Sujet de mathématiques du brevet des collèges

Amérique du Sud

Décembre 2015

Durée : 2h00

Calculatrice autorisée
La qualité de la rédaction, l'orthographe et la rédaction comptent pour 4 points.

Indication portant sur l'ensemble du sujet
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée. Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche ; elle sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1 **4 points**

Dans ce questionnaire à choix multiple, pour chaque question, une seule proposition est exacte. Pour chacune des questions, écrire le numéro de la question et recopier la bonne réponse. Aucune justification n'est attendue. Une réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne retire aucun point.*

Questions	Propositions
Question 1 $\left(4\sqrt{2}\right)^2$ est	1. égal à 16 2. le PGCD de 128 et de 96 3. égal à $8\sqrt{2}$
Question 2 La médiane de la série de valeurs : 7 ; 8 ; 8 ; 12 ; 12 ; 14 ; 15 ; 15 ; 41	1. est supérieure à la moyenne de cette série. 2. est inférieure à la moyenne de cette série. 3. est égale à la moyenne de cette série.
Question 3 Dans une classe de 30 élèves, les $\frac{2}{3}$ des élèves viennent en bus. Combien d'élèves ne viennent pas en bus ?	1. $\frac{2}{3} \times 30$ 2. $1 - \frac{2}{3} \times 30$ 3. $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 30$
Question 4 Le système $\left\{\begin{array}{rcr} 2x + y & = & 11 \\ x - 3y & = & -12 \end{array}\right.$ a pour solution :	1. le couple (3,5 ; 4) 2. le couple $(-12\ ;\ 0)$ 3. le couple (3 ; 5)

Exercice 2 **4 points**

On considère deux fonctions
$f : x \rightarrow -8x$ et $g : x \rightarrow -6x + 4$
On utilise un tableur pour calculer des images par f et g.

	A	B	C	D	E
1	x	-3	0	2	
2	$f(x)=-8x$	24	0	-16	-24
3	$g(x)=-6x+4$	22	4	-8	-14

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 avant de la recopier vers la droite ?
2. Le contenu de la cellule E1 a été effacé. Peux-tu le retrouver ?
3. On fabrique une nouvelle fonction $h : x \longmapsto f(x) \times g(x)$.
   La fonction h est-elle une fonction affine ?

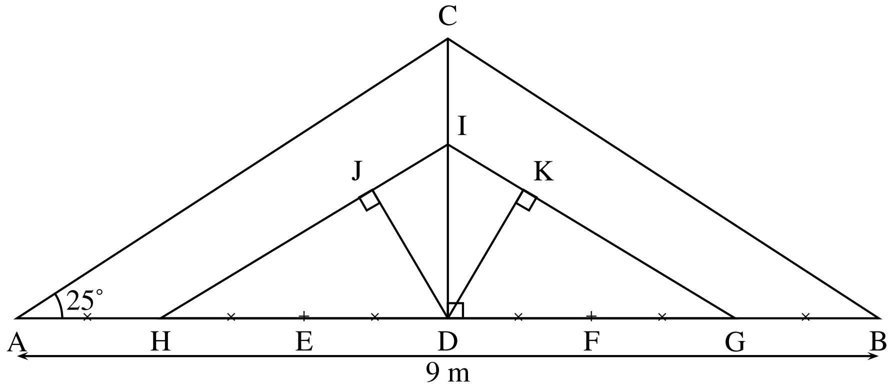
EXERCICE 3 — 4 points

Un « DJ »[1] possède 96 titres de musique rap et 104 titres de musique électro. Lors de ses concerts, il choisit les titres qu'il mixe au hasard.

1. Calculer la probabilité que le premier titre soit un titre de musique rap.
2. Pour varier ses concerts, le DJ souhaite répartir tous ses titres en réalisant des « mix »[2] identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de titres et la même répartition de titres de musique « rap » et de musique « électro ».
   (a) Quel est le nombre maximum de concerts différents pourra-t-il réaliser ?
   (b) Combien y aura-t-il dans ce cas de titres de musique rap et de musique électro par concert ?

EXERCICE 4 — 6 points

Un charpentier doit réaliser pour un de ses clients la charpente dont il a fait un schéma ci-dessous :



Il ne possède pas pour le moment toutes les dimensions nécessaires pour la réaliser mais il sait que :
— la charpente est symétrique par rapport à la poutre [CD],
— les poutres [AC] et [HI] sont parallèles.
Vérifier les dimensions suivantes, calculées par le charpentier au centimètre près.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Démontrer que hauteur CD de la charpente est égale à 2,10 m.
2. Démontrer, en utilisant la propriété de Pythagore, que la longueur AC est égale à 4,97 m.
3. Démontrer, en utilisant la propriété de Thalès, que la longueur DI est égale à 1,40 m.
4. Proposer deux méthodes différentes pour montrer que la longueur JD est égale à 1,27 m. On ne demande pas de les rédiger mais d'expliquer la démarche.

EXERCICE 5 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

Affirmation 1 : n désigne un nombre entier naturel.
L'expression $n^2 - 6n + 9$ est toujours différente de 0.

1. DJ signifie « disk jokey » c'est à dire animateur musical
2. mix est une abréviation de mixage

Affirmation 2 : Un faucon pèlerin vole vers sa proie à une vitesse de 180 km/h. Il est plus rapide qu'un ballon de football tiré à la vitesse de 51 m/s.

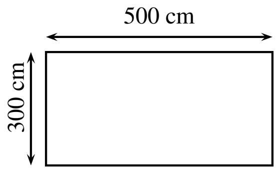
EXERCICE 6 — 5 points

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Monsieur et Madame Jean vont faire construire une piscine et l'entourer de dalles en bois sur une largeur de 2 m.

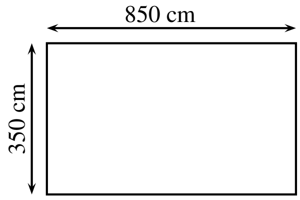
Information 1 : les modèles de piscine

Modèle A



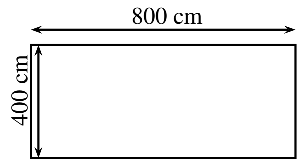
profondeur : 133 cm
pompe : débit 8 m^3/h

Modèle B



profondeur : 138 cm
pompe : débit 10 m^3/h

Modèle C



profondeur : 144 cm
pompe : débit 12 m^3/h

Les figures ci-dessus ne sont pas représentées à l'échelle.

Information 2 : les dalles en bois

Dalle Jécoba en bois, L 100 cm × larg. 100 cm × ép. 28 mm
Référence 628 051
Quantité pour 1 m^2 : 1
Epaisseur du produit (en mm) : 28
Couleur : Naturel
Prix indicatif : 13,90 €le mètre carré

Information 3 : la promotion sur les dalles en bois

Vente flash : 15 % de remise

Ils choisissent le modèle de piscine qui a la plus grande surface.
Quel prix payent-ils pour leurs dalles s'ils profitent de la vente flash ?

EXERCICE 7 — 5 points

Marc veut fabriquer un bonhomme de neige en bois.
Pour cela, il achète deux boules : une boule pour la tête de rayon 3 cm et une autre boule pour le corps dont le rayon est 2 fois plus grand.

1. (a) Vérifier que le volume de la boule pour la tête est bien 36π cm^3.
   (b) En déduire le volume exact en cm^3 de la boule pour le corps.
2. Marc coupe les deux boules afin de les assembler pour obtenir le bonhomme de neige.
   Il coupe la boule représentant la tête par un plan situé à 2 cm de son centre.
   Quelle est l'aire de la surface d'assemblage de la tête et du corps ? Arrondir le résultat au cm^2.

EXERCICE 8 — 4 points

Sophie habite Toulouse et sa meilleure amie vient de déménager à Bordeaux. Elles décident de continuer à se voir. Sophie consulte les tarifs de train entre les deux villes :

— un aller-retour coûte 40 €
— si elle achète un abonnement pour une année à 442 €, un aller-retour coûte alors moitié prix.

Aider Sophie à choisir la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de voyages.
Dans cet exercice, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction

AMÉRIQUE DU SUD - Décembre 2015

Exercice 1

Question 1 : $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \times 2 = 16 \times 2 = 32$
Or calculons le $PGCD(128,96)$

$$128 = 96 \times 1 + 32$$

$$96 = 32 \times 3 + 0$$

Donc $PGCD(128,93) = 32$

$\boxed{\text{Question 1 : Réponse 2}}$

Question 2 : La moyenne de cette série est : $\dfrac{7+8+8+12+12+14+15+15+41}{9} = \dfrac{132}{9} \approx 14,67$
Classons cette série dans l'ordre croissant : $7;8;8;12;12;14;15;15;41$
La médiane est le cinquième terme : 12.

$\boxed{\text{Question 2 : Réponse 2}}$

Question 3 : Si $\dfrac{2}{3}$ des élèves viennent en bus, $\dfrac{1}{3}$ ne vient pas en bus. $\dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{2}{3}$
Donc on obtient le nombre d'élèves en faisant $\dfrac{1}{3} \times 30 = \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) \times 30$

$\boxed{\text{Question 3 : Réponse 1}}$

Question 4 : Testons les solutions.
$2 \times 3,5 + 4 = 7 + 4 = 11$ et $3,5 - 3 \times 4 = 3,5 - 12 = -8,5$ donc $(3,5;4)$ n'est pas la solution.
$2 \times (-12) + 0 = -24$ donc $(-12;0)$ n'est pas la solution.
$2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$ et $3 - 3 \times 5 = 3 - 15 = -12$ donc $(3;5)$ est la solution.

$\boxed{\text{Question 4 : Réponse 3}}$

Exercice 2

1. $\boxed{= (-8) * B1}$

2. Dans la case E1 se trouve un nombre x tel que $f(x) = -24$
C'est un antécédent de -24.

$$-8x = -24$$

$$x = 3$$

$\boxed{\text{C'est le nombre 3 qui était écrit dans la case E1}}$

3. $h(x) = -8x(-6x+4) = 48x^2 - 32x$

$\boxed{h \text{ n'est pas une fonction affine !}}$

Exercice 3

1. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Le DJ possède donc $96 + 104 = 200$ titres.

$\boxed{\text{La probabilité que le premier titre soit du rap est } \dfrac{96}{200} = 0,48 \text{ ou } 48\%}$

2.a Nous cherchons donc un nombre qui divise 96 et 104, et le plus grand possible.
Calculons $PGCD(104, 96)$
Utilisons l'algorithme d'Euclide :

$$104 = 96 \times 1 + 8$$
$$96 = 8 \times 12 + 0$$

$PGCD(104, 96) = 8$

$\boxed{\text{Il pourra réaliser 8 concerts différents.}}$

2.b Comme $104 = 8 \times 13$ et $96 = 8 \times 12$

$\boxed{\text{Il y aura 13 titres d'électro et 12 titres de rap.}}$

Exercice 4

1. Comme (CD) est l'axe de symétrie de la figure, il s'agit de l'axe de symétrie du segment $[AB]$.
D est donc le milieu de $[AB]$ et $AD = 4,5\ m$
Le triangle ADC est rectangle en D
$tan(25^o) = \dfrac{CD}{4,5\ m}$ d'où $CD = 4,5\ m \times tan(25^o) \approx 2,10\ m$

$\boxed{\text{La hauteur de la charpente est environ } 2,10\ m}$

2. Dans le triangle ADC rectangle en D
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DC^2 = AC^2$$
$$4,5^2 + 2,1^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 20,25 + 4,41 = 24,66$$
$$AC = \sqrt{24,66}$$
$$AC \approx 4,97$$

$\boxed{\text{La longueur } AC \text{ mesure environ } 4,97\ m}$

3. Dans le triangle ADC
$I \in [DC]$ et $H \in [AD]$
Les droites (IH) et (AC) sont parallèles
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{DH}{DA} = \frac{DI}{DC} = \frac{HI}{AC}$$

On remarque avec le codage que H est situé au $\dfrac{2}{3}$ de AD
$AD \div 3 = 4,5\ m \div 3 = 1,5\ m$
Donc $DH = 3\ m$

$$\frac{3\ m}{4,5\ m} = \frac{DI}{2,10\ m}$$

Ainsi $DI = \dfrac{2,10\ m \times 3\ m}{4,5\ m} = 1,4\ m$

$\boxed{\text{La longueur } DI \text{ mesure environ } 1,40\ m}$

4.
Première méthode : On peut considérer l'aire du triangle rectangle HDI.
$Aire(HDI) = \dfrac{DH \times DI}{2} = \dfrac{3\ m \times 1,40\ m}{2} = 2,1\ m^2$
En utilisant la question **3.** on peut calculer HI

$$\frac{HI}{4,97\ m} = \frac{3\ m}{4,5\ m}$$

D'où $HI = \dfrac{4,97\ m \times 3\ m}{4,5\ m} \approx 3,31\ m$
Or $[DJ]$ est aussi une hauteur du triangle HID.
Ainsi $Aire(HDI) = \dfrac{HI \times JD}{2} = 2,1\ m^2$

$$3,31\ m \times JD = 4,2\ m^2$$

$$JD = \frac{4,2\ m^2}{3,31\ m} \approx 1,27\ m$$

Seconde méthode : Comme les droites (AC) et (HI) sont parallèles, les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{IHD}$ dont correspondants et égaux à 25^o.
Dans le triangle HDJ rectangle en J
$sin(25^o) = \dfrac{JD}{HD}$
Donc $JD = 3\ m \times sin(25^o) \approx 1,27\ m$

$\boxed{\text{On a bien trouvé deux méthodes pour prouver que } JD \approx 1,27\ m}$

Exercice 5

Affirmation 1
On reconnait une identité remarquable : $n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2$
Or pour $n = 3$ cette expression vaut bien 0
On peut même vérifier que $3^2 - 6 \times 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est fausse.}}$

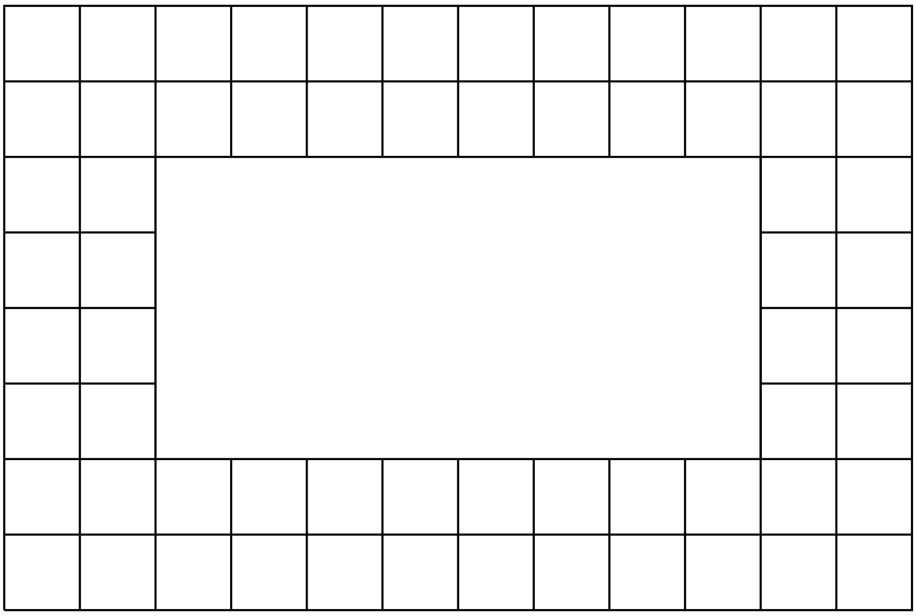
Affirmation 2
Il y a $60 \times 60\ s = 3\ 600\ s$ dans une heure.
$51\ m \times 3\ 600 = 183\ 600\ m = 183,6\ km$

$\boxed{\text{Le ballon de foot est plus rapide, l'affirmation 2 est fausse.}}$

Exercice 6

Comparons les surfaces des trois piscines :
$S(A) = 500\ cm \times 300\ cm = 150\ 000\ cm^2$
$S(B) = 350\ cm \times 850\ cm = 297\ 500\ cm^2$
$S(C) = 800\ cm \times 400\ cm = 320\ 000\ cm^2$
Il vont donc choisir le modèle C.

Les dalles sont des carrés de $100\ cm = 1\ m$ de côté. On veut un largeur de $2\ m$.
Voici un croquis :



Reste à compter le nombre de dalles : $2 \times (4+8) \times 2 + 4 \times 4 = 24 \times 2 + 16 = 64$
Il faut 64 dalles.

Une dalle mesure 1 m^2 donc il faut 64 m^2.
Cela coûte avant réduction $64 \times 13,90$ *euro* $= 889,6$ *euro*

Comme il y a 15% de remise, le prix après remise est : $889,6$ *euro* $\times 0,85 = 756,16$ *euro*

Le prix payé en tenant compte de la réduction est $756,16$ *euro*

Exercice 7

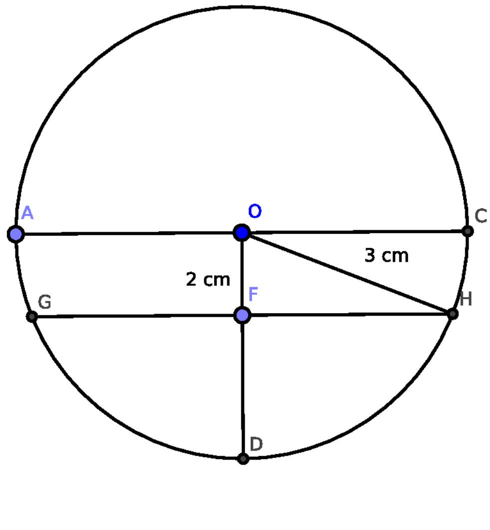
1.a Le volume d'une boule est donnée par la formule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$
On obtient ainsi : $V(boule) = \frac{4}{3} \times \pi \times (3\ cm)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27\ cm^3 = 4 \times 9\ cm^3 \times \pi = 36\pi\ cm^3$

Le volume de la boule est $36\pi\ cm^3$

1.b Le rayon du corps est 2 fois plus grand, or on sait que **Si les mesures d'une figure sont multipliées par** k **alors le volume est multiplié par** k^3.
Comme $2^3 = 8$, le volume du corps est 8 fois plus grand que le volume de la boule.
$8 \times 36 = 288$

Le volume de la boule pour le corps est $288\pi\ cm^3$

2. Lorsque l'on coupe une boule par un plan, on obtient un disque.
Il faut déterminer le rayon de ce disque.
On peut représenter la situation ainsi :



Le triangle OHF est rectangle en F
D'après le **théorème de Pythagore** :

$$FO^2 + FH^2 = OH^2$$
$$2^2 + FH^2 = 3^2$$
$$4 + FH^2 = 9$$
$$FH^2 = 5$$
$$FH = \sqrt{5}$$

Le disque section a donc un rayon de $\sqrt{5}$
Calculons son aire : $\pi \times R^2 = (\sqrt{5})^2 \times \pi = 5\pi$

$\boxed{\text{La surface d'assemblage a une surface de } 5\pi \approx 15\ cm^2}$

Exercice 8

Appelons x le nombre d'aller-retour.
Sans abonnement le prix payé est $40x$.
Avec abonnement le prix payé est $442 + 20x$.
Evidemment pour un nombre peu élevé de voyages, il vaut mieux ne pas prendre l'abonnement.
Résolvons :

$$40x = 442 + 20x$$
$$20x = 442$$
$$x = 22,1$$

$\boxed{\text{Jusqu'à 22 voyages, il vaut mieux ne pas prendre l'abonnement. À partir de 23 c'est avantageux !}}$
On reconnait bien sur une fonction affine et une fonction linéaire dont les représentations graphiques sont des droites que l'on imagine facilement pour justifier ce résultat.