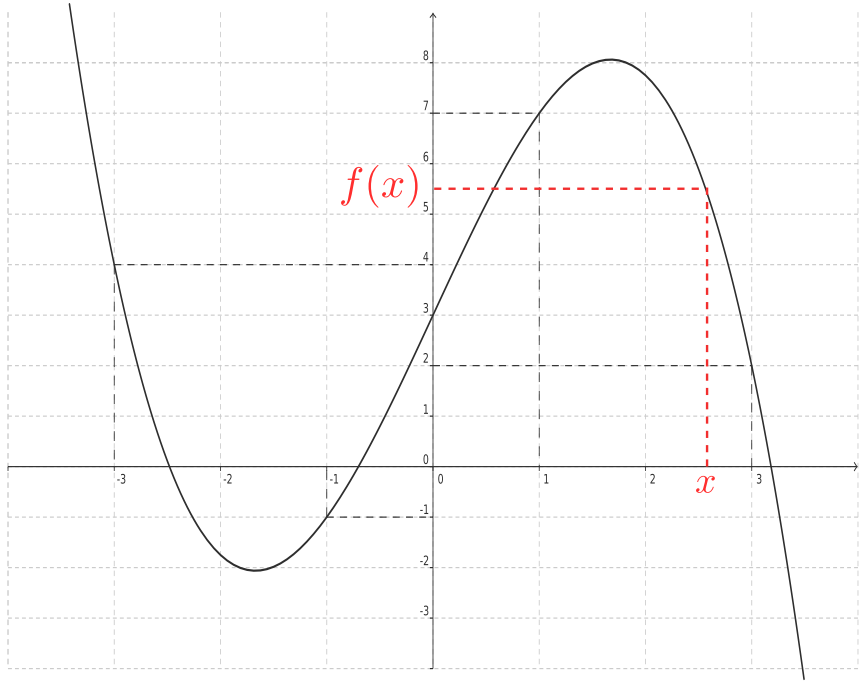
On représente souvent les images d'une fonction dans un tableau de valeurs.

Par exemple pour $k : x \to (x-3)(x+4)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$k(x)$	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	8

Ainsi -6 est l'image de -3 ; -4 et 3 sont deux antécédents de 0

f une fonction. La représentation graphique de cette fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tous les nombres x possibles



Sur la réprésentation graphique de la fonction ci-dessus

3 a image 2 -3 a pour image 4 -1 a pour image -1 1 a pour image 7

0 a trois antécédents -3 a un antécédent

Exemples :

$f : x \to 2x - 3$ f est la fonction qui à un nombre associe son double diminué de 3

$g : x \to x^2 - 4$ g est la fonction qui à un nombre associe son carré diminué de 4

$h : x \to -5$ h est la fonction constante égale à -5

$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ 1 est l'image de 2 par la fonction f

$f(-3) = 2 \times (-3) - 3 = -9$ -3 est un antécédent de -9 par la fonction f

$g(-4) = (-4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ 12 est l'image de -4 par la fonction g

$g(1) = 1^2 - 4 = -3$ 1 est un antécédent de -3 par la fonction g

$h(0) = -5$

$h(-13) = -5$ Tous les nombres ont pour image -5 par h

$h(1) = -5$ -5 possède une infinité d'antécédents

Augmention et diminution en pourcentage

Augmenter une quantité de $n\%$ revient à multiplier cette quantité par $1+\dfrac{n}{100}$

Diminuer une quantité de $n\%$ revient à multiplier cette quantité par $1-\dfrac{n}{100}$

Exemples :

- Une télévision à 489 € est soldée à -25 %.

$$489\times\left(1-\frac{25}{100}\right)=489(1-0,25)=0,75\times 489=366,75$$

Son nouveau prix est donc 366,75 €.

- Il y avait 875 € sur mon compte en banque rémunéré à 2%.

$$875\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=875(1+0,02)=1,02\times 875=892,5$$

Avec les intérêts j'ai maintenant 892,50 €.

- Il y avait 458 298 habitants à Toulouse en 2013 et 466 297 en 2014.

$$458\ 298\times k=466\ 297$$

$$k=\frac{466\ 297}{458\ 298}\approx 1,017$$

$$1,017=1+0,17=1+\frac{1,7}{100}$$

La population de Toulouse a augmenté de 1,7% entre 2013 et 2014.

- Une augmentation de 700% ?

$$1+\frac{700}{100}=\frac{100}{100}+\frac{700}{100}=\frac{800}{100}=8$$

Augmenter de 700% revient à multiplier par 8.

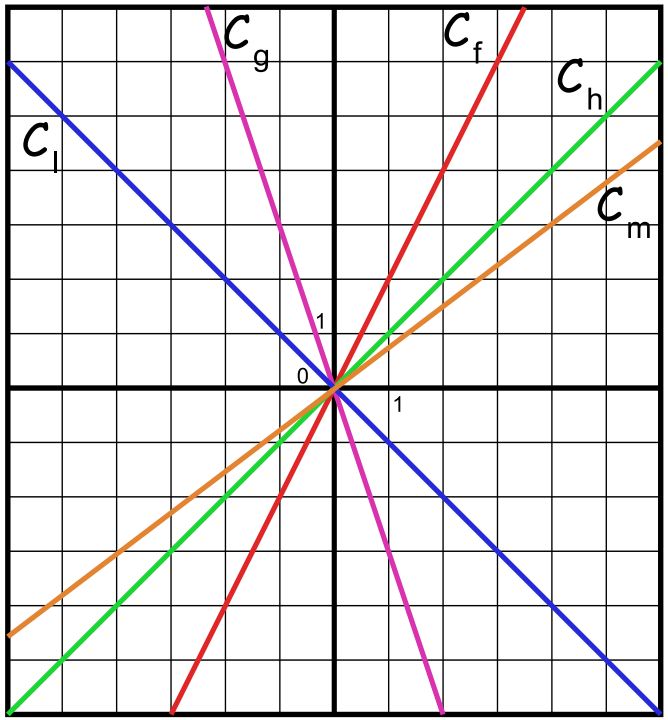
La fonction linéaire

a un nombre quelconque

La fonction linéaire de coefficient a est définie ainsi :

$$f:x\rightarrow f(x)=ax$$

La fonction linéaire multiplie le nombre donné par a



Exemples :

Les fonctions suivantes sont linéaires :

$f(x)=2x$ ($a=2$) $\quad g(x)=-3x$ ($a=-3$) $\quad h(x)=x$ ($a=1$)

$m(x)=\dfrac{3x}{4}$ ($a=\frac{3}{4}$) $\quad l(x)=-x$ ($a=-1$) $\quad n(x)=0$ ($a=0$)

Les fonctions suivantes ne sont pas linéaires :

$v(x)=3x-5 \quad w(x)=\dfrac{3}{x} \quad z(x)=x^2-3x+1$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

x 2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12

x -3

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$m(x)$	-3	-2,25	-1,5	-0,75	0	0,75	1,5	2,25	3

x $\frac{3}{4}$

Dans un tableau de proportionnalité tous les produits en croix sont égaux.

$$-2\times 2,25=-1,5\times 3=-4,5$$

Dans un tableau de proportionnalité on peut effectuer des combinaisons de colonnes.

$$(-4)+2=-2 \text{ et } -3+1,5=-1,5$$

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité de coefficient a .
Réciproquement un tableau de proportionnalité correspond à une fonction linéaire.

L'image du nombre 0 par une fonction linéaire vaut 0.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère. Les points issues d'un tableau de proportionnalité sont alignés avec l'origine.

Fonctions affines

Définition :

a et b des nombres quelconques

La fonction affine de coefficients a et b est définie par :

$$f(x) = ax + b$$

a est le coefficient directeur
b l'ordonnée à l'origine

Exemples :

$f(x) = -2x - 3$

$a = -2$ et $b = -3$

$f(x) = 2x + 3$

$a = 2$ et $b = 3$

$f(x) = -x - \frac{3}{4}$

$a = -1$ et $b = -\frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{x}{2} - 7$

$a = \frac{1}{2}$ et $b = -7$

$f(x) = 5x$

$a = 5$ et $b = 0$

Cette fonction est linéaire

$f(x) = -3$

$a = 0$ et $b = -3$

Cette fonction est constante

Propriétés :

Une fonction linéaire est une fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine
est une droite qui passe par le point de coordonnées
(0;b) où b est l'ordonnée à l'origine

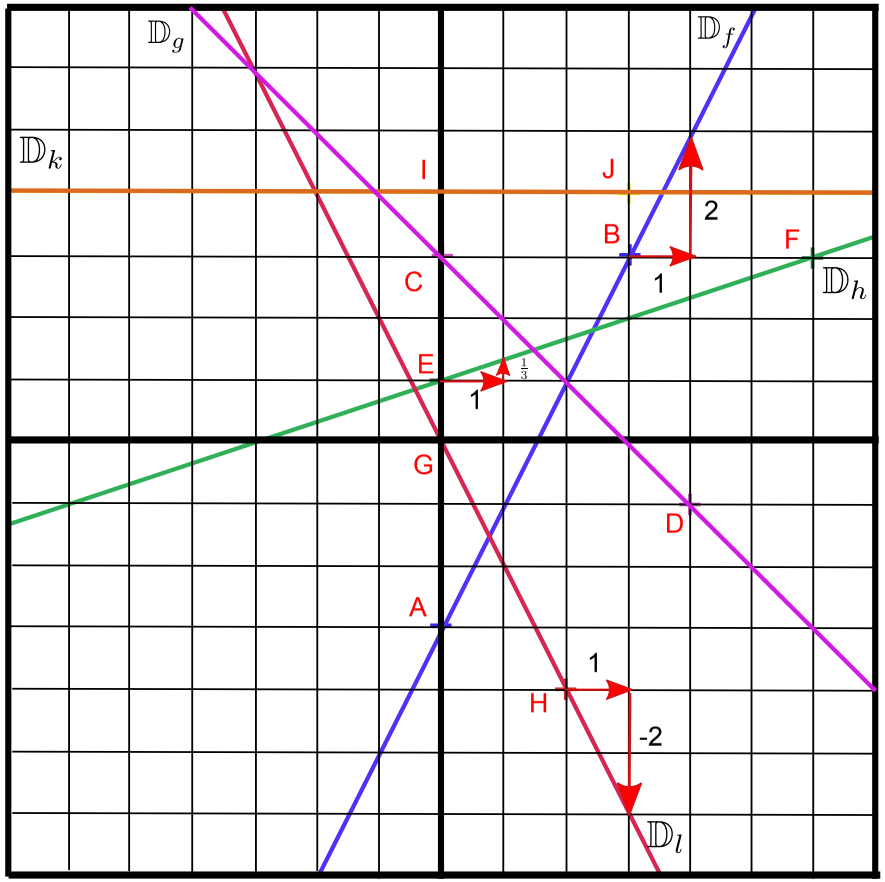
Pour tracer la représentation graphique d'une fonction
affine f il suffit de calculer l'image d'un nombre u non nul.
Cette droite passe par les points de coordonnées (0;b) et (u,f(u)).

Le coefficient directeur peut être lu graphiquement. Il suffit de choisir un point sur la droite puis d'avancer d'une unité positive horizontalement (donc vers la droite). On observe alors le point correspondant à cette abscisse sur la droite. Le décalage vertical correspond au coefficient directeur (positif vers le haut, négatif vers le bas). Ainsi une droite "qui monte" à un coefficient directeur positif et négatif si elle "descend".

Représentons graphiquement : $f(x) = 2x - 3$ $\quad g(x) = -x + 3$

$h(x) = \frac{x}{3} + 1$ $\quad l(x) = -2x$ $\quad k(x) = 4$

f(0)=-3 et f(3)=3 donc on trace la droite passant par A(0;-3) et B(3;3)
g(0)=3 et g(4)=-1 donc on trace la droite passant par C(0;3) et D(4;-1)
h(0)=1 et h(6)=3 donc on trace la droite passant par E(0;1) et F(6;3)
l(0)=0 et l(2)=-4 donc on trace la droite passant par G(0;0) et H(2;-4)
k(0)=4 et k(3)=4 donc on trace la droite passant par I(0;4) et J(3;4)



(AB) et (CD) se coupent en (2;1)
On remarque que f(2)=1 et g(1)=2
On peut trouver ces coordonnées en résolvant l'équation f(x)=g(x)

On peut lire l'ordonnée à l'origine sur l'axe des ordonnées
On lit le coefficient directeur en observant le décalage vertical correspondant à un décalage horizontal d'une unité.

Probabilités

Vocabulaire

Expérience aléatoire

Il s'agit d'une expérience dont le résultat est soumis au hasard. Par exemple le lancer d'une pièce de monaie, d'un dè, de deux dès...

Issue

Une issue est un résultat simple d'une expérience aléatoire. Par exemple lorsque qu'on lance une pièce de monaie il y a deux issues possibles : Pile ou Face.

Événement

C'est un résultat complexe d'une expérience aléatoire, donc un ensemble d'issues. Par exemple quand on tire une carte dans un jeu de 32 cartes, on peut étudier l'évenement tomber sur un coeur, cet événement contient 8 issues : l'as, le roi, la dame, le valet, le dix, le neuf, le huit et le sept de coeur.

Probabilité

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence théorique d'apparition d'un résultat lors d'une expérience aléatoire. Une probabilité s'exprime sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage.

Événement certain

C'est un événement dont la probabilité est égale à 1. Il s'agit d'un résultat qui se produit à chaque épreuve d'une expérience aléatoire. Par exemple l'événement "obtenir un nombre inférieur à 10" est certain dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé cubique.

Événement impossible

C'est un événement dont la probabilité est égale à 0. Il s'agit d'un résultat qui ne se produit jamais lors d'une expérience aléatoire. Par exemple l'événement "obtenir 1" est un événement impossible dans l'expérience aléatoire qui consiste à faire la somme de deux dès cubiques.

Événements contraires

Deux événements sont contraires si la somme de leurs probabilités est égale à 1. Par exemple dans l'expérience aléatoire qui consiste à chosir une carte dans un jeu de 32 cartes, les événements "obtenir un carte rouge" et "obtenir une carte noire" sont deux événements contraires.

Événements incompatibles

Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément. Par exemple dans l'expérience aléatoire qui consiste à chosir une carte dans un jeu de 32 cartes, les événements "obtenir un coeur" et "obtenir un tréfle" sont deux événements incompatibles.

Approche fréquentiste

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un résultat approche de la probabilité de cet événement. Par exemple en lançant 100 fois une pièce de monaie équilibrée, on peut obtenir 34 Piles et 66 Faces. Si on recommence cette expérience 1 000 000 de fois, la fréquence observée sera proche de 50% pour Pile et Face.

Pour certaines expériences aléatoires comme le lancer de punaises ou dans le domaine de l'assurance, seule une approche fréquentiste est possible.

L'équiprobabilité

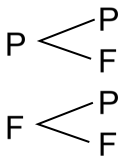
Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire se realisent avec la même fréquence, on dit que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. C'est le cas lors du lancer d'une pièce de monaie équilibrée, du tirage d'une carte, du lancer de dé non truqué...
Dans cette situation la probabilité d'un événement est égale au quotient suivant :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Par exemple quand on lance un dé cubique il y a 6 issues possibles. La probabilité d'obtenir un nombre premier est : $\frac{3}{6}$

Expérience à deux épreuves

Lorsqu'une expérience aléatoire fait appel à deux dispositifs, comme le lancer de deux dés, de deux pièces... On fait la liste des issues possibles soit sous la forme d'une arbre ou d'un tableau. Par exemple si on lance deux pièces on obtient l'arbre suivant :

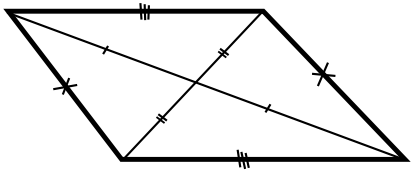


Il y a donc 4 issues possibles équiprobables : (P,P) - (P,F) - (F,P) et (F,F)

Et une chance sur quatre d'obtenir deux fois Face.

Les quadrilatères

Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés deux à deux parallèles



Parallélogramme

Si un quadrilatère a ses côtés opposés égaux deux à deux alors c'est un parallélogramme

Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur alors c'est un parallèlogramme

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallèlogramme

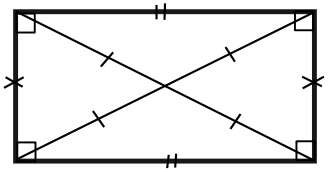
Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle

Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux alors c'est un losange

Si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

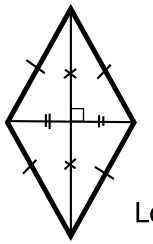
Un rectangle est un quadriladrilatère ayant quatre angles droits



Rectangle

Un rectangle est un parallélogramme.

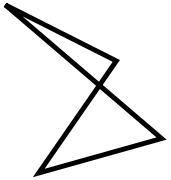
Un losange est un quadriladrilatère ayant quatre côtés égaux



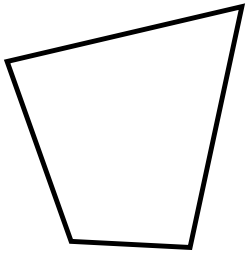
Losange

Un losange est un parallélogramme.

Un quadrilatère est un polygône ayant quatre côtés

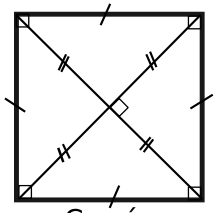


Quadrilatère croisé



Quadrilatère quelconque

Un carré est un quadriladrilatère ayant quatre angles droits et quatre côtés égaux

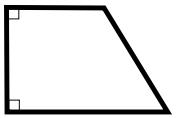


Carré

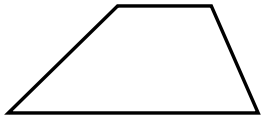
Un carré est un rectangle et un losange

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré :
- démontrer que c'est un parallélogramme ;
- démontrer que c'est un rectangle ;
- démontrer que c'est un losange.

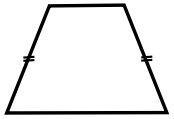
Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles



Trapèze rectangle



Trapèze quelconque



Trapèze isocèle

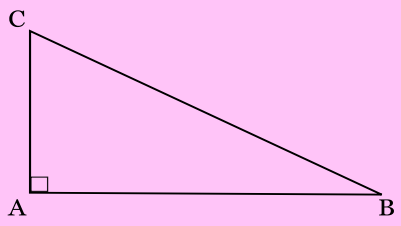
Les réciproques des propriétés précédentes sont vraies.
Par exemples

Si un quadrilatère est un parallélogramme
alors ses diagonales se coupent en leur milieu

ou encore

Si un quadrilatère est un rectangle
alors ses diagonales ont la même longueur

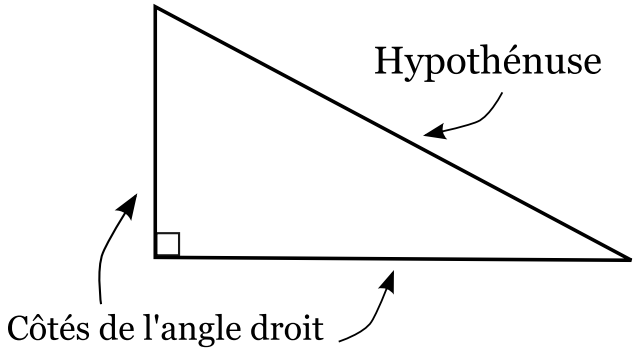
Le théorème de Pythagore



Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

c'est à dire

Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse.



Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long.

Le théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore

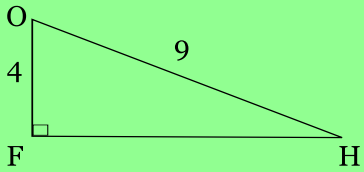
Si dans un triangle ABC on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A

c'est à dire

Si dans un triangle la somme des carrés des deux plus petits côtés est égale au carré du plus grand côté alors ce triangle est rectangle.

Exemples d'usage du théorème de Pythagore

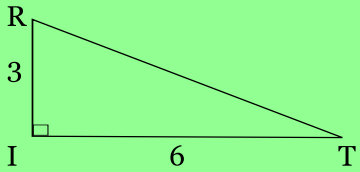
FOH un triangle rectangle en F



Calculons FH
FOH est un triangle rectangle en F
D'après

on a :
$$FO^2 + FH^2 = OH^2$$
$$4^2 + FH^2 = 9^2$$
$$16 + FH^2 = 81$$
$$FH^2 = 81 - 16$$
$$FH^2 = 65$$
$$FH = \sqrt{65}$$
$$FH \approx 8,1$$

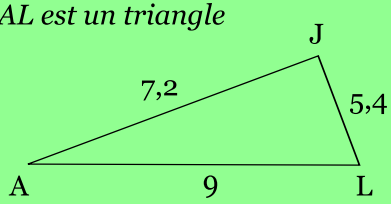
TRI un triangle rectangle en I



Calculons TR
TRI est un triangle rectangle en I
D'après le théorème de Pythagore
on a :
$$IR^2 + IT^2 = TR^2$$
$$3^2 + 6^2 = TR^2$$
$$TR^2 = 9 + 36$$
$$TR^2 = 45$$
$$TR = \sqrt{45}$$
$$TR \approx 6,7$$

Exemples d'usage de la réciproque du théorème de Pythagore

JAL est un triangle



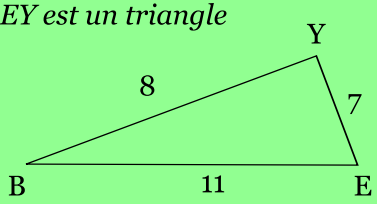
Démontrons que JAL est rectangle
Calculons $JA^2 + JL^2$ et AL^2

$$JA^2 + JL^2 = 7,2^2 + 5,4^2$$
$$JA^2 + JL^2 = 71,84 + 29,16$$
$$JA^2 + JL^2 = 81$$
Donc $JA^2 + JL^2 = AL^2$

$$AL^2 = 9^2$$
$$AL^2 = 81$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle JAL est rectangle en J

BEY est un triangle



BEY est-il rectangle ?
Calculons

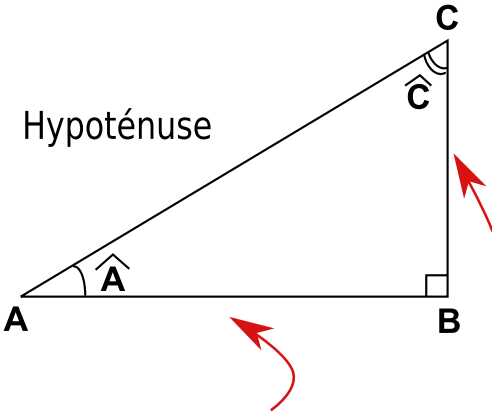
$$YB^2 + YE^2 = 8^2 + 7^2$$
$$YB^2 + YE^2 = 64 + 49$$
$$YB^2 + YE^2 = 113$$

$$BE^2 = 11^2$$
$$BE^2 = 121$$

Donc $YB^2 + YB^2 \neq BE^2$

D'après le théorème de Pythagore (contraposé), le triangle BEY n'est pas rectangle.

Trigonométrie



Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires
Cela signifie que la somme de leurs mesures vaut 90°

Côté adjacent à l'angle de $\widehat{C}$

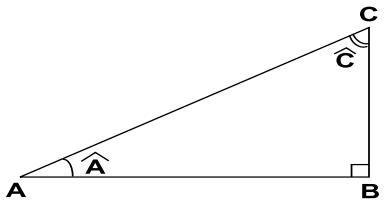
Côté opposé à l'angle de $\widehat{A}$

L'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle
Le côté adjacent d'un angle est un côté de l'angle droit qui touche cet angle
Le côté opposé d'un angle est un côté de l'angle droit qui se situe en face de l'angle

Côté adjacent à l'angle de $\widehat{A}$

Côté opposé à l'angle de $\widehat{C}$

Dans un triangle ABC rectangle en B



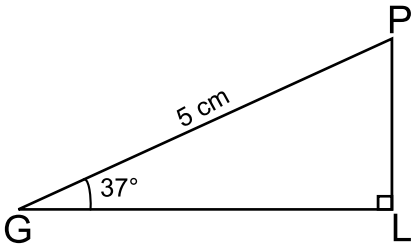
SOH CAH TOA

$$cos\widehat{A} = \frac{côté\ adjacent}{hypoténuse} = \frac{AB}{AC}$$

$$sin\widehat{A} = \frac{côté\ opposé}{hypoténuse} = \frac{BC}{AC}$$

$$tan\widehat{A} = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent} = \frac{BC}{AB}$$

Calculer une longueur



Calcul de GL

Dans GPL rectangle en L
On connait [GP] l'hypoténuse
On cherche [GL] le côté adjacent de 37°

$$cos\ 37^o = \frac{GL}{5\ cm}$$

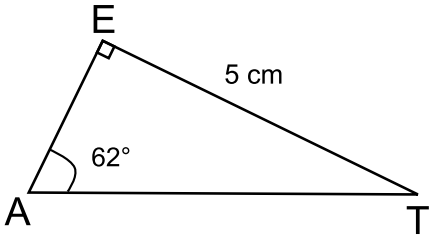
$$GL = 5\ cm\ \times cos\ 37^o \approx 4\ cm$$

Calcul de PL

Dans GPL rectangle en L
On connait [GP] l'hypoténuse
On cherche [PL] le côté opposé de 37°

$$sin\ 37^o = \frac{PL}{5\ cm}$$

$$PL = 5\ cm\ \times sin\ 37^o \approx 3\ cm$$



Calcul de AT

Dans EAT rectangle en E
On connait [ET] le côté opposé de 62°
On cherche [AT] l'hypoténuse

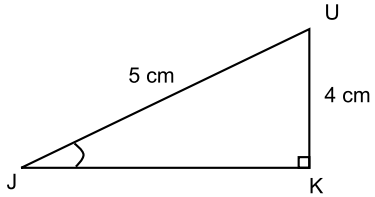
$$sin\ 62^o = \frac{5\ cm}{AT} \quad \text{et} \quad AT = \frac{5\ cm}{sin\ 62^o} \approx 5,7\ cm$$

Calcul de EA

Dans EAT rectangle en E
On connait [ET] le côté opposé de 62°
On cherche [AT] le côté adjacent de 62°

$$tan\ 62^o = \frac{5\ cm}{EA} \quad \text{et} \quad EA = \frac{5\ cm}{tan\ 62^o} \approx 2,7\ cm$$

Calculer la mesure d'un angle



Dans le triangle UJK rectangle en K
On connaît [UK] le côté opposé à l'angle $\widehat{J}$
On connaît [UJ] l'hypoténuse
On peut donc calculer le sinus de l'angle

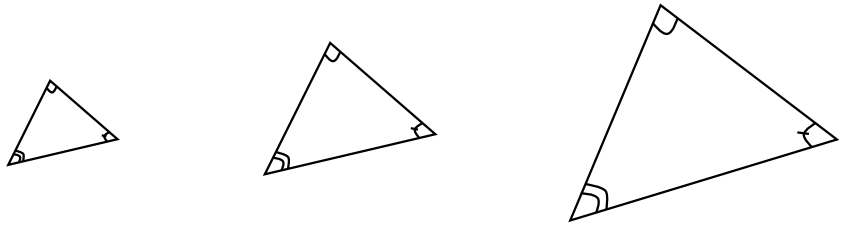
$$sin(\widehat{J}) = \frac{4}{5}$$

À la calculatrice on trouve $\widehat{J} \approx 53^o$

Agrandissement et réduction

Si on multiplie les mesures d'une figure par un nombre positif
Alors on obtient un agrandissement ou une réduction de la figure de départ.

Plus précisemment :
- quand le coefficient multiplicatif est supérieur à 1, il s'agit d'un agrandissement ;
- quand le coefficient multiplicatif est inférieur à 1, il s'agit d'une réduction.



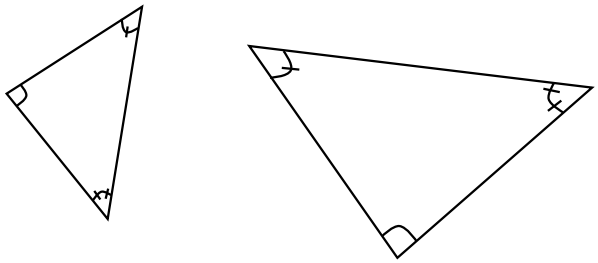
Si une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure
Alors :
- les mesures de ces deux figures sont proportionnelles ;
- les angles de ces deux figures sont égaux.

Si les longueurs d'une figure sont multipliées par un nombre positif k
Alors :
- les aires sont multipliées par k^2
- les volumes sont multipliés par k^3

Triangles semblables

Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles égaux.

Si deux triangles sont semblables

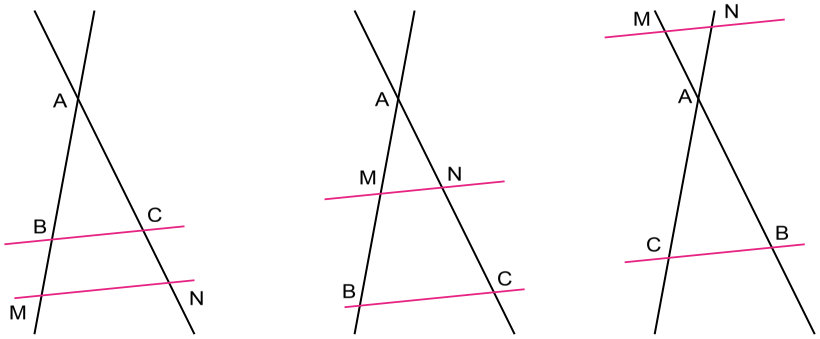


Alors :

- leurs trois angles sont égaux ;
- leurs côtés sont proportionnels ;
- le coefficient de proportionnalité est un coefficient d'agrandissement-réduction ;
- un des triangles est un agrandissement, ou une réduction, de l'autre.

Théorème de Thalès

Dans chacun des cas suivants les triangles ABC et AMN sont semblables.



Plus précisemment :

Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et (MN) // (BC)

Alors $$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

Réciproque du théorème de Thalès

Si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

et si les points A, B et M sont alignés et dans le même ordre que les points alignés A, C et N

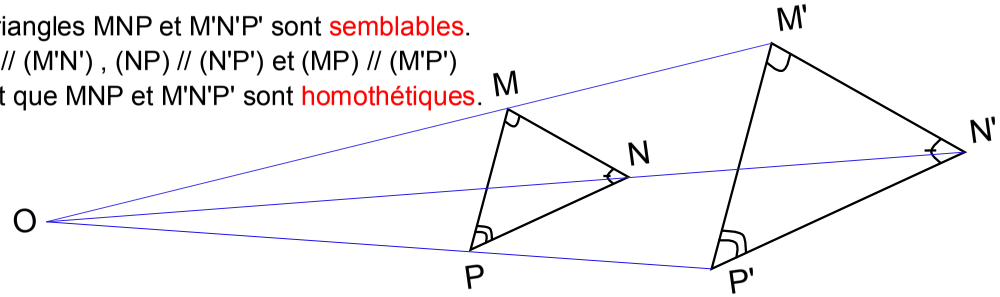
Alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Homothétie

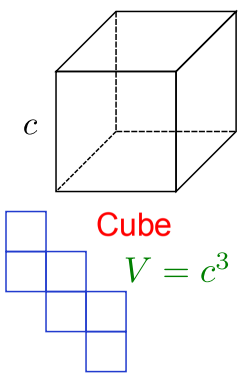
k un nombre positif
L'homothétie de entre O et de rapport k est la transformation géométrique qui transforme un point M en un point M' vérifiant :

$$M' \in [OM) \text{ et } OM' = k \times OM$$

Les triangles MNP et M'N'P' sont semblables.
(MN) // (M'N') , (NP) // (N'P') et (MP) // (M'P')
On dit que MNP et M'N'P' sont homothétiques.

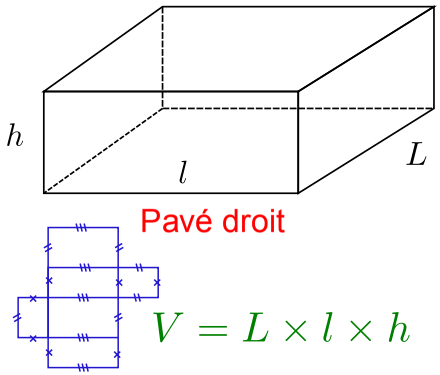


Prismes droits et cylindre



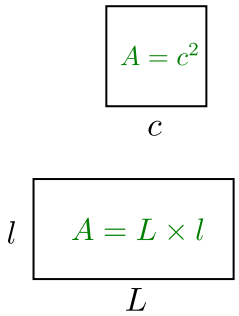
Cube

$V = c^3$



Pavé droit

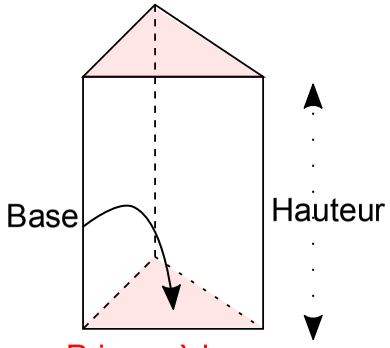
$V = L \times l \times h$



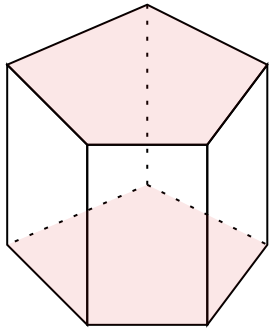
Un prisme droit est un solide ayant deux faces polygonales parallèles identiques reliées par des faces rectangulaires

Le cube est un prisme droit à bases carrées.

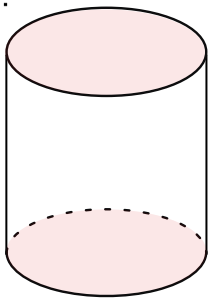
Le pavé droit est un prisme droit à bases rectangulaires.



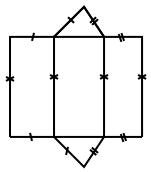
Prisme à base triangulaire



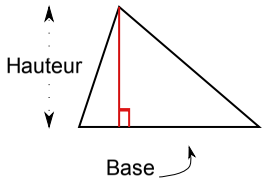
Prisme droit à base pentagonale



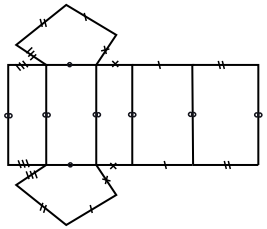
Cylindre

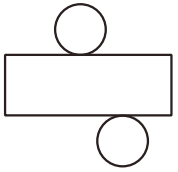


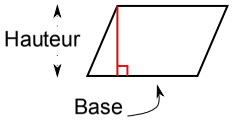
$$V = aire\ de\ la\ base\ \times\ hauteur$$



$A = \frac{Base \times Hauteur}{2}$

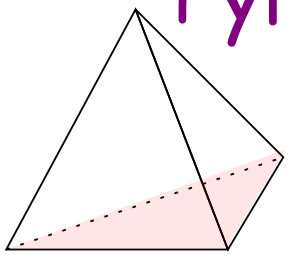




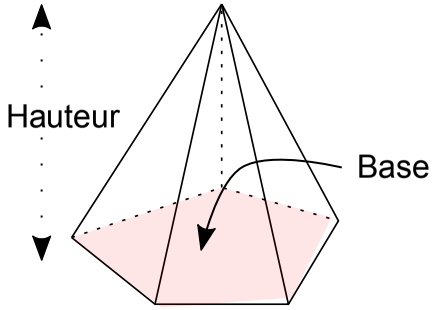


$A = Base \times Hauteur$

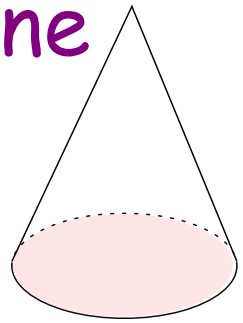
Pyramides et cône



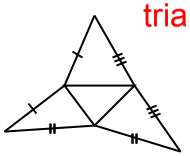
Pyramide à base triangulaire

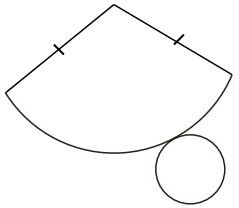


Pyramide à base pentagonale



Cône

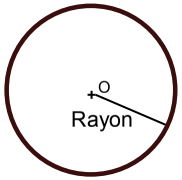




$$V = \frac{aire\ de\ la\ base\ \times\ hauteur}{3}$$

Une pyramide est un solide ayant une base polygonale reliée à un sommet principal par des faces triangulaires.

Un polyèdre est régulier si toutes ses faces sont des polygônes identiques. Le tétraèdre est une pyramide régulière ayant quatre faces triangulaires équilatérales. Le cube est régulier ses faces sont des carrés.



$$P = 2\pi R \qquad S = \pi R^2 \qquad \pi \approx 3,14$$

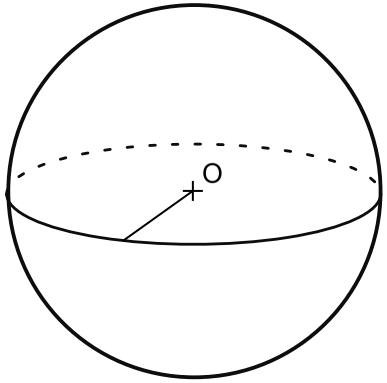
Sphère et boule

La sphère est une surface constituée de tous les points situées à la même distance du centre.
Cette distance commune est le rayon de la sphère.

$$S = 4\pi R^2$$

La boule est un solide constitué de tous les points situés à une distance du centre inférieure ou égale au rayon.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



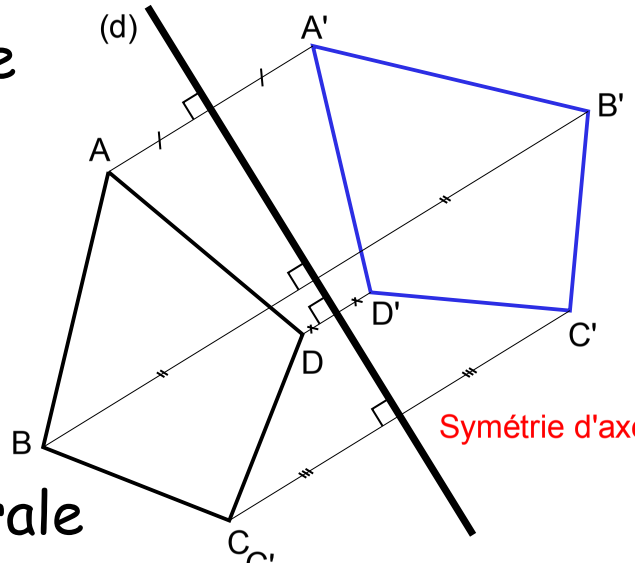
Les tranformations

La symétrie axiale

(d) est la médiatrice de [AA']

(d) coupe [AA'] en son milieu
et (d) perpendiculaire à (AA')

La figure est pliée le long de
de l'axe (d).

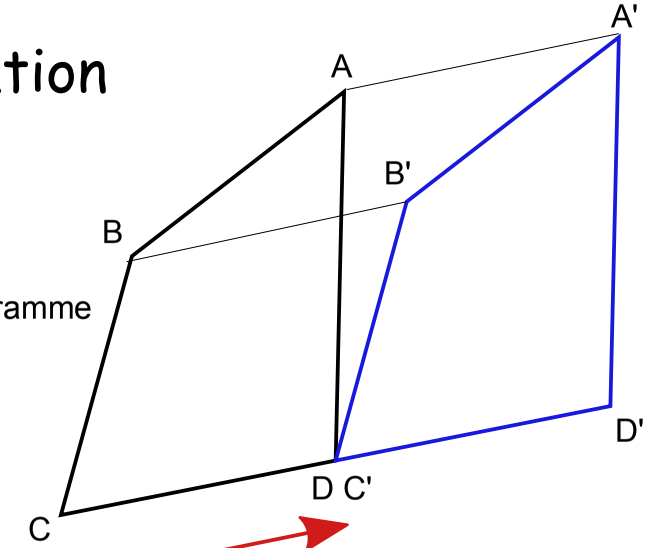


Symétrie d'axe (d)

La translation

(BB') // (CD) et BB'=CD

CDB'B est un parallélogramme

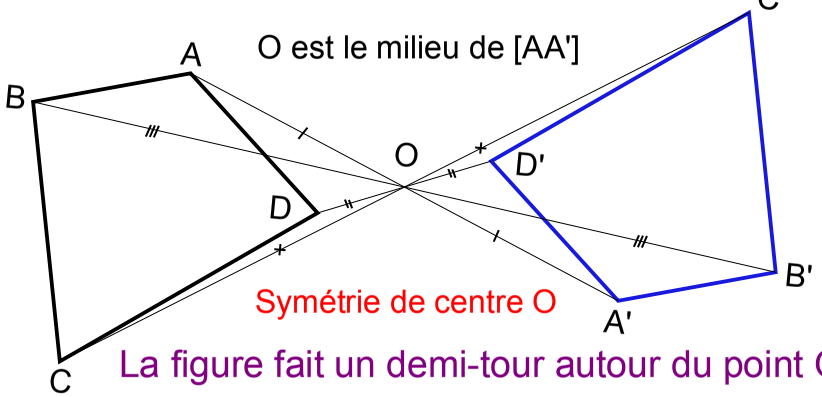


Translation qui transforme C en D

La figure est "poussée" de C vers D

La symétrie centrale

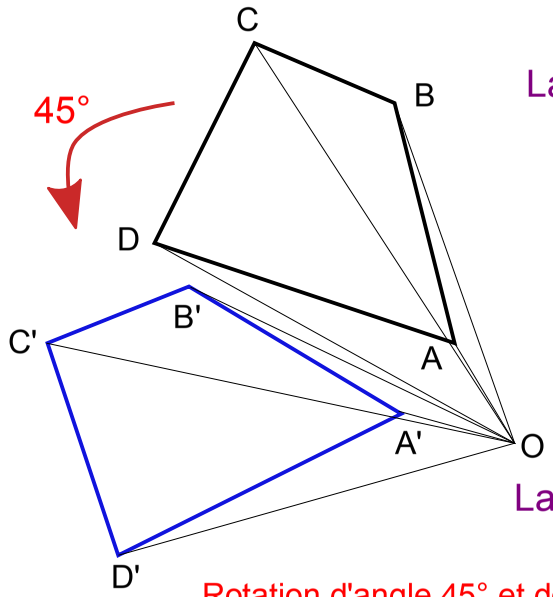
O est le milieu de [AA']



Symétrie de centre O

La figure fait un demi-tour autour du point O.

La rotation



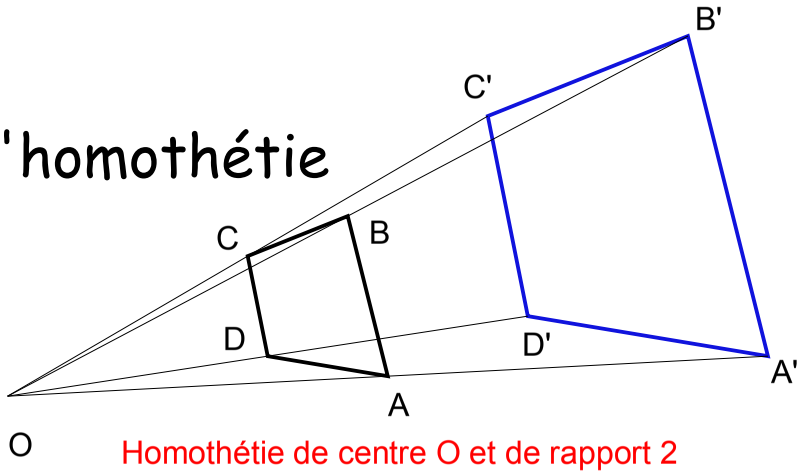
OA=OA'

$\widehat{AOA'}$=45°

La figure tourne de 45° autour du point O

Rotation d'angle 45° et de centre O

L'homothétie



Homothétie de centre O et de rapport 2

A' est sur la demi-droite [OA) et OA'=2OA

La figure est agrandie ou réduite depuis le point O

La **symétrie axiale**, la **symétrie centrale**, la **translation** et la **rotation** ne modifient pas les mesures et les angles de la figure transformée.

L'**homothétie** agrandit ou réduit les longueurs de la figure sans changer les angles.

Mathématiques au brevet

Arithmétique

Diviseurs, multiples, diviseurs communs
Nombres premiers
Décomposition en facteurs premiers

Calcul numérique

Nombres entiers, nombres décimaux
Nombres relatifs
Fractions, puissances, écriture scientifique

Calcul littéral

Distributivité simple et double
Développer, factoriser, réduire
Équation du premier degré
Équation produit
Inéquation du premier degré

Algorithmique et informatique

Scratch, variable, boucle
Tableur
Géogébra

Géométrie classique

Parallèles et perpendiculaires
Angles
Triangles, quadrilatères, polygônes réguliers
Périmètre du carré, du rectangle, du cercle
Aire du carré, du rectangle, du triangle, du disque

Transformations

La symétrie axiale, la symétrie centrale
La translation, la rotation
L'homothétie

Statistiques

Effectif, fréquence
Étendue, médiane, moyenne
Diagramme circulaire, en barre

Probabilités

Expérience aléatoire à une épreuve
Fréquences et probabilités
Équiprobabilité
Expérience aléatoire à deux épreuves
Arbre et tableau

Théorème de Pythagore

Vocabulaire du triangle rectangle
Théorème de Pythagore
Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Théorème de Thalès
Réciproque du théorème de Thalès
Triangles semblables

Trigonométrie

Côté adjacent, côté opposé, hypoténuse
Cosinus, sinus et tangente d'un angle
Calcul d'un angle à la calculatrice

Géométrie de l'espace

Cube, pavé droit, prismes droits et cylindre
Pyramides et cône
Sphère et boule
Volume du cube, du pavé droit des prismes droits
Volume du cylindre, des pyramides, du cône
Volume de la boule, surface de la sphère
Coordonnées dans l'espace et de la sphère
Longitude, lattitude, altitude

Grandeurs composées

Vitesse
Débit, consommation électrique

Fonctions

Image, antécédent
Tableau de valeurs
Représentation graphique et coordonnées
Programme de calcul

Fonctions linéaires

Proportionnalité
Définition des fonctions linéaires
Tableau et représentation graphique
Augmentation et diminution en pourcentage

Fonctions affines

Définition des fonctions affines
Représentation graphique
Coefficient directeur et ordonnée à l'origine