Devoir maison

Ceci est un travail personnel à rédiger avec précision. Il demande environ 1h30 de travail sérieux. Les figures doivent apparaître dans votre copie. Ne vous y prenez pas au dernier moment. Le défi ne fait pas partie du devoir... essayez quand même !
Le problème fait appel aux connaissances de quatrième : droites remarquables du triangle, inscription du triangle rectangle dans un cercle... mais aussi à des compétences de cinquième sur les parallélogrammes !

Problème (Brevet 2001)

1° Tracer un segment $[BC]$ tel que $BC = 15\ cm$.
(Feuille A4 au format paysage en centrant le segment $[BC]$)
Placer un point A tel que $AB = 9\ cm$ et $AC = 12\ cm$.

2° Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

3° Placer le milieu M de $[BC]$. Tracer le cercle diamètre $[AB]$.
Ce cercle recoupe le segment $[BC]$ en D et le segment $[AM]$ en E.

Compléter la figure.

4° Démontrer que les triangles ABE et ABD sont rectangles.

5° Construire le point F, symétrique du point E par rapport au point M.

6° Démontrer que le quadrilatère $BECF$ est un parallélogramme.

7° En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles, puis que les droites (AF) et (CF) sont perpendiculaires.

8° Soit H le point d'intersection des droites (AD) et (BE).
Soit K le point d'intersection des droites (AD) et (CF).

Que représentent les droites (AD) et (BE) pour le triangle ABM ?

9° En déduire que les droites (HM) et (AB) sont perpendiculaires.

10° Démontrer que les droites (KM) et (AC) sont perpendiculaires.

11° On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (MH).
On appelle J le point d'intersection des droites (AC) et (KM).

Démontrer que le quadrilatère $AIMJ$ est un rectangle.

En déduire que le triangle HMK est rectangle.

Correction
Problème de géométrie du brevet des collèges 2001

1.

2. Nous allons utiliser **la réciproque du théorème de Pythagore**

> **La réciproque du théorème de Pythagore**
>
> **Si** dans un triangle la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés est égale au carré de la longueur du plus grand côté **alors** ce triangle est rectangle.

Comparons $AB^2 + AC^2$ et BC^2

$AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2$	$BC^2 = 15^2$
$AB^2 + AC^2 = 81 + 144$	
$AB^2 + AC2 = 225$	$BC^2 = 225$

Comme $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ABC est rectangle en A.

3.

4. On va utiliser le théorème d'inscription d'un triangle dans un cercle.

> **Théorème d'inscription d'un triangle dans un cercle**
>
> **Si** le cercle circonscrit d'un triangle a pour diamètre un de ces côtés **alors** ce triangle est rectangle.

Le triangle ABE est inscrit dans un cercle dont le diamètre est le côté $[AB]$.
D'après le théorème précédent, le triangle ABE est rectangle en E.

Le triangle ABD est inscrit dans un cercle dont le diamètre est le côté $[AB]$.
D'après le théorème précédent, le triangle ABD est rectangle en D.

5.

6.

> **Théorème**
>
> **Si** les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu **alors** ce quadrilatère est un parallèlogramme.

Les diagonales du quadrilatères $BECF$ sont $[BC]$ et $[EF]$.
M est le milieu de $[BC]$
M est le milieu de $[EF]$ puisque E et F sont symétriques par rapport à M.
En utilisant le théorème précédent on prouve que comme les diagonales de $BECF$ se coupent en leur milieu M, $BECF$ est un parallélogramme.

7.
Comme $BECF$ est un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles donc $(BE)//(CF)$

Comme ABE est un triangle rectangle en E d'après la question **4.**, $(BE) \perp (AE)$.
Comme A, E et F sont alignés, $(BE) \perp (AF)$
On vient de voir que $(BE)//(CF)$

> **Théorème**
>
> **Si** deux droites sont parallèles **alors** toute droite perpendiculaire à l'une des droites est perpendiculaire à l'autre.

Ainsi on en déduit que $(AF) \perp (CF)$

8.
La droite (AD) est perpendiculaire à (BM) et passe par A.
La droite (BE) est perpendiculaire à (AM) et passe par B.
Les droites (AD) et (BE) sont donc respectivement les hauteurs issues de A et B du triangle ABM.

9.

> **Propriété**
>
> Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Les deux hauteurs (AD) et (BE) du triangle ABM sont sécantes en H.
Ainsi H est **l'orthocentre** du triangle ABM.
D'après la propriété précédente, la troisième hauteur du triangle ABM passe par H.
Cette troisième hauteur est issue de M, il s'agit de la droite (HM).
Pour cette raison $(HM) \perp (AB)$

10. Nous allons recommencer le raisonnement précédent dans le triangle AMC

Comme $(AD) \perp (BC)$ on en déduit que $(AK) \perp (AM)$
Donc (AK) est la hauteur issue de A du triangle AMC

Comme $(CF) \perp (AF)$ (question **7.**) on en déduit que $(CK) \perp (AM)$
Donc (CK) est la hauteur issue de C du triangle AMC

Les deux hauteurs (AK) et (CK) du triangle AMC se coupent en K donc K est **l'orthocentre** du triangle AMC.
Ainsi la troisième hauteur issue de M est (KM).
On en déduit que $(KM) \perp (AC)$

11.
D'après la question **9.** $(HM) \perp (AB)$ donc $(AI) \perp (IM)$
D'après la question **10.** $(KM) \perp (AC)$ donc $(AJ) \perp (JM)$
D'après la question **2.** ABC est rectangle en A donc $(AI) \perp (AJ)$

> **Propriété**
>
> **Si** un quadrilatère possède 3 angles droits **alors** c'est un rectangle.

$AIMJ$ a trois angles droits donc c'est un rectangle.

Comme $AIMJ$ est un rectangle, il y a un angle droit en M. Ainsi les droites (IM) et (JM) sont perpendiculaires.

Le triangle HMK est donc rectangle.