

Sujet de mathématiques du brevet des collèges

POLYNÉSIE

Septembre 2014

Durée : 2h00

Calculatrice autorisée

Indication portant sur l'ensemble du sujet.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche, elle sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1

3 points

Voici trois calculs effectués à la calculatrice. Détailler ces calculs afin de comprendre les résultats donnés par la calculatrice :

$$\text{Calcul n° 1 : } \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Calcul n° 2 : } \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Calcul n° 3 : } 8 \times 10^{15} + 2 \times 10^{15} = 1 \times 10^{16}$$

Exercice 2

4 points

Pour choisir un écran de télévision, d'ordinateur ou une tablette tactile, on peut s'intéresser :

- à son format qui est le rapport longueur de l'écran largeur de l'écran
- à sa diagonale qui se mesure en pouces. Un pouce est égal à 2,54 cm.

1. Un écran de télévision a une longueur de 80 cm et une largeur de 45 cm.

S'agit-il d'un écran de format $\frac{4}{3}$ ou $\frac{16}{9}$?

2. Un écran est vendu avec la mention « 15 pouces ». On prend les mesures suivantes : la longueur est 30,5 cm et la largeur est 22,9 cm.

La mention « 15 pouces » est-elle bien adaptée à cet écran ?

3. Une tablette tactile a un écran de diagonale 7 pouces et de format $\frac{4}{3}$. Sa longueur étant égale à 14,3 cm, calculer sa largeur, arrondie au mm près.

Exercice 3

3 points

1. Une bouteille opaque contient 20 billes dont les couleurs peuvent être différentes. Chaque bille a une seule couleur. En retournant la bouteille, on fait apparaître au goulot une seule bille à la fois. La bille ne peut pas sortir de la bouteille.

Des élèves de troisième cherchent à déterminer les couleurs des billes contenues dans la bouteille et leur effectif. Ils retournent la bouteille 40 fois et obtiennent le tableau suivant :

Couleur apparue	rouge	bleue	verte
Nombre d'apparitions de la couleur	18	8	14

Ces résultats permettent-ils d'affirmer que la bouteille contient exactement 9 billes rouges, 4 billes bleues et 7 billes vertes ?

2. Une seconde bouteille opaque contient 24 billes qui sont soit bleues, soit rouges, soit vertes.

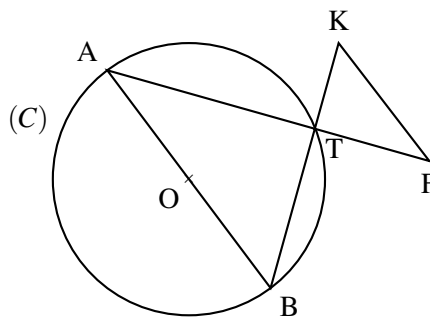
On sait que la probabilité de faire apparaître une bille verte en retournant la bouteille est égale à $\frac{3}{8}$ et la probabilité de faire apparaître une bille bleue est égale à $\frac{1}{2}$. Combien de billes rouges contient la bouteille ?

Exercice 4

4 points

La figure ci-dessous, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, représente un cercle (C) et plusieurs segments. On dispose des informations suivantes :

- $[AB]$ est un diamètre du cercle (C) de centre O et de rayon $7,5$ cm.
- K et F sont deux points extérieurs au cercle (C) .
- Les segments $[AF]$ et $[BK]$ se coupent en un point T situé sur le cercle (C) .
- $AT = 12$ cm, $BT = 9$ cm, $TF = 4$ cm, $TK = 3$ cm.



1. Démontrer que le triangle ATB est rectangle.
2. Calculer la mesure de l'angle \widehat{BAT} arrondie au degré près.
3. Les droites (AB) et (KF) sont-elles parallèles ?
4. Calculer l'aire du triangle TKF .

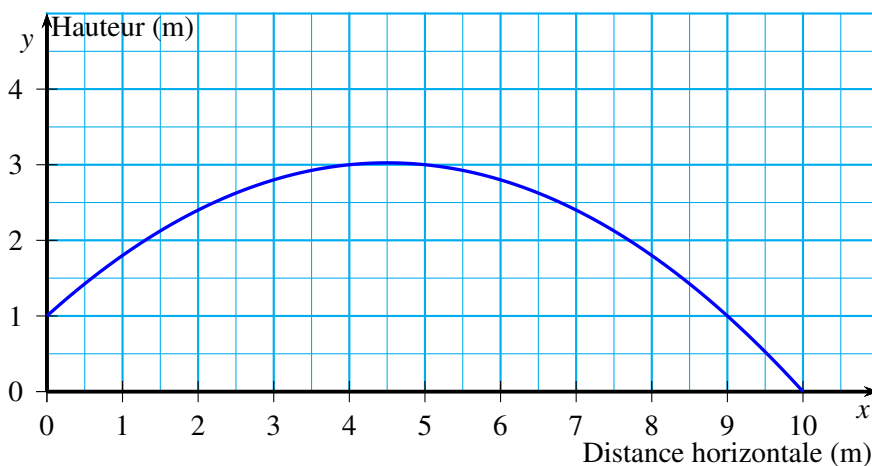
Exercice 5

4 points

Pour son anniversaire, Julien a reçu un coffret de tir à l'arc.

Il tire une flèche. La trajectoire de la pointe de cette flèche est représentée ci-dessous.

La courbe donne la hauteur en mètres (m) en fonction de la distance horizontale en mètres (m) parcourue par la flèche.



1. Dans cette partie, les réponses seront données grâce à des **lectures graphiques**. Aucune justification n'est attendue sur la copie.
 - (a) De quelle hauteur la flèche est-elle tirée ?
 - (b) À quelle distance de Julien la flèche retombe-t-elle au sol ?
 - (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la flèche ?
2. Dans cette partie, les réponses seront justifiées par des **calculs** :

La courbe ci-dessus représente la fonction f définie par $f(x) = -0,1x^2 + 0,9x + 1$.

 - (a) Calculer $f(5)$.
 - (b) La flèche s'élève-t-elle à plus de 3 m de hauteur ?

Exercice 6

6 points

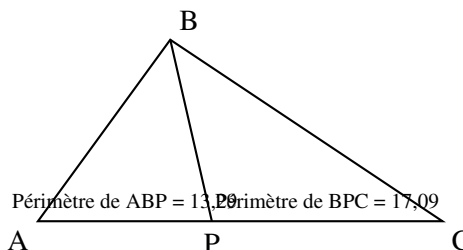
ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $BC = 7,6$ cm et $AC = 9,2$ cm.

1. Tracer ce triangle en vraie grandeur.
2. ABC est-il un triangle rectangle ?

3.

Avec un logiciel, on a construit ce triangle, puis :

- on a placé un point P mobile sur le côté [AC] ;
- on a tracé les triangles ABP et BPC ;
- on a affiché le périmètre de ces deux triangles.



- (a) On déplace le point P sur le segment [AC].
Où faut-il le placer pour que la distance BP soit la plus petite possible ?
- (b) On place maintenant le point P à 5 cm de A.
Lequel des triangles ABP et BPC a le plus grand périmètre ?
- (c) On déplace à nouveau le point P sur le segment [AC].
Où faut-il le placer pour que les deux triangles ABP et BPC aient le même périmètre ?

Exercice 7

5 points

On considère ces deux programmes de calcul :

Programme A :

Choisir un nombre
Soustraire 0,5
Multiplier le résultat par le double
du nombre choisi au départ

Programme B :

Choisir un nombre
Calculer son carré
Multiplier le résultat par 2
Soustraire à ce nouveau résultat
le nombre choisi au départ

1. (a) Montrer que si on applique le programme A au nombre 10, le résultat est 190.
(b) Appliquer le programme B au nombre 10.
2. On a utilisé un tableur pour calculer des résultats de ces deux programmes. Voici ce qu'on a obtenu :

	A	B	C
1	Nombre choisi	Programme A	Programme B
2	1	1	1
3	2	6	6
4	3	15	15
5	4	28	28
6	5	45	45
7	6	66	66

- (a) Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule C2 puis recopiée vers le bas ?
 - (b) Quelle conjecture peut-on faire à la lecture de ce tableau ?
 - (c) Prouver cette conjecture.
3. Quels sont les deux nombres à choisir au départ pour obtenir 0 à l'issue de ces programmes ?

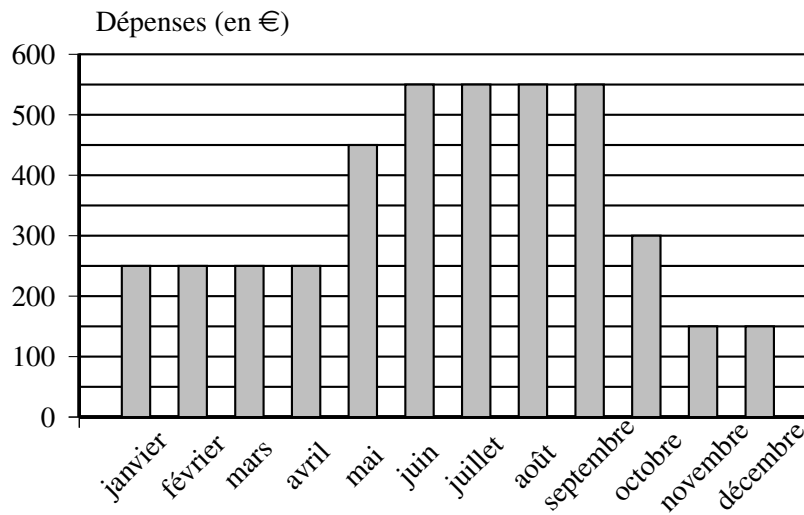
Exercice 8

6 points

Un couple a acheté une maison avec piscine en vue de la louer. Pour cet achat, le couple a effectué un prêt auprès de sa banque. Ils louent la maison de juin à septembre et la maison reste inoccupée le reste de l'année.

Information 1 : Dépenses liées à cette maison pour l'année 2013

Le diagramme ci-dessous présente, pour chaque mois, le total des dépenses dues aux différentes taxes, aux abonnements (électricité, chauffage, eau, internet), au remplissage et au chauffage de la piscine.



Information 2 : Remboursement mensuel du prêt

Chaque mois, le couple doit verser 700 euros à sa banque pour rembourser le prêt.

Information 3 : Tarif de location de la maison

- Les locations se font du samedi au samedi.
- Le couple loue sa maison du samedi 7 juin au samedi 27 septembre 2014.
- Les tarifs pour la location de cette maison sont les suivants :

Début	Fin	Nombre de semaines	Prix de la location
07/06/2014	05/07/2014	4	750 euros par semaine
05/07/2014	23/08/2014	7	... euros par semaine
23/08/2014	27/09/2014	5	750 euros par semaine

Pour l'année 2014, avec l'augmentation des différents tarifs et taxes, le couple prévoit que le montant des dépenses liées à la maison sera 6 % plus élevé que celui pour 2013.

Expliquer pourquoi le total des dépenses liées à la maison s'élèvera à 4 505 € en 2014.

On suppose que le couple arrive à louer sa maison durant toutes les semaines de la période de location. À quel tarif minimal (arrondi à la dizaine d'euros) doit-il louer sa maison entre le 5/07 et 23/08 pour couvrir les frais engendrés par la maison sur toute l'année 2014 ?

Correction

POLYNÉSIE - Septembre 2014

Exercice 1

Calcul 1. $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$

Calcul 2. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

Calcul 3. $8 \times 10^{15} + 2 \times 10^{15} = 10 \times 10^{15} = 1 \times 10^{16}$

Exercice 2

1. $\frac{80 \text{ cm}}{45 \text{ cm}} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9}$

2. Il faut calculer la longueur de la diagonale d'un rectangle qui a une longueur de 30,5 cm et une largeur de 22,9 cm. D'après le **théorème de Pythagore**

$$30,5^2 + 22,9^2 = 930,25 + 524,41 = 1\,454,66$$

La diagonale mesure donc $\sqrt{1\,454,66} \approx 38,14 \text{ cm}$

Comme 1 pouce mesure 2,54 cm, $38,14 \text{ cm} \div 2,54 \text{ cm} \approx 15,02$

La mention 15 pouces est donc bien adaptée à cet écran.

3. Si on note l sa largeur on a $\frac{14,3 \text{ cm}}{l} = \frac{4}{3}$
On utilise l'égalité des produits en croix : $14,3 \text{ cm} \times 3 = 4l$

Donc $l = \frac{42,9 \text{ cm}}{4} \approx 10,7 \text{ cm}$

Exercice 3

1. Non car ce sont des statistiques observées sur 40 tirages. Même si on sait qu'en répétant l'expérience un très grand nombre de fois on approche de la véritable répartition, ces 40 tirages ne suffisent pas à déterminer de manière sûre la répartition des billes dans la bouteille.

2. $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

La probabilité de faire apparaître une bille rouge est de $\frac{1}{8}$

Comme il y a 24 billes en tout dans la bouteille : $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$

Il y a 3 billes rouges dans la bouteille.

Exercice 4

1. On sait que si le triangle circonscrit à un triangle a pour diamètre un des côtés du triangle alors ce triangle est rectangle.

Le triangle ATB est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$ donc le triangle ATB est rectangle en B .

2. Dans le triangle ATB rectangle en T .

$$\cos \widehat{BAT} = \frac{AT}{AB} = \frac{12}{15} = 0,6$$

À la calculatrice on trouve $\widehat{BAT} \approx 53^\circ$

3. Comparons $\frac{TA}{TF}$ et $\frac{TB}{TK}$
 $\frac{TA}{TF} = \frac{12}{4} = 3$ et $\frac{TB}{TK} = \frac{9}{3} = 3$

Comme $\frac{TA}{TF} = \frac{TB}{TK}$ et que les points T, A et F sont alignés et dans le même ordre que les points alignés T, B et K , d'après

la **réciproque du théorème de Thalès** les droites (AB) et (FK) sont parallèles.

4. Comme ABT est rectangle en T , les angles \widehat{ATB} et \widehat{FTK} étant opposés par le sommet, il sont égaux.

FTK est donc rectangle en T

L'aire de FTK est donc $\frac{FT \times KT}{2} = \frac{4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2$

Exercice 5

1.a La flèche est tirée d'une hauteur de 1 m

1.b La flèche retombe à 10 m de Julien

1.c La flèche atteint une hauteur maximale de 3 m

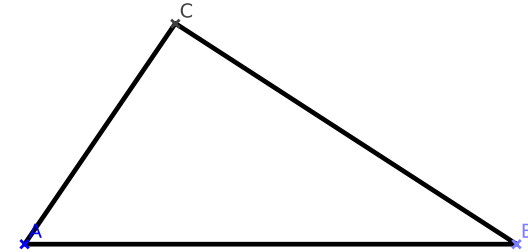
2.a $f(5) = -0,1 \times 5^2 + 0,9 \times 5 + 1 = -2,5 + 4,5 + 1 = 3$

2.b $f(4,5) = -0,1 \times 4,5^2 + 0,9 \times 4,5 + 1 = 3,025$

Oui la flèche dépasse les 3 m de hauteur quand elle est située à 4,5 m de Julien

Exercice 6

1.



2. Comparons $BA^2 + BC^2$ et AC^2

$$BA^2 + BC^2 = 5^2 + 7,6^2 = 82,76 \text{ et } AC^2 = 9,2^2 = 84,64$$

Comme $BA^2 + BC^2 \neq AC^2$ d'après la **contraposée du théorème de Pythagore** le triangle ABC n'est pas rectangle.

3.a Il faut placer P de telle manière que (BP) soit perpendiculaire à (AC) , c'est à dire que (BP) doit être une hauteur du triangle.

3.b On ne connaît pas la mesure BP mais comme cette mesure est partagée entre les deux triangles, il n'est pas utile de la calculer.

$$BA + AP = 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \text{ et } BC + CP = 7,6 \text{ cm} + 4,2 \text{ cm} = 11,8 \text{ cm}$$

Le triangle BPC a un périmètre supérieur à celui de ABP dans ce cas.

3.c Notons x la mesure de AP telle que les deux périmètres soient égaux.

$$BA + AP = 5 + x \text{ et } BC + CP = 7,6 + (9,2 - x) = 16,8 - x$$

$$\text{Résolvons } 5 + x = 16,8 - x$$

$$5 + x = 16,8 - x$$

$$2x = 16,8 - 5$$

$$2x = 11,8$$

$$x = 5,9$$

Vérifions si $AP = 5,9 \text{ cm}$ alors $CP = 3,3 \text{ cm}$ et $BA + AP = 5 \text{ cm} + 5,9 \text{ cm} = 10,9 \text{ cm}$ et $BC + CP = 7,6 \text{ cm} + 3,3 \text{ cm} = 10,9 \text{ cm}$

En plaçant P à $5,9 \text{ cm}$ de A les deux périmètres sont égaux.

Exercice 7

1.a $10 - 0,5 = 9,5$ et $9,5 \times 2 \times 10 = 190$

1.b $10^2 = 100$, $2 \times 100 = 200$ et $200 - 10 = 190$

2.a On a tapé dans C2 $= 2 * A2^2 - A2$

2.b On peut faire la conjecture que ces deux programmes donnent les mêmes résultats pour tous les nombres de départ choisis.

2.c Notons x le nombre de départ.

Pour le programme A on obtient : $(x - 0,5) \times 2 \times x = 2x(x - 0,5) = 2x^2 - x$

Pour le programme B on obtient : $2x^2 - x$

La conjecture précédente est donc vraie pour tous les nombres de départ.

3. Il faut résoudre $2x^2 - x = 0$ ou encore $2x(x - 0,5) = 0$

La forme factorisée est la plus adaptée à ce problème.

En effet on sait que **un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul**

Il y a donc deux possibilités : $2x = 0$ c'est à dire $x = 0$ ou $x - 0,5 = 0$ c'est à dire $x = 0,5$.

Pour 0 et 0,5 ces deux programmes donnent 0

Exercice 8

Calculons le total des charges pour 2013

$$4 \times 250 + 450 + 4 \times 550 + 300 + 2 \times 150 = 4\,250$$

Si on tient compte de l'augmentation de 6% on obtient :

$$4\,250 \times 1,06 = 4\,505$$

Les charges pour 2014 sont bien de 4 505 euros.

Il y a 7 semaines de location.

$$4\,505 \div 7 \approx 643,57$$

Il faudra louer au minimum 643,57 euros par semaine.