Un peu d'algèbre avant le Brevet

Nicolas Bourbaki
France
1935-

Exercice 1

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$

$A = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{27}$

$B = -4\sqrt{20} - 6\sqrt{125} + 3\sqrt{80} + 2\sqrt{5}$

$C = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)$

$D = \left(3\sqrt{5} - 4\right)^2$

$E = \left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{5} - 4\sqrt{3}\right)$

$F = \left(4\sqrt{12} - 3\sqrt{8}\right)^2 - \left(2\sqrt{3} + 1\right)\left(1 - 3\sqrt{2}\right)$

Exercice 2 ă

Développer chacune des expressions suivantes :

$G = (3x-2)^2 + (5x-1)(4x-1)$
$H = (5x+2)^2 - (4x+1)(1-5x)$
$I = (7x-4)^2 - (3x-8)^2$
$J = (3x-2)(3x+2) - (5x-7)(5x+7)$
$K = (4x-9)^2 - (5x+6)^2 - (4x-1)(5x+4)$

Exercice 3 ă

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$L = (4x-1)(6x+3) + (6x+2)(4x-1)$
$M = (5x-7)^2 - (5x-7)(3x+1)$
$O = (3x-5)^2 - (4x-3)^2$
$P = (4x-7)^2 - 25$
$Q = (4x-3)^2 - (4x-3)(5x+1) + 16x^2 - 9$

Exercice 4

On pose $f(x) = (2x-3)(5x+7)$

1. Calculer les images de 2, 0, -3 et $\dfrac{2}{3}$ par f

2. Calculer les antécédents de 0 par f.

Exercice 5

On pose $g(x) = x^2 - 8$

1. Calculer $g(-3)$, $g(-1)$, et $g(2)$
2. Calculer les antécédents de 1, puis les antécédents de 0.

Exercice 6

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$R = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{5}$

$T = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{14}{5} - \dfrac{8}{5} \times \dfrac{7}{4}$

$S = \left(1 + \dfrac{3}{5}\right)\left(4 - \dfrac{3}{4}\right)$

$U = \dfrac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5}}{\dfrac{5}{7} - \dfrac{3}{2}}$

Exercice 7

Donner l'écriture scientifique :

$V = \dfrac{0,000\,064 \times 2\,000\,000\,000}{128 \times 10^7}$

$W = \dfrac{0,027 \times 10^{-5} \times 900 \times 10^3}{8\,100\,000 \times (10^{-4})^3}$

Exercice 8

1. Calculer $PGCD(6\,097; 11\,557)$ puis simplifier $\dfrac{11\,557}{6\,097}$

2. Calculer $PGCD(7\,371; 7\,813)$ puis simplifier $\dfrac{7\,371}{7\,813}$

3. Prouver que 945 et 1 144 sont premiers entre eux.

Exercice 9

Résoudre les systèmes suivants :

$\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ -4x + 3y = -7 \end{cases}$ $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - 6y = 10 \\ -7x + 4y = 0 \end{cases}$

Exercice 10

Résoudre les inéquations suivantes :

$7x - 4 \geqslant 4x - 3$

$-6x + 5 \leqslant 5x - 7$

$7(3x-1) > 4(2-5x)$

$5(2x+5) - 2x + 1 < 0$

Exercice 11

1. Déterminer la fonction linéaire f telle que $f(2) = -5$

2. Déterminer la fonction affine g telle que
$g(-1) = 7$ et $g(3) = -5$

3. Déterminer la fonction affine h telle que
$h(2) = 1$ et $h(1) = 2$

UN PEU D'ALGÈBRE AVANT LE BREVET

- Racines carrées ;
- PGCD ;
- Écriture scientifique ;
- Factoriser ;
- Identités remarquables ;
- Développer ;
- Fonctions affines ;
- Fonctions linéaires.

EXERCICE 1

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$

$A = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{4\times 3} + 4\sqrt{25\times 3} - 5\sqrt{9\times 3}$
$A = 5\sqrt{3} - 3\times 2\sqrt{3} + 4\times 5\sqrt{3} - 5\times 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 20\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = \boxed{4\sqrt{3}}$

$B = -4\sqrt{20} - 6\sqrt{125} + 3\sqrt{80} + 2\sqrt{5} = -4\sqrt{4\times 5} - 6\sqrt{25\times 5} + 3\sqrt{16\times 5} + 2\sqrt{5}$
$B = -4\times 2\sqrt{5} - 6\times 5\sqrt{5} + 3\times 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = -8\sqrt{5} - 30\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \boxed{-24\sqrt{5}}$

$C = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\times 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\times 5\sqrt{3}$
$C = 6\sqrt{6} + 10\times 3 - 9\times 4 - 15\sqrt{6} = -9\sqrt{6} + 30 - 36 = \boxed{-6 - 9\sqrt{6}}$

$D = \left(3\sqrt{5} - 4\right)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - 2\times 3\sqrt{5}\times 4 + 4^2 = 9\times 5 - 24\sqrt{5} + 16 = \boxed{61 - 24\sqrt{5}}$

$E = \left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{5} - 4\sqrt{3}\right) = \left(5\sqrt{5}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 25\times 5 - 16\times 3 = 125 - 48 = \boxed{77}$

$F = \left(4\sqrt{12} - 3\sqrt{8}\right)^2 - \left(2\sqrt{3} + 1\right)\left(1 - 3\sqrt{2}\right)$
$F = \left(4\sqrt{12}\right)^2 - 2\times 4\sqrt{12}\times 3\sqrt{8} + \left(3\sqrt{8}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\times 1 - 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2}\right)$
$F = 16\times 12 - 24\sqrt{96} + 9\times 8 - \left(2\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 1 - 3\sqrt{2}\right)$
$F = 192 - 24\sqrt{96} + 72 - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 1 + 3\sqrt{2} = 263 - 24\sqrt{16\times 6} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$
$F = 263 - 24\times 4\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{2} = \boxed{263 - 90\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$

EXERCICE 2

Développer chacune des expressions suivantes :

$G = (3x-2)^2 + (5x-1)(4x-1) = (9x^2 - 12x + 4) - (20x^2 - 5x - 4x + 1) = \boxed{-11x^2 - 3x + 3}$
$H = (5x+2)^2 - (4x+1)(1-5x) = (25x^2 + 20x + 4) - (4x - 20x^2 + 1 - 5x) = \boxed{45x^2 + 21x + 3}$
$I = (7x-4)^2 - (3x-8)^2 = (49x^2 - 56x + 16) - (9x^2 - 48x + 64) = \boxed{40x^2 - 8x - 48}$
$J = (3x-2)(3x+2) - (5x-7)(5x+7) = (9x^2 - 4) - (25x^2 - 49) = \boxed{-16x^2 + 45}$
$K = (4x-9)^2 - (5x+6)^2 - (4x-1)(5x+4)$
$K = (16x^2 - 72x + 81) - (25x^2 + 60x + 36) - (20x^2 + 16x - 5x - 4) = \boxed{-29x^2 - 143x + 49}$

EXERCICE 3

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$L = (4x-1)(6x+3) + (6x+2)(4x-1) = (4x-1)\left[(6x+3) + (6x+2)\right]$
$L = (4x-1)(6x+3+6x+2) = \boxed{(4x-1)(12x+5)}$
$M = (5x-7)^2 - (5x-7)(3x+1) = (5x-7)\left[(5x-7) - (3x+1)\right]$
$M = (5x-7)(5x-7-3x-1) = \boxed{(5x-7)(2x-8)}$
$O = (3x-5)^2 - (4x-3)^2 = \left[(3x-5) + (4x-3)\right]\left[(3x-5) - (4x-3)\right]$
$Q = (3x-5+4x-3)(3x-5-4x+3) = \boxed{(7x-8)(-x-2)}$
$P = (4x-7)^2 - 25 = (4x-7)^2 - 5^2 = \left[(4x-7)+5\right]\left[(4x-7)-5\right]$
$P = (4x-7+5)(4x-7-5) = \boxed{(4x-2)(4x-12)}$
$Q = (4x-3)^2 - (4x-3)(5x+1) + 16x^2 - 9 = (4x-3)\left[(4x-3) - (5x+1)\right] + (4x)^2 - 3^2$
$Q = (4x-3)(4x-3-5x-1) + (4x+3)(4x-3) = (4x-3)(-x-4) + (4x+3)(4x-3)$
$Q = (4x-3)\left[(-x-4) + (4x+3)\right] = (4x-3)(-x-4+4x+3) = \boxed{(4x-3)(3x-1)}$

EXERCICE 4

On pose $f(x) = (2x-3)(5x+7)$

1. Calculer les images de 2, 0, -3 et $\frac{2}{3}$ par f

$f(2) = (2\times 2 - 3)(5\times 2 + 7) = (4-3)(10+7) = \boxed{17}$
$f(0) = (2\times 0 - 3)(5\times 0 + 7) = -3\times 7 = \boxed{-21}$
$f(-3) = (2\times(-3) - 3)(5\times(-3) + 7) = (-6-3)(-15+7) = -9\times -8 = \boxed{72}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(2\times\frac{2}{3} - 3\right)\left(5\times\frac{2}{3} + 7\right) = \left(\frac{4}{3} - \frac{9}{3}\right)\left(\frac{10}{3} + \frac{21}{3}\right) = -\frac{5}{3}\times\frac{31}{3} = \boxed{-\frac{155}{9}}$$

2. Calculer les antécédents de 0 par f.

Il faut résoudre $f(x) = 0$ c'est à dire $(2x-3)(5x+7) = 0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$2x - 3 = 0 \qquad 2x = 3 \qquad x = \frac{3}{2}$$

$$5x + 7 = 0 \qquad 5x = -7 \qquad x = -\frac{7}{5}$$

EXERCICE 5

On pose $g(x) = x^2 - 8$

1. Calculer $g(-3)$, $g(-1)$, et $g(2)$

$g(-3) = (-3)^2 - 8 = 9 - 8 = \boxed{1}$

$g(-1) = (-1)^2 - 8 = 1 - 8 = \boxed{-7}$

$g(2) = 2^2 - 8 = 4 - 8 = \boxed{-4}$

2. Calculer les antécédents de 1, puis les antécédents de 0.
Il faut résoudre $g(x) = 1$ c'est à dire $x^2 - 8 = 1$

$$x^2 = 1 + 8$$
$$x^2 = 9$$

Il y a deux solutions à cette équation $x = 3$ et $x = -3$

$\boxed{\text{Les antécédents de 1 par } g \text{ sont 3 et } -3}$

Il faut résoudre $g(x) = 0$ c'est à dire $x^2 - 8 = 0$

$$x^2 = 8$$

Il y a deux solutions à cette équation $x = \sqrt{8}$ et $x = -\sqrt{8}$

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } g \text{ sont } \sqrt{8} \text{ et } -\sqrt{8}}$

EXERCICE 6

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$R = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3}{4} - \frac{21}{20}$

$R = \frac{15}{20} - \frac{21}{20} = -\frac{6}{20} = \boxed{-\frac{3}{10}}$

$S = \left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(4 - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{5} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{16}{4} - \frac{3}{4}\right)$

$S = \frac{8}{5} \times \frac{13}{4} = \frac{4 \times 2 \times 13}{5 \times 4} = \boxed{\frac{26}{5}}$

$T = \frac{2}{7} \times \frac{14}{5} - \frac{8}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{2 \times 7 \times 2}{7 \times 5} - \frac{4 \times 2 \times 7}{5 \times 4}$

$T = \frac{4}{5} - \frac{14}{5} = -\frac{10}{5} = \boxed{-2}$

$U = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{5}{7} - \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}}{\frac{10}{14} - \frac{21}{14}} = -\frac{1}{15} \div -\frac{11}{14}$

$U = \frac{1}{15} \times \frac{14}{11} = \boxed{\frac{14}{165}}$

EXERCICE 7

Donner l'écriture scientifique :

$$V = \frac{0,000\,064 \times 2\,000\,000\,000}{128 \times 10^7} = \frac{6,4 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^9}{1,28 \times 10^2 \times 10^7} = \frac{6,4}{1,28} \times \frac{10^4}{10^9} = \boxed{5 \times 10^{-5}}$$

$$W = \frac{0,027 \times 10^{-5} \times 900 \times 10^3}{8\,100\,000 \times (10^{-4})^3} = \frac{2,7 \times 10^{-2} \times 10^{-5} \times 9 \times 10^2 \times 10^3}{8,1 \times 10^6 \times 10^{-12}} = \frac{24,3}{8,1} \times \frac{10^{-2}}{10^{-6}} = \boxed{3 \times 10^4}$$

EXERCICE 8

1. Calculer $PGCD(6\,097; 11\,557)$ puis simplifier $\frac{11\,557}{6\,097}$

Utilisons l'algorithme d'Euclide :

$$11\,557 = 1 \times 6\,097 + 5\,460$$
$$6\,097 = 1 \times 5\,460 + 637$$
$$5\,460 = 8 \times 637 + 364$$
$$637 = 1 \times 364 + 273$$
$$364 = 1 \times 273 + 91$$
$$273 = 3 \times 91 + 0$$

Donc $\boxed{PGCD(6\,097; 11\,557) = 91}$

$\frac{11\,557}{6\,097} = \frac{91 \times 127}{91 \times 67} = \boxed{\frac{127}{67}}$

2. Calculer $PGCD(7\,371; 7\,813)$ puis simplifier $\frac{7\,371}{7\,813}$

Utilisons l'algorithme d'Euclide :

$$7\,813 = 1 \times 7\,371 + 442$$
$$7\,371 = 16 \times 442 + 299$$
$$442 = 1 \times 299 + 143$$
$$299 = 2 \times 143 + 13$$
$$143 = 11 \times 13 + 0$$

Donc $\boxed{PGCD(7\,813; 7\,371) = 13}$

$\frac{7\,371}{7\,813} = \frac{13 \times 567}{13 \times 601} = \boxed{\frac{567}{601}}$

3. Prouver que 945 et 1 144 sont premiers entre eux.

Calculons le $PGCD(1\,144; 945)$

Utilisons l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}1\,144 &= 1\times 945+199\\ 945 &= 4\times 199+149\\ 199 &= 1\times 149+50\\ 149 &= 2\times 50+49\\ 50 &= 1\times 49+1\\ 49 &= 1\times 49+0\end{aligned}$$

Comme $PGCD(1\,144; 945) = 1$ $\boxed{\text{les nombres 1 144 et 945 sont premiers entre eux.}}$

EXERCICE 9

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x+4y=-1 & (1)\\ -4x+3y=-7 & (2)\end{cases}$$

On utilise la méthode de combinaisons linéaires.
Multiplions l'équation (1) par 4 et l'équation (2) par 3

$$\begin{cases} 12x+16y=-4 & (1)\\ -12x+9y=-21 & (2)\end{cases}$$

On ajoute les deux équations :

$$\begin{aligned}16y+9y &= -4+(-21)\\ 25y &= -25\\ &\boxed{y=-1}\end{aligned}$$

Multiplions maintenant l'équation (1) par 3 et l'équation (2) par 4

$$\begin{cases} 9x+12y=-3 & (1)\\ -16x+12y=-28 & (2)\end{cases}$$

On soustrait les deux équations :

$$\begin{aligned}9x-(-16x) &= -3-(-28)\\ 25x &= 25\\ &\boxed{x=1}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le couple } (1;-1) \text{ est la solution du système.}}$

$$\begin{cases} -x+y=5 & (1)\\ 2x-5y=-3 & (2)\end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution.
Dans l'équation (1) on arrive à $y = 5+x$
Dans l'équation (2) en substituant on trouve

$$\begin{aligned}2x-5(5+x) &= -3\\ 2x-25-5x &= -3\\ -3x &= -3+25\\ -3x &= 22\\ &\boxed{x=-\frac{22}{3}}\end{aligned}$$

Puis dans l'équation (1) on a :

$$y = 5-\frac{22}{3} = \frac{15}{3}-\frac{22}{3}$$
$$\boxed{y=-\frac{7}{3}}$$

$\boxed{\text{Le couple } \left(-\frac{22}{3};-\frac{7}{3}\right) \text{ et la solution du système.}}$

$$\begin{cases} 5x-6y=10 & (1)\\ -7x+4y=0 & (2)\end{cases}$$

On utilise la méthode de combinaisons linéaires.
Multiplions l'équation (1) par 7 et l'équation (2) par 5

$$\begin{cases} 35x-42y=70 & (1)\\ -35x+20y=0 & (2)\end{cases}$$

On ajoute les deux équations :

$$\begin{aligned}-42y+20y &= 70\\ -22y &= 70\\ &\boxed{y=-\frac{70}{22}}\end{aligned}$$

Multiplions l'équation (1) par 2 et l'équation (2) par 3

$$\begin{cases} 10x-12y=20 & (1)\\ -21x+12y=0 & (2)\end{cases}$$

On ajoute les deux équations :

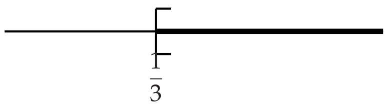
$$10x - 21x = 20$$
$$-11x = 20$$
$$\boxed{x = -\frac{20}{11}}$$

$$\boxed{\text{Le couple } \left(-\frac{20}{11}; -\frac{70}{22}\right) \text{ est la solution du système.}}$$

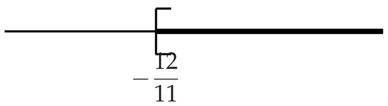
EXERCICE 10

Résoudre les inéquations suivantes :

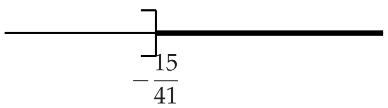
$$7x - 4 \geqslant 4x - 3$$
$$7x - 4x \geqslant -3 + 4$$
$$3x \geqslant 1$$
$$x \geqslant \frac{1}{3}$$



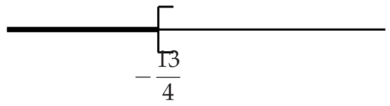
$$-6x + 5 \leqslant 5x - 7$$
$$-6x - 5x \leqslant -7 - 5$$
$$-11x \leqslant -12$$
$$x \geqslant \frac{-12}{-11}$$
$$x \geqslant \frac{12}{11}$$



$$7(3x - 1) > 4(2 - 5x)$$
$$21x - 7 > 8 - 20x$$
$$21x + 20x > 8 + 7$$
$$41x > 15$$
$$x > \frac{15}{41}$$



$$5(2x + 5) - 2x + 1 < 0$$
$$10x + 25 - 2x + 1 < 0$$
$$8x + 26 < 0$$
$$8x < -26$$
$$x < \frac{26}{8}$$
$$x < \frac{13}{4}$$



EXERCICE 11

1. Déterminer la fonction linéaire f telle que $f(2) = -5$

f est de la forme $f(x) = ax$ il faut trouver le coefficient de proportionnalité a
Comme $f(2) = -5$ on a $2a = -5$ et donc $a = -\frac{5}{2}$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } f(x) = -\frac{5}{2}x}$$

2. Déterminer la fonction affine g telle que
$g(-1) = 7$ et $g(3) = -5$

g est de la forme $g(x) = ax + b$

On sait que le coefficient directeur $a = \dfrac{g(-1) - g(3)}{-1 - 3} = \dfrac{7 - (-5)}{-4} = \dfrac{12}{-4} = -3$

Donc $g(x) = -3x + b$, reste à trouver l'ordonnée à l'origine b.
Or $g(-1) = 7$ donc $-3 \times (-1) + b = 7$ d'où $3 + b = 7$ et $b = 4$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ a pour expression } g(x) = -3x + 4}$$

3. Déterminer la fonction affine h telle que
$h(2) = 1$ et $h(1) = 2$

h est de la forme $h(x) = ax + b$

On sait que le coefficient directeur $a = \dfrac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \dfrac{1 - 2}{1} = -1$

Donc $h(x) = -x + b$, reste à trouver l'ordonnée à l'origine b.
Or $h(2) = 1$ donc $-2 + b = 1$ d'où $b = 3$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ et } h(x) = -x + 3}$$

Index