Arithmétique

La division euclidienne

Si a et b sont deux nombres entiers non nuls tels que $a \geqslant b$
Alors il existe deux nombres q et r vérifiant :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r \leq b$$

Cette égalité correspond à **la division euclidienne** de a par b.
b est le diviseur, q est le quotient et r le reste.

$$\begin{array}{r|l} 876 & 67 \\ \cline{2-2} -67 & 13 \\ 206 & \\ -201 & \\ 5 & \end{array}$$

donc $876 = 67 \times 13 + 5$

Diviseurs et multiples

Si le reste de la division de a par b est nul, c'est à dire si il existe un entier q tel que $a = b \times q$
Alors on dit que a est un **multiple** de b et b est un **diviseur** de a.

$156 = 12 \times 13$

12 est un diviseur de 156 — *156 est un multiple de 12*

13 est un diviseur de 156 — *156 est un multiple de 13*

PGCD

Deux nombres entiers non nuls ont toujours au moins un diviseur commun : le nombre 1.

On appelle PGCD de deux nombres entiers non nuls le plus grand diviseur commun à ces deux nombres entiers.
On le note PGCD(a;b)

Nombres premiers entre eux

Deux nombres entiers sont premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun est 1.
Deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD vaut 1

Une fraction est irréductible si elle n'est pas simplifiable.
Une fraction est irréductible si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Algorithme des soustractions successives

Algorithme d'Euclide

Pour calculer le PGCD(a;b) où a>b

- effectuer la division euclidienne de a par b;
- si le reste est nul alors b est le PGCD
- sinon on recommence la première étape en divisant le diviseur par le reste jusqu'à obtenir un reste nul.

Le PGCD est alors le dernier reste non nul.

Comparons les deux méthodes en calculant $PGCD(1752;1241)$

Algorithme d'Euclide	*Algorithme des soustractions*
$1752 = 1241 \times 1 + 511$	$1752 - 1241 = 511$
$1241 = 511 \times 2 + 219$	$1241 - 511 = 730$
$511 = 219 \times 2 + 73$	$730 - 511 = 219$
$219 = 73 \times 3 + 0$	$511 - 219 = 292$
	$292 - 219 = 73$
	$146 - 73 = 73$
	$73 - 73 = 0$

Donc $PGCD(1752;1241) = 73$

Nombres premiers

Un nombre entier supérieur à 1 ayant pour seuls diviseurs 1 et lui-même est **un nombre premier**.