# Sujet de mathématiques du brevet des collèges

## PONDICHÉRY

## Avril 2014

Durée : 2h00

Calculatrice autorisée

**EXERCICE 1** **6 POINTS**

Emma et Arthur ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.

1. Arthur propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles.
   Chaque corbeille doit avoir la même composition.
   Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées ?
2. Emma et Arthur changent d'avis et décident de proposer des petits ballotins* dont la composition est identique. Ils souhaitent qu'il ne leur reste pas de dragées.
   (a) Emma propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
   (b) Ils se mettent d'accord pour faire un maximum de ballotins.
   Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?

** Un ballotin est un emballage pour confiseries, une boîte par exemple.*

**EXERCICE 2** **5 POINTS**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées, mais une seule est exacte.*
*Toute réponse exacte vaut 1 point.*
*Toute réponse inexacte ou toute absence de réponse n'enlève pas de point.*

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et, sans justifier, recopier la réponse exacte (A ou B ou C).

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1.** $\sqrt{(-5)^2}$ | n'existe pas | est égal à $-5$ | est égal à 5 |
| **2.** Si deux surfaces ont la même aire alors | elles sont superposables | elles ont le même périmètre | leurs périmètres ne sont pas forcément égaux. |
| **3.** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = 3x - (2x+7) + (3x+5)$ | $f$ est une fonction affine | $f$ est une fonction linéaire | $f$ n'est pas une fonction affine. |
| **4.** Hicham a récupéré les résultats d'une enquête sur les numéros qui sont sortis ces dernières années au loto. Il souhaite jouer lors du prochain tirage. | Il vaut mieux qu'il joue les numéros qui sont souvent sortis | Il vaut mieux qu'il joue les numéros qui ne sont pas souvent sortis. | L'enquête ne peut pas l'aider. |
| **5.** Une expression factorisée de $(x-1)^2 - 16$ est ... | $(x+3)(x-5)$ | $(x-4)(x+4)$ | $x^2 - 2x - 15$ |

**EXERCICE 3** **3 POINTS**

« Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10. »

Est-ce vrai ? Justifier.
**Si travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.**

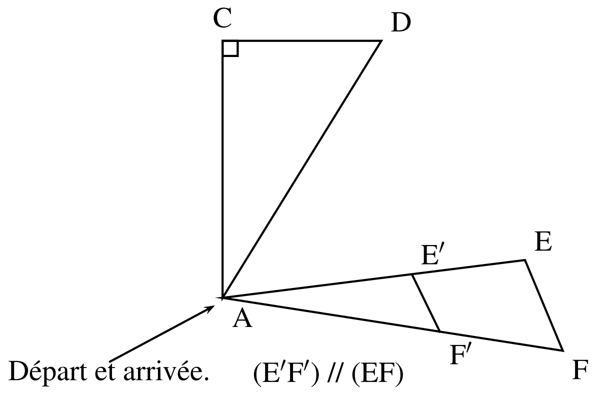
**EXERCICE 4** **7 POINTS**

Une commune souhaite aménager des parcours de santé sur son territoire. On fait deux propositions au conseil municipal, schématisées ci-dessous :

- le parcours ACDA
- le parcours AEFA

Ils souhaitent faire un parcours dont la longueur s'approche le plus possible de 4 km.
Peux-tu les aider à choisir le parcours ? Justifie.

*Attention : la figure proposée au conseil municipal n'est pas à l'échelle, mais les codages et les dimensions données sont correctes.*

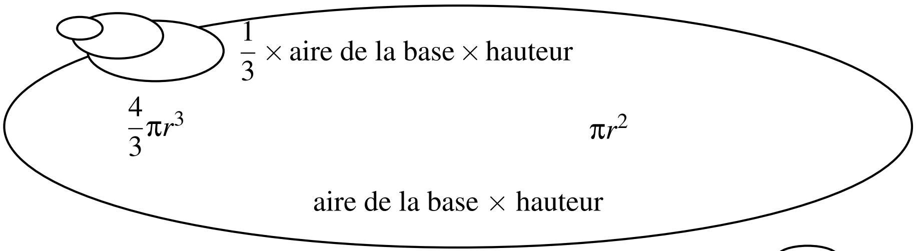



AC = 1,4 km
CD = 1,05 km
AE′ = 0,5 km
AE = 1,3 km
AF = 1,6 km
E′F′ = 0,4 km

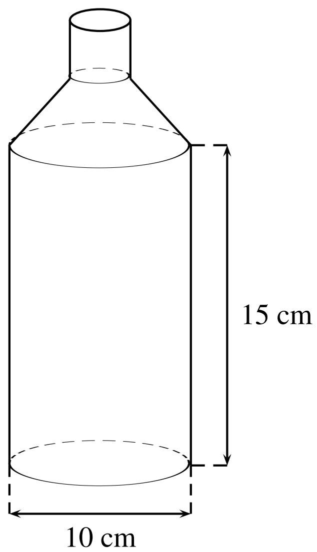
L'angle $\widehat{A}$ dans le triangle AEF vaut 30 °

**EXERCICE 5** **8 POINTS**

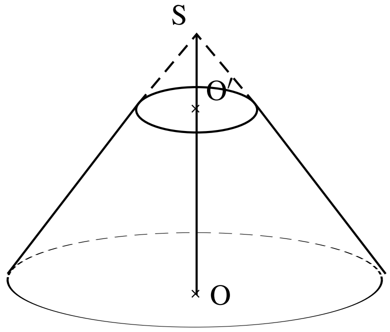
*Pense-bête : toutes les formules données ci-dessous correspondent bien à des formules d'aires ou de volumes. On ne sait pas à quoi elles correspondent, mais elles peuvent quand même être utiles pour résoudre l'exercice ci-dessous.*




Voici une bouteille constituée d'un cylindre et d'un tronc de cône surmonté par un goulot cylindrique. La bouteille est pleine lorsqu'elle est remplie jusqu'au goulot.
Les dimensions sont notées sur le schéma.
**1.** Calculer le volume exact de la partie cylindrique de la bouteille puis en donner un arrondi au cm$^3$.



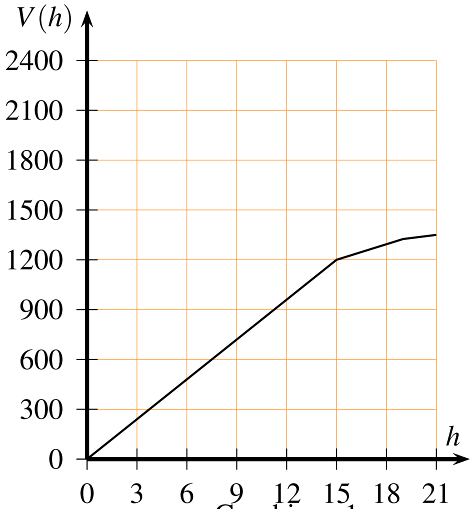
**2.** Pour obtenir le tronc de cône, on a coupé un cône par un plan parallèle à la base passant par O′. La hauteur SO du grand cône est de 6 cm et la hauteur SO’ du petit est égale à 2 cm. Le rayon de la base du grand cône est de 5 cm.



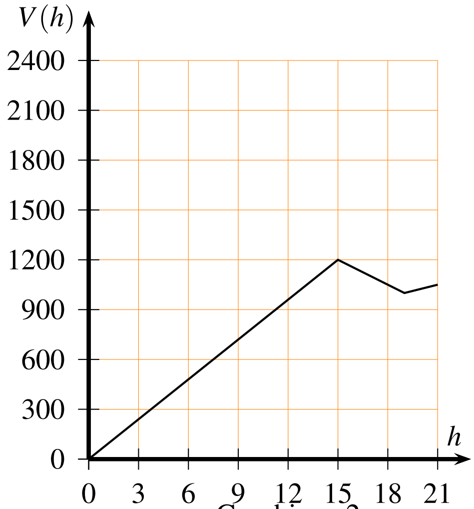

**a.** Calculer le volume $V_1$ du grand cône de hauteur SO (donner la valeur exacte).

**b.** Montrer que le volume $V_2$ du tronc de cône est égal à $\dfrac{1\,300\pi}{27}$ cm$^3$. En donner une valeur arrondie au cm$^3$.

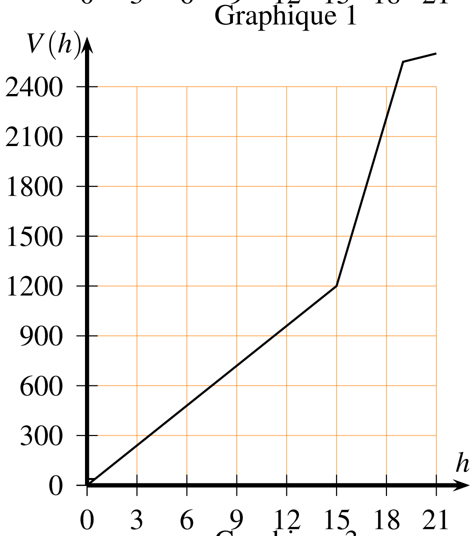
**3.** Parmi les quatre graphiques ci-dessous, l’un d’entre eux représente le volume $V(h)$ de la bouteille en fonction de la hauteur $h$ de remplissage du bidon.
Quel est ce graphique ? Pourquoi les autres ne sont-ils pas convenables ?



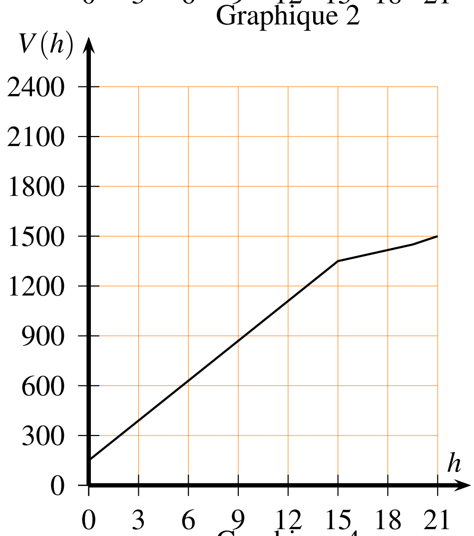
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4

## EXERCICE 6 — 7 POINTS

Voici le classement des médailles d'or reçues par les pays participant aux jeux olympiques pour le cyclisme masculin (Source : Wikipédia).

**Bilan des médailles d'or de 1896 à 2008**

| Nation | Or |
|---|---|
| France | 40 |
| Italie | 32 |
| Royaume-Uni | 18 |
| Pays-Bas | 15 |
| États-Unis | 14 |
| Australie | 13 |
| Allemagne | 13 |
| Union soviétique | 11 |
| Belgique | 6 |
| Danemark | 6 |
| Allemagne de l'Ouest | 6 |
| Espagne | 5 |
| Allemagne de l'Est | 4 |

| Nation | Or |
|---|---|
| Russie | 4 |
| Suisse | 3 |
| Suède | 3 |
| Tchécoslovaquie | 2 |
| Norvège | 2 |
| Canada | 1 |
| Afrique du Sud | 1 |
| Grèce | 1 |
| Nouvelle-Zélande | 1 |
| Autriche | 1 |
| Estonie | 1 |
| Lettonie | 1 |
| Argentine | 1 |

1. Voici un extrait du tableur :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Nombre de médailles d'or | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 11 | 13 | 14 | 15 | 18 | 32 | 40 | |
| 2 | Effectif | 8 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 26 |

   Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule O2 pour obtenir le nombre total de pays ayant eu une médaille d'or ?

2. (a) Calculer la moyenne de cette série (arrondir à l'unité).

   (b) Déterminer la médiane de cette série.

   (c) En observant les valeurs prises par la série, donner un argument qui explique pourquoi les valeurs de la moyenne et de la médiane sont différentes.

3. Pour le cyclisme masculin, 70 % des pays médaillés ont obtenu au moins une médaille d'or. Quel est le nombre de pays qui n'ont obtenu que des médailles d'argent ou de bronze (arrondir le résultat à l'unité) ?

**Si la travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de recherche.**
**Elle sera prise en compte dans l'évaluation.**

# Correction

## Pondichéry - Avril 2014

**Exercice 1**

**1.** $3\ 003 = 20 \times 150 + 3$ et $3\ 731 = 20 \times 186 + 11$

Il restera 3 dragées au chocolat et 11 dragées aux amandes soit $\boxed{\text{14 dragées}}$

**2.a** $3\ 003 = 90 \times 33 + 33$ et $3\ 731 = 90 \times 41 + 41$

Dans ce cas il reste 33 dragées au chocolat et 41 dragée aux amandes soit $\boxed{\text{74 dragées, c'est pire que dans le premier cas !}}$

**2.b** Calculons le $PGCD(3\ 003; 3\ 731)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$3\ 731 = 3\ 003 \times 1 + 728$$

$$3\ 003 = 728 \times 4 + 91$$

$$728 = 91 \times 8$$

Donc $\boxed{PGCD(3\ 003; 3\ 731) = 91}$

$3\ 003 = 91 \times 33$ et $3\ 731 = 91 \times 41$

$\boxed{\text{Ils feront 91 ballotins contenant 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes}}$

**Exercice 2**

**1.** $(-5)^2 = 25$ donc $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ $\boxed{\text{Réponse C}}$

**2.** Deux surfaces de même aire ne sont pas superposables.
Par exemple un carré de 4 $cm$ de côté et un rectangle de 8 $cm$ de longueur par 2 $cm$ de largeur ont la même aire 16 $cm^2$ mais ne sont pas superposables !

Deux surfaces de même aire n'ont par le même périmètre.
L'exemple précédent montre un carré dont le périmètre vaut $4 \times 4\ cm = 16\ cm$ et un rectangle dont le périmètre est $2 \times (8\ cm + 2\ cm) = 20\ cm$ et qui pourtant ont la même aire.

Cela prouve que deux surfaces de même aire n'ont pas forcément le même périmètre.

$\boxed{\text{Réponse C}}$

**3.** $f(x) = 3x - (2x+7) + (3x+5) = 3x - 2x - 7 + 3x + 5 = 4x - 2$

$f$ est une fonction affine. $\boxed{\text{Réponse A}}$

**4.** Le hasard n'a pas de mémoire ! Les numéros déjà sortis au Loto ont la même chance de ressortir que les autres.
Même si vous avez fait 10 fois piles à la suite en lançant une pièce de monnaie équilibrée, la probabilité de faire face la onzième fois reste la même à savoir une chance sur deux !

$\boxed{\text{Réponse C}}$

**5.** $(x-1)^2 - 16 = (x-1)^2 - 4x^2 = [(x-1)+4][(x-1)-4] = (x-1+4)(x-1-4) = (x+3)(x-5)$

$\boxed{\text{Réponse A}}$

**Exercice 3** Notons $n$ l'entier choisi au départ.

Ce programme de calcul revient à faire : $n+3$ , $7(n+3)$ puis $3n+7(n+3)$ et enfin $3n+7(n+3)-21$.
Réduisons cette expression : $3n+7(n+3)-21 = 3n+7n+21-21 = 10n$

$\boxed{10n \text{ est toujours un multiple de 10. C'est donc vrai !}}$

**Exercice 4**

*Étude du parcours ACDA*

$ACD$ est un triangle rectangle en $C$
D'après **le théorème de Pythagore** dans le triangle $ACD$ rectangle en $C$ :

$$CD^2 + CA^2 = AD^2$$

$$1,05^2 + 1,4^2 = AD^2$$

$$1,1025 + 1,96 = AD^2$$

$$AD^2 = 3,0625$$

$$AD = \sqrt{3,0625}$$

$$AD = 1,75$$

$1,05\ km + 1,4\ km + 1,75\ km = 4,2\ km$. $\boxed{\text{La parcours } ACDA \text{ mesure } 4,2\ km}$

*Étude du parcours AEFA*

Dans le triangle $AEF$, $E' \in [AE]$ et $F' \in [AF]$
Comme $(E'F')//(EF)$ d'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AE'}{AE} = \frac{AF'}{AF} = \frac{E'F'}{EF}$$

$$\frac{0,5}{1,3} = \frac{AF'}{1,6} = \frac{0,4}{EF}$$

Donc $EF = \dfrac{0,4 \times 1,3}{0,5} = 1,04$

$1,3\ km + 1,04\ km + 1,6\ km = 3,94\ km$. $\boxed{\text{Le parcours } AEFA \text{ mesure } 3,94\ km}$

$\boxed{\text{Le parcours } AEFA \text{ est plus proche des 4 } km \text{ attendus}}$

PS : Attention la donnée de l'angle $\widehat{A}$ ne servait à rien. Pour utiliser la trigonométrie il aurait fallu que $AEF$ soit rectangle.
Or on ne le sait pas !
A posteriori en utilisant rapidement la réciproque de Pythagore on constate que ce triangle n'est en effet pas rectangle :
$1,3^2 + 1,04^2 = 2,7716$ et $1,6^2 = 2,56$

**Exercice 5**

**1.** La partie cylindrique a pour volume :
$\pi \times (5\ cm)^2 \times 15\ cm = \boxed{375\pi\ cm^3 \approx 1178\ cm^3}$

**2.a** $V_1 = \dfrac{\pi \times (5\ cm)^2 \times 6\ cm}{3} = \boxed{50\pi\ cm^3}$

**2.b** Le petit cône est une réduction du grand cône de coefficient $\dfrac{2\ cm}{6\ cm} = \dfrac{1}{3}$

Son volume est donc $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$ fois celui du grand, c'est à dire 27 fois plus petit.

Le volume du petit cône est donc $\dfrac{V_1}{27} = \dfrac{50\pi}{27}\ cm^3$.

Ainsi $V_2 = V_1 - \dfrac{50\pi}{27} = 50\pi - \dfrac{50\pi}{27} = \dfrac{1350\pi}{27} - \dfrac{50\pi}{27} = \boxed{\dfrac{1300\pi}{27}}$

**3.** Le graphique 4 ne convient pas car pour $h = 0$ il indique $V(0) \approx 150\ cm^3$. Or quand il n'y a pas d'eau le volume est égal à 0.

Le graphique 2 ne convient pas car pour $h > 15$ le volume diminue. C'est impossible ! Le volume d'eau augmente toujours quand la hauteur augmente.

Jusqu'à $h = 15\ cm$, on remplit le cylindre jusqu'à 1 178 $cm^3$. Ensuite on remplit le tronc de cône dont le volume vaut approximativement $\dfrac{1\,300\pi}{27} \approx 151\ cm^3$. Le volume total du bidon est donc d'environ $1\,178\ cm^3 + 151\ cm^3 = 1\,328\ m^3$
Le graphique 3 ne convient pas car le volume maximale est d'environ 2 500 $cm^3$

La graphique 1 correspond à la situation de l'exercice !

**Exercice 6**

**1.** La formule la plus simple est =SOMME(B2 :N2)

On pouvait aussi écrire B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2+K2+L2+M2+N2

**2.a** La moyenne pondérée de cette série est :
$$\frac{1\times8+2\times2+3\times2+4\times2+5\times1+6\times3+11\times1+13\times2+14\times1+15\times1+18\times1+32\times1+40\times1}{26} = \frac{205}{26} \approx \boxed{8}$$

**2.b** L'effectif total est 26, il faut chercher le 13$^{e}$et le 14$^{e}$.
Le 13$^{e}$et le 14$^{e}$ont 4 médailles.

La médiane de la série est 4 médailles

**2.c** La médiane et la moyenne sont très différentes car 2 pays, la France et l'Italie ont a eux seuls 32 et 40 médailles tandis que 8 pays n'ont eu qu'une médaille : c'est ce qui déséquilibre cette série.

Cet écart illustre l'hétérogénéité de cette série !

**3.** Il y a 26 pays ce qui représente 70% de l'ensemble de pays médaillés.
Si on note $x$ le nombre total de pays médaillés, on a donc :
$0,70x = 26$ d'où $x = \dfrac{26}{0,70} \approx 37$
$37 - 26 = 11$

Il y a environ 11 pays qui n'ont obtenus qu'une médaille d'argent ou de bronze !