Version du 16 mars 2020

Traces écrites pour les élèves

Troisième

Consulter le document complet pour obtenir les démonstrations, les exercices et les éléments culturels...

Fabrice ARNAUD

pi.ac3j.fr

pi.3.14159@orange.fr

Table des matières

Chapitre I

Arithmétique

I — Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 La division euclidienne

Définition 1.1 : La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geqslant b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :
- $a = b \times q + r$
- $0 \leqslant r < b$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la **division euclidienne** du **dividende** a par le **diviseur** b.

Remarque :

Le diviseur ne peut pas être égal à 0 ![1]

Vocabulaire :

L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle **l'égalité euclidienne** .

Exemples :

$2\,019 = 31 \times 65 + 4$
2 019 est le dividende, 31 le diviseur,
65 le quotient et 4 le reste. On constate que $4 < 65$.
Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième !

$$\begin{array}{r|l} 2\,019 & 31 \\ \cline{2-2} 159 & 65 \\ 4 & \end{array}$$

$2\,019 = 3 \times 673$

2 Diviseurs et multiples

Définition 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que
- a est un **multiple** de b,
- b est un **diviseur** de a,
- a est **divisible** par b

Exemple :

3 est un diviseur de 2 019.
673 est un diviseur de 2 019.
2 019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.
2 019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

Propriété 1.1 : Quelques critères de divisibilité (Démontrée à l'oral et en exercice)

Un nombre entier est divisible par :
- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Remarque :

On peut mélanger ces critères :
- un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2 ;
- un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

II — Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

1 Les nombres premiers

Définition 1.3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède **exactement** deux diviseurs.

Propriété 1.2 :

Si nombre entier est premier alors il est seulement divisible par 1 et lui-même.

1 n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même ! **Exemples :**

Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 : [2]
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

2 Décomposition en facteurs premiers

Théorème 1.1 : Théorème fondamental de l'arithmétique (Admis)

Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Ce produit est unique à l'ordre des facteurs près.[3]

Exemples :

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Méthode 1.1 : Comment décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
Pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, on divise ce nombre par les nombres premiers dans l'ordre croissant et on recommence avec le quotient jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.
On divise donc par 2, 3, 5, 7, 11, 13...
Les critères de divisibilité sont très utiles dans cette situation.

Décomposons le nombre 3 780

$3\,780 = 2 \times 1\,890$

$1\,890 = 2 \times 945$

$945 = 3 \times 315$

$315 = 3 \times 105$

$105 = 3 \times 35$

$35 = 5 \times 7$

Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

On peut aussi présenter les calculs ainsi :

$$\begin{array}{r|c} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

III — Applications

1 Fractions irréductibles

Définition 1.4 : Fraction irréductible

a et b deux nombres entiers et $b \neq 0$

La fraction $\frac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** si 1 est le seul diviseur commun de a et b.

Une fraction irréductible est donc une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

Exemple :

$\frac{75}{64}$ est irréductible car 75 est divisible par 1, 3, 5, 15 ,25 et 75 et 64 est divisible par 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

$\frac{76}{64}$ n'est pas irréductible car 76 et 64 sont divisibles par 2.

D'ailleurs $\frac{76}{64} = \frac{2 \times 38}{2 \times 32} = \frac{38}{32} = \frac{2 \times 19}{2 \times 16} = \frac{19}{16}$

La fraction $\frac{19}{16}$ est irréductible.

Méthode 1 . 2 : Simplifier une fraction en une fraction irréductible
Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez grands, il peut être utile de décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{990}{1\,260} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$$

2 Recherche des diviseurs d'un nombre

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier permet d'obtenir la liste de ses diviseurs :

Méthode 1 . 3 : Déterminer les diviseurs d'un nombre entier
Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre entier on utilise sa décomposition en produit de facteurs premiers. Il faut ensuite effectuer toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On obtient les diviseurs de 630 en effectuant les combinaisons de produits de ses facteurs premiers. Voici ses diviseurs :

Aucun facteur premier : 1

Un facteur premier : 2, 3, 5, 7 ;

Deux facteurs premiers : $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$

Trois facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$

Quatre facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

Cinq facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

On vient de trouver 21 diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 90, 105, 126, 315, 630

Méthode 1 . 4 : Déterminer les diviseurs communs à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et faire ensuite toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Les facteurs premiers communs sont : 2, 3, 3 et 5

Les combinaisons possibles sont : 2, 3, 5, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Il y a donc 11 diviseurs communs : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 90.

90 est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

I — Définition, notation et vocabulaire : image et antécédent

Définition 2.1 : Fonction

Une **fonction** est un programme de calcul permettant de définir un résultat unique à partir d'un nombre de départ.

On note souvent une fonction de la manière suivante :

$$f : x \longrightarrow f(x)$$

Cela signifie que la fonction f fait correspondre au nombre de départ x le résultat unique $f(x)$.

Remarque :

On utilise souvent les lettres proches de f dans l'alphabet pour désigner une fonction : f, g, h...

Exemples :

$f : x \longrightarrow f(x) = x^2 + x + 41$

$g : x \longrightarrow g(x) = 5x - 9$

$h : x \longrightarrow h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

$k : x \longrightarrow k(x) = 2\,019$

$l : x \longrightarrow l(x) = x$

❧ DÉFINITION 2.2 : Vocabulaire

Étant donnée une fonction $f : x \longrightarrow f(x)$

Soit a un nombre quelconque alors on dit que le nombre :
- $f(a)$ est l' **image** du nombre a par la fonction f ;
- a a pour **image** $f(a)$ par la fonction f ;
- a est un **antécédent** du nombre $f(a)$ par la fonction f ;
- $f(a)$ a pour **antécédent** a par la fonction f.

EXEMPLES :

En reprenant les fonctions de l'exemple précédent :

$f(10) = 10^2 + 10 + 41$ donc $f(10) = 151$
151 est l'image de 10 et 10 est un antécédent de 151 par la fonction f.

$g(-3) = 5 \times (-3) - 9$ donc $g(-3) = -15 - 9 = -24$
-24 est l'image de -3, -3 a pour image -24, -3 est un antécédent de -24 par g.

$h(1) = \dfrac{1}{1^2 + 2}$ donc $h(1) = \dfrac{1}{3}$
$\dfrac{1}{3}$ est l'image de 1 et 1 est un antécédent de $\dfrac{1}{3}$ par h.

$k(0) = 2\,019$, $k(5) = 2\,019$, $k(-10) = 2\,019$ ...
2 019 est l'image de 0, 5, 10. 0, 5 et 10 sont des antécédents de 2 019.
k est une **fonction constante** . 2019 est le seul nombre ayant des antécédents.

$l(1) = 1$, $l(-3) = -3$: on dit que l est la **fonction identique ou identité** .
1 a pour image 1, 1 est un antécédente de 1

REMARQUE IMPORTANTE :
Une fonction étant définie, on peut calculer les images de tous les nombres pour lesquels les calculs sont possibles. [1]
Une fonction étant définie, un nombre peut posséder un ou plusieurs antécédents. Il peut aussi n'en posséder aucun !

MÉTHODE 2.1 : Recherche des antécédents d'un nombre par une fonction
Pour déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction, il est souvent nécessaire de résoudre une équation.

Par exemple, posons $f : x \longrightarrow f(x) = 3x + 5$ et cherchons le ou les antécédents de -4.
On cherche donc tous les nombres x solutions de l'équation :

$$f(x) = -4$$
$$3x + 5 = -4$$
$$3x + 5 - 5 = -4 - 5$$
$$3x = -9$$
$$x = \frac{-9}{3}$$
$$x = -3$$

Ainsi comme $f(-3) = -4$, -3 est l'unique antécédent de -4 par f.

II — Tableau des images et représentation graphique

❧ Définition 2.3 : Tableau des images pour une fonction

f une fonction définie. On peut construire un **tableau des images** contenant une sélection de nombres et leurs images par la fonction f.

x	a	b	c
$f(x)$	$f(x)$	$f(b)$	$f(c)$

Remarque :

Certaines fonctions dont on ne connaît pas l'expression algébrique (le programme de calcul) ne sont connue que par un tableau des images. On a dans ce cas qu'une connaissance partielle de la fonction.

Exemples :
Voici trois fonctions :
$f : x \longrightarrow f(x) = 2x - 4$ — $g : x \longrightarrow g(x) = 6 - x$ — $h : x \longrightarrow h(x) = x^2 + 2x - 3$

On peut utiliser la calculatrice pour tabuler ces fonctions. Il suffit d'utiliser le mode Table .
Voici ce que l'on obtient :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21	32

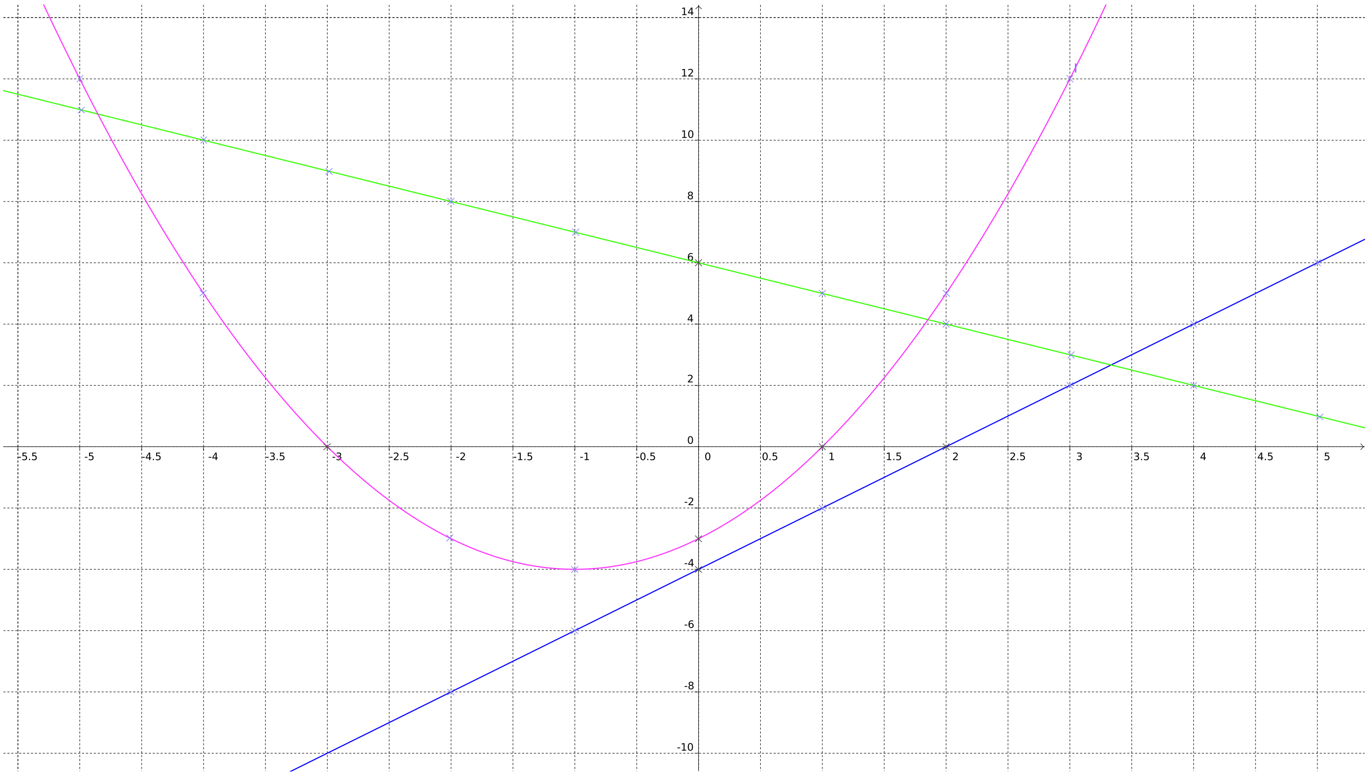
❧ Définition 2.4 : Représentation graphique d'une fonction

f une fonction définie. La **représentation graphique** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points dont les coordonnées sont $(x; f(x))$ où x est un nombre quelconque.

Remarque :

Il faut veiller au vocabulaire et ne pas confondre la fonction f, le nombre $f(x)$ image de x par f et la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ qui est un objet géométrique.

Exemples :
Voici les représentations graphiques des fonctions tabulées ci-dessus :


14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5.5
-5
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

III — Annexes

1 Question du jour

Question du jour n° 1 : Vitesse

Je suis parti de chez moi ce matin à $06h55$ et je suis arrivé au collège à $07h17$. Ce soir je suis parti à $17h12$ et je suis arrivé à $17h54$. J'habite à 28 km du collège.
Quelle a été ma vitesse moyenne ce matin ? Quelle a été ma vitesse moyenne le soir ? Quelle a été ma vitesse moyenne sur l'aller-retour ? (On exprimera les vitesses arrondies au km/h près).

Question du jour n° 2 : Vitesse – Épisode 2

La Terre a un rayon d'environ $6\,371$ km. Elle fait un tour sur elle-même en une journée. Quelle est sa vitesse de rotation exprimée en km/h ?
La Terre parcoure en un an, une orbite à peu près circulaire autour du soleil dont le rayon est environ $150\,000\,000$ km. Quelle est la vitesse de rotation de la Terre autour du soleil exprimée en km/h ?1

Question du jour n° 3 : Vitesse – Épisode 3

Un cycliste vient de monter le col du Tourmalet. C'est une montée de 17 km pour atteindre le sommet à $2\,215$ m d'altitude. Il est monté à la vitesse moyenne de 12 km/h puis il est redescendu à 78 km/h.
Quelle est sa vitesse moyenne sur le trajet complet, montée puis descente ?

Question du jour n° 4 : Fonctions vocabulaire

On pose $f : x \longrightarrow f(x) = x^2 - 2x + 8$
Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(-1)$

Question du jour n° 5 : Fonctions vocabulaire – Épisode 2

On pose $g : x \longrightarrow g(x) = -5x + 3$
1. Calculer les images de 0, 1 et -3 par la fonction g.
2. Calculer les antécédents 0 par g.

Question du jour n° 6 : Fonctions vocabulaire – Épisode 3

On pose $h : x \longrightarrow 7 - 3x^2$
Les affirmations suivantes sont-elles vraies :
- 7 est l'image de 0 par la fonction h ;
- 7 est un antécédent de 0 par la fonction h ;
- 0 a pour image 7 par la fonction h ;
- -2 et 2 sont les antécédents de -5 par la fonction h ;
- 4 a un seul antécédent par la fonction h.

Question du jour n° 7 : Équation du premier degré

Résoudre les quatre équations suivantes :

$$5x + 3 = 3x + 1$$
$$7x - 4 = 3x - 5$$
$$6 - 3x = 2x + 7$$
$$1 - 3x = -4 - 5x$$

2 Exercices

Exercice n° 2.1 : Résolution d'équations du premier degré

Résoudre chacune des équations suivantes en vérifiant à chaque fois votre solution :

(1) $5x+3=4x+7$

(2) $7x+4=5x+10$

(3) $8x-3=3x-5$

(4) $x-8=3x-4$

(5) $1-7x=2-3x$

(6) $5-3x=5x-3$

Exercice n° 2.2 : Calcul d'images et d'antécédents

On pose $f : x \longrightarrow f(x)=3x+4$ et $g : x \longrightarrow g(x)=1-5x$

1. Calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(10)$.

2. Calculer les images de 2 et -3 par g.

3. Quel est l'antécédent de -5 par f ?

4. Quel est l'antécédent de 4 par g ?

5. Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

Exercice n° 2.3 : Programme de calcul et fonction

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre;
— ajouter 6;
— multiplier par le nombre de départ;
— enlever 5.

1. Vérifier qu'en prenant -2 comme nombre de départ, ce programme donne -13

2. En notant x le nombre de départ et g la fonction qui à x associe le résultat donné par le programme, déterminer l'expression de g.

3. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau suivant :

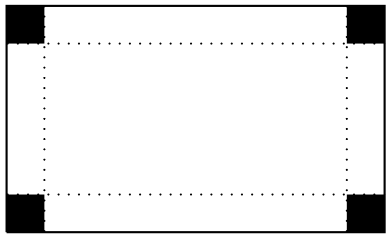
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$											

4. Quels sont les antécédents de -13 par g ?

5. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les antécédents de -15 par g ?

Exercice n° 2.4 : La boite parallélépipédique

On décide de construire une boite parallélépipédique sans couvercle dans une feuille A4 ($21\ cm \times 29,7\ cm$) en enlevant le même carré aux quatre coins de la feuille.



Le but de cette activité est de trouver la mesure du carré optimale de telle manière que le volume du pavé droit soit le plus grand possible.

1. Choisir une mesure pour le côté du carré puis dans une feuille A4 construire le pavé droit correspondant. Quel est le volume de ce pavé droit ?

2. Notons x la mesure du côté de ce carré en centimètre. Quelles sont les valeurs minimales et maximales de x ?

3. $f : x \rightarrow f(x)$ la fonction qui à une valeur de x en centimètre associe le volume du pavé en centimètre cube. Quelle est l'expression de $f(x)$?

4. Compléter à la calculatrice le tableau suivant :

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5
$f(x)$											

x	$5,5$	6	$6,5$	7	$7,5$	8	$8,5$	9	$9,5$	10	$10,5$
$f(x)$											

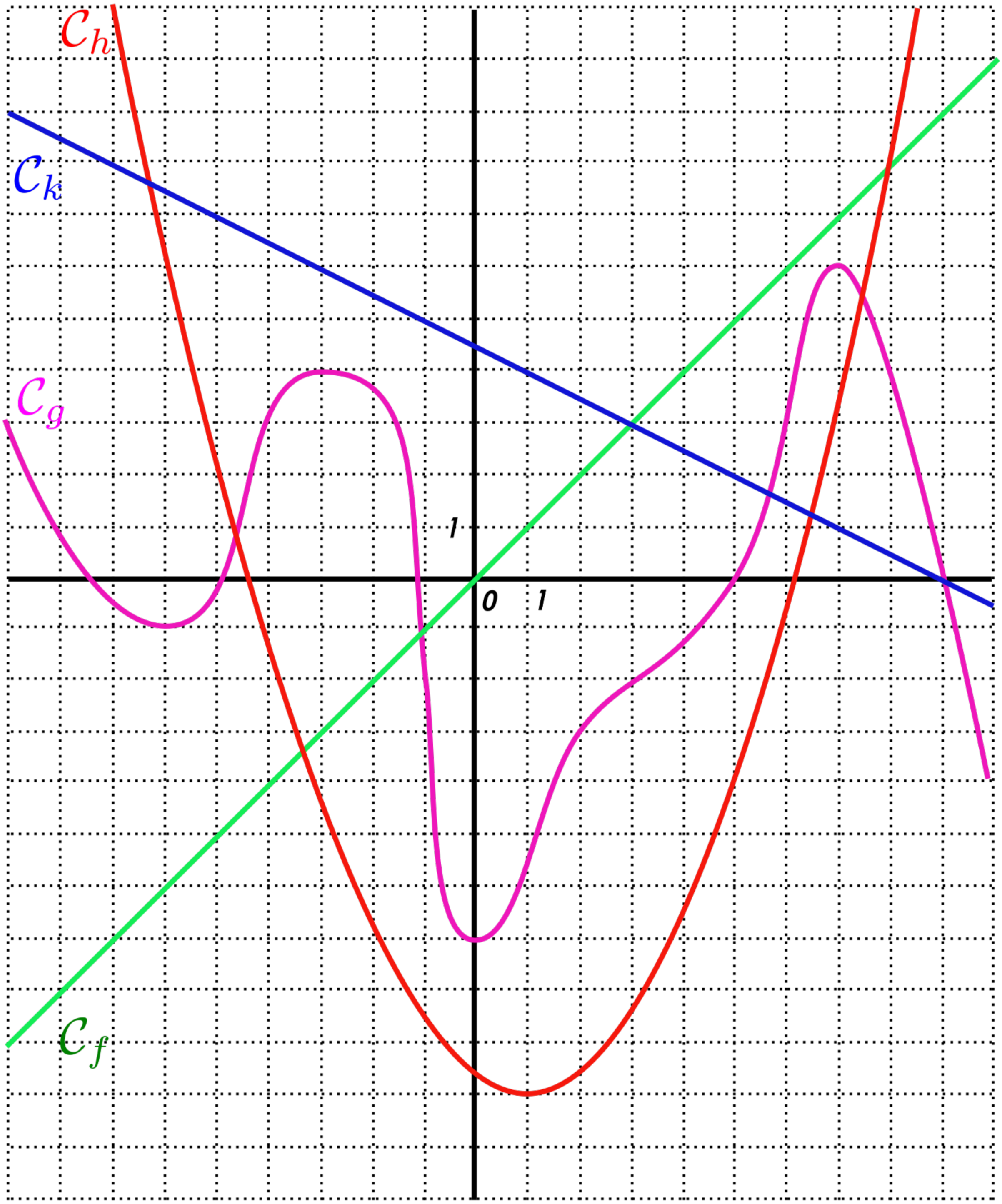
5. En utilisant le tableau ci-dessus, tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère fourni.

6. Compléter le tableau ci-dessous pour répondre à la question posée au départ.

x	$3,5$	$3,6$	$3,7$	$3,8$	$3,9$	4	$4,1$	$4,2$	$4,3$	$4,4$	$4,5$
$f(x)$											

Exercice n° 2.5 : Lecture graphique

Sur le graphique ci-dessous se trouvent les représentations graphiques de quatre fonctions : f, g, h et k.



1. Lire sur le graphique : $f(-5)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quelle pourrait être l'expression de f ?
3. Lire sur le graphique : $g(-3)$, $g(0)$ et $g(7)$
4. Quels sont les antécédents de O par g.
5. Lire sur la graphique : $h(-6)$, $h(1)$ et $h(8)$
6. Résoudre graphiquement l'équation :$f(x) = k(x)$
7. Quels sont les antécédents de 1 par g ?
8. Quels sont les antécédents de 7 par g ?
9. Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = h(x)$

Exercice n° 2.1 : Résolution d'équations du premier degré

$$5x+3=4x+7$$
$$5x+3-4x=4x+7-4x$$
$$x+3=7$$
$$x+3-3=7-3$$
$$\boxed{x=4}$$

$$7x+4=5x+10$$
$$7x+4-4=5x+10-4$$
$$7x=5x+6$$
$$7x-5x=5x+6-5x$$
$$2x=6$$
$$\boxed{x=\frac{6}{2}=3}$$

$$8x-3=3x-5$$
$$8x-3+3=3x-5+3$$
$$8x=3x-2$$
$$8x-3x=3x-2-3x$$
$$5x=-2$$
$$\boxed{x=\frac{-2}{5}}$$

$$x-8=3x-4$$
$$x-8+8=3x-4+8$$
$$x=3x+4$$
$$x-3x=3x+4-3x$$
$$-2x=4$$
$$\boxed{x=\frac{4}{-2}=-2}$$

$$1-7x=2-3x$$
$$1-7x-1=2-3x-1$$
$$-7x=1-3x$$
$$-7x+3x=1-3x+3x$$
$$-4x=1$$
$$\boxed{x=\frac{-1}{4}}$$

$$5-3x=5x-3$$
$$5-3x-5=5x-3-5$$
$$-3x=5x-8$$
$$-3x-5x=5x-8-5x$$
$$-8x=-8$$
$$\boxed{x=\frac{-8}{-8}=1}$$

Exercice n° 2.2 : Calcul d'images et d'antécédents

1. $f(-3)=3\times(-3)+4=-9+4=\boxed{-5}$, $f(-1)=3\times(-1)+4=-3+4=\boxed{1}$, $f(0)=3\times0+4=\boxed{4}$ et $f(10)=3\times10+4=\boxed{34}$.

2. $g(2)=1-5\times2=1-10=\boxed{-9}$ et $g(-3)=1-5\times(-3)=1+15=\boxed{16}$

3. Il faut résoudre :

$$3x+4=-5$$
$$3x+4-4=-4-4$$
$$3x=-8$$
$$\boxed{x=\frac{-8}{3}}$$

$\boxed{-\frac{8}{3} \text{ est l'antécédent de } -5 \text{ par } f}$

4. Il faut résoudre :

$$1-5x=4$$

$$1 - 5x - 1 = 4 - 1$$

$$-5x = 3$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{5}}$$

$\boxed{-\frac{3}{5} \text{ est l'antécédent de 4 par } g}$

5. Il faut résoudre

$$3x + 4 = 1 - 5x$$

$$3x + 4 - 4 = 1 - 5x - 4$$

$$3x = -3 - 5x$$

$$3x + 5x = -3 - 5x + 5x$$

$$8x = -3$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{8}}$$

$\boxed{\text{Pour } x = -\frac{3}{8} \text{ les fonctions } f \text{ et } g \text{ ont la même image.}}$

Exercice n° 2.3 : Programme de calcul et fonction

1. Pour -2 on obtient successivement : $-2 + 6 = 4$ puis $4 \times (-2) = -8$ et enfin $-8 - 5 = \boxed{-13}$

2. Prenons x un nombre de départ on obtient successivement : $x + 6$ puis $x(x + 6)$ et enfin $\boxed{x(x + 6) - 5}$

3.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-10	-13	-14	-13	-10	-5	2	11	22	35	55

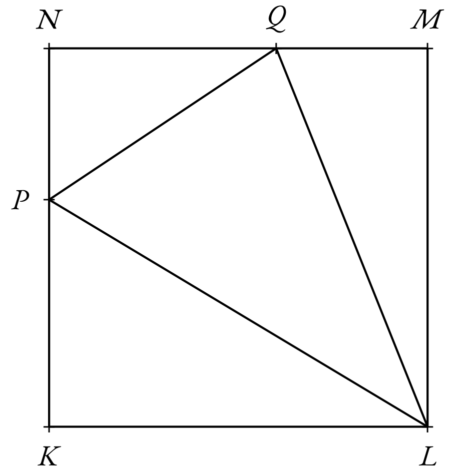
4. D'après le tableau $\boxed{\text{les antécédents de } -13 \text{ sont } -4 \text{ et } -2.}$

5. Il semble que la valeur minimale de la fonction g soit -14. $\boxed{-15 \text{ n'a donc pas d'antécédent.}}$

3 Évaluations

Évaluation de mathématiques

Exercice 1



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

$KLMN$ est un carré de côté 5 cm

$P \in [KN]$ tel que $KP = 3\ cm$
$Q \in [NM]$ tel que $QM = 2\ cm$

1. Calculer en justifiant votre raisonnement les longueurs QP, PL et LQ

2. Le triangle PLQ est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

Exercice 2

On pose $f : x \longrightarrow 3x - 7$, $g : x \longrightarrow -5x + 3$ et $h : x \longrightarrow x^2 + x - 6$

1. Calculer les images de 6 et -3 par la fonction f.

2. Calculer $g(0)$ et $g(-5)$.

3. Déterminer l'antécédent de 10 par la fonction f.

4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

5. Compléter le tableau suivant à la calculatrice :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							

6. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction h.

Exercice 3

Le record du monde de marathon masculin est détenu par le kenyan Eliud Kipchoge. Il a parcouru $42,195$ km en 2 h 1 min 39 s.

1. Calculer la vitesse moyenne en kilomètre heure d'Eliud Kipchoge. Arrondir au mètre près.

Le record du monde de marathon féminin est détenu par la kenyane Brigid Kosgei. Elle a parcouru $42,195$ km à la vitesse de $18,884$ km/h.

2. Combien de temps Brigid Kosgei a-t-elle mis pour courir ce marathon ? Arrondir à la seconde près.

3. Imaginons que ces deux coureurs aient fait ces temps records sur le même marathon.
Quelle distance séparerait ces deux coureurs à l'arrivée ?

Correction

Exercice 1

1. Comme $KLMN$ est un carré, les triangles NPQ, QML et PKL sont rectangles respectivement en N, M et K.

Dans le triangle NPQ rectangle en N, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$NQ^2 + NP^2 = QP^2$$
$$3^2 + 2^2 = QP^2$$
$$QP^2 = 9 + 4$$
$$QP^2 = 13$$
$$QP = \sqrt{13}$$

Dans le triangle QLM rectangle en M, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$MQ^2 + ML^2 = QL^2$$
$$2^2 + 5^2 = QL^2$$
$$QL^2 = 4 + 25$$
$$QL^2 = 29$$
$$QL = \sqrt{29}$$

Dans le triangle PKL rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$KL^2 + KP^2 = PL^2$$
$$5^2 + 3^2 = PL^2$$
$$PL^2 = 25 + 9$$
$$PL^2 = 34$$
$$PL = \sqrt{34}$$

2. Comparons $QP^2 + QL^2$ et PL^2

$$QP^2 + QL^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{29})^2$$
$$QP^2 + QL^2 = 13 + 29$$
$$QP^2 + QL^2 = 42$$

$$Pl^2 = (\sqrt{34})^2$$
$$PL^2 = 34$$

Comme $QP^2 + QL^2 \neq PL^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, le triangle PQL n'est pas rectangle.

Exercice 2

1. $f(6) = 3 \times 6 - 7 = 18 - 7 = 11$ et $f(-3) = 3 \times (-3) - 7 = -9 - 7 = -16$
2. $g(0) = -5 \times 0 + 3 = 3$ et $g(-5) = -5 \times (-5) + 3 = 25 + 3 = 28$
3. Il faut résoudre : $f(x) = 10$

$$3x - 7 = 10$$
$$3x - 7 + 7 = 10 + 7$$
$$3x = 17$$
$$x = \frac{17}{3}$$

4. Résolvons $f(x) = g(x)$

$$3x - 7 = -5x + 3$$
$$3x - 7 + 7 = -5x + 3 + 7$$
$$3x = -5x + 10$$
$$3x + 5x = -5x + 5x + 10$$
$$8x = 10$$
$$x = \frac{10}{8}$$
$$x = 1,25$$

5.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	0	-4	-6	1	-4	0	6

6. -3 et 2 sont les antécédents de 0 par h

Exercice 3

1. $2\,h\,1\,min\,39\,s = 2 \times 3\,600\,s + 1 \times 60\,s + 39\,s = 7\,299\,s$

Temps	$7\,299\,s$	$3\,600\,s$
Distance	$42,195\,km$	$\frac{42,195\,km \times 3\,600\,s}{7\,299\,s} \approx 20,811\,km$

Il court à $20,811\,km/h$.

2.

Temps	$\frac{3\,600\,s \times 42,195\,km}{18,884\,km} \approx 8\,044\,s$	$3\,600\,s$
Distance	$42,195\,km$	$18,884\,km$

$8\,044\,s = 60 \times 134 \times 60\,s + 4\,s = 134\,min\,4\,s = 2\,h\,14\,min\,4\,s$.

3. Le premiers court le marathon en $7\,299\,s$, la seconde en $8\,044\,s$.
L'écart entre les deux coureurs est $8\,044\,s - 7\,299\,s = 745\,s$.
Calculons la distance parcourue par le premier coureur en $745\,s$.

Temps	$7\,299\,s$	$745\,s$
Distance	$42,195\,km$	$\frac{745\,s \times 42,195\,km}{7\,299\,s} \approx 4,306\,km$

L'écart entre les deux est $4\,306\,m$.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation de mathématiques

On pose $f(x) = (3x - 1)(-2x - 3) + (-5 + 2x)(1 - 3x)$

1. Développer et réduire $f(x)$

2. Développer et réduire $g(x) = (3x - 1)(-4x + 2)$

On pose $h(x) = -12x^2 + 10x - 2$.

3. Calculer $h(0)$, $h(-1)$ et $h(3)$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation de mathématiques

On pose $f(x) = (5x - 1)(-4x - 3) + (-5 + 2x)(1 - 5x)$

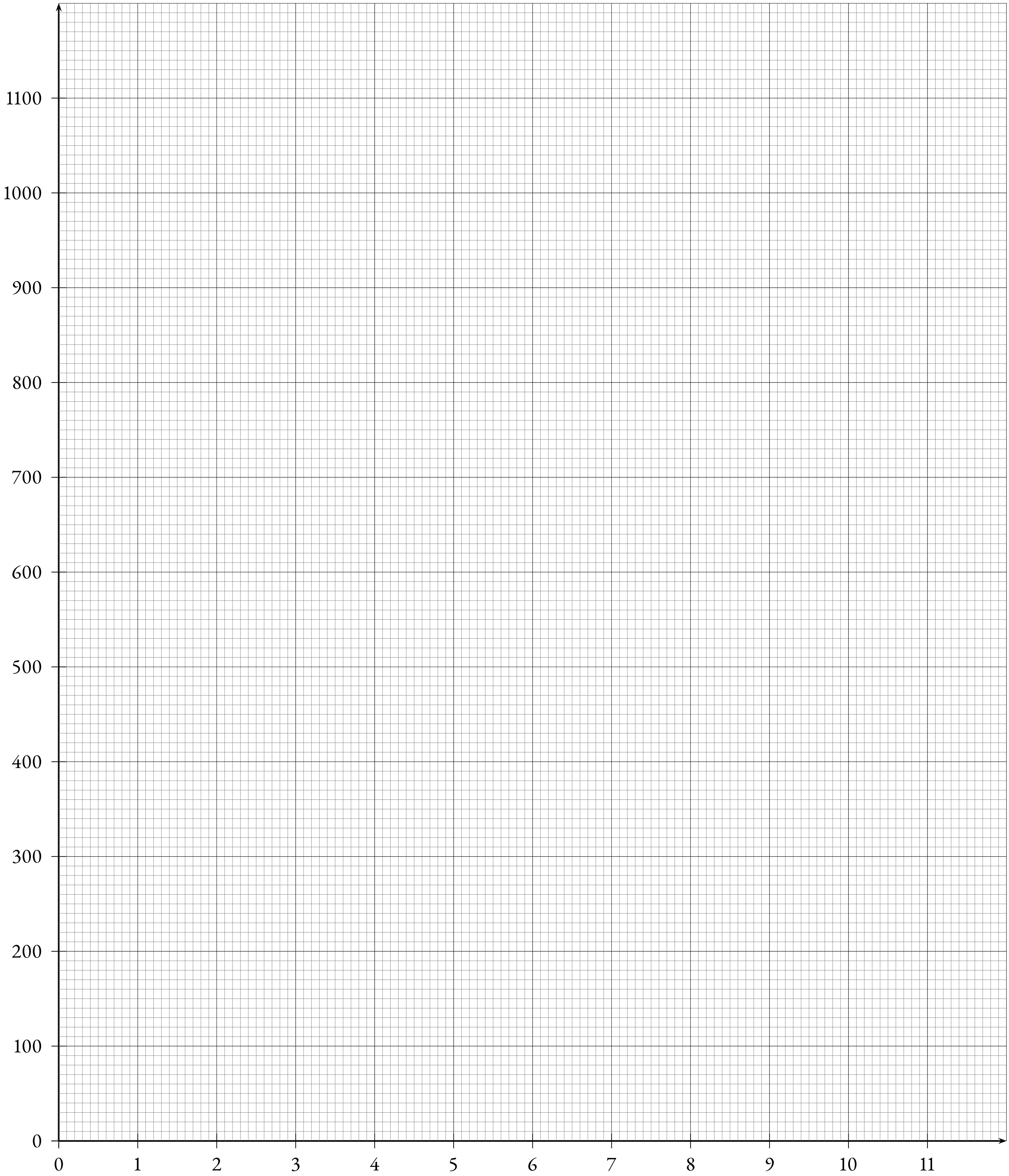
1. Développer et réduire $f(x)$

2. Développer et réduire $g(x) = (5x - 1)(-6x - 4)$

On pose $h(x) = -30x^2 - 14x + 4$.

3. Calculer $h(0)$, $h(-1)$ et $h(3)$

4 Documents pratiques

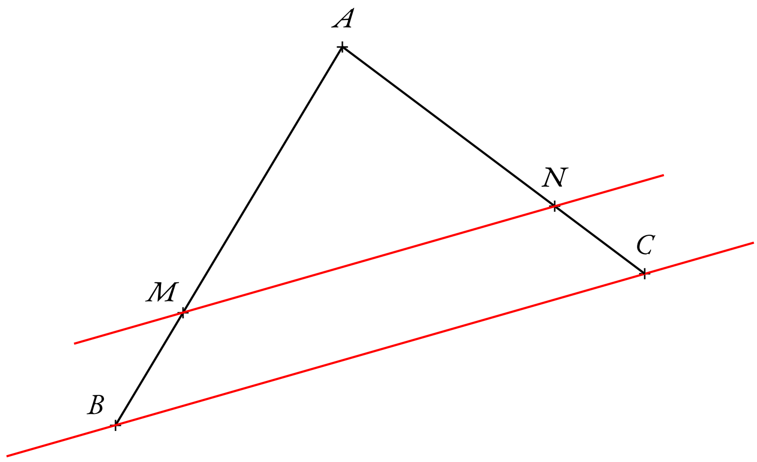


Chapitre 3

Le théorème de Thalès

I — Le théorème de Thalès – Version triangle

Théorème 3.1 : Théorème de Thalès

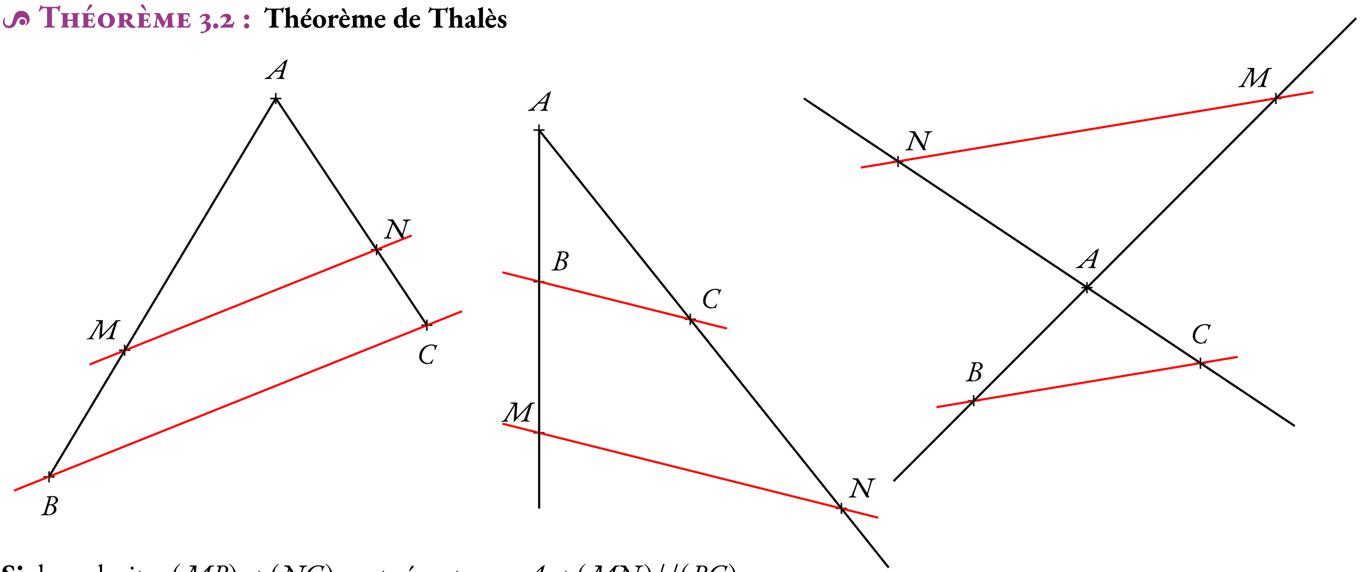


Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

II — Le théorème de Thalès – Version générale

Théorème 3.2 : Théorème de Thalès



Si deux droites (MB) et (NC) sont sécantes en A et $(MN)//(BC)$
alors les mesures des triangles AMN et ABC sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

III — La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

IV — Annexes

Chapitre 4

Statistiques

I — Moyenne arithmétique et pondérée

II — Annexes

Chapitre 5

Calcul littéral

I — La distributivité

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition. Cela signifie que le produit d'une somme est égal à la somme des produits.

Plus généralement :

Définition 5.1 : Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

a, b et k des nombres quelconques.

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Vocabulaire :

— **Développer** une expression revient à écrire un produit de plusieurs facteurs sous forme d'une somme de termes.
— **Factoriser** une expression revient à écrire une somme de termes sous forme d'un produit de plusieurs facteurs.

Exemples :

La distributivité est utilisé pour faciliter le calcul mental.

$78 \times 99 = 78 \times (100 - 1) = 78 \times 100 - 78 \times 1 = 7\,800 - 78 = 7\,722$

II — Développer et réduire un expression littérale

III — Factoriser avec un facteur commun

IV — Initiation au calcul littéral

V — Résoudre une équation produit

VI — Annexes

Chapitre 6

Proportionnalité et fonction linéaire

I — Augmentation et diminution en pourcentage

Propriété 6.1 : Augmentation et diminution en pourcentage

On note x un nombre positif quelconque.

Augmenter une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1 + \dfrac{x}{100}$

Diminuer une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1 - \dfrac{x}{100}$

Exemples :

Augmenter une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{35}{100} = 1 + 0,35 = 1,35$

Diminuer une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{35}{100} = 1 - 0,35 = 0,65$

Augmenter une grandeur de 2, 7 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{2,7}{100} = 1 + 0,027 = 1,027$

Diminuer une grandeur de 1 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$

Remarques :

Augmenter une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{100}{100} = 1 + 1 = 2$

Diminuer une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{100}{100} = 0$

Diminuer d'un pourcentage inférieur à 100 % n'a pas de sens ! Par contre une augmentation est possible.

Augmenter une grandeur de 5 000 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{5\,000}{100} = 1 + 50 = 51$

Attention au biais cognitif suivant : augmenter de 300 % revient à multiplier par 4 et pas 3 ! ! !

Méthode 6 . 1 : Effectuer une diminution ou une augmentation en pourcentage
Un livret d'épargne rémunère les dépôts de $1,5$ % par an. On dépose 5 000 €sur ce livret.
De quelle montant dispose t-on au bout d'un an ? de deux ans ? de dix ans ?

Augmenter de $1,5$ % revient à multiplier par $1+\dfrac{1,5}{100}=1+0,015=1,015$

Au bout d'un an il y aura : 5 000 € $\times 1,015 = 5\,075$ €.

Au bout de deux ans on aura : 5 075 € $\times 1,015 = 5\,151{,}125$ € soit 5 000 € $\times 1,015\times 1,015 = 5\,000$ € $\times 1,015^2$

Au bout de dix ans on aura : 5 000 € $\times \underbrace{1,015\times 1,015\times \ldots \times 1,015}_{\text{10 fois}} = 5\,000$ € $\times 1,015^{10} = 5\,802{,}704$ €.

Méthode 6 . 2 : Déterminer une augmentation ou une diminution en pourcentage
Un prix est passé de 75 € à 57 €. Quel est le pourcentage de diminution ?

Il faut chercher le coefficient multiplicateur k tel que $75\times k = 57$

Ainsi $k=\dfrac{57}{75}=0,76$.

Or $0,76 = 1-0,24 = 1-\dfrac{24}{100}$. On peut remarquer que 76 % + 24 % = 100 % !
Il s'agit d'une diminution de 24 %.

II — La fonction linéaire

❧ Définition 6.1 : La fonction linéaire

On choisit a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \longrightarrow a\times x$$

La fonction linéaire de coefficient a modélise le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par a ;
- Écrire le résultat.

EXEMPLES :

$f(x) = 5x$ – la fonction linéaire de coefficient 5

$g(x) = x$ – la fonction linéaire de coefficient 1 car $x = 1 \times x$

$h(x) = -x$ – la fonction linéaire de coefficient -1 car $-x = -1 \times x$

$k(x) = -3x$ – la fonction linéaire de coefficient 3

$l(x) = \dfrac{x}{5}$ – la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{5}$ car $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{5} \times x$

$m(x) = 3x + 6$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du $+6$

$p(x) = 4x^2$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du x^2

$t(x) = \dfrac{1}{x}$ – ce n'est pas une fonction linéaire

PROPRIÉTÉ 6.2 : Fonction linéaire et proportionnalité

Les images et les antécédents par une fonction linéaire sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient de la fonction linéaire.

EXEMPLE :

Soit g la fonction linéaire de coefficient $-3,25$.
Dressons un tableau de valeurs de cette fonction.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	9,75	6,5	3,25	0	-3,25	-6,5	-9,75	-13

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité de coefficient $-3,25$.

MÉTHODE 6 . 3 : Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre et son image

Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = -2$.

Il faut déterminer le coefficient a de cette fonction.
Comme pour tout x on a $f(x) = ax$ or $f(3) = -2$, on en déduit que $a \times 3 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{3}$

Il s'agit de la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ 6.3 :

Si f est une fonction linéaire alors $f(0) = 0$

PROPRIÉTÉ 6.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

III — Annexes

Chapitre 7

Tout le reste…

DEVOIR MAISON : VITESSE — **Les plots du prof d'EPS**

Pour mesurer sa vitesse moyenne en km/h pendant le cours d'EPS, le professeur utilise les deux méthodes ci-dessous :

- **Méthode des** $3\ min\ 36\ s$
  - Courir sans s'arrêter pendant $3\ min\ 36\ s$;
  - compter le nombre de plots franchis (les plots sont espacés de $20\ m$);
  - diviser ce nombre de plots par 3.
- **Méthode des** $9\ min\ 36\ s$
  - Courir sans s'arrêter pendant $9\ min\ 36\ s$;
  - compter le nombre de plots franchis (les plots sont espacés de $20\ m$);
  - diviser ce nombre de plots par 8.

Le but de cet exercice est de justifier les méthodes utilisées en EPS.

ÉTUDE DE LA MÉTHODE DES $3\ min\ 36\ s$

1.a Un élève parcoure $540\ m$ en $3\ min\ 36\ s$. Quelle est sa vitesse moyenne exprimée en km/h ?
1.b Combien de plots a-t-il franchis ? La méthode du professeur est-elle efficace ?

2. Montrer que $3\ min\ 36\ s = \dfrac{3}{50}\ h$.

On note maintenant d la distance en mètres parcourue par un élève pendant $3\ min\ 36\ s$.

3.a Montrer en vous inspirant des questions **1.a** et **2.** que la vitesse en m/h s'exprime alors sous la forme $\dfrac{50}{3} \times d$
3.b En déduire que la vitesse en km/h s'exprime sous la forme $\dfrac{1}{60} \times d$ ou encore $\dfrac{d}{60}$
3.c En parcourant d mètres, combien de plots ont été franchis ?
3.d Diviser par 3 ce nombre de plots et en déduire une explication de la méthode du professeur.

ÉTUDE DE LA MÉTHODE DES $9\ min\ 36\ s$

4.a Un élève parcoure $1\,740\ m$ en $9\ min\ 36\ s$. Quelle est sa vitesse moyenne exprimée en km/h ?
4.b Combien de plots a-t-il franchis ? La méthode du professeur est-elle efficace ?

5. Montrer que $9\ min\ 36\ s = \dfrac{4}{25}\ h$

On note maintenant d la distance en mètres parcourue par un élève pendant $9\ min\ 36\ s$.

6. En vous inspirant des questions **3.abcd** expliquer mathématiquement la méthode du professeur.