Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes: les nombres décimaux

Objectifs

Au cycle 3, les nombres décimaux sont introduits à partir des fractions décimales. L'écriture à virgule est ensuite présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cette notation permet la mise en place des règles de comparaison et de calcul. Les quatre opérations sur les décimaux sont étudiées, mais la division est limitée au cas où le diviseur est un entier.

Même si les décimaux ont été introduits à partir des fractions décimales, beaucoup d'élèves, à l'entrée du cycle 4, associent encore la nature d'un nombre à son écriture. Pour eux, un nombre s'exprime toujours par une suite de chiffres et les nombres décimaux se différencient des nombres entiers par la présence de la virgule. Ils ne perçoivent pas, par exemple, 17 ou $\frac{5}{2}$ comme des nombres décimaux.

La poursuite, au cycle 4, du travail sur les nombres décimaux vise plusieurs objectifs :

- Amener tous les élèves à différencier la nature d'un nombre (notamment décimal) de son écriture et à passer de l'une de ses désignations à une autre. Concevoir, par exemple, $3{,}5$; $3{,}50$; $\frac{35}{10}$; $\frac{7}{2}$; $3+\frac{1}{2}$ comme des désignations différentes d'un même nombre ;

- Poursuivre le travail sur la comparaison des nombres décimaux. Il permet notamment de faire prendre conscience aux élèves de la possibilité d'intercaler un nombre décimal entre deux nombres qui pourraient être perçus à tort comme des nombres consécutifs (par exemple $7{,}24$ et $7{,}25$) ;

- Consolider les techniques opératoires étudiées au cycle 3 sur les nombres décimaux, notamment la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ;

- Introduire la division par un nombre décimal ;

- Utiliser les nombres décimaux pour exprimer des mesures de grandeurs et repérer des points autres qu'entiers sur la droite graduée.

Le travail mené tout au long du cycle sur les nombres relatifs concerne non seulement les entiers, mais aussi les décimaux et plus généralement les rationnels ; il viendra à ce titre compléter l'étude des décimaux dont l'introduction au cycle 3 porte uniquement sur les décimaux positifs.

Liens avec les domaines du socle

La compréhension et l'utilisation de différentes écritures d'un nombre décimal, sa représentation sur la droite graduée, les passages entre ses différents modes de représentation contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

La pratique du calcul (mental et écrit, exact et approché) engageant des nombres décimaux, l'utilisation de valeurs approchées décimales pour modéliser et résoudre des problèmes scientifiques et d'ordres de grandeurs pour contrôler des résultats contribuent à l'étude des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4).

Progressivité des apprentissages

La division par un nombre décimal est introduite dès la classe de 5e, parallèlement à la consolidation des techniques opératoires déjà étudiées au cycle 3. La maîtrise de ces techniques, en lien avec la compréhension des nombres et des opérations, est entretenue tout au long du cycle 4.

Le travail sur l'écriture décimale, initié au cycle 3 et poursuivi tout au long du cycle 4, est un point d'appui pour l'étude des puissances de 10 qui est formalisée dès la classe de 4e.

Parallèlement à la maîtrise des techniques calculatoires sur les nombres décimaux, les élèves sont amenés, tout au long du cycle, à résoudre des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux.

Stratégies d'enseignement

Pour beaucoup d'élèves, à l'entrée en 5e, la conception d'un nombre décimal comme un objet mathématique et non comme une écriture est encore en cours de construction, le sens des opérations et les techniques opératoires sur les nombres décimaux sont encore en cours d'acquisition. De plus, certains élèves se sont forgé des représentations fausses qui, si elles peuvent s'avérer performantes dans des situations particulières, constituent des obstacles pour la suite des apprentissages. Il est donc indispensable que le professeur identifie les conceptions erronées afin de développer les stratégies d'enseignement qui permettront de les déstabiliser.

Quelques conceptions erronées

- **Assimilation de la virgule à un trait de fraction ;** c'est ainsi que, pour certains élèves $\frac{14}{10}$ = 14,10.
- **Difficulté à concevoir qu'un même nombre puisse avoir plusieurs désignations ;** ainsi, 1+ $\frac{4}{10}$; 1,4 ; 1,40 ne sont pas perçus comme différentes écritures d'un même nombre .
- **Le « nombre à virgule » vu comme un « entier déguisé », comme si la virgule n'existait pas.** Ce rôle « fantôme» de la virgule conduit certains élèves à écrire $4{,}3 < 4{,}06 < 4{,}249$ en le justifiant par le fait que $43 < 406 < 4249$, ou à percevoir 2,47 comme « le » successeur de 2,46, au même titre que 247 est celui de 246 .
- **Le « nombre à virgule » vu comme l'accolement de deux entiers, la virgule jouant le rôle de « frontière » entre les deux.** Cela conduit par exemple à écrire : $4{,}3 < 4{,}06 < 4{,}249$ (avec comme justification : « 3 est plus petit que 6, lui-même plus petit que 249 ») ;ou encore : $2{,}6 \times 3{,}4 = 6{,}24$; $15{,}7 + 12{,}6 = 27{,}13$ ou encore à percevoir $5{,}100$comme « le » successeur de $5{,}99$.
- **Une connaissance mal installée du système décimal** peut conduire un élève, dans le nombre $234{,}678$, à percevoir le chiffre 7 comme le chiffre des dixièmes en raison de

la position supposée des dixièmes comme symétrique de celle des dizaines, ou encore à écrire $4{,}249 < 4{,}16 < 4{,}1$en justifiant que les millièmes sont « forcément» plus petits que les centièmes, eux-mêmes plus petits que les dixièmes.

- **Des techniques mal automatisées et non contrôlées** peuvent aboutir à une confusion sur la position de la virgule dans le résultat d'une addition posée ou d'une multiplication posée comme dans la multiplication ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ \times\ 5{,}5 \\ \hline 1\,1\,5 \\ 1\,1\,5 \\ \hline 1\,2\,6{,}5 \end{array}$$

- **L'application de règles au-delà de leur domaine de validité** *;* c'est ainsi que l'extension aux décimaux de la règle du déplacement de la virgule ou de l'ajout de zéros pour la multiplication des entiers par des puissances de 10 contribue à des erreurs du type :
  - 1,4×10 = 1,40 ; 1,4 : 0,1 = 0,14
  - 12×0,5 > 12; $\frac{12}{0{,}5}$ < 12 (car « multiplier augmente un nombre et diviser le diminue »).
- **L'usage social des nombres décimaux à l'oral peut être à l'origine de confusions,** comme dans les exemples suivants : « un kilo cinq » s'écrit en fait $1{,}5$ kg alors que « un euro cinq » s'écrit en fait $1{,}05$ €.

La pratique régulière du calcul réfléchi doit permettre de « déconstruire » ces représentations erronées et parfois résistantes.

La construction d'automatismes

S'il permet d'aller plus vite une fois qu'on a compris, un automatisme ne permet pas de comprendre plus vite ; avant d'être institutionnalisée puis automatisée, une « règle » (comme celle, déjà citée, du déplacement de la virgule vers la droite ou vers la gauche) doit avoir été justifiée par le professeur et comprise par les élèves pour ne pas être employée en dehors de son cadre de validité.

La pratique régulière du calcul réfléchi permet à la fois de comprendre l'origine des règles et d'ancrer dans la durée la construction des mécanismes opératoires. Pratiqué en amont de la formalisation de ces mécanismes, le calcul réfléchi peut être mis en œuvre sur des exemples génériques. Pratiqué juste après l'institutionnalisation, sur des exemples assez proches de la situation d'introduction, il permet l'appropriation de la notion en cours d'étude. En aval, une pratique régulière, sur le long terme, permet d'automatiser les procédures et les propriétés des nombres engagés dans le calcul et s'avère nécessaire pour garantir la pérennité des acquisitions. L'analyse collective, sous la conduite du professeur, des différentes stratégies mises en œuvre et des éventuelles erreurs commises contribue à donner du sens aux objets mathématiques mis en jeu et aux techniques à automatiser.

Dans le cadre de l'apprentissage des nombres décimaux, on entretiendra de façon régulière les automatismes liés à la somme, à la différence, au produit de nombres décimaux, au quotient d'un nombre décimal par un entier, notions abordées au cycle 3, sur des exemples présentant de véritables enjeux. L'un de ces enjeux est de permettre d'identifier une erreur liée à l'incompréhension de l'écriture à virgule ; par exemple, un calcul du type $1{,}4 + 0{,}15$ permet d'identifier l'erreur liée à la conception de la virgule frontière par les élèves qui fournissent $1{,}19$ comme réponse, alors que le même calcul, posé sous la forme $1{,}40 + 0{,}15$ ne permet pas de débusquer l'erreur.

La compréhension de l'erreur peut s'appuyer sur différents registres d'expression : celui de la langue naturelle (on ajoute 1 dixième plus 5 centièmes à 1 unité plus 4 dixièmes), mais aussi celui des fractions décimales.

L'introduction de la division d'un décimal par un décimal pourra se faire dans le cadre de cette pratique, sur une durée suffisamment longue, à petites doses et de manière progressive.

La consolidation des priorités opératoires

La consolidation des priorités opératoires introduites au cycle 3 est indispensable car ces priorités sont à la base de la compréhension et de la production d'expressions, qu'elles soient numériques ou littérales. L'écriture en ligne d'une succession de calculs simples engageant des nombres décimaux, notamment prescrits par des programmes de calcul, est une stratégie d'enseignement possible.

> **EXEMPLE :**
> Prendre un nombre ;
> lui ajouter 1,8 ;
> multiplier le résultat par 3,2.
>
> Écrire l'expression numérique traduisant ce programme en prenant 10 comme nombre de départ.

Il pourra s'avérer fructueux de comparer les résultats obtenus avec une calculatrice scientifique et avec une calculette, ces deux outils ne respectant les mêmes règles de priorité entre opérations.

Le choix du nombre d'instructions d'un programme de calcul et des nombres auquel il s'applique permet une différenciation au sein de la classe.

Parallèlement au travail sur les programmes de calcul qui concernent l'aspect procédural d'un calcul, les élèves seront amenés à travailler sur sa forme structurale (somme, différence, produit, quotient).

Par exemple identifier $12{,}3 + 2{,}5 \times 7{,}1$ comme une somme: celle de $12{,}3$ et du produit de $2{,}5$ par $7{,}1$.

L'utilisation de la droite graduée

Le recours à la droite graduée permet de travailler la compétence « représenter » décrite dans les programmes des cycles 3 et 4 par les passages dans les deux sens qu'elle permet de réaliser entre le registre symbolique de l'écriture du nombre et le registre graphique de sa représentation.

Plusieurs situations d'enseignement se prêtent à l'utilisation de la droite graduée.

- **Mesurer des grandeurs et encadrer des mesures, notamment en variant les unités.** Effectuer des mesures « qui ne s'expriment pas en un nombre entier d'unité » permet de revenir à l'utilité première des décimaux (résoudre des problèmes pour lesquels les entiers sont défaillants) et de travailler l'intercalation des décimaux.
- **Repérer des points sur une droite graduée.** Les activités de repérage peuvent être très variées au niveau des situations et des questionnements proposés, mais aussi des types de graduation et des outils utilisés (droite graduée, papier millimétré, sous unités partiellement ou non représentées, présentation « en zoom ») et de la nature de l'écriture des nombres à repérer (désignation orale, écritures fractionnaires, décimales, décompositions diverses, etc.). On pourra se reporter à l'activité développée au paragraphe VI.
- **Intercaler des décimaux.** « Donner dix nombres entre 4,67 et 4,68 » est une situation classique qui peut être enrichie par la question de savoir s'il peut y en avoir 100, 1000, 10 000, etc.

Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on pourra remplacer $4{,}67$ et $4{,}68$ par 4 et $4{,}01$.

L'utilisation de valeurs approchées et le contrôle des résultats

La résolution de problèmes permet aux élèves de prendre conscience que les nombres décimaux ne permettent souvent que d'y apporter des réponses approchées.

Conformément à l'écriture du domaine 4 du socle (paragraphe « démarches scientifiques »), les ordres de grandeurs sont utilisés pour estimer et contrôler les résultats.

Points de vigilance

La rigueur et la précision de la dénomination orale des nombres décimaux contribuent à leur bonne compréhension. Le professeur doit avoir conscience du caractère modélisant de sa propre pratique et du fait que la dénomination d'usage social du type « 3 virgule 08 » peut renforcer les fausses représentations, notamment celle de la « virgule frontière ». Les échanges en classe offrent l'occasion de manipuler mentalement les changements de registres, ce que facilitent les formulations du type « 308 centièmes » ou « 3 unités plus 8 centièmes ». Attendre cette rigueur de la part des élèves les aide à établir les liens entre les différentes désignations et contribue à la compréhension des nombres décimaux. La maîtrise, par tous les élèves, des techniques opératoires sur les nombres décimaux est un objectif de fin de cycle. Un travail spiralé, mené sur toute la durée du cycle, sous forme de calcul mental ou réfléchi doit permettre de l'atteindre. Mais la technique s'acquiert aussi à travers la résolution de problèmes et nombreux sont ceux qui sollicitent les nombres décimaux; leur résolution contribue à consolider la compréhension de ces nombres. Ces problèmes peuvent relever de la vie courante, d'autres disciplines ou d'autres champs des mathématiques : calculs de coûts, coefficients de proportionnalité ou de linéarité, d'échelles ou de moyennes, mesures de grandeurs, conversions d'unités, etc.

Différenciation

Pour les élèves qui n'ont pas encore acquis une compréhension automatisée des décimaux, il est nécessaire de recourir à des outils de manipulation permettant de visualiser les rapports entre unité, dixième, centième pour asseoir le sens des désignations. Parmi ces outils on peut citer la droite graduée, mais aussi le carré ou le cube unité partagés en sous-unités, les tangrams, etc. On pourra se reporter à l'activité développée au paragraphe VI.

Une bonne connaissance de faits numériques comme les multiples de 25 et leur relation avec 100, les divisions par $10, 100, 1000$, etc. est indispensable à la bonne compréhension des nombres décimaux. Un travail routinier sur ces prérequis permet de dépasser certaines difficultés.

Pour certains élèves, un manque d'assurance dans le calcul écrit constitue un véritable handicap et une source de blocage. Or, de même qu'une orthographe incertaine ne saurait interdire l'écriture, le manque de dextérité calculatoire ne doit pas constituer un blocage à toute activité mathématique. Il est donc indispensable de ne pas limiter l'activité des élèves les plus fragiles à des tâches purement techniques et il est déconseillé d'attendre systématiquement leur maîtrise avant de leur proposer des problèmes à résoudre, ce qui peut d'ailleurs constituer un puissant levier pour motiver l'acquisition des techniques.

Dans le cadre d'un approfondissement, l'étude de quelques cas de non décimalité pourra être traitée.

Exemples de situations d'apprentissage

Contrôle de la vraisemblance du résultat d'un calcul sur les nombres décimaux

Exemple de la division par un nombre décimal

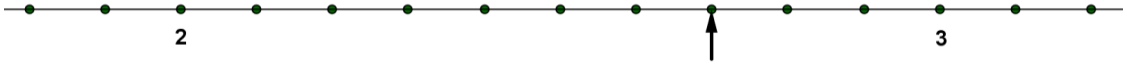
On propose aux élèves de calculer $\frac{0,6}{0,2}$. On peut s'attendre à ce que certains proposent comme résultat $0,3$ ou $0,03$. Ils effectuent en effet la division de 6 par 2 et mettent soit un chiffre après la virgule en appliquant l'algorithme de l'addition, soit deux chiffres après la virgule en appliquant l'algorithme de la multiplication.
La référence au quotient permet d'identifier $\frac{0,6}{0,2}$ comme étant le nombre par lequel il faut multiplier $0,2$ pour obtenir $0,6$. L'invalidation des résultats $0,3$ et $0,03$ repose alors sur les opérations $0,3 \times 0,2 = 0,06$ et $0,03 \times 0,2 = 0,006$.
Pour certains élèves, la compréhension de l'erreur passe par la verbalisation de la notion de partage en « Combien de fois $0,2$ entre-t-il dans $0,6$? » ou en sa formulation équivalente « Combien de fois 2 dixièmes entrent-ils dans 6 dixièmes ? ». Ces formulations permettent d'amener les élèves à prendre conscience «qu'il y a plus d'une fois $0,2$ dans $0,6$ », et donc que $\frac{0,6}{0,2}$ ne peut valoir ni $0,3$ ni $0,03$.
Il convient également d'insister sur le fait que le résultat de la division par un nombre décimal inférieur à 1 est plus grand que ce nombre. Cela doit faire partie des automatismes de contrôle.

Utilisation de la droite graduée

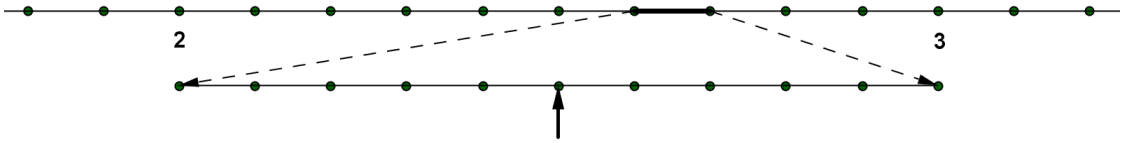
L'activité ci-dessous utilise des zooms à différentes échelles.

Source : académie de Rennes

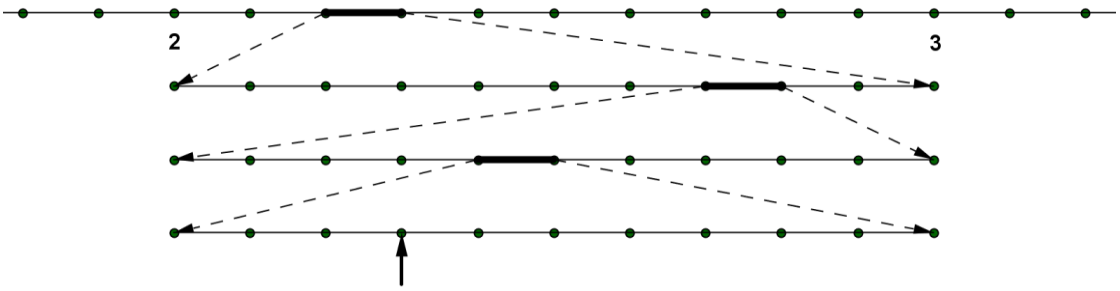
1. Quel est le nombre indiqué par la flèche sur la droite graduée ci-dessous ?



2. On a représenté un agrandissement d'une partie de la droite graduée.
Quel est le nombre indiqué par la flèche sur l'agrandissement ?

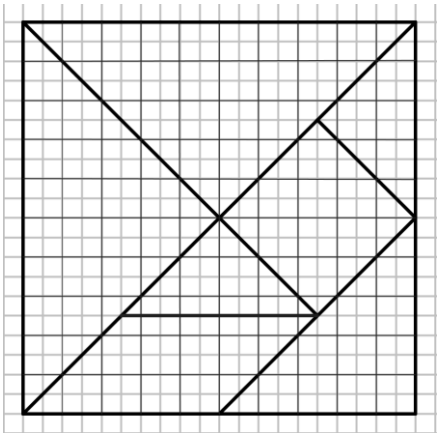


3. On a représenté des agrandissements successifs d'une partie de la droite graduée.
Quel est le nombre indiqué par la flèche sur le dernier agrandissement ?



Cette activité peut être complétée par l'exercice inverse, qui consiste par exemple à représenter 2,472 sur la droite graduée.

Mesure de grandeurs



La mesure de la surface des pièces d'un Tangram permet de faire le lien entre écritures décimales, fractions décimales et fractions non décimales puisqu'on peut utiliser comme unité d'aire soit le plus petit des triangles, dont l'aire est égale à un seizième de l'aire totale, soit le centimètre carré, en utilisant le quadrillage.

Autres exemples d'activités

- Des exemples de questions flash
- Un exemple de tâche intermédiaire : un problème de coûts
- Un exemple de tâche avec prise d'initiative : Épaisseur d'une feuille de papier

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de nombre décimal avec les élèves :

- Le nombre au cycle 3 SCEREN - CRDP, septembre 2012
- Les nombres au collège
- Le calcul numérique au collège
- Découvrir de nouveaux nombres au collège - brochure IREM de Strasbourg 2012
- Des maths ensemble et pour chacun - Rouquès, J.-P. & Staïner, H.(2010) - Cinquième. Nantes : CRDP des Pays de la Loire
- Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège BLOLON J. 1996, Identifiant BU : 96PA05H050
- Banque des exercices de Mathématiques sans Frontières Junior
- Enseigner et apprendre les nombres décimaux : dispositif d'évaluation diagnostique Decival sur le site du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Louvain (Belgique)
- La sixième entre fractions et décimaux - Brochure de l'IREM de Lyon

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a découvert la notion de fraction en explorant progressivement différentes conceptions possibles et différents contextes : partage de l'unité, partage de grandeurs, repérage sur une demi-droite graduée, encadrement entre deux entiers consécutifs, expression d'une part d'une quantité, mesures (longueurs, aires). Il a été amené à donner du sens aux nombres décimaux à partir de leur désignation sous forme de fractions décimales ou de somme de fractions décimales. Il a perçu la fraction comme le quotient de deux nombres entiers. Il a utilisé la fraction pour résoudre des problèmes.

Au cycle 4, on s'intéresse au quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b, $b \neq 0$, quelconques, défini comme le nombre dont le produit par b vaut a. Le professeur prendra conscience que cette définition n'est pas d'accès facile, et pourra proposer aux élèves de chercher comment la reformuler.

La « vision-partage » de la fraction continue à être mobilisée. Le terme « vision-partage » est à comprendre au sens où, par exemple, la fraction $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).

L'articulation entre nombres décimaux et fractions est renforcée afin d'assurer la maîtrise de l'écriture de position et des différentes désignations d'un nombre. Progressivement, l'élève est amené à mobiliser la « vision-nombre » de la fraction pour résoudre des problèmes, en lien notamment avec la proportionnalité, pour effectuer des calculs et des comparaisons sur les fractions et les quotients, pour exprimer une fréquence ou une probabilité, pour donner un ordre de grandeur d'un résultat.

Le terme « vision-nombre » est donc à comprendre au sens où, par exemple, le quotient $\frac{7}{4}$ est le nombre dont le produit par 4 vaut 7 et peut être mobilisé, par exemple, pour prouver que $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$.

Le document « Le calcul numérique au collège » proposait, pages 11 et 12, de démontrer, dans le cas général, la propriété relative à la somme de deux quotients de même dénominateur, à savoir $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, pour tous nombres a, b et c, $c \neq 0$. Une telle démonstration ne peut être travaillée dans sa forme générale qu'avec certaines classes ou certains groupes d'élèves, dans une perspective d'approfondissement. Mais l'élaboration d'un raisonnement utilisant des exemples génériques peut venir en appui d'une remédiation.

La mise en place de techniques de calcul s'appuie en permanence sur le sens et la résolution de problèmes, notamment en liaison avec les autres disciplines scientifiques.

La définition d'un nombre rationnel comme nombre pouvant s'écrire comme quotient d'entiers permet de travailler simultanément sur des entiers, des décimaux, des relatifs et des fractions, sans ordre

particulier entre eux, en construisant ainsi les attendus de fin de cycle 4 relatifs à la notion de divisibilité et aux nombres rationnels.

Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de différentes représentations d'une fraction (décompositions additives, multiplicatives, cas des fractions décimales, repérage sur une droite graduée) permettent de conduire intelligemment un calcul mental, posé ou instrumenté (domaine 1). L'explication d'un tel calcul, à l'oral ou à l'écrit, pour valider la démarche qui lui correspond ou montrer son efficacité conduit à argumenter pour convaincre (domaine 3).

La résolution de problèmes issus des sciences et techniques mettant en jeu des fractions (reconnaissance d'une situation de proportionnalité, évaluation d'une proportion, d'un pourcentage, traitement de données statistiques, contrôle de la vraisemblance de résultats) favorisent la compréhension du monde (domaines 4 et 5).

Progressivité des apprentissages

Tout au long du cycle 4, on entretient la « vision-partage » de la fraction. La « vision-nombre » de la fraction est progressivement construite et mobilisée :

- dès le début du cycle, l'élève calcule et compare des proportions, des fréquences ;
- dès le début du cycle, l'élève est entraîné à reconnaître des fractions égales, à raisonner pour justifier que des quotients sont égaux, qu'un quotient est un nombre rationnel ou non, qu'une fraction est décimale ou non ;
- dès le début du cycle, l'élève est conduit à additionner, soustraire et multiplier par un entier des fractions de signe quelconque ;
- progressivement, l'élève est conduit à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients ; à identifier, exprimer sous différentes formes et/ou justifier qu'un nombre est l'inverse d'un autre ; la progressivité repose principalement sur la nature des nombres mis en jeu ;
- en classe de troisième, l'élève aborde la notion de fraction irréductible.

Stratégies d'enseignement

Les « activités mentales » (calcul mental, autres types de questions flash) contribuent à la construction du sens (« vision-partage » et « vision-nombre » de la fraction) et des automatismes sur les opérations et les comparaisons. Ainsi, il convient, tout au long du cycle 4, de :

- développer la capacité à comparer des nombres sans recourir à une technique chaque fois qu'une comparaison raisonnée peut être réalisée : positionnement des fractions par rapport à des entiers, ordre de grandeur, simplification des fractions pour les rendre facilement comparables ;
- mettre en place la technique de comparaison liée à la réduction au même dénominateur ;
- faire prendre conscience du fait qu'il est possible d'intercaler une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels donnés.

Sur la durée du cycle, les activités mentales permettent aussi de réactiver des savoirs et savoir-faire ; elles peuvent concourir à une évaluation diagnostique.

Ainsi, par exemple, dès le début du cycle, avant la première séquence sur les fractions, un « Vrai ou Faux » du type suivant permet de réactiver les attendus de fin de cycle 3 :

- $\frac{3}{11}+\frac{8}{11}=1$;
- $\frac{2}{9}+\frac{8}{9}<1$;
- il existe plus de 100 quotients, compris entre 1 et 2, ayant 6 comme dénominateur ;
- sept segments de longueurs respectives $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; ... ; $\frac{7}{7}$ alignés bout à bout forment un segment de longueur 4.

Un tel exercice, à vocation diagnostique, peut utilement être intégré dans une « stratégie » d'évaluation et exploité au service de la formation de tous les élèves, par exemple selon le « schéma » suivant :

1. passation du « vrai ou faux » ;
2. collecte des réponses des élèves (en classe ou « hors du temps de classe » au collège via l'ENT en utilisant un l'outil « formulaire », par exemple) ;
3. traitement statistique des réponses et identification des erreurs ;
4. remédiation différenciée ;
5. nouveau temps d'évaluation diagnostique (on répète les étapes$1.$ à $3.$, le $1.$ pouvant prendre une forme différente : calcul mental, autre type de question flash) ;
6. test dans le devoir bilan suivant, entre autres, de ce qui a fait l'objet de l'évaluation diagnostique puis d'une remédiation ;
7. réactivation, au long de l'année, en fonction des besoins des élèves.

Le travail sur l'erreur s'appuie sur un retour au sens, en lien avec la définition du quotient, les ordres de grandeur, la production d'exemples et de contre-exemples et l'apprentissage du raisonnement.

L'oral constitue une aide à la compréhension et participe du traitement de l'erreur (verbalisation de décompositions additives ; mise en œuvre de la définition du quotient ; identification, explication puis rectification d'une erreur).

Ainsi, par exemple, à l'occasion de la résolution d'un problème de partage, quelques élèves ont écrit : « $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$ ». Un travail sur l'erreur doit alors être conduit et porter sur le sens. Il peut consister en :

- *un contrôle du résultat*
  modalité pédagogique : question/relance (doute, usage de la calculatrice) du professeur lors de la production écrite ;
- *un questionnement sur la vraisemblance du résultat* (comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{7}$ puis question : « en ajoutant un nombre positif à $\frac{1}{2}$, est-il raisonnable de trouver $\frac{3}{7}$? »)
  modalité pédagogique : débat en classe ;
- *l'élaboration de la preuve* du fait que $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\neq\frac{3}{7}$ (mise en œuvre de la définition du quotient de deux nombres, par exemple en faisant calculer le produit de l'un et l'autre des deux membres de l'égalité par 70 – lien avec l'arithmétique)
  modalité pédagogique : production écrite individuelle hors du temps de classe ;

- *un approfondissement* : « peut-on trouver une fraction $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{1}{2}+\frac{a}{b}=\frac{1+a}{2+b}$? » (production d'exemples)
  modalité pédagogique : en classe, réflexion individuelle, travail en groupes, à l'oral : présentation des résultats du groupe par un rapporteur.

Différenciation

Dans ce thème, la différenciation peut notamment consister en :

- un accompagnement spécifique que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- une action sur les variables didactiques dans le cadre de la résolution de problèmes (exemple : s'il s'agit de calculer le complément à 1 de la somme de deux fractions, selon que l'on choisisse $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ou encore $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$, le degré de technicité varie ce qui peut conduire à proposer tel ou tel cas à différents élèves en fonction de leurs besoins) ;
- l'élaboration de la preuve d'un résultat général, propriété (somme, produit ou quotient de deux fractions, par exemple) ou solution d'un problème (voir la tâche intermédiaire « Vitesse moyenne lors d'un aller-retour », par exemple), à l'aide d'un exemple générique ; la démonstration dans le cas général pouvant faire l'objet d'un prolongement proposé à certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- Activités mentales
- Programmes de calcul
- Problèmes de partage, de repérage
- Calcul sur les mesures de grandeurs (longueurs, aires, volumes, angles, durée, vitesse, masse)
- Problèmes de construction
- Reconnaissance de situations de proportionnalité

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash :
  - Exemple 1 : « Vision-partage » de la fraction
  - Exemple 2 : Calcul avec les fractions
  - Exemple 3 : sens du quotient
  - Exemple 4 : travail sur l'erreur
- Exemple de tâche intermédiaire : Vitesse moyenne lors d'un aller-retour
- Exemple d'activité avec prise d'initiative : Âge moyen

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité donne du sens et constitue un levier pour l'apprentissage.

L'emploi des fractions dans les modèles de proportionnalité, le traitement statistiques de données, le calcul de probabilités et le champ des grandeurs et mesures doit conduire à placer les élèves devant des problèmes relevant de ces champs et issus des disciplines scientifiques ainsi que du monde économique et de la vie quotidienne.

Des EPI portant sur les thématiques « Monde économique et professionnel », « Transition écologique et développement durable », « Sciences, technologie et société » et « Corps, santé, bien-être et sécurité » seront l'occasion de construire l'attendu de fin de cycle « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ».

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de fraction avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents pour aborder le thème des fractions.

- Le calcul numérique au collège
- Les nombres au collège
- Raisonnement et démonstration
- Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée
- Quotients, proportionnalité, grandeurs , André Pressiat, (décembre 2002).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

Le statut et l'usage des nombres évoluent au cours de la scolarité. Au cours du cycle 3, les nombres positifs (entiers, décimaux ou rationnels) ont été principalement utilisés pour :

- compter des objets ;
- mesurer des grandeurs ;
- graduer une demi-droite ;
- jouer le rôle d'opérateur (par exemple prendre le quart de, ou calculer 75 % de) ;
- effectuer des calculs et en donner les résultats sous forme exacte ou approchée.

L'élève a effectué sur ces nombres des opérations dont il a perçu implicitement certaines propriétés (associativité, commutativité, élément neutre, distributivité).

Objectifs

L'introduction au cycle 4 des nombres décimaux relatifs vise plusieurs objectifs :

- étendre l'ensemble des décimaux positifs à un ensemble plus vaste (celui des décimaux positifs et négatifs), dans lequel toutes les soustractions sont possibles. Cette extension est réalisée de manière à maintenir les propriétés des opérations valables entre nombres décimaux positifs (principe de permanence) ;
- accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « au-dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes, etc.) ;
- disposer de ces nouveaux outils pour modéliser et résoudre des problèmes de la vie courante ;
- étendre à la droite entière la graduation déjà connue de la demi-droite, repérer et se repérer sur une droite.

Liens avec les domaines du socle

La compréhension des nombres négatifs en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons, la perception de l'extension de l'ensemble des décimaux positifs à celui des décimaux relatifs, la compréhension de l'écriture des nombres négatifs et de leur représentation sur la droite graduée contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

L'utilisation des nombres relatifs pour modéliser des grandeurs physiques (température, profondeur, altitude) ou sociales (dates, gains et pertes) susceptibles de prendre des valeurs en dessous de zéro contribue à l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4) ainsi qu'aux représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

PROGRESSIVITÉ DES APPRENTISSAGES

Anticipation

Quel que soit le procédé retenu pour l'introduction des nombres négatifs, celle-ci gagne à être préparée en amont par une réactivation des propriétés des opérations sur les nombres décimaux positifs et de la notion de différence, qui ont été étudiées au cycle 3.

De nombreux exemples de calcul mental permettront dans un premier temps de simplifier des programmes de calcul du type « ajouter b puis soustraire a » en « ajouter $b-a$ »lorsque $b>a$ puis, dans un deuxième temps d'aborder la même question lorsque $b<a$.

De nombreux exemples de ce type sont présentés dans le document « Les nombres relatifs en 5e », Parcours d'Étude et de Recherche du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille.

Un exemple d'introduction des nombres négatifs dans un cadre mathématique

Une introduction des nombres négatifs (d'abord entiers puis décimaux non entiers) sans référence à des contextes concrets peut se faire à partir de l'équivalence de programmes de calcul.

L'équivalence des programmes de calcul « ajouter 3 puis soustraire 5 », « ajouter 2 puis soustraire 4 », « ajouter 1 puis soustraire $+3$ », « ajouter 0 puis soustraire 2 » permet d'écrire : $3-5=2-4=1-3=0-2$. On convient alors de coder par (-2) le résultat commun à toutes ces soustractions (et à beaucoup d'autres encore…).

En début d'apprentissage, l'utilisation de parenthèses englobant à la fois le signe « moins » et la valeur absolue permet d'éviter la confusion du signe « moins » intervenant dans le codage d'un nombre négatif avec le signe opératoire de la soustraction.

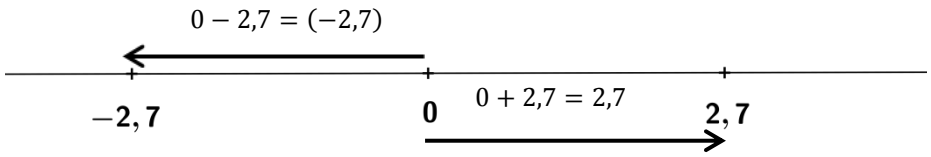
Pour bien faire comprendre le plongement de l'ensemble des décimaux positifs dans celui des décimaux relatifs et le fait que seuls les nombres négatifs sont nouveaux dans la construction, on évitera les écritures du type $(+3)$ pour coder les décimaux positifs déjà connus. Cela permet de garder au signe $+$ son seul statut opératoire et d'éviter des exercices de simplification d'écriture au terme desquels les élèves ne savent plus reconnaître que $(+2)+(+3)$, c'est tout simplement $2+3$.

Les élèves pourront ensuite être entraînés à résoudre des additions à trous (reformulées en : « quel nombre faut-il ajouter à … pour obtenir … ? ») mettant en jeu d'abord des nombres entiers, puis des nombres décimaux non entiers. Les nombres négatifs apparaissent alors comme des outils permettant de résoudre des équations à trou du type $b+\cdots=a$ lorsque $0\leq a<b$, ce qui revient à rendre possibles des soustractions du type $a-b$ avec $0<a<b$, a et b étant des décimaux.

Le repérage des nombres relatifs

Le lien peut ensuite être fait avec le repérage sur la droite graduée. La référence au placement des nombres négatifs sur la droite graduée peut être basée sur un modèle concret (par exemple celui des températures) ou sur l'interprétation de la soustraction d'un décimal positif comme un déplacement vers la gauche.

Ainsi le nombre $(-2{,}7) = 0 - 2{,}7$ repère le point situé à la distance $2{,}7$ de l'origine, symétriquement par rapport à l'origine au point repéré par le nombre $2{,}7$. Il est défini comme étant son opposé.
Le nombre positif $2{,}7$ est désigné comme étant la valeur absolue du nombre négatif $(-2{,}7)$.



La définition de l'opposé d'un nombre permet de compléter le corpus d'égalités à trous par des égalités du type $7{,}1 + \cdots = 0$ ou $(-7{,}1) + \cdots = 0$.

Pour éviter les confusions, on peut convenir, en début d'apprentissage, de noter op $(7{,}1)$ l'opposé du nombre $7{,}1$.

Cette notation sera, un peu plus tard, remplacée d'abord par la notation $(-7{,}1)$, puis par $-7{,}1$ sans négliger d'aborder avec les élèves les différentes significations que prend alors le signe « moins » :

- marqueur d'un nombre négatif dans $(-7{,}1)$;
- signe de soustraction dans $0 - 7{,}1$ ou dans $20 - 27{,}1$;
- marqueur de l'opposé, par exemple dans l'écriture $-(-7{,}1)$.

Le repérage des décimaux relatifs sur la droite graduée est un bon point d'appui pour aborder la question de leur classement. Un travail systématique de changement de registre (de l'écriture du nombre à sa représentation sur la droite et vice versa) permet de construire l'image mentale de l'opposé, d'éviter les erreurs de classement et facilitera l'introduction ultérieure du repérage dans le plan.

Si le classement des nombres relatifs ne pose pas de difficulté particulière lorsqu'ils sont exprimés sous forme chiffrée, la difficulté apparaît lorsqu'ils sont désignés sous forme littérale, les élèves ayant du mal à concevoir que $-a$ puisse, sous certaines conditions, désigner un nombre positif.

Les opérations

L'addition et la soustraction sont introduites dès le début de cycle 4 ; il est nécessaire d'entretenir leur assimilation tout au long du cycle, tant par des exercices d'entraînement technique (calcul mental ou écrit) que par la résolution de problèmes les mettant en jeu. La multiplication est abordée une fois que ces deux opérations sont bien en place, et après avoir réactivé la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le cadre des nombres positifs. Il est nécessaire que le sens et les propriétés de la multiplication soient bien stabilisés avant d'aborder la division.

L'addition et la soustraction

Beaucoup de situations en lien avec la vie courante peuvent illustrer l'addition de deux nombres relatifs. Celle-ci permet en effet de modéliser soit le bilan de deux variations (gains et pertes, montées et descentes d'un ascenseur, déplacements vers la droite ou vers la gauche le long de la droite graduée), soit l'application d'une variation (augmentation, diminution) à un état (température, altitude, solde d'un compte financier, score d'un joueur). La variété des contextes utilisés évitera que la prégnance d'un modèle empêche la construction du statut de nombre.

Une pratique routinière, notamment sous forme de calcul mental, d'additions entre nombres relatifs permettra l'automatisation progressive de la règle d'addition, sans qu'il soit nécessaire de la formaliser. L'élève pourra alors s'affranchir du recours à un modèle concret ou à la droite graduée.

L'introduction de la soustraction suppose que soient bien installées l'addition et la notion d'opposé, $a - b$ étant défini comme égal à $a + \text{op}(b)$. Il est alors possible d'interpréter le résultat d'une addition à trou comme la différence de deux nombres relatifs.

La simplification des calculs

L'élève dispose alors de tous les éléments permettant de justifier la simplification de calculs enchaînant des additions et des soustractions sur des nombres relatifs, du type $2 + (-5) + 4$. La simplification des expressions repose sur la définition de la soustraction dans D, puisque, sur l'exemple précédent, $2 + (-5) = 2 - 5$. Dans les expressions simplifiées, les seuls signes restants sont des signes d'opérations (additions et soustractions), sauf dans le cas où le premier terme de la somme est un nombre négatif comme dans $(-2) + 3 - 5$. Progressivement, l'élève dégage des méthodes efficaces pour effectuer une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, notamment la neutralisation des opposés et le regroupement des nombres de même signe.

Beaucoup de situations concrètes se prêtent à ce type de calculs : moyennes de températures, mouvements dans les deux sens, bilans financiers de gains et de pertes, scores de jeu.

Le choix des nombres décimaux mis en jeu et le nombre d'opérations à enchaîner constituent des éléments de différenciation.

La multiplication

La multiplication des décimaux relatifs pourra être approchée en plusieurs étapes, conduites par le professeur, sur des exemples génériques simples, une fois que la compréhension et l'utilisation de l'addition et de la soustraction aura été stabilisée :

1. la multiplication d'un entier naturel par un entier négatif sollicite le sens premier de la multiplication comme addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$ (verbalisée en « deux fois (-3) ») ;
2. le principe de permanence permet d'étendre aux nombres relatifs une égalité du type $2 \times 3 = 3 \times 2$ et de définir $(-3) \times 2$ comme étant égal à $2 \times (-3)$;
3. la justification de l'égalité $(-2) \times (-3) = 6$ repose sur le fait que $(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = \big((-2) + 2\big) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$, à condition d'admettre l'extension aux nombres relatifs de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, connue chez les décimaux positifs, et le résultat de la multiplication par 0.

La règle permettant de calculer le produit de deux nombres relatifs pourra alors être institutionnalisée, notamment au niveau du signe du produit.

Si la métaphore des amis et des ennemis est une aide à la mémorisation de la règle des signes, il importe d'insister sur le fait qu'elle n'en constitue en aucune manière une justification.

Une pratique routinière (mentale et écrite) de multiplications sur les nombres relatifs permet de découvrir, puis d'utiliser, des propriétés mathématiques essentielles comme l'effet de la multiplication par (-1), le signe d'un produit de plusieurs facteurs, l'associativité de la multiplication, etc.

Enfin, on veillera à ne pas se limiter trop longtemps à des multiplications entre entiers relatifs car cela risquerait de renforcer l'obstacle dû à la seule conception de la multiplication comme addition itérée.

Le choix des nombres décimaux mis en jeu est encore un élément de différenciation

La division

Le quotient de deux nombres relatifs est introduit à partir d'exemples de multiplications à trous et du prolongement de la définition du quotient de a par b (le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir$a$), dans une démarche similaire à celle utilisée pour l'introduction de la soustraction.

La règle des signes pour un quotient est démontrée à partir de celle qui régit le signe d'un produit.

À ce stade, on distingue $\frac{-4}{3}$, solution de la multiplication à trous $3 \times \ldots = -4$ et $\frac{4}{-3}$, solution de l'équation à trous $(-3) \times \ldots = 4$.

En admettant que $(-3) \times \frac{-4}{3} = \frac{(-3)\times(-4)}{3}$ (extension de la propriété connue du produit d'un entier positif par une fraction), il vient $(-3) \times \frac{-4}{3} = \frac{12}{3} = 4$; donc le nombre par lequel on multiplie (-3) pour obtenir 4 est à la fois $\frac{4}{-3}$ et $\frac{-4}{3}$, donc $\frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$

Enfin, en étendant la règle d'addition de deux fractions de même dénominateur, il vient

$$\frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{(-4+4)}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Ce qui permet de justifier que $\frac{-4}{3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

L'acquisition de ces notions délicates se fera dans la durée, et permettra d'aborder la distinction entre opposé et inverse.

Les nombres rationnels négatifs

En cours de cycle, et parallèlement à la consolidation du calcul fractionnaire, les propriétés des opérations entre décimaux relatifs seront étendues, toujours selon le principe de permanence, aux nombres rationnels, positifs ou négatifs.

Stratégies d'enseignement

L'histoire nous apprend qu'il a fallu du temps pour que les nombres négatifs s'imposent véritablement en tant que nombres. Utilisés pour des besoins comptables (créances, dettes), ils ont longtemps servi en mathématiques comme outils de calcul, voire comme intermédiaires de calcul dans la résolution d'équations. Il a fallu attendre les mathématiques modernes et la théorie des structures pour les définir comme des classes d'équivalence de couples d'entiers naturels. La transposition didactique de cette notion est délicate et explique les difficultés à appréhender en tant que nombres des objets définis « en-dessous de 0 », alors même qu'ils sont utilisés dans la vie courante où l'on parle aussi bien d'une température de -7 °C ou d'une profondeur de -35 m que d'un bilan financier de -400 €.
Des grandeurs comme la température, la date ou l'altitude peuvent être ordonnées et comparées ; ce sont des grandeurs dites « repérables » ; elles peuvent servir de modèles pour introduire, comparer et ordonner des nombres relatifs. En revanche, quand on mélange 100 g d'eau à la température de 50 °C et 100 g d'eau à la température de 10 °C, on obtient 200 g d'eau dont la température n'est pas 60 °C (mais plutôt de l'ordre de 30 °C). On dit que la température est une grandeur non mesurable.
L'interprétation de l'addition des relatifs dans des contextes concrets de grandeurs repérables mais non mesurables (température, altitude, date) nécessite d'attribuer aux deux nombres en jeu des significations différentes. Ainsi, si on souhaite s'appuyer sur le contexte des températures pour introduire ou interpréter l'égalité $3 + (-4) = (-1)$, on peut, par exemple, attribuer aux nombres 3 et (-1) un statut d'état (température initiale de 3 °C et température finale de -1 °C, alors que le nombre (-4) a le statut d'une variation (diminution de 4 °C).

S'ils constituent une aide indéniable pour la compréhension de l'addition, le modèle « gain-perte », ou le modèle « montée-descente » peuvent constituer un réel obstacle à la compréhension de la multiplication de deux nombres, notamment s'ils sont tous deux négatifs.

Les références à l'environnement familier des élèves et leur place dans la progression des apprentissages méritent donc d'être interrogées. Le professeur doit être conscient qu'une approche concrète, en référence à des grandeurs, peut engendrer des obstacles à plus ou moins long terme,

notamment parce qu'il n'est pas possible de trouver un modèle concret permettant d'illustrer la multiplication. Par ailleurs, il faut savoir que certains élèves éprouvent des difficultés à s'affranchir du contexte d'introduction des nombres. Ceux-ci imposent en effet une image mentale dont il peut être difficile de se départir, empêchant *in fine* d'attribuer aux négatifs leur statut de nombre. Il importe donc de ne pas recourir à un unique modèle, par exemple celui des températures. Seule une pratique routinière de calculs additifs et soustractifs permet aux élèves de s'émanciper progressivement des contextes familiers, ce qui est un préalable à une bonne compréhension de la multiplication et de la division, dont les définitions ne peuvent être justifiées qu'à l'intérieur d'un cadre interne aux mathématiques.

Aucun mode d'introduction des nombres négatifs ne peut, à lui seul, permettre l'atteinte de tous les objectifs visés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir (par exemple les différents statuts du signe « moins »). Il importe toutefois que l'élève soit capable, en fin de cycle, d'appréhender un nombre négatif comme élément d'un nouvel ensemble de nombres, structuré par des opérations qui prolongent celles des décimaux positifs.

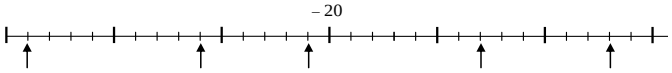
Enfin, l'apprentissage du calcul sur ces nombres ne saurait se confiner à l'application de règles formelles imposées d'emblée à l'élève sans aucune justification.

Différenciation

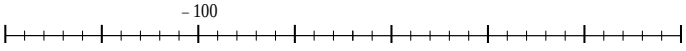
Pour certains élèves, la compréhension des nombres négatifs demande du temps et nécessite le recours à des outils de représentation (contextes concrets, droite graduée) alors que d'autres les utilisent déjà de façon automatisée. Comme cela a déjà dit, ce sont les activités routinières de calcul qui permettent à tous les élèves de s'affranchir progressivement de ces contextes concrets pour appréhender les relatifs comme des nombres. En termes de calcul, la différenciation s'effectue au niveau de l'écriture et de la nature des nombres (entiers, décimaux non entiers, fractions) et du nombre d'étapes. L'utilisation de parenthèses englobant les deux symboles d'écriture d'un nombre négatif et la représentation de l'opposé sous la forme op() peuvent être maintenues plus longtemps pour certains élèves que pour d'autres.

Dans le cadre d'un approfondissement, on peut proposer à certains élèves des activités de repérage pour lesquelles le nombre 0 n'est pas visible sur la partie proposée de la droite graduée, comme dans les deux exemples suivants :

Trouver les nombres qui correspondent aux flèches, sachant qu'une graduation correspond à une unité



Sur la droite graduée ci-dessous, une graduation correspond à une unité.
Placer les nombres – 105, – 81 et – 78



Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problème

- repérage de dates, calcul de durées sur une frise chronologique ;
- repérage de distances sur une droite graduée ;
- comparaison de températures, calcul de moyennes de températures ;

- bilans financiers ;
- lecture, interprétation et production de diagrammes et de graphiques faisant intervenir des nombres relatifs ;
- repérage dans le plan et dans l'espace.

Exemples d'activité

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Le jeu de Jungle math speed
  - Le labyrinthe
- Exemple d'activité avec prise d'initiative : le jeu-concours

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de nombre relatif avec les élèves :

- Les nombres au collège
- Le calcul numérique au collège
- Enseigner les nombres relatifs au collège – REPÈRES IREM.n°73 – octobre 2008 (IREM d'Aquitaine)
- Des maths ensemble et pour chacun 5e – Jean-Philippe Rouquès et Hélène Staïner – Sceren CRDP Pays de Loire
- Les nombres relatifs en 5e – proposition de Parcours d'Étude et de Recherche. Groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Objectifs

La notion de puissance n'intervient pas au cycle 3. Il revient donc au cycle 4 d'introduire cette *cinquième opération*. L'objectif est d'abord, à partir de situations numériques qui la motivent, d'amener la notation exponentielle comme un raccourci d'écriture, puis de familiariser l'élève à sa compréhension et à son usage. L'élève peut découvrir les opérations sur les puissances au gré des calculs, à partir des écritures développées qui en donnent une image mentale. Ces propriétés peuvent être mises en évidence par le professeur, sur des exemples génériques, mais leur formalisation n'est pas un attendu de fin de cycle. Exemple : pour le calcul de $3^8 \times 3^2$, il convient d'installer l'image mentale des facteurs (huit facteurs 3 d'une part, deux de l'autre) pour visualiser le résultat sous forme de dix facteurs 3. L'apprentissage sur les puissances se construit sur le sens, à partir de situations issues des mathématiques ou des domaines scientifiques et technologiques. La calculatrice et le tableur, ainsi que les algorithmes de calcul, enrichissent la compréhension tout en facilitant les calculs. Les activités mentales, fréquentes et régulières, permettent à l'élève de construire des automatismes.

Liens avec les domaines du socle

La notation d'une multiplication itérée sous forme de puissance permet d'effectuer de manière efficace certains calculs en utilisant un langage mathématique adapté (domaine 1). Il en est de même de la notation scientifique.
Par ailleurs, les puissances constituent un outil de modélisation permettant de résoudre des problèmes qui relèvent notamment des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4). Les puissances de dix fournissent une interprétation commode des ordres de grandeur.

Progressivité des apprentissages

Le cas des puissances de dix d'exposant entier naturel, prenant appui sur l'écriture décimale déjà envisagée au cycle 3, fait l'objet d'une étude en soi dès la classe de 4e, en liaison avec les problèmes scientifiques ou technologiques. Les exposants négatifs d'une puissance de dix sont introduits avec progressivité, en fin de 4e ou en début de 3e. La définition des exposants 1 et 0, ainsi que celle des exposants négatifs, sont amenées avec précaution, par exemple en examinant pour le nombre 10^n ($n \geqslant 2$) l'effet sur l'exposant de divisions successives par 10.
Pour une base quelconque, les exposants positifs sont envisagés en classe de 4e ou de 3e, en fonction de la progression retenue. La notation a^n peut être introduite avec les exposants 2 et 3 comme un raccourci d'écriture exprimant par exemple l'aire d'un carré ou le volume d'un cube ; pour n entier relatif quelconque, on peut l'amener si elle prend sens à travers une situation donnée, mais sa maîtrise n'est pas un objectif du collège.

Stratégies d'enseignement

Du cas particulier des puissances de dix au cas général

Le programme du cycle 4 autorise soit d'initier un travail spécifique sur les puissances de dix, et de le prolonger aux puissances de base quelconque, soit d'adopter la démarche inverse, qui consiste à passer du cas général au cas particulier. La première démarche est toutefois recommandée, car elle respecte davantage la possibilité d'instaurer une progression de cycle différenciée. Avec cette démarche la notation a^n, pour un nombre a quelconque et n entier naturel, peut être amenée soit en fin de 4e soit en 3e. D'autre part, il est important que l'élève soit familiarisé au plus tôt avec les puissances de dix afin d'être mieux préparé à leur usage dans les sciences appliquées et la technologie.

Introduire les puissances de dix

La notation $10^{\cdots}$ n'est à aucun moment mentionnée dans le programme du cycle 3. Il est cependant possible que des élèves l'aient côtoyée avant le cycle 4, avec l'idée reçue selon laquelle l'exposant, qu'il soit positif ou négatif, est lié au nombre de zéros dans l'écriture décimale. Cette conception peut s'avérer utile dans la manipulation des puissances de dix en écriture décimale, mais elle présente deux inconvénients :

- l'un est d'ordre mathématique, car le nombre « dix puissance n » doit être défini de façon intrinsèque, c'est-à-dire sans référence à une base d'écriture ;
- l'autre est didactique, car le fait de définir une puissance de dix en fonction du nombre de zéros peut occasionner un obstacle important dans la compréhension des puissances d'un autre nombre.

Il est donc préférable de définir une puissance de dix d'exposant supérieur ou égal à deux à partir du produit itéré, quitte à remarquer par la suite le lien avec le nombre de zéros de l'écriture décimale.

Construire l'apprentissage sur le sens des notions

L'apprentissage sur les puissances doit profitablement se fonder sur des **situations** qui la motivent. Celui des puissances de dix peut prendre appui sur des grands nombres issus de domaines scientifiques ou technologiques tels que l'astronomie, les sciences physiques, l'informatique, le traitement de l'information, pour ce qui est des exposants positifs.
Les sciences de l'atome, la microbiologie, les sciences chimiques, les nanotechnologies fournissent des situations propices à côtoyer les exposants négatifs. Le thème « Organisation et transformations de la matière » du programme de physique-chimie se prête bien à une articulation avec les mathématiques. L'apprentissage des puissances de base quelconque peut être motivé par des situations mathématiques mettant en œuvre un produit itéré, comme le comptage de situations répétitives, ou l'observation de situations fractales dans la nature, les arts visuels, etc. Ces situations doivent motiver les apprentissages, mais aussi les nourrir en permanence à travers des problèmes porteurs de sens.

Notation scientifique, ordre de grandeur

- Tout nombre décimal non nul peut se noter sous la forme $A \times 10^n$, où A est un nombre décimal vérifiant $1 \leqslant A < 10$ et n est un entier relatif. Cette écriture est la **notation scientifique** du décimal, qu'il convient d'introduire sur des exemples numériques. Elle peut être rattachée à ses nombreuses utilisations en physique-chimie, dans le domaine du calcul de grandeurs et celui des conversions d'unités.
- L'élève doit apprendre à utiliser la **syntaxe de sa calculatrice** relativement à la notation scientifique, pour la lecture et pour l'écriture.
- La notion d'**ordre de grandeur** peut être rattachée à la valeur de l'exposant n dans la nota-

tion scientifique. S'agissant de certaines grandeurs, cette notion donne l'occasion d'établir un lien avec les préfixes des unités multiples mentionnées dans le programme (kilo = 10^3, méga, giga, ou milli, micro, nano), ou peut-être d'autres (téra, pico ...) s'ils interviennent dans une situation donnée.

Introduction des exposants 0 et 1, des puissances négatives

La définition des exposants 0 et 1, de même que celle des exposants négatifs, demandent certaines précautions car il ne s'agit plus de produits itérés. Pour en faire accepter les définitions, une possibilité consiste à faire observer sur un exemple numérique le fait que, pour une puissance d'exposant positif, une division par la base revient à diminuer l'exposant d'une unité :

	NOMBRE	ÉCRITURE DÉVELOPPÉE	EXPOSANT
	10^4	10×10×10×10	4
÷10	10^3	10×10×10	3
÷10	10^2	10×10	2

En s'affranchissant de l'écriture développée, il est acceptable – et même intéressant – de poursuivre la décrémentation de l'exposant par des divisions successives. Cela permet de définir successivement :

$$10 = 10^1 \; ; \; 1 = 10^0 \; ; \; \frac{1}{10} = 10^{-1} \; ; \; \frac{1}{10\times10} = 10^{-2} \; ; \text{ etc.}$$

Le développement précédent est un exemple générique au sens suivant : le procédé conduit avec le nombre 10 serait analogue en substituant au nombre 10 une base a quelconque ($a \neq 0$). On pourra établir le lien entre la notation des puissances et les unités utilisées en physique-chimie ou dans le thème grandeurs et mesures, telles que vitesse, volume, concentration, masse volumique, débit, etc. : $m.s^{-1}$, m^3, $kg.m^{-3}$, $l.s^{-1}$, etc.

Utilisation des outils numériques et de l'algorithmique

Les calculatrices et logiciels ont une syntaxe permettant le calcul des puissances. L'élève doit dans un premier temps se familiariser avec celle-ci. Un algorithme itératif de calcul peut être intéressant à mettre en œuvre :

- avec un tableur, pour dresser la liste de puissances successives d'un même nombre ;
- avec le logiciel *Scratch*, qui ne possède pas la touche d'exposant.

Par ailleurs, certaines situations font intervenir des multiplications itérées et, de ce fait, se prêtent bien à une activité algorithmique.

Exemple : la croissance d'une population de bactéries (voir dans les exemples de tâche intermédiaire).

Différenciation

Sur le thème des puissances, la différenciation peut s'exercer à travers plusieurs pistes. Elle relève d'abord de l'écriture exponentielle, qui peut demeurer au stade numérique pour les élèves n'ayant pas la maturité suffisante pour comprendre une définition littérale. Cela n'empêche pas de leur proposer des situations qui se modélisent par des itérations de multiplications. La différenciation peut également s'exercer dans la formalisation de certaines propriétés calculatoires, telle que $3^4 \times 3^5 = 3^{4+5}$, qu'il n'est pas interdit de souligner dès lors que l'élève a lui-même remarqué ces propriétés à partir d'une pratique visuelle des produits développés, et sans pour autant que ces propriétés soient exigibles.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- problèmes de nature scientifique et technologique ;
- calculs d'ordres de grandeur ;
- infiniment grand et infiniment petit ;
- multiples et sous-multiples de grandeurs usuelles ;
- situations multiplicatives simples de dénombrement ;
- situations fractales en géométrie.

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Curiosités numériques
  - Nombres de Mersenne et nombres parfaits
  - Croissance d'une population de bactéries
  - Multiples de l'octet
  - Dilution en homéopathie
- Exemples d'activités avec prise d'initiative :
  - Tous cousins
  - L'arbre fractal

Interdisciplinarité

La notion de puissance se prête bien à des activités interdisciplinaires et trouve toute sa place dans le cadre des EPI (enseignements pratiques interdisciplinaire). Par exemple :

- Dans la thématique « Corps, santé, bien-être et sécurité » : les unités CH en homéopathie ;
- Dans la thématique « Culture et création artistiques » : les fractales ;
- Dans la thématique « Information, communication et citoyenneté » : le stockage de données numériques sur un support (disque dur, clé USB, ...), la transmission d'information ;
- Dans la thématique « Sciences, technologie et société » : l'infiniment grand et l'infiniment petit, la rapidité des processeurs ;
- Dans l'enseignement « Monde économique et professionnel » : la modélisation plane pour traiter certains problèmes liés au monde économique et professionnel.

Ressources complémentaires

La ressource proposée ci-après constitue un complément et un approfondissement utiles pour aborder la notion de puissance avec les élèves :

- Laure Guérin, La démarche d'investigation à travers un parcours d'étude et de recherche, exemple des puissances en classe de 4e, IREM de Clermont-Ferrand.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a découvert la notion de multiple et diviseur d'un entier naturel d'usage courant et les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Il a résolu des problèmes en mobilisant la division euclidienne selon deux approches :

LA DIVISION – GROUPEMENT	LA DIVISION – PARTAGE
Exemple La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a–t–il d'élèves ?	Exemple La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jetons a chaque élève ?
Résoudre un problème de division-groupement revient à calculer le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection connaissant la valeur d'un paquet.	Résoudre un problème de division-partage revient à calculer la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection.

Au cycle 4, la division euclidienne continue à être mobilisée ; les notions de multiple et de diviseur sont étendues à l'ensemble des entiers naturels. Progressivement, l'élève découvre les notions de diviseur commun et de nombre premier. Il mobilise ces connaissances pour résoudre des problèmes.

L'apprentissage du raisonnement est un objectif central auquel contribue de façon spécifique le travail en arithmétique. L'activité mathématique proposée aux élèves doit prendre appui sur des situations variées.

Il s'agit d'amener les élèves à élaborer des raisonnements de divers types :

- **par disjonction de cas :** « Si deux entiers naturels ne sont pas multiples de 3, alors leur produit n'est pas multiple de 3 » (disjonction de cas suivant les restes de la division euclidienne par 3).
- **par l'absurde :** « n désigne un entier qui n'est pas premier. Montrer que n a un diviseur plus petit que $\sqrt{n}$. » ; « Irrationalité de $\sqrt{2}$. »
- **à l'aide d'un contre-exemple :** « Vrai-Faux : quel que soit l'entier naturel n, le nombre $n^2 - n + 11$ a exactement 2 diviseurs. ($n = 11$ fournit un contre-exemple.)

Liens avec les domaines du socle

La recherche de diviseurs ou de multiples d'un entier naturel ou communs à deux entiers naturels, la simplification de fractions, la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers conduisent à effectuer avec discernement des calculs mentaux, posés ou instrumentés (domaine 1).

De façon générale, l'analyse des erreurs, le travail par « essais/ajustements » et le travail collaboratif, en groupe ou en équipe et, plus spécifiquement, la reconnaissance du caractère irréductible d'une fraction, l'identification ou la production de nombres premiers conduisent à s'engager dans des démarches de recherche, y compris algorithmiques, à produire des exemples ou des contre-exemples (domaine 2).

La résolution de problèmes mettant en jeu des entiers naturels (comme les problèmes de conjonction, voir par exemple l'activité « Ça roule »), qui conduit à observer, manipuler et argumenter, et le travail de la preuve (critères de divisibilité, par exemple) permettent de rencontrer et de produire des raisonnements spécifiques (par l'absurde, par disjonction de cas, à l'aide de contre-exemples notamment), ce qui favorise l'apprentissage du raisonnement (domaines 3 et 4).

Progressivité des apprentissages

La division euclidienne est travaillée sur toute la durée du cycle. Les critères de divisibilité, les notions de diviseur et de multiple d'un entier naturel sont à réinvestir dès le début du cycle. Dans la perspective de l'apprentissage du raisonnement, les nombres premiers peuvent être introduits dès le début du cycle et travaillés tout au long du cycle. La notion de fraction irréductible est introduite en classe de 3e, donnant une occasion d'aborder la notion de diviseur commun à deux entiers naturels. Dans la mesure où cette approche met en jeu des entiers de taille raisonnable, la fraction irréductible s'obtient par simplifications successives et ne nécessite pas le calcul du PGCD.

Stratégies d'enseignement

Les questions flash (*Multiples, diviseurs et critères de divisibilité* et *Nombres premiers*) contribuent à la construction du sens « multiple/diviseur » et à l'appropriation des critères de divisibilité. Proposées régulièrement sur la durée du cycle, elles permettent de réactiver ces savoirs et savoir-faire ; elles peuvent concourir à une évaluation diagnostique.

Le travail sur l'erreur s'appuie sur un retour au sens, en lien avec la définition de diviseur et de multiple ainsi que la production d'exemples et de contre-exemples. L'arithmétique est un domaine dans lequel l'élève est amené à mettre en œuvre différents types de raisonnement.

L'oral constitue une aide à la compréhension et participe du traitement de l'erreur.

Différenciation

Dans ce thème, la différenciation peut notamment consister en :

- un accompagnement spécifique que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- l'élaboration de la preuve d'un résultat général, d'une propriété (critère de divisibilité par 3 par exemple) ou la résolution d'un problème (voir par exemple le prolongement proposé dans la tâche intermédiaire « Un petit nombre ») à l'aide d'un exemple générique ; la démonstration dans le cas général pouvant faire l'objet d'un approfondissement proposé à certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Les tâches proposées peuvent notamment consister en des activités mentales, conduire à l'élaboration d'algorithmes et de programmes et exiger la mise en œuvre de raisonnements.

Exemples d'activités

Exemples de questions flash
- Multiples, diviseurs et critères de divisibilité
- Nombres premiers

Exemples de tâches intermédiaires
- Qui suis-je ?
- Un habile partage
- Un petit nombre
- Une grande lectrice

Exemples d'activités avec prise d'initiative
- Ça roule
- Système monétaire
- Conjecture de Syracuse

Interdisciplinarité

Les entiers naturels interviennent principalement dans la résolution de problèmes internes aux mathématiques relevant de la divisibilité et de la primalité. L'étude de tels problèmes permet aux élèves de s'approprier des connaissances et d'acquérir des compétences qui favorisent tout particulièrement l'apprentissage du raisonnement.

De façon complémentaire, l'étude de problèmes d'engrenages, de conjonction de phénomènes périodiques, issus de la physique et de la technologie, participent de la formation des élèves.

Des EPI portant sur les thématiques « Information, communication, citoyenneté » (stockage de l'information, cryptage) ou « Langues et cultures de l'Antiquité » (prédiction des éclipses solaires et lunaires, nombres parfaits) seront l'occasion de construire l'attendu de fin de cycle « Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers ».

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder les notions de divisibilité et de nombres premiers avec les élèves :

- Du numérique au littéral
- Raisonnement et démonstration

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a fait fonctionner de manière implicite les propriétés des opérations dans le champ des nombres, mais sans les avoir formalisées en tant que propriétés générales. Il a rencontré des formules littérales dans le cadre des apprentissages liés aux mesures de grandeurs ; la lettre y avait essentiellement valeur d'abréviation ; ainsi, la formule $A = L \times l$, est une abréviation de l'expression « aire du rectangle = longueur fois largeur » utilisée par l'élève pour effectuer directement le produit des nombres donnés pour la longueur et la largeur, sans identification explicite du processus de substitution des lettres par des valeurs numériques. L'élève a aussi appris à compléter des égalités à trou, notamment à l'occasion du travail sur les notions de différence et de quotient. Il a résolu des problèmes du premier degré sans avoir recours à la résolution d'équations, mais en agissant par tâtonnements, en ayant recours à des étapes intermédiaires avec ou sans l'aide d'outils numériques (tableur, calculatrice).

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants:

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- introduire les concepts de variable et de fonction.

Liens avec les domaines du socle

Le langage algébrique permet de formuler des propriétés mathématiques et de résoudre des problèmes. À travers la pratique du calcul littéral, son apprentissage contribue donc de façon essentielle à l'objectif « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques » du domaine 1 du socle.

Les outils algébriques (lettres, fonctions) sont également utilisés pour représenter des systèmes naturels et techniques et fournir des preuves aux problèmes qu'ils engagent. Leur utilisation participe à la mise en œuvre de la démarche scientifique, en complément de l'observation, la manipulation et l'expérimentation. Le calcul littéral contribue donc fortement à l'atteinte des objectifs du domaine 4 du socle.

Progressivité des apprentissages

Ces repères de progressivité sont explicités ci-dessous selon les principaux enjeux d'apprentissage du calcul littéral au cycle 4.

Formules et expressions littérales pour généraliser, modéliser ou démontrer

Le travail initié au cycle 3 sur la production et l'utilisation de formules devient, en classe de 5e, un objectif de formation. Une formule (expression d'une relation entre des variables) ou une expression littérale (résultat d'un programme de calcul) permettent de décrire une situation générale, le recours à la lettre étant un moyen de s'abstraire de valeurs numériques particulières.

La résolution de problèmes issus de contextes variés permet de motiver la production de formules. On pourra se référer avec profit aux exemples figurant dans le document « Du numérique au littéral » publié sur Éduscol : carrés bordés, somme de multiples de 7, etc. Parallèlement à la production et à l'utilisation de formules, la familiarisation précoce avec la notion de fonction (sans faire appel à son formalisme) permet de modéliser la dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre. La notation symbolique d'une fonction n'est introduite qu'en 3e. Elle est accompagnée de la présentation des différents registres de représentation (symbolique, numérique, graphique) et des passages de l'un à l'autre.

Transformation d'expressions littérales

Dès le début du cycle 4, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est implicitement mobilisée lors de calculs sur des nombres, en particulier en calcul mental, par exemple pour calculer 29×21.

L'intérêt, apparu à travers la résolution de problèmes, de transformer une expression numérique pour la simplifier ou l'écrire sous une forme adaptée motive d'institutionnaliser la distributivité simple sous forme littérale. Celle-ci peut s'appuyer sur l'image mentale de l'aire d'un rectangle de longueur $a + b$ et de largeur k décomposé en deux rectangles de largeur k et de longueurs respectives a et b.

Le recours à la distributivité permet ensuite de valider la réduction d'une expression littérale.

Avant d'être automatisées, les stratégies de transformation sont explicitées (par exemple $x = 1 \times x$; $-x = (-1) \times x$), pour aboutir progressivement à des calculs du type :

> $x - 2{,}7\,x = 1 \times x + (-2{,}7) \times x = \big(1 + (-2{,}7)\big) \times x = (-1{,}7) \times x = -1{,}7x.$

La transformation d'expressions littérales (d'une somme en produit ou vice versa) s'effectue dans le même esprit, à partir de la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition.

Le travail technique de développement ou de factorisation est accompagné d'une réflexion sur le choix de la forme de l'expression (somme ou produit) la mieux appropriée au problème à résoudre.

De manière générale, les tâches d'exécution (développement, factorisation, réduction) sont articulées avec des activités qui développent l'intelligence des stratégies de calcul comme l'anticipation, l'organisation, le contrôle. Les stratégies de contrôle peuvent s'appuyer sur des arguments de signe, d'homogénéité, des tests sur des valeurs numériques adéquates, etc.

Résolution d'un problème du premier degré

Pour anticiper la notion d'équation, l'élève apprend, dès le début du cycle 4, à tester une égalité à la main ou à l'aide d'un outil numérique (tableur, calculatrice), en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui figure dans l'égalité. Il apprend à compléter des opérations à trou. Il est initié aux programmes de calcul à partir de programmes dont les opérations sont réversibles et permettent de « remonter » le programme en commençant par la dernière opération. C'est le cas dans l'exemple suivant, extrait du document *Du numérique au littéral* publié sur Éduscol :

> Je pense à un nombre, je le multiplie par 3. Si je retranche 12 au résultat obtenu, j'obtiens 7,5.
> A quel nombre ai-je pensé ?

Progressivement, la recherche d'efficacité face à des problèmes plus résistants (correspondant par exemple à des programmes de calcul non réversibles), l'insuffisance de la démarche numérique face à des problèmes du type $ax + b = cx + d$, avec $a - c$ non nul et des valeurs des paramètres a, b, c, d conduisant à des solutions non entières, ou encore la nécessité d'obtenir les valeurs exactes des solutions de certaines équations motivent l'introduction de la lettre et la modélisation d'une situation par une équation ou une inéquation.

On pourra se référer à la situation *« Alice et Bertrand »* empruntée à Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume et André Pressiat, (« Les débuts de l'algèbre au collège » publication de l'INRP) et proposée comme tâche intermédiaire.

La méthode algébrique de résolution des équations et inéquations du premier degré est explicitée en classe de 3e, en s'appuyant sur les propriétés de l'égalité ou de l'inégalité, par exemple l'invariance des solutions d'une équation par l'ajout d'une même expression à chacun de ses membres. L'utilisation du tableur et la programmation d'algorithmes permettent la résolution, au moins approchée, d'équations d'autres types.

Calcul littéral pour démontrer

Dès le début du cycle, le travail mené sur les nombres conduit à émettre des conjectures, notamment sur les propriétés des opérations entre nombres rationnels. Celles-ci peuvent être démontrées dès la classe de 5e à partir d'exemples génériques, dans des situations simples. On rappelle qu'un exemple est dit « générique » lorsqu'une propriété qu'il permet de mettre en évidence peut être étendue au cas général ; ainsi, on passe de l'exemple générique $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$ traité dès le cycle 3 à sa généralisation littérale $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ qui consiste à substituer une lettre à une valeur numérique.

Dans le cadre de la différenciation, la démonstration de l'identité $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, qui mobilise la notion de quotient, pourra être présentée aux élèves les plus à l'aise (ou en demande de justification).

Pour l'approche et la démonstration d'autres propriétés des opérations, on consultera avec profit les pages 10 à 20 du document *Le calcul numérique au collège* publié sur Éduscol.

Progressivement, l'élève perçoit les limites du calcul numérique et la nécessité de passer au calcul littéral pour prouver qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs de la variable (par exemple, que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3).

Stratégies d'enseignement

Le passage du numérique au littéral constitue pour l'élève une rupture importante : d'une part les symboles du calcul littéral (lettres, signe égal et ses différents statuts, signes opératoires, etc.) diffèrent de ceux du langage des nombres ; d'autre part, les types de problèmes que l'algèbre permet de résoudre sont différents de ceux résolus jusque-là. Pour résoudre un problème de ce type, l'élève avait l'habitude de progresser pas à pas depuis les données connues jusqu'à la quantité à trouver. En algèbre, il s'agit au contraire d'établir des relations entre des données connues et un résultat à trouver (l'inconnue), puis de traiter ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché. Il y a là un véritable renversement de pensée qui, pour être compris et assimilé par l'élève, suppose de la part de l'enseignant une vigilance particulière. Celle-ci peut notamment s'exercer à travers la vérification que la solution trouvée convient bien.

Pour motiver le recours au calcul littéral et aider les élèves à accepter une approche autre que numérique, il est essentiel qu'ils soient confrontés à des situations révélant les limites des procédures dont ils disposent déjà, basées sur des tâtonnements, des essais-erreurs ou l'utilisation d'un tableur. Ils doivent aussi prendre conscience de l'intérêt de désigner des quantités ou des grandeurs par les lettres qui leur sont traditionnellement attribuées (n pour une quantité discrète, x pour une longueur, V pour un volume) plutôt que par leur nom complet.

Les programmes de calcul constituent à la fois un moyen pertinent pour introduire la notion d'expression littérale puis d'équation, et un intermédiaire entre le volet procédural et le volet structural du calcul littéral.

Le tableur, qui permet le passage du nombre à la cellule, peut constituer un intermédiaire pertinent pour introduire la lettre et pour appréhender les notions de variable et de fonction, tout en précisant que les usages sont différents. L'algorithmique et la programmation offrent également des opportunités didactiques intéressantes.

La seule application de « règles » techniques ne permet pas de comprendre l'origine des propriétés qui les sous-tendent. La compréhension d'une formule littérale s'acquiert d'autant plus facilement qu'elle aura été anticipée sur des exemples numériques ou prendra appui sur des images mentales, par exemple celle de l'aire de deux rectangles accolés ayant une dimension en commun pour illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Le nombre de « règles » calculatoires formalisées exigibles des élèves doit rester limité. Parmi elles, la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition est utilisée dans les deux sens de lecture et invoquée aussi bien pour le développement que la factorisation d'expressions algébriques. La double distributivité, qui permet par exemple de développer une expression du type $(2x + 3) \times (4x - 7)$, est abordée dans des situations simples en mobilisant deux fois la distributivité, et les résultats sur les puissances ; cette initiation ne vise pas le développement d'automatismes.

Si certaines stratégies peuvent se révéler opérantes, il convient d'être conscient des obstacles qu'elles peuvent provoquer. Il en est ainsi de la règle des signes « moins par moins donne plus » qui confond le sens opérationnel de la soustraction et la notion d'opposé. Elle peut aussi engendrer des conceptions erronées (par exemple que $-(-x)$ est toujours un nombre positif). A contrario, la formulation explicite des propriétés utilisées (par exemple « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé ») permet aux élèves de comprendre les manipulations qu'ils effectuent sur des expressions littérales.

Il ne suffit pas qu'une stratégie calculatoire ait été comprise pour qu'elle soit installée et mobilisable. Pour passer de la compréhension d'une propriété à la construction d'un automatisme, il est indispensable que la stratégie ait été régulièrement entretenue, par petites touches, à travers un rite d'activités rapides (questions flash, activités mentales) menées en classe dans la durée, en respectant une gradation progressive de la difficulté (qui pourra être arrêtée collectivement au sein d'un collège),

et en développant des démarches de contrôle (arguments de signe, d'homogénéité, recherche de contre-exemples, etc.).

Les exerciseurs et banques d'exercices en ligne peuvent être utilisés par les élèves en classe ou hors de la classe, de manière différenciée. Favorisant le réinvestissement et l'automatisation, ces outils peuvent aider les élèves à élaborer des stratégies mentales efficaces, à condition qu'ils permettent un traitement intelligent des erreurs, et que leur utilisation entre dans le cadre d'une planification et d'un suivi régulier par le professeur. Si des activités à prise d'initiative sont essentielles pour aider l'élève à comprendre la puissance du langage algébrique et les opportunités qu'il offre pour résoudre des problèmes d'un type nouveau, elles ne permettent pas à elles seules de construire l'habileté calculatoire attendue en fin de cycle 4. On veillera donc à maintenir un équilibre entre la construction d'automatismes (à travers un entraînement fréquent et régulier en classe ou hors de la classe) et la résolution de problèmes conduisant à mobiliser des stratégies et des techniques de calcul littéral.

Retour sur quelques obstacles

Le passage à l'algèbre correspond à un accès à l'abstraction dont on ne doit pas minimiser la difficulté. L'apprentissage du calcul littéral se heurte de façon naturelle à un certain nombre d'obstacles. Les professeurs aideront d'autant mieux leurs élèves à les surmonter qu'ils en auront une connaissance fine.

Les différentes significations du signe « égal »

Les élèves rencontrent le signe « $=$ » très tôt dans leur scolarité, mais à l'école élémentaire le signe « $=$ » est l'annonce d'un résultat. Ainsi, dans l'égalité $8 + 5 = 13$, le signe « $=$ » est lu comme « cela donne » ou « cela fait ». Il est alors orienté de la gauche vers la droite et n'est pas perçu comme le symbole d'une relation symétrique et transitive. Cette signification correspond à celle de la touche « ENTER » des calculatrices. Dès le cycle 2, à travers des activités de calcul mental ou en ligne, les élèves sont amenés à utiliser le signe « $=$ » dans l'autre sens, par exemple $5 \times 36 = 5 \times 2 \times 18$ ou $21 = 4 \times 5 + 1$. Les décompositions additives ou multiplicatives sont choisies en fonction de leur intérêt pour résoudre une classe spécifique de problèmes. Ainsi, la décomposition additive du nombre 42 sous la forme $42 = 30 + 12$ facilite le calcul de $42 - 12 + 3$, alors que sa décomposition multiplicative $42 = 3 \times 2 \times 7$ permet de factoriser l'expression littérale $3a + 42$. L'incapacité de certains élèves à factoriser cette dernière expression peut provenir, non pas d'une méconnaissance du processus de la factorisation, mais d'un manque d'habitude à écrire des décompositions numériques.

À travers la pratique du calcul littéral, le signe « $=$ » acquiert trois autres significations :

- il est utilisé pour rendre compte de l'universalité d'une égalité, traduisant que, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs retournées par les expressions figurant de part et d'autre du signe « $=$ » sont égales. On parle alors d'identité ;
- il est utilisé comme symbole d'affectation, comme en informatique, lorsqu'on se propose de calculer l'expression $(a + 2b)^2$ pour $a = 1$ et $b = -0{,}5$;
- en rupture avec chacune de ces significations qui sous-entendent qu'une certaine propriété est vraie (même si c'est dans des conditions différentes), le signe « $=$ » acquiert un statut tout autre dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, le signe « $=$ » apparaît alors dans des énoncés dans lesquels, en remplaçant la lettre par un nombre, on obtient une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs (et rien qu'elles) qui, substituées à l'inconnue, rendent l'égalité vraie.

Les différents statuts de la lettre

Au cycle 3, la lettre est utilisée pour différentes finalités :

- symboliser une unité (m, g, h, s, etc.) ;
- désigner un objet mathématique (le point A, le nombre π) ;
- désigner dans une formule la mesure d'une grandeur ($A = L \times l$; $P = 2\pi\ R$).

Au cycle 4, la lettre acquiert de nouveaux statuts qu'il convient de bien différencier :

- le statut de variable, qui apparaît à la fois dans les formules (ainsi, dans l'égalité $P = 2\pi\ R$, la valeur du périmètre P dépend des valeurs attribuées à la variable R) et dans l'expression symbolique $x \to f(x)$ d'une fonction. L'utilisation du tableur peut faciliter la compréhension de la notion de variable dans la mesure où, dans l'édition d'une formule, ce sont les adresses des cellules (et non leur contenu) qui sont prises en compte. La modification du contenu d'une cellule désignée dans une formule modifie le contenu de la cellule où est implantée la formule, ce qui permet d'appréhender les notions de variable et de fonction ;
- le statut d'indéterminée, qui apparaît dans des identités où la lettre représente des nombres quelconques. Il importe que la valeur d'universalité de ces identités apparaisse dans l'environnement de l'égalité, sous une forme accessible aux élèves, par exemple, en écrivant : « Pour toutes valeurs des nombres k, a, b l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ est vraie » ;
- le statut d'inconnue, qui heurte l'habitude de penser qu'une égalité est « toujours » vraie. La compréhension de ce qu'est une solution d'une équation nécessite de recourir à des tests de la valeur de vérité de l'égalité en affectant à l'inconnue différente valeur numériques. Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques de résolution des équations du premier degré ;
- le statut de paramètre, qui conserve une valeur fixe, mais de portée générale. C'est par exemple le rôle de la lettre a lorsqu'elle représente le coefficient de la fonction linéaire $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{ax}$. De même en physique, pour exprimer à partir de la formule $\mathrm{P} = \mathrm{UI}$ la puissance P en fonction de l'intensité I pour une tension U donnée, la lettre U a le statut de paramètre alors que la lettre I a celui de variable.

Il convient donc d'attirer régulièrement l'attention des élèves sur le statut du signe « $=$ » ou des lettres utilisées, selon la situation considérée.

Les parenthèses

Les parenthèses sont des séparateurs de blocs de calcul qui jouent un rôle essentiel dans la construction d'expressions numériques ou littérales. Des parenthèses redondantes, par exemple dans une expression du type $(2\mathrm{x} + 1) + (3 \times (-\mathrm{x}))$, peuvent aider l'élève à comprendre la structure de l'expression et l'ordre dans lequel les opérations sont à effectuer. La maîtrise des règles de priorité des opérations lui permettra progressivement de s'en affranchir. En 3e s'ajoute un nouveau rôle des parenthèses, dans l'écriture symbolique d'une fonction.

Rôle des logiciels

L'utilisation de logiciels, dans le cadre de la résolution de problèmes, favorise la construction progressive des notions de variable et de paramètre. Ainsi, la référence absolue ou non à une cellule dans l'écriture d'une formule sur le tableur permet de distinguer ce qui varie de ce qui est fixé ; les variables utilisées dans les algorithmes, en particulier dans les boucles, participent du même objectif, de même que l'utilisation d'un curseur en géométrie dynamique.

L'utilisation raisonnée d'un logiciel de calcul formel peut aider à mettre en évidence le rôle des parenthèses dans l'expression d'une fonction.

Enfin, l'utilisation de logiciels, en classe ou en dehors de la classe, est un levier majeur pour la recherche et l'émission de conjectures que le calcul littéral permettra ensuite de démontrer.

La résolution algébrique d'un problème est souvent articulée selon trois phases : une phase de recherche et de modélisation de la situation, une phase de traitement formel (transformation, résolution) sans lien avec le contexte initial, une phase de communication pour restituer la solution et la vérifier. Assumer successivement les deux premières phases constitue une charge de travail importante pour un débutant. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel par les élèves n'ayant pas une habileté technique suffisante, peut leur permettre de différer le travail technique, si l'objectif est de mettre l'accent sur l'usage de l'algèbre comme outil de mathématisation de l'énoncé.

Rôle de l'oral

L'écriture mathématique est très condensée et contient souvent des procédures implicites que seule la formulation orale, véritable « dépliement de la pensée », permet de mettre en évidence.

Illustrons cette affirmation sur l'exercice suivant, qui consiste à développer et réduire l'expression $3x(2x-1)-(x^2-7)$.

Le traitement, qui pourrait être écrit dans un cahier d'élève, tient en quelques lignes :

$$3x(2x-1)-(x^2-7)=6x^2-3x-(x^2-7)=6x^2-3x-x^2+7=5x^2-3x+7.$$

Or, pour aboutir au résultat, il est nécessaire :

- de comprendre la structure de l'expression initiale ;
- de savoir que $3x(2x-1)=3x\times(2x-1)$;
- de reconnaître les blocs de calcul intermédiaires ;
- d'appliquer la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction ;
- de savoir que $3x\times 2x=3\times x\times 2\times x=3\times 2\times x\times x$;
- que $x\times x=x^2$;
- de connaître la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction ;
- la priorité des opérations
- de comprendre pourquoi on ne peut pas réduire davantage $5x^2-3x+7$, etc.

On mesure sur cet exemple tout le profit qu'il pourrait y avoir à compléter la trace écrite par une trace orale, par exemple sous forme d'enregistrements audio mis à la disposition des élèves.

De même, la résolution d'une équation du type $2x=6$ sera plus accessible pour un élève fragile si elle est formulée en langage naturel (« trouver une quantité dont le double vaut 6 »).

Différenciation

Permettre à tous les élèves d'accéder à la fin du cycle 4 aux connaissances et aux compétences fixées par le programme est une exigence du socle commun. Les apprentissages liés au calcul littéral requièrent de ce point de vue une attention particulière. En effet, l'accès au formalisme et à l'abstraction constitue une marche particulièrement élevée pour les élèves fragiles. Cependant, leur activité algébrique ne saurait se résumer à l'acquisition de techniques calculatoires. Il importe qu'ils soient confrontés à la résolution de problèmes, même s'ils ne maîtrisent pas toutes les techniques intervenant dans leur résolution. La différenciation pourra alors reposer sur des choix particuliers de variables didactiques (solutions entières, décimales ou fractionnaires, programmes de calcul réversibles ou pas, attribution de valeurs numériques à certains paramètres, etc.). L'acquisition des techniques calculatoires et leur automatisation seront d'autant plus efficaces qu'elles seront adossées à des représentations porteuses de sens, souvent issues de la résolution de problèmes.

Il convient aussi de laisser vivre, de façon différenciée et aussi longtemps que nécessaire pour certains élèves, des procédures de tâtonnement ou faisant appel à la manipulation, l'expérimentation, la schématisation ainsi que les formulations intermédiaires, même maladroites ou peu rigoureuses, tout en indiquant les limites de ces formulations.

Pour permettre l'accès de tous les élèves à l'abstraction de la démarche algébrique, il est essentiel de les amener à exprimer ce qu'ils ont compris et de repérer ce qui les met en difficulté. La déstabilisation des conceptions erronées se fait en cherchant des contre-exemples. La reconstruction des connaissances visées passe ensuite par l'explicitation orale des procédures mises en œuvre, leur comparaison, l'analyse des erreurs, etc.).

Symétriquement, et toujours dans le cadre d'une différenciation pédagogique, les élèves les plus habiles peuvent être confrontés à des problèmes qui ne sont pas du premier degré, mais qui s'y ramènent, par exemple en factorisant des équations produits à l'aide d'identités remarquables.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- modélisation de situations d'origine arithmétique ou géométrique ;
- modélisation de situations faisant intervenir des grandeurs physiques ;
- résolution de problèmes se ramenant à des équations ou des inéquations du premier degré ;
- généralisation de propriétés des nombres rationnels ;
- démonstration de propriétés générales portant sur les nombres rationnels ;
- programmes de calcul.

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash : Activités mentales
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Le nombre d'Alice et Bertrand
  - Le magicien
- Exemples d'activités avec prise d'initiative
  - Les carrés bordés
  - Le calendrier

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder le calcul littéral avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents sur le calcul littéral.

- Rapport d'étape sur le calcul - commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques
- Du numérique au littéral
- Le calcul numérique au collège
- Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée
- Les débuts de l'algèbre au collège, par Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume et André Pressiat, publication de l'INRP
- Sur la place de l'oral en mathématiques

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Objectifs

Le traitement des données numériques contribue à l'acquisition de chacun des cinq domaines du socle commun à travers la lecture, l'interprétation, l'organisation, la synthétisation et la représentation de données chiffrées. Les activités relatives au traitement de données permettent de développer les six compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et responsables. L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive. La mobilisation des outils informatiques trouve dans ce cadre toute sa légitimité pour accéder à des données réelles en grand nombre et les traiter en s'affranchissant de calculs fastidieux ; elle permet également d'obtenir rapidement diverses représentations d'une série de données afin de comparer leur pertinence au regard des questions posées.

Dans un monde où les élèves sont confrontés en permanence à des images, il est primordial de les amener à réfléchir sur celles d'entre elles qui représentent des données.

Liens avec les domaines du socle

Pour traiter des données, l'élève lit, interprète, commente et produit des tableaux et des graphiques; il étudie des relations entre des données statistiques et il les représente graphiquement, développant ainsi la compétence « comprendre, s'exprimer en utilisant des langages scientifiques » du domaine 1.

La lecture critique de diagrammes ou de représentations de données issus de différents supports amène l'élève à s'interroger sur la crédibilité des sources d'information ; elle contribue à l'éducation aux médias et à la maitrise des techniques usuelles de l'information (domaine 2) et à la formation du citoyen (domaine 3).

Le recueil, l'organisation et le traitement de données chiffrées sont des composantes de la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques et technologiques (domaine 4) et contribuent à l'étude des organisations et des fonctionnements des sociétés (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Au cycle 3, les élèves ont été initiés dans le cadre de la résolution de problèmes à prélever des informations chiffrées à partir de supports variés : textes, tableaux, représentations graphiques, et à présenter des résultats sous une forme adaptée. Ces compétences sont mobilisées tout au long du cycle 4 et elles sont enrichies à la fois par la possibilité

d'étudier des situations plus étoffées au fur et à mesure que les élèves acquièrent une plus grande maitrise de la lecture de documents complexes et de l'utilisation de divers outils mathématiques (calcul, proportionnalité, pourcentages, mesure des angles, etc.) et numériques.
On montrera dès la classe de 5e l'intérêt de regrouper des données nombreuses en classes de même amplitude afin de les représenter par des histogrammes.
Les notions de fréquences et de fréquences cumulées, de moyenne et de médiane sont introduites dès la classe de 5e, celle d'étendue en classe de 4e, dans des situations qui leur donnent du sens.

Stratégies d'enseignement

Les capacités à prélever de l'information sur divers supports et à effectuer des traitements à partir de données chiffrées doivent être consolidées tout au long du cycle 4. À l'issue de la classe de 6e, tous les élèves ne maitrisent pas encore la lecture de tableaux et de graphiques. La lecture de graphiques présente a priori moins de difficultés que leur production, mais n'en demeure pas moins une activité formatrice pour peu qu'on s'appuie sur des documents variés, extraits de manuels d'autres disciplines, de magazines, de journaux, de sites Internet, voire d'extraits d'émissions télévisées. C'est par la diversité des supports graphiques que s'acquièrent les capacités d'analyse et de discernement et l'esprit critique.

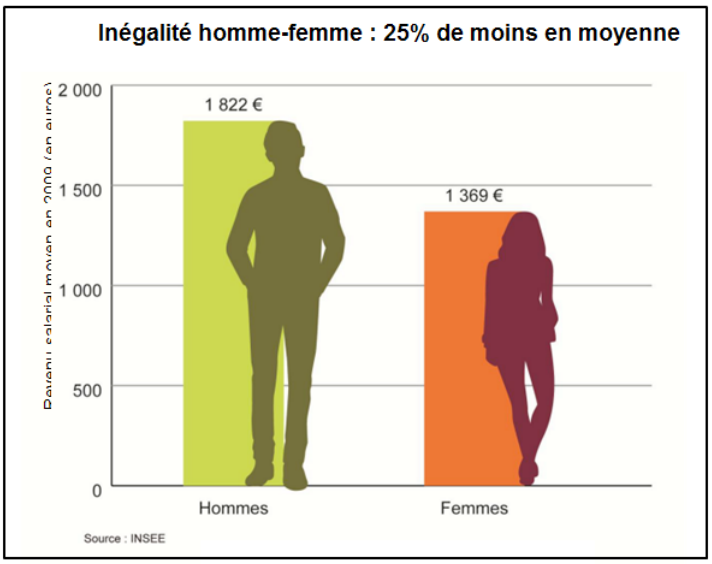
> Les sites de l'Institut national de la démographie et de l'Institut national de la statistique et des études économiques fournissent de nombreuses données pouvant servir de support à des activités d'organisation et de représentation de données.

Prélever des informations simples

En début de cycle, on s'assurera que les élèves savent prélever des informations simples sur un graphique ou un diagramme. On peut les faire réagir sur les choix qui ont été faits pour la présentation de certains documents iconographiques : échelle, origine du repère, pertinence des lignes reliant les points d'un graphique dans le cas d'une série discrète, etc. et leur présenter des représentations de données ambigües, erronées voire trompeuses en leur demandant de les critiquer. Par ailleurs, un tableur permet d'obtenir facilement différentes représentations d'une même série statistique qui pourront être comparées. Ces activités entraînent les élèves à exercer leur esprit critique et à développer leurs capacités à argumenter au cours de débats au sein de la classe.

Exempe 1

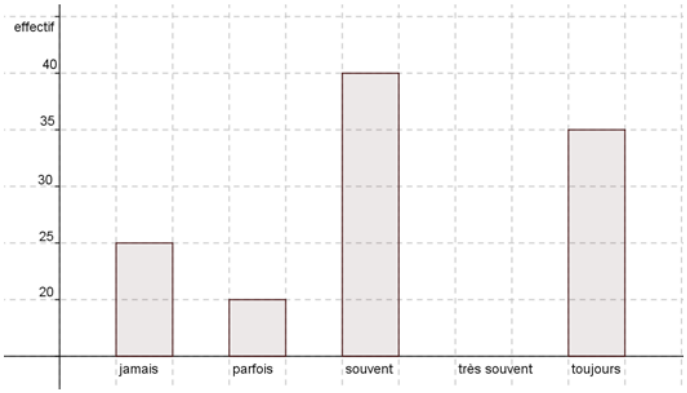
Source : Site de La Finance pour tous



Question : Le titre du graphique contredit-il son contenu ?

Exemple 2

On a demandé à un échantillon de personnes à quelle fréquence elles regardent la télévision lors de la pause de midi. Le graphique ci-dessous représente les résultats de cette enquête.



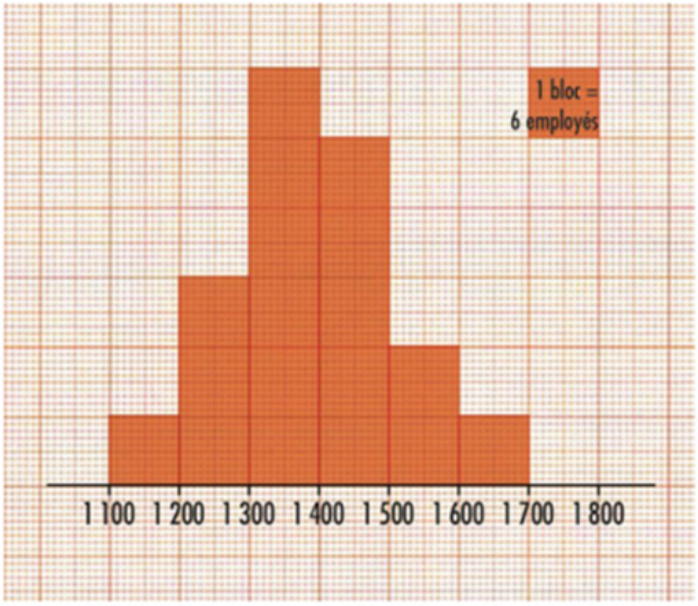
Paul affirme qu'il y a deux fois plus de personnes qui regardent « souvent » la TV que de personnes qui la regardent « parfois ». Est-ce vrai ?

Cas des histogrammes

La notion d'histogramme nécessite une clarification : des diagrammes en barres représentant des variables qualitatives ou quantitatives discrètes sont parfois qualifiés à tort d'histogrammes (autres disciplines, tableurs). On peut attirer l'attention des élèves sur le fait qu'un histogramme représente des données regroupées en classes et que dans ce cas on ne s'intéresse plus à la longueur (ou hauteur) des différents éléments mais à leur aire, ce qui nécessite dans certains cas de se référer à la légende explicitant ce que représente une unité d'aire. Cette particularité peut être illustrée par des représentations de données regroupées en classes d'amplitudes différentes.

Exemple

L'histogramme ci-dessous représente la répartition des salaires dans une entreprise :



Quel est le nombre de salariés dans cette entreprise ?

Le patron de cette entreprise affirme que plus de 40 % de ses employés ont un salaire au moins égal à 1 400 €. Qu'en pensez-vous ?

Utilisation des tableaux

La synthétisation de données nombreuses sous la forme de tableaux, la représentation d'une série à l'aide d'un graphique ou d'un diagramme sont des tâches qui permettent de laisser aux élèves une part d'initiative croissante au fur et à mesure que ces outils leur deviennent familiers. Le traitement d'exemples simples en exercice permet une bonne compréhension des différents modes de représentation tout en renforçant d'autres capacités dans le domaine du calcul, de la proportionnalité et de la géométrie. L'expertise dans la production de diagrammes statistiques n'est pas un objectif de formation, et encore moins d'évaluation.

Exemple

Source : Site de La Finance pour tous

Afin d'évaluer la répartition des billets distribués par un distributeur, une banque a recensé un samedi la valeur des billets distribués.

20	20	20	10	10	50	20	10	10
10	50	20	10	50	50	10	10	10
20	20	50	20	10	50	20	50	50
50	10	20	20	20	20	10	10	10
50	20	20	10	50	10	50	10	10
50	20	50	50	50	50	10	20	20
20	50	20	20	10	50	20	20	20
20	50	20	50	50	10	10	20	20
20	20	10	50	20	20	10	10	10

1. Réaliser un tableau des effectifs.
2. Réaliser un diagramme pour représenter les données.
3. Le directeur de la banque pense qu'il faut approvisionner le distributeur surtout en billets de 20 €. A-t-il raison ?

Fréquences, indicateurs de position et de dispersion

La notion de fréquence peut être introduite dans des situations où on est amené à comparer des sous-populations de populations d'effectifs distincts relativement à un caractère donné puis, dans un deuxième temps, elle peut être réinvestie dans des exemples où on compare les distributions de deux caractères d'une même population. Ces traitements se font en lien étroit avec le travail sur les différentes écritures d'un nombre et les notions de valeurs approchées et de pourcentages.

Deux indicateurs de position et un indicateur de dispersion des séries quantitatives sont introduits au cycle 4. On veillera à les présenter dans des situations simples qui justifient leur emploi et leur donnent du sens. La moyenne est familière aux élèves dans le cas de séries de notes ; il importe de ne pas s'en tenir à ce contexte et de la présenter dans des situations diverses dès la classe de 5e. Par la suite, on peut introduire des notions telles que l'âge moyen ou le salaire moyen d'une population, la température moyenne, etc., à l'aide de reformulations. On fait observer, par exemple, que le salaire moyen correspond au salaire que chaque individu toucherait si tous les salaires étaient égaux entre eux. On attirera l'attention des élèves sur le sens spécifique du mot moyenne dans la grandeur « vitesse moyenne » afin de ne pas générer de confusion avec la moyenne des vitesses. Après avoir introduit en classe de 5e la notion de médiane, dont la compréhension nécessite également des reformulations, il est intéressant d'interpréter simultanément ces deux indicateurs de position dans diverses situations et de comparer leur pertinence dans un contexte donné.

Exemple

Source : Salaires dans le secteur privé et les entreprises publiques

Le salaire mensuel net moyen en France en 2013, dans le privé ou en entreprise publique, s'est établi à 2202 euros. Le salaire mensuel net médian pour la même année s'élevait à 1772 euros.

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes :

AFFIRMATION	VRAI OU FAUX
Marie avait en 2013 un salaire net de 2000 € par mois ; son salaire était inférieur au salaire moyen français.	
Avec un salaire net de 2000 € par mois en 2013, Marie gagnait plus que la moitié des salariés français.	
En 2013 il y avait autant de salariés qui gagnaient moins de 2202 € que de salariés qui gagnaient plus de 2202 € net par mois.	
Si l'on additionne tous les salaires nets mensuels des salariés du privé ou d'entreprises publiques, et que l'on divise par le nombre de salariés, on obtient 1772 €.	

Différenciation

Plusieurs éléments de différenciation peuvent être introduits dans la résolution d'un problème :

- le nombre et la variété des supports permettant d'extraire de l'information, qui peuvent être modulés à l'intérieur d'un même problème en fonction de l'aisance des élèves ;
- la nature des supports contenant des informations, tous n'étant pas d'égale difficulté à lire ;
- le degré d'autonomie laissé aux élèves pour choisir une représentation ou pour la construire (choix des axes, des échelles) ;
- le contexte extra-mathématique plus ou moins familier.

Des approfondissements peuvent être proposés pour une partie des élèves ou pour toute la classe, à partir de quelques exemples contextualisés :

- étude de diagrammes ou graphiques représentant simultanément plusieurs caractères, éventuellement avec des échelles différentes tels qu'on en trouve en sciences expérimentales, en sciences humaines, en économie, etc. ;
- étude de représentations graphiques moins usuelles : radars, diagrammes polaires, représentations en trois dimensions, etc. ;
- introduction de la moyenne pondérée d'une série ;
- calcul des effectifs cumulés croissants dans des situations où cela prend du sens ;
- exemples de regroupements en classes d'amplitudes différentes et représentation par un histogramme ;
- en fin de cycle, estimation d'une moyenne à partir d'un regroupement en classes ; on pourra à l'aide d'un tableur comparer cette estimation à la valeur exacte de la moyenne, ou comparer les estimations obtenues avec des regroupements différents.

Exemples de situations d'apprentissage

Il est souhaitable que la majorité des situations d'apprentissage soient contextualisées. Cependant l'acquisition des capacités de base doit être l'objet d'un entrainement continu sur des exemples simples. Des situations plus riches sont étudiées dans des activités de réinvestissement nécessitant de mobiliser plusieurs capacités. Des tâches de plus grande envergure peuvent être envisagées telles que des mini-projets en petits groupes (relevés de données, résumés, traitement, présentation des résultats sous différentes formes), en conférant une part d'autonomie aux élèves.

Classes de problèmes

- Lecture et interprétation de données sur des supports variés
  Organisation et représentations de données
- Calcul et interprétation de fréquences
- Calcul et interprétation d'indicateurs de séries statistiques
- Recueil et traitement de données

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Grands lecteurs
  - Tirs cadrés
  - Temps de réaction
  - Au CDI
  - Sortie au cinéma
- Exemples d'activités avec prise d'initiative :
  - Prix d'un appartement
  - Analyse de résultats scolaires
  - Enquête à la cantine
  - Tourisme

Interdisciplinarité

Cette partie du programme s'appuie largement sur l'étude de situations authentiques issues de la vie courante, de mesures obtenues dans d'autres disciplines par les élèves eux-mêmes, de données scientifiques ou économiques disponibles sur Internet. Elle se

prête particulièrement à la mise en œuvre d'une pédagogie de projet, soit au sein du cours de mathématiques en lien avec les sujets d'étude d'autres disciplines, soit dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI) dont la plupart des thèmes peuvent intégrer le traitement de données chiffrées, recueillies par les élèves ou issues de sources authentiques.

Ressources complémentaires

- Ressources pour le secondaire du site de la société française de statistiques
- Site de l'Institut national de la statistique et des études économiques (Insee)
- Site de l'Institut national d'études démographiques (Ined)
- Espace enseignants du site « la finance pour tous »
- Les ateliers et conférences des journées nationales de l'APMEP

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Objectifs

Au cycle 4, un travail sur le hasard est engagé. Il vise à repérer les représentations initiales que les élèves s'en font, à les dépasser dans une perspective rationnelle pour aboutir à la notion de probabilité qui quantifie l'attente d'un événement dont la réalisation est considérée comme dépendante du hasard. L'approche se fait d'abord à partir de situations familières aux élèves et relevant de l'équiprobabilité puis, à partir de la classe de quatrième, de manière fréquentiste (observation de la stabilisation des fréquences) pour disposer d'autres modèles.

Lien avec les domaines du socle

L'approche de la notion de probabilité sous forme de débats à partir des représentations initiales des élèves permet de travailler le domaine 1 (les langages pour penser et communiquer), en utilisant la langue française à l'oral et le domaine 3 (la formation de la personne et du citoyen), en apprenant à respecter et à prendre en compte la parole d'autrui.

Les raisonnements et les calculs probabilistes (dans le cas de l'équiprobabilité ou non) mettent tout particulièrement en avant le domaine 4 (les systèmes naturels et les systèmes techniques), notamment en ce qui concerne la capacité à modéliser, à argumenter et à interpréter une situation.

La compréhension ou la conception de programmes ainsi que l'utilisation d'un tableur relèvent du domaine 1 (les langages pour penser et communiquer) concernant les langages mathématiques et informatiques.

Le domaine 2 (les méthodes et les outils pour apprendre) est également sollicité, notamment pour la recherche avec plus ou moins d'autonomie, le travail en groupes et la critique d'informations issues des médias.

Progressivité des apprentissages

Dès le début du cycle 4, des questions relatives au hasard sont abordées à partir de situations de la vie courante (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.). Les représentations initiales des élèves sont interrogées et des débats sont suscités, notamment grâce à des expérimentations qui peuvent donner lieu à recueil et traitement statistique des résultats. La perception naturelle du hasard peut être qualifiée dans un premier temps par des adjectifs (peu probable, probable, certain, ...). Ces débats et ces activités sont l'occasion, petit à petit, d'ordonner les probabilités, de quantifier le hasard sur une échelle de 0 à 1, d'introduire et de consolider le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves calculent des probabilités

en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le modèle équiprobable. La stabilisation des fréquences peut être constatée à partir de la classe de quatrième. L'interprétation fréquentiste permet alors de contrôler a posteriori une hypothèse d'équiprobabilité ou d'approcher une probabilité inconnue, ce qui conduit à dépasser le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5e.

Stratégies d'enseignement

Les élèves côtoient tous les jours l'incertitude et le hasard, mais pas forcément dans une perspective rationnelle. Il est essentiel de partir des représentations des élèves, parfois erronées, et d'« *aborder les questions relatives au hasard à partir de situations issues de la vie courante* ». La mise en œuvre graduée de l'enseignement des probabilités sur tout le cycle 4 doit permettre de :

- faire émerger les conceptions initiales des élèves de façon à lever les ambiguïtés, les malentendus (par exemple, « l'effet mémoire » conduisant à penser qu'après avoir obtenu six fois pile au jeu de pile ou face, la probabilité d'obtenir face est plus forte au septième lancer) qui font obstacle à la compréhension de l'approche mathématique de la notion de probabilité. Il s'agit de passer d'un hasard subi (dont on subit les effets : « on ne peut rien dire car c'est le hasard ») à un hasard construit auquel on peut rationnellement associer une quantification. Le rôle de la manipulation est essentiel ;
- prendre appui sur l'intuition de l'équiprobabilité pour quantifier le hasard ;
- faire observer des phénomènes aléatoires de manière rationnelle par le biais de protocoles expérimentaux ; les élèves seront invités à répéter des expériences aléatoires, à effectuer le relevé statistique des résultats, à les représenter afin d'appréhender peu à peu les régularités qui se font jour ;
- préparer la formalisation du langage probabiliste qui sera engagée au lycée.

Sans développement théorique sur le modèle, les élèves devront être capables d'interpréter en contexte des probabilités proches de 0, proches de 1 ; savoir qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, connaitre les propriétés des probabilités pour les événements incompatibles et contraires. La formalisation ensembliste n'est pas un attendu du programme. Comparer des probabilités permet de réinvestir et de consolider le travail sur les fractions et les pourcentages.

Différenciation

Les possibilités de différenciation peuvent notamment s'exercer :

- **à partir de l'aide accordée aux élèves** (par la possibilité de questionner le professeur, par un document complémentaire : indication, exemple fourni, par la possibilité d'utiliser le cahier de l'élève, un outil : calculatrice, tableur) ;
- **en changeant la variable didactique**. Par exemple, pour la question « quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? », on peut envisager, selon les élèves, des compositions d'urne différentes (urne 1 : 3 boules rouges et 4 vertes ; urne 2 : 3 boules rouges, 4 vertes, 2 bleues ; urne 3 : 3 boules rouges et n vertes) ;
- **en variant la complexité des épreuves** : épreuves simples (tirage d'une boule dans une urne) ou plus complexe (lancer de deux dés en même temps) ;
- **sur l'utilisation du tableur et de la programmation**, qui peut aller de l'interprétation d'un programme ou de son résultat, à la modification d'un code jusqu'à la création complète d'un programme.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- manipulations (lancer de dé, de pièces, tirage dans des urnes, ...) ;
- modélisation de situations de la vie courante ;
- jeux, mise en œuvre de stratégies ;
- construction et mise en œuvre de protocoles expérimentaux ;
- simulation (tableur, calculatrice, Scratch).

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Le jeu du franc-carreau
  - Loterie
- Exemples d'activités avec prise d'initiative :
  - Inventer une règle du jeu
  - Le jeu de la pyramide (avec utilisation possible de scratch)
  - Manipulations et stratégies
  - Différence des deux dés
  - Jeu équitable

Interdisciplinarité

Des liens sont possi bles avec le programme de sciences de la vie et de la Terre pour des modélisations (exemple du modèle proies prédateurs) ou avec la géographie pour ce qui concerne la gestion des risques et les prévisions (par exemple la notion de crue centennale).

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder les probabilités avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents.

- Probabilités
- Le hasard au collège - Jacques Verdier (bulletin 484 de l'APMEP)
- Le site Statistix, bien que n'ayant pas été actualisé récemment, donne de nombreux exemples intéressants et encore d'actualité de simulations.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Objectifs

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle pour un usage dans la vie courante, dans diverses disciplines ou dans le cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée.

Dès le cycle 3, l'élève a enrichi le champ des problèmes multiplicatifs en rencontrant des situations contextualisées relevant de la proportionnalité. Il a résolu des problèmes de prix, de consommation, de recettes en utilisant différentes procédures (propriétés d'additivité et d'homogénéité de la proportionnalité, passage par l'unité), essentiellement dans le cadre des grandeurs. Il a enfin appris à repérer des situations relevant ou ne relevant pas de la proportionnalité.

Ce travail se poursuit au cycle 4. L'élève est capable de choisir la procédure la plus adaptée à la situation à laquelle il est confronté pour calculer une quatrième proportionnelle. Il sait représenter dans un cadre graphique une situation de proportionnalité. Il mobilise la proportionnalité dans différents contextes : liés aux grandeurs, à la vie courante ou aux autres disciplines, ou encore dans des situations décontextualisées internes aux mathématiques.

Le travail sur les pourcentages occupe une place privilégiée dans le cadre de la proportionnalité. Les situations proposées amèneront en particulier les élèves à :

- appliquer un pourcentage (par exemple un taux de TVA sur un prix) ;
- calculer un pourcentage (par exemple traduire une proportion en pourcentage ou calculer un pourcentage d'augmentation).

Des situations numériques simples relevant de la proportionnalité donnent l'occasion de travailler le calcul mental afin de construire et renforcer des automatismes.

Le tableur et le grapheur constituent des outils utiles pour la résolution de certains problèmes.

Liens avec les domaines du socle

Outre les domaines 2 et 4 qui font explicitement référence aux mathématiques, la résolution de problèmes de proportionnalité s'inscrit aussi largement dans les autres domaines.
Les mathématiques participent à la maitrise de la langue française. Elles offrent de nombreuses occasions pour le développement de compétences langagières en élargissant le répertoire lexical des élèves, en favorisant les situations de communication orale et écrite.

L'élève peut combiner avec pertinence et de façon critique les informations explicites et implicites issues de sa lecture (domaine 1.1).

Etudier des relations entre deux grandeurs mesurables permet d'effectuer de manière efficace certains calculs en utilisant un langage mathématique adapté (domaine 1.2).

La formation de la personne et du citoyen est largement convoquée dans l'interprétation des proportions, qui fait appel à la réflexion et au discernement (domaine 3.3).

La maîtrise des pourcentages est un outil indispensable pour comprendre les représentations du monde et l'activité humaine (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Apprendre à mobiliser la proportionnalité pour résoudre un problème est un travail entamé au cycle 3, où l'on a rencontré la notion de « fois plus ou fois moins ». Cette approche est élargie dès le début du cycle 4, et sur toute sa durée. Les apprentissages relatifs à la proportionnalité ne se réduisent pas à la simple acquisition de techniques de calcul. Ils concourent à la construction du sens des nombres. Ainsi l'égalité de deux fractions peut être mise en relation avec le produit en croix.

L'élève met en œuvre progressivement différents moyens de calculer une quatrième proportionnelle. Les propriétés d'additivité, puis d'homogénéité peuvent être travaillées dès le début du cycle, avec un coefficient d'homogénéité entier en début d'apprentissage, puis décimal ou fractionnaire. La propriété de linéarité est plus complexe à mettre en œuvre, puisqu'elle est peut faire intervenir des changements d'unités (passage d'une masse à un prix, par exemple) et pourra être travaillée à partir du milieu de cycle.

L'élève décide si une situation relève de la proportionnalité ; il construit et complète un tableau de proportionnalité. En fin de cycle, la fréquentation des fonctions linéaires et affines, du théorème de Thalès et des homothéties lui permet de varier les points de vue en apportant un nouvel éclairage sur les situations de proportionnalité.

Les situations proposées sont riches et variées afin de donner du sens et de l'intérêt à l'utilisation de la proportionnalité. Un travail régulier mettant en jeu des situations de proportionnalité accompagne la construction des différents nombres en éclairant leur sens : nombres entiers, nombres décimaux, nombres rationnels…

Stratégies d'enseignement

Tout au long du cycle, l'enseignant outille peu à peu les élèves avec un jeu de procédures variées (additivité, homogénéité, passage à l'unité, coefficient de proportionnalité). Il les incite à les comparer au travers de la résolution d'un problème afin de mettre en évidence la méthode la mieux adaptée. Il ne s'agit pas d'institutionnaliser une méthode « du professeur » avant que l'élève ne lui ait donné du sens et en ait compris l'efficience.

Pour donner du sens à cette notion, il est important de travailler sur des situations relevant de la proportionnalité mais aussi sur d'autres qui ne relèvent pas de ce modèle.

Dans le cadre de la résolution de problèmes, la proportionnalité se prête particulièrement à un travail sur les compétences « représenter » et « modéliser ». La proportionnalité peut être déclinée au sein de différents cadres, non exclusifs les uns des autres, dans différentes situations, contextes ou domaines du socle.
Classiquement, on distingue trois cadres : le cadre des grandeurs, déjà étudié au cycle 3 (on met en relation deux grandeurs telles que masse et prix, masse et longueur, longueur du rayon et périmètre d'un cercle, vitesse et durée…), le cadre numérique (on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres) et le cadre graphique (on représente la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués). Un objectif de la fin du cycle 4 est que l'élève sache passer d'un cadre à un autre dans une résolution de problème.

Dans un contexte numérique, l'enseignant peut :

- s'appuyer sur les acquis du cycle 3, principalement sur la résolution des problèmes impliquant la proportionnalité en effectuant un retour à l'unité ;
- travailler les autres méthodes de détermination d'une quatrième proportionnelle, en dégageant les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles :
  - les propriétés d'additivité et d'homogénéité d'un tableau de proportionnalité ;
  - le coefficient de proportionnalité ;
  - le « produit en croix » ;
  - la « règle de trois ».

On développe chez l'élève un sens critique quant au choix de la méthode la plus appropriée, selon les données fournies *(retour à l'unité donnant un nombre non décimal)* ou la question posée *(faut-il trouver une valeur manquante ou plusieurs ?)*

L'enseignant peut relier travail sur les pourcentages et sur la proportionnalité :

- appliquer ou calculer un pourcentage ;
- traduire une évolution en pourcentages.

Dans un contexte géométrique, l'enseignant peut :

- s'appuyer sur les acquis du cycle 3 pour exploiter le lien de proportionnalité entre le périmètre d'un polygone régulier et la longueur du côté ;
- présenter les agrandissements-réductions de figures planes sous l'angle de la proportionnalité ;
- travailler sur les échelles ;
- interpréter dans le cadre de la proportionnalité les relations qui découlent de l'utilisation du théorème de Thalès.

Le travail sur les périmètres, les aires et les volumes met en évidence que toutes les situations ne relèvent pas de la proportionnalité.

Dans un contexte mêlant géométrie et algèbre, l'enseignant peut :

- modéliser, par un graphique dans un repère, une situation de proportionnalité ;
- analyser une représentation graphique pour déterminer si elle relève ou non de la proportionnalité ;
- placer l'étude des fonctions linéaires dans le cadre de la proportionnalité : les élèves reconnaissent le coefficient de la fonction linéaire comme un coefficient de proportionnalité.

Retrouvez Éduscol sur

Quand la situation s'y prête et lors d'un travail sur les points précédents, l'enseignant peut utiliser les outils numériques :

- les tableurs-grapheurs pour :
  - compléter un tableau de proportionnalité en recopiant une formule ;
  - représenter graphiquement une situation modélisée par des valeurs numériques ;
- les logiciels de géométrie dynamique pour :
  - mesurer des côtés puis reporter des mesures dans un tableur ;
  - construire la courbe d'une fonction linéaire ;
  - faire agir des homothéties sur des figures.

Ainsi, au fil des situations rencontrées en classe, l'élève peut :

- analyser le problème et s'interroger sur la validité du modèle proportionnel ;
- choisir un cadre, numérique ou graphique ;
- réinvestir la proportionnalité pour éclairer une nouvelle notion (par exemple le théorème de Thalès, les fonctions linéaires).

Différenciation

L'enseignement curriculaire visé par les programmes amène à concevoir le collège dans un principe de plus large inclusion. Il s'agit de prendre l'élève tel qu'il est, de l'accompagner dans son parcours personnel. Cela passe par une prise en compte de l'hétérogénéité de la classe, une différenciation et une diversification des apprentissages.

Pour cela :
- l'enseignant analyse la nature des erreurs commises par les élèves pour les aider à les surmonter. Il peut faire évoluer un certain nombre de variables didactiques en liaison avec les difficultés éventuellement rencontrées : identification des grandeurs, identification d'une situation de proportionnalité ou non[1], choix de la procédure de résolution, mise en œuvre de cette procédure ;
- l'enseignant confronte les élèves à des situations relevant de cadres et de contextes différents.

Parmi les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on peut citer la nature des nombres entrant en jeu ou leur rapport, le nombre de couples proposés, les situations et les contextes, ou encore l'échelle d'agrandissement ou de réduction (les grandes échelles étant plus faciles à utiliser que les petites).

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- Reconnaître ou compléter un tableau de proportionnalité.
- Utiliser un coefficient de proportionnalité.
- Déterminer une quatrième proportionnelle, en particulier dans des situations liées à d'autres disciplines, éventuellement dans le cadre d'une activité de calcul mental.
- Appliquer ou déterminer un pourcentage en particulier dans un contexte économique.

1. Certains élèves font la confusion courante entre grandeurs proportionnelles et grandeurs liées ou entre proportionnalité et variations dans le même sens ou encore supposent que tout tableau est un tableau de proportionnalité.

- Utiliser ou déterminer une échelle d'agrandissement et de réduction, en particulier en lien avec la SVT, la géographie ou la technologie.
- Représenter graphiquement une situation de proportionnalité, mais aussi des situations de non proportionnalité.
- Utiliser le théorème de Thalès et faire le lien avec la proportionnalité.
- Repérer, à l'aide de logiciels de géométrie, des figures homothétiques.
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire, c'est-à-dire : donner son expression algébrique, savoir la représenter, l'exploiter afin de répondre au problème posé.
- Utiliser les grandeurs composées ou quotients : calculer une vitesse moyenne, calculer la distance d'un trajet, calculer la durée d'un trajet ; on pourra aussi se reporter au document grandeur et mesure.

Exemples d'activités

Plusieurs exemples de questions flash.

Trois tâches intermédiaires : croissance d'un chêne, analyse de photographies en lien avec les SVT et constructions de triangles.

Deux activités à prise d'initiative : production de pétrole et plan d'une maison.

Interdisciplinarité

Le travail sur la proportionnalité rencontre la plupart des thèmes du programme de mathématiques du cycle 4, par exemple au travers de l'utilisation des pourcentages, des échelles, des agrandissements/réductions, des homothéties et du théorème de Thalès.

C'est également un thème qui permet de nombreux liens interdisciplinaires. S'ils peuvent être mis en lumière dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires, ces liens méritent aussi d'être signalés dans le déroulement ordinaire des enseignements (en mathématiques et dans l'autre discipline concernée).

En physique, le travail sur la loi d'Ohm peut être mené en vérifiant expérimentalement que la tension aux bornes d'un résistor donné est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse, le coefficient de proportionnalité définissant la résistance du résistor. D'autres lois physiques au programme du cycle 4 mettent également en jeu la proportionnalité. A contrario, la mise en évidence que l'énergie cinétique n'est pas proportionnelle à la vitesse permet de sensibiliser les élèves aux limites du modèle mathématique de la proportionnalité.

En SVT on pourra de même distinguer des situations de proportionnalité comme la dépendance de l'apport énergétique d'un aliment avec sa masse, de situations qui n'en relèvent pas, par exemple la croissance d'un enfant en fonction de son âge.

En géographie, si le contexte des échelles de cartes est un cadre privilégié pour aborder des situations de proportionnalité, il n'est pas le seul. Ainsi, le rendement par hectare d'un champ de céréales est un exemple concret permettant le réinvestissement de la notion mathématique de coefficient de proportionnalité.

D'autres situations s'y prêtent également : calculs de consommation d'eau ou d'énergie, évolution d'une production industrielle dans le temps, débit de transmission d'une liaison numérique, etc.

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de proportionnalité avec les élèves :

- proportionnalité au collège : une ressource d'accompagnement des anciens programmes
- Exemples de vidéos supports pour des situations relevant de la proportionnalité
- Dossier didactique des mathématiques APMEP n°457
- L'enseignement de la proportionnalité à la liaison primaire-secondaire in *Recherches en éducation* – rapport final
- Donner du sens aux mathématiques pour donner envie de réussir

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Objectifs

Au cycle 3 la notion de fonction est absente des programmes. Néanmoins de nombreux thèmes préparent son étude qui sera effective au cycle 4. L'étude des grandeurs et de la proportionnalité, la construction et l'utilisation de tableaux et de graphiques donnent l'occasion de pratiquer des activités reposant implicitement sur la notion de fonction.

Un des objectifs du cycle 4 est de prendre appui sur des situations où la dépendance de deux grandeurs est mise en évidence afin de construire progressivement le concept de fonction. Ce saut conceptuel doit être accompagné afin de répondre à plusieurs attendus de fin de cycle, en particulier pour étudier et manipuler les fonctions comme objet mathématique décontextualisé. Dans ce cadre, les outils tels qu'un tableur, un grapheur ou un logiciel de programmation sont utiles pour faciliter la compréhension de la notion et la résolution de certains problèmes.

Liens avec les domaines du socle

Le travail sur la notion de fonction est associé naturellement au domaine du socle « les langages pour penser et communiquer » (domaine 1) et en particulier à l'objectif « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques et informatiques » : exprimer une grandeur en fonction d'une autre, modéliser une situation par une fonction numérique, utiliser le langage formel des fonctions, représenter par un graphique. La notion de fonction permet également de travailler sur la notion de variable informatique et de s'entraîner à utiliser le langage informatique et à programmer des algorithmes simples.

Le travail sur les fonctions numériques permet de discerner différents types de dépendances dans des situations concrètes et participe ainsi au domaine « Formation de la personne et du citoyen » (domaine 3).

La notion de fonction est particulièrement présente dans le domaine « les systèmes naturels et les systèmes techniques » (domaine 4) dans la démarche scientifique et la modélisation de phénomènes, par exemple par l'exploitation de mesures pour introduire une loi.

L'étude de problèmes liés à l'activité humaine peut donner lieu à une modélisation par une fonction numérique qui pourra être utilisée dans le domaine « Représentation du monde et activité économique » (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Dès le début du cycle 4, la notion de fonction est abordée sans formalisation particulière. Le travail sur les grandeurs et leur dépendance est une source de problèmes qui peuvent être modélisés par une fonction. Un chapitre spécifique sur cette notion n'a pas sa place en 5e et 4e.

- En 5e et 4e l'usage de graphiques (par exemple distance en fonction de la durée d'un trajet), de tableaux (par exemple aire du carré en fonction de la longueur du côté) et de formules (par exemple l'indice de masse corporelle) permettent à la fois la résolution de problèmes et le changement de registres (formule/tableau de valeurs, graphique/tableau de valeurs, tableau de valeurs/graphiques).

- Le cas particulier de la proportionnalité de deux grandeurs est exploité mais d'autres situations doivent être présentées.
- Ce début de cycle est aussi l'occasion de préparer la notation fonctionnelle de la classe de 3e par un passage progressif du type « prix de 2 kg = 7 € » à « P de 2 kg = 7 € » puis « P(2 kg) = 7 € » et enfin « P(2) = 7 » en 3e.
- Le travail des expressions « en fonction de » ou « est fonction de » doit être mené en parallèle avec l'étude du calcul littéral.

Des éléments nouveaux sont étudiés en classe de troisième.

- La notion de fonction numérique est installée en veillant à faire comprendre qu'à certains nombres une fonction numérique fait correspondre une unique image. La définition rigoureuse d'une fonction numérique n'est pas un objectif de l'enseignement secondaire. L'usage des programmes de calcul, installés dans les classes précédentes, permet de travailler cette notion sans la nécessité d'un contexte et de grandeurs.
- Le vocabulaire (image, antécédent, fonctions linéaires et affines) est introduit, ainsi que la notation $f(x)$. Cette notation reste délicate à maitriser et son introduction doit être progressive et motivée.
- La notion de fonction linéaire clôt le cycle de travail sur la proportionnalité en formalisant les savoir-faire.

Stratégies d'enseignement

Tâches associées à l'étude des fonctions numériques :

- mettre en évidence la dépendance entre des grandeurs ;
- décrire la dépendance entre des grandeurs ;
- déterminer une grandeur à partir d'une autre ;
- comparer plusieurs grandeurs ;
- comparer les variations d'une grandeur pour deux situations ;
- lire et interpréter des représentations graphiques de fonctions ;
- optimiser ;
- modéliser (afin d'interpoler, d'extrapoler).

Changements de cadre

L'étude des fonctions se prête particulièrement à un travail sur les compétences « représenter » et « modéliser ». À cet effet, il est pertinent de proposer des situations permettant des changements de cadre : tableau/graphique, formule/graphique, etc.

Modélisation

Étant donnée une situation concrète, la démarche de modélisation consiste à traduire cette situation en un problème mathématique dont la solution est ensuite confrontée à la situation réelle. Cette démarche se prête particulièrement à l'usage des fonctions numériques sous différentes formes. Une attention particulière doit être portée à certaines difficultés conceptuelles lorsque la notion de fonction est installée. En effet, dans la situation concrète, les valeurs prises par la variable sont généralement positives, parfois entières et l'usage d'une fonction numérique dans sa généralité n'a pas forcément de légitimé. Les exemples classiques d'abonnements débouchant sur l'étude de fonctions linéaires ou affines est révélateur de ce type de difficultés. On veillera à choisir des exemples pour lesquels la modélisation par une fonction numérique est réellement pertinente (pas de solution géométrique ou arithmétique évidente).

Programme de calcul

Les programmes de calculs sont devenus des objets d'enseignement fréquemment utilisés dès le début du cycle. En s'appuyant sur ces pratiques, la notion de fonction peut être installée au fur et à mesure, d'abord dans le domaine numérique puis dans le domaine littéral, en dehors de toute formalisation ou notation. L'usage du tableur est évidemment pertinent et les nouvelles possibilités offertes par l'étude de l'algorithmique et de la programmation donnent des ouvertures supplémentaires. Les programmes de calculs s'affranchissent de plus des contraintes d'ensemble de définition (nombres relatifs et rationnels envisageables) contrairement à certaines situations concrètes.

Notation et statut de la lettre

Les difficultés dans l'usage des notations fonctionnelles relèvent de deux problématiques : la notation $f(x)$ pour laquelle les parenthèses n'ont pas le même usage que dans l'écriture des expressions littérales et le statut de la lettre comme variable qui doit être bien identifié et distingué des autres statuts déjà rencontrés (indéterminée, inconnue, variable en programmation).

Différenciation

Des activités différenciées peuvent être construites à partir d'une même situation à résoudre. Différentes démarches peuvent être proposées :

- démarche numérique avec éventuellement l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de programmation ;
- démarche graphique avec la construction ou seulement la lecture de graphiques ;
- démarche algébrique avec la résolution d'équation ou d'inéquation ;
- démarche experte avec le choix de la variable, définition de la fonction et résolution du problème.

Il importe que dans ces activités différenciées, le problème posé soit le même quelle que soit la démarche proposée. Dans les évaluations proposées, la dimension graphique doit être présente à côté de la dimension algébrique moins accessible.

Exemples de situations d'apprentissage

Les situations d'apprentissage sur la notion de fonction numérique se répartissent selon trois domaines : numérique, graphique et algébrique. Ces situations peuvent s'appuyer sur des supports concrets ou seulement théoriques. Parmi les tâches à résoudre on peut citer la recherche d'images, d'antécédents (sans avoir nécessairement défini le vocabulaire), la comparaison, l'optimisation, la caractérisation de la proportionnalité, l'estimation d'écart, l'interpolation. Ces travaux sont en lien très étroit avec l'étude des grandeurs, le calcul littéral, la résolution d'équation et d'inéquation.

Exemples de questions flash

- Fonctions affines
- Modélisation à l'aide de fonctions
- Lectures graphiques
- Programme de calcul

Exemples de tâches intermédiaires

- Distance de freinage
- Volume de la boîte

Exemples d'activités à prise d'initiative

- Degrés Celsius et Fahrenheit
- Essence ou Diesel

Interdisciplinarité

Des thématiques des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires (EPI) se prêtent particulièrement à l'utilisation de la notion de fonction numérique. Par exemple, le thème « corps, santé, bien-être et sécurité » peut aborder la problématique de l'indice de masse corporelle (IMC), du rythme cardiaque, ou de statistiques en lien avec la santé. Cela peut donner l'occasion d'exploiter des formules, de procéder à des lectures graphiques ou de travailler sur la proportionnalité. Il importe de trouver dans ces thématiques suffisamment d'éléments pour faire avancer les connaissances et les compétences des élèves sur les fonctions numériques. Suite à ces travaux, une courte synthèse permet d'institutionnaliser les savoirs et les méthodes.

Ressources Complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de fonction avec les élèves :

- Organisation et gestion de données
- Fonctions
- Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. E. COMIN

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Représenter l'espace

Objectifs

Au cycle 3, la manipulation, l'observation, la description et la représentation de nombreux solides (pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône et boule) ont permis à l'élève de développer et structurer sa vision de l'espace environnant. L'ensemble de ces travaux l'ont conduit à mettre en jeu des grandeurs géométriques (aire, volume, angle) et leur mesure. Ce travail s'est fait conjointement avec une première modélisation de l'espace familier (la classe, l'établissement, l'environnement urbain proche, etc.) ouvrant sur des problèmes simples.

Au cycle 4, l'élève prolonge ce travail et aborde des situations dans un environnement plus complexe. Confronté à des problèmes spatiaux et à des calculs de mesure de grandeurs, il mobilise les notions étudiées en cours de cycle, notamment celles relevant de la géométrie plane (parallélisme, orthogonalité, théorème de Pythagore, trigonométrie, etc.).

La définition des solides particuliers n'est pas un objectif du programme.

Par ailleurs, l'objectif est de développer la capacité de l'élève à appréhender l'espace et à s'y repérer. Le repérage dans le plan, travaillé au cycle 3, est ainsi poursuivi avec la définition de coordonnées dans un repère orthogonal. L'observation et le repérage dans un parallélépipède rectangle, l'utilisation en lien avec l'enseignement de technologie, d'un logiciel de représentation dans l'espace, d'une machine à commande numérique ou d'une imprimante 3D offrent des opportunités pour initier l'élève au repérage cartésien dans l'espace. Enfin, en lien avec une modélisation de la Terre, l'élève découvre le repérage sur une sphère. Les notions de latitude et de longitude trouvent tout naturellement un prolongement dans les enseignements de géographie et de sciences de la vie et de la Terre.

Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de représentations adaptées de l'espace, le recours à des plans ou des cartes pour se repérer permettent de développer la vision du monde en utilisant un langage mathématique et scientifique (domaine 1).

Les différents travaux menés à partir d'observations de l'espace environnant renforcent chez l'élève la compréhension du rôle des mathématiques dans la compréhension et la représentation des systèmes naturels (domaine 4).

La découverte du repérage sur la sphère permet à l'élève de découvrir et de comprendre des représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Le travail conduit dès le début du cycle 4 permet de passer progressivement de l'observation de solides concrets à leur représentation à l'aide de patrons ou de vues partielles, afin d'aboutir ensuite à des représentations plus riches et plus abstraites.

La perspective cavalière, qui ne constitue pas un objet d'étude en soi, est utilisée en classe. L'élève, une fois familiarisé avec la représentation d'objets simples en perspective, peut s'appuyer sur l'utilisation régulière d'un logiciel de géométrie dynamique. L'enseignant veille à mettre en évidence l'apport de ce nouvel outil, notamment, dans l'observation et l'exploitation de différentes vues d'un même objet de l'espace.

La représentation de l'espace a sa place tout au long du cycle en lien avec d'autres thèmes du programme.

Stratégies d'enseignement

Les problèmes qui mettent en jeu des grandeurs (longueur, aire ou volume par exemple) fournissent des situations complexes propices au développement de la vision de l'espace. En lien avec la progression adoptée pour l'ensemble des thèmes du programme, l'enseignant veille à proposer tout au long du cycle des problèmes qui conduisent l'élève à mobiliser les savoirs et savoir-faire en cours d'acquisition.

On peut citer notamment :
- la réalisation de maquettes (pouvant être obtenues avec l'aide d'un logiciel), d'un patron (par exemple la construction du patron d'un cône sous contraintes : périmètre à la base donné, ou périmètre à la base et hauteur donnés, ou aire fixée), la lecture sur une carte ou sur un plan en lien avec l'utilisation d'un rapport d'agrandissement ou de réduction (résoudre des problèmes de proportionnalité, thème grandeurs et mesures) ;
- le calcul du volume d'un solide (thème grandeurs et mesures) ;
- le calcul de grandeurs géométriques grâce à l'utilisation du théorème de Pythagore, du théorème de Thalès ou grâce à l'utilisation de rapports trigonométriques dans un triangle rectangle (utiliser des notions de géométrie plane) ;
- la dépendance de deux grandeurs géométriques, comme par exemple le volume et le rayon d'une boule (comprendre et utiliser la notion de fonction et thème grandeurs et mesures).

Les travaux de description, de modélisation, de représentation du monde réel environnant fournissent un terrain fertile au développement des compétences dans la vision de l'espace et dans sa représentation. Il est souhaitable de s'appuyer autant que possible sur des objets présents et identifiables dans l'environnement familier des élèves.

Ainsi, le repérage sur un plan, initié au cycle 3, peut être étendu à l'espace que constitue l'environnement immédiat. La salle de classe ou la cour de l'établissement fournissent un terrain propice à des déplacements, des positionnements réalisables ou modélisables par les élèves. Ces activités élémentaires qui consolident le recours à un repérage dans le plan peuvent être illustrées par l'utilisation d'instructions de déplacement au cours d'activités de programmation (« aller à ... »). Inversement, des activités de déplacements automatisés à l'aide d'un repère offrent une situation élémentaire d'informatique débranchée que l'enseignant peut exploiter pour permettre aux élèves de s'approprier le repérage par les coordonnées.

Le repérage dans un parallélépipède rectangle à l'aide de trois coordonnées (abscisse, ordonnée, altitude) ne doit pas faire l'objet d'une introduction générale sur les repères

cartésiens de l'espace. Au contraire, il s'agit dans un premier temps, en prolongement de ce qui a été effectué dans le plan, d'illustrer pour l'élève la nécessité d'utiliser une troisième coordonnée. L'enseignant peut donc chercher à s'appuyer sur de nouvelles configurations simples où l'expérimentation directe est encore accessible dans un environnement proche (repérage d'un point du plancher ou du tableau, d'une lampe, etc.) avant de mettre en place un cadre plus rigoureux et plus général. L'enseignement peut également s'appuyer sur les liens existant avec d'autres enseignements, notamment celui de technologie. En effet, la représentation d'un objet à l'aide d'un logiciel ou sa conception à l'aide d'une imprimante 3D sont des exemples de situations qui nécessitent de faire appel aux coordonnées dans l'espace. Ces situations sont à privilégier car elles prennent leur sens dans le quotidien de l'élève, au service d'une réalisation concrète.

De même, le repérage sur la sphère ne doit pas faire l'objet d'une introduction générale ou abstraite. Pour amener à ce repérage, l'enseignant cherche à développer un travail expérimental. Il peut s'appuyer, par exemple, sur l'étude de la section d'une sphère par un plan, réalisée avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. En lien avec l'enseignement d'autres disciplines (géographie et sciences de la vie et de la Terre notamment), on se place dans la situation du globe terrestre modélisé par une sphère avec les pôles Nord et Sud placés sur un axe vertical. Cette étude peut alors permettre de mettre en évidence les cas particuliers d'une section par un plan vertical contenant les deux pôles ou par un plan horizontal et ainsi d'éclairer le vocabulaire qui sera ensuite utilisé : méridiens, équateur ou parallèles. En soulignant les liens existant avec d'autres disciplines, on aboutit à la définition des coordonnées terrestres (la longitude et la latitude). L'utilisation de ces grandeurs pour repérer un lieu géographique sur une mappemonde ou sur une carte est proposée et exploitée en cours de mathématiques.

Le calcul du rayon d'un parallèle en différents lieux du globe terrestre est un exercice mathématique intéressant qui renvoie à son observation sur une mappemonde ou sur une carte.

De même, le calcul de la distance à l'horizon, qui fait appel au théorème de Pythagore et à la trigonométrie, donne lieu à un travail sur les ordres de grandeurs. Il peut aussi faire intervenir la notion de fonction et donner lieu à l'utilisation d'un tableur.

L'utilisation de données réelles fournies par l'actualité (par exemple, les positions d'un skipper lors d'une course transatlantique) constitue également une situation propice à motiver ces apprentissages.

Différenciation

Dans ce thème, les possibilités de différenciation peuvent s'exercer :
- en diversifiant les supports et les outils pour appréhender l'espace : solides usuels, mappemonde, maquette, vue en perspective, vue en coupe, figure réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, etc. ;
- en délivrant un accompagnement spécifique, que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe : on peut par exemple envisager un travail collaboratif comme la construction d'un patron en imposant certaines contraintes ;
- en guidant plus ou moins l'élève dans la réalisation de la tâche, au moyen de supports concrets susceptibles de l'aider ou par le biais de questions supplémentaires ;
- en prolongeant une étude pour certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Exemples de questions flash
Exemple de tâches intermédiaires : L'usinage d'une pièce de bois
Exemples d'activités avec prise d'initiative :

- Curieux parcours sur la Terre
- Voyages sur un méridien
- La surface vitrée de la pyramide du Louvre

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder le thème « Espace et géométrie » avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents.

- Géométrie au collège : étude la ligne d'horizon, page 5
- Principaux éléments de mathématiques - Banque de problèmes : exercices 11, 12 et 20
- Repérage sur la sphère, Claire-Marie Aït-Aïssa, vice-rectorat de Nouvelle Calédonie
- De la sphère au plan, IREM de Besançon, 2009

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Objectifs

Au cycle 2, l'élève a travaillé sur une géométrie de la perception, partant de l'espace ambiant pour décrire et reproduire des figures planes usuelles, et contrôler leurs propriétés par les sens.

Au cycle 3, l'élève s'est progressivement orienté vers une géométrie où les propriétés des objets sont contrôlées par le recours à des instruments, puis par l'explicitation de ces propriétés. Il a appris à nommer, comparer, reconnaître, décrire, des figures simples ou d'autres plus complexes, telles que : triangles et triangles particuliers (rectangle, isocèle, équilatéral), quadrilatères et quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange), cercle. Il s'est entraîné à reproduire, représenter, construire des figures simples et des configurations planes plus élaborées, à réaliser ou à rédiger un programme de construction. Il a identifié des relations entre objets géométriques et des propriétés de ces objets en mettant en place un vocabulaire adéquat (polygone, côté, sommet, angle, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.). L'élève a appris à effectuer des tracés et des constructions correspondant à certaines relations (perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs ou de mesures d'angles, figures symétriques par rapport à un axe de symétrie, symétriques d'une droite, d'un segment, d'un point, médiatrice d'un segment, agrandissement ou réduction). Pour ces constructions, il a utilisé des instruments usuels de tracé (règle graduée, équerre, compas), des supports variés (papier uni, quadrillé ou pointé, calque, gabarits d'angles, bandes de papier), et s'est initié à l'usage de logiciels (géométrie dynamique, initiation à la programmation, visualisation de cartes, de plans).

Au cycle 4, l'élève s'appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s'oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement. Il poursuit et enrichit sa connaissance des figures et configurations clés (triangles, quadrilatères, cercles), et de leurs propriétés géométriques et métriques. La définition et les propriétés de ces configurations sont explicitées avec un formalisme raisonnable, à partir de situations qui en révèlent la nécessité. Les théorèmes de Thalès (classe de 3e) et de Pythagore (classe de 4e), ainsi que les rapports trigonométriques, sont introduits avec progressivité. L'élève entretient sa pratique des problèmes de construction à l'aide des instruments de tracé, la prolonge avec un usage renforcé des outils numériques (géométrie dynamique, programmation) et de l'algorithmique. Les frises, rosaces et pavages sont un terrain fertile pour utiliser ces outils, en liaison avec les transformations de figures. Le repérage sur la droite est introduit en liaison avec les nombres relatifs. Les tracés à la main levée ont toute leur importance, que ce soit pour chercher des conditions nécessaires dans les

problèmes de construction, ou pour conduire des raisonnements. Le repérage dans le plan à l'aide des coordonnées cartésiennes est relié aux représentations graphiques (organisation de données, proportionnalité, fonctions). Le repérage sur une carte peut donner l'occasion d'utiliser les coordonnées géographiques. Les différentes formes de raisonnement sont travaillées en formation, notamment le raisonnement déductif. Voir à ce sujet la ressource « Raisonner ».

Lien avec les domaines du socle

Le vocabulaire lié aux objets et notions géométriques (médiatrice, hauteur, inégalité triangulaire, triangles égaux et semblables, rapports trigonométriques, théorèmes de Pythagore et de Thalès) relève de l'utilisation d'un langage mathématique adapté. Le codage des figures est lui-même une autre forme de langage mathématique (domaine 1).

L'écriture d'un protocole est une méthode efficace pour comprendre ou réaliser une construction (domaine 2). Un logiciel de géométrie dynamique est un outil pour construire, déformer ou transformer une figure plane (domaine 2). Établir le lien entre le théorème de Thalès, l'homothétie et la proportionnalité, ainsi qu'avec les triangles semblables, lier parallélisme et translation, ou encore cercle et rotation, se rattachent également au domaine des méthodes d'apprentissage.

Le fait de distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure, de prouver un résultat général par une démonstration, comme celui de valider ou de réfuter une conjecture, relèvent de la formation de la personne et du citoyen (domaine 3).

Les principaux résultats et connaissances mathématiques de géométrie plane (propriétés des configurations, théorèmes de Pythagore et de Thalès, trigonométrie), ainsi que leur utilisation dans la résolution de problèmes, participent de la culture mathématique de base (domaine 4). Il en va de même de la démonstration, dès lors qu'elle est perçue et utilisée comme une démarche mathématique permettant de prouver un énoncé ou un résultat général.

La modélisation en géométrie plane est une façon de représenter le monde (domaine 5). Certains exemples de situations d'étude du programme, comme les frises, pavages, rosaces, ou encore des méthodes historiques ayant permis d'estimer le rayon de la Terre ou la distance Terre-Lune, illustrent les connexions de la géométrie plane avec des activités humaines (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès la classe de 5e, et tout au long du cycle 4. Le théorème de Pythagore est introduit en 4e, réinvesti tout au long des classes de 4e et de 3e dans des situations variées du plan et de l'espace. Le théorème de Thalès est introduit en 3e. L'étude des configurations « triangles emboîtés » puis « papillon » permet progressivement d'aboutir à la version générale du théorème, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie ainsi qu'avec les agrandissements et les réductions. L'étude des rapports trigonométriques peut être répartie entre les classes de 4e et de 3e.

Stratégies d'enseignement

De la géométrie perçue à la géométrie abstraite

Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite. Lorsque la géométrie modélise une situation concrète, ou dans la géométrie dessinée[1], les instruments (règle, équerre) peuvent servir à valider une propriété (alignement de points, angle droit). Dans ces cas, les grandeurs sont exprimées par des nombres décimaux : la diagonale d'un carré dessiné de côté 10 cm mesure 14,1 cm, et non pas $10\sqrt{2}$ cm ! Lorsque le professeur propose une situation modélisée par la géométrie plane, les propriétés géométriques établies et les calculs de grandeurs réalisés à l'intérieur du modèle doivent donner l'occasion au professeur d'expliciter ses attentes auprès de l'élève. Ce dernier doit savoir si l'on attend de lui des propriétés et calculs nécessairement exacts et théoriques dans le modèle mathématique, ou des réponses « convenables » dans le monde physique. D'autre part, il est souhaitable que ces attentes soient cohérentes avec la situation initiale : pour le calcul de la diagonale d'un champ rectangulaire, il est déraisonnable – et même inadapté – d'attendre une réponse qui ne s'exprime pas par un nombre décimal. Dans chaque activité, le professeur doit préciser le contrat, notamment s'il attend une propriété théorique ou une valeur exacte.

Pour passer de la géométrie perçue à la géométrie abstraite, le changement de paradigme doit être motivé par des activités qui en montrent la nécessité. Par exemple, le recours à une propriété caractéristique peut être motivé par une figure codée, un programme de construction téléphoné, le jeu du portrait, … ; l'emploi d'une argumentation raisonnée peut l'être en réponse à une question du type « *le triangle est-il à peu près rectangle, ou exactement ?* », par un raisonnement à partir d'une figure à main levée ; etc. Il est plus difficile de motiver un travail avec des valeurs exactes non décimales (rationnels, racines carrées), en dehors de la problématique historique des constructions à la règle et au compas. Sur ce point, il est intéressant de différencier les exigences entre élèves, en prenant en compte ceux qui maîtrisent mal les nombres non décimaux.

Configurations usuelles

• La **médiatrice** d'un segment a été abordée au cycle 3, en liaison avec la symétrie axiale. Il convient au cycle 4 d'en formaliser la définition, ainsi que la propriété d'équidistance et sa réciproque. Cette dernière est utilisée pour une construction de la médiatrice à l'aide du compas.
• Les **hauteurs** d'un triangle, déjà introduites au cycle 3, sont réinvesties en liaison avec le calcul d'aire. D'autres **droites remarquables** du triangle peuvent être envisagées en situation, mais leur connaissance et leurs propriétés ne sont pas un attendu de fin de cycle. La **concourance des médiatrices** peut faire l'objet d'une activité de démonstration intéressante.
• Pour les configurations usuelles (**triangles et quadrilatères particuliers, cercles**), la définition et les propriétés usuelles déjà envisagées au cycle 3, font l'objet d'une formalisation précise au cycle 4 (propriétés métriques, parallélisme ou orthogonalité, éléments de symétrie). Il n'est cependant pas souhaitable de mener une étude exhaustive de ces propriétés. Le **parallélogramme**, déjà introduit au cycle 3, est revisité en classe de 5e, en dégageant ses propriétés en liaison avec la symétrie centrale. Les propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers peuvent être admises et utilisées dans certaines démonstrations, mais ne sont pas un attendu de fin de cycle.

1. Voir La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016

• Les **cas d'égalité des triangles** sont admis dès la 5e, essentiellement pour justifier qu'un triangle peut être construit connaissant certains de ses éléments métriques. Leur emploi dans certaines démonstrations doit demeurer très modeste. **Les triangles semblables** fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès.
• Sur les angles, les notions du cycle 3 sont entretenues et complétées. Il est utile de définir l'angle plat et de préciser sa mesure. La notion d'angles alternes-internes offre un vocabulaire commode pour donner une caractérisation angulaire du parallélisme. La **somme des mesures des angles d'un triangle** peut être exploitée notamment pour des problèmes de construction ou pour établir une propriété géométrique d'une figure.

EXEMPLES

1. Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 4 cm et un angle aigu mesure 30°.
2. On considère un point C d'un cercle de diamètre [AB], distinct de A et B, et tel que BAC = 25°. Que peut-on dire du triangle ABC ? (Cet exercice peut se prêter à une différenciation si l'on veut généraliser le résultat à un point C quelconque du cercle, distinct de A et B.)

• Pour les théorèmes de **Pythagore** et de **Thalès**, il convient dans l'apprentissage de distinguer un énoncé direct et un énoncé réciproque. Chacun de ces théorèmes est formalisé en deux énoncés séparés, l'un direct et l'autre réciproque. Cependant, le distinguo entre énoncé direct et réciproque peut n'être pas perçu par tous les élèves ; c'est pourquoi, en évaluation, on accepte par exemple que l'élève invoque le théorème de Pythagore sans autre précision lorsqu'il applique l'un ou l'autre de ces énoncés.
• Le **théorème de Thalès** est amené avec progressivité, d'abord avec la configuration des « triangles emboîtés ». Les deux points de vue « commencer par le théorème de la droite des milieux, puis généraliser » ou « présenter le premier comme une conséquence du deuxième » sont acceptables, et relèvent de la liberté pédagogique. La démonstration du théorème de la droite des milieux n'est pas un objectif. Le théorème de Thalès peut être formalisé en termes de proportionnalité, ce qui est plus immédiatement perceptible et plus simple à manipuler que l'écriture de rapports de longueurs. Le lien avec les triangles semblables, les agrandissements et réductions, et les homothéties de rapport positif peut être établi à cette occasion. La configuration « en papillon » peut donner l'occasion de mentionner les homothéties de rapport négatif, notamment en liaison avec les logiciels de tracé ; cependant, au-delà de ce lien, ces dernières homothéties n'ont pas vocation à être développées au cycle 4.

Problèmes de construction

Les **problèmes de construction** constituent un champ privilégié de l'activité géométrique. Ces problèmes doivent être diversifiés : reproduction d'une figure, figures sous contrainte, protocoles ou algorithmes de construction, analyse et modélisation de situations complexes issues du monde réel, des arts visuels, de l'architecture, du design, etc. Ces problèmes développent l'aptitude à observer une figure et à la représenter dans le modèle géométrique abstrait pour y raisonner.

L'élève doit entretenir et consolider au cours du cycle 4 sa compétence dans la manipulation des **instruments de tracé et de mesure**, et se familiariser progressivement avec les fonctionnalités d'un **logiciel de géométrie dynamique** permettant des constructions. Pour certaines figures relevant d'une procédure **algorithmique**, un logiciel adapté peut être utilisé.

Exemple : la séquence d'instructions ci-contre permet au lutin du logiciel Scratch de construire un carré.

Transformations usuelles

La **symétrie axiale**, envisagée au cycle 3, fait l'objet d'une définition formalisée. La **symétrie centrale** est introduite dès la classe de 5e, en liaison avec le parallélogramme, pour lequel on admet que le point d'intersection des diagonales est centre de symétrie. Les symétries sont envisagées et définies en tant qu'applications ponctuelles ; leurs propriétés de conservation et de transfert peuvent être mises en évidence et utilisées, mais ne sont pas exigibles en évaluation.

Les autres transformations (**translations, rotations, homothéties**) sont introduites pour décrire ou pour construire certains objets, notamment les frises, pavages et rosaces. Elles peuvent être découvertes avec les fonctionnalités des logiciels de géométrie. Elles sont essentiellement utilisées avec ces logiciels, et leur définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles n'est pas un attendu.

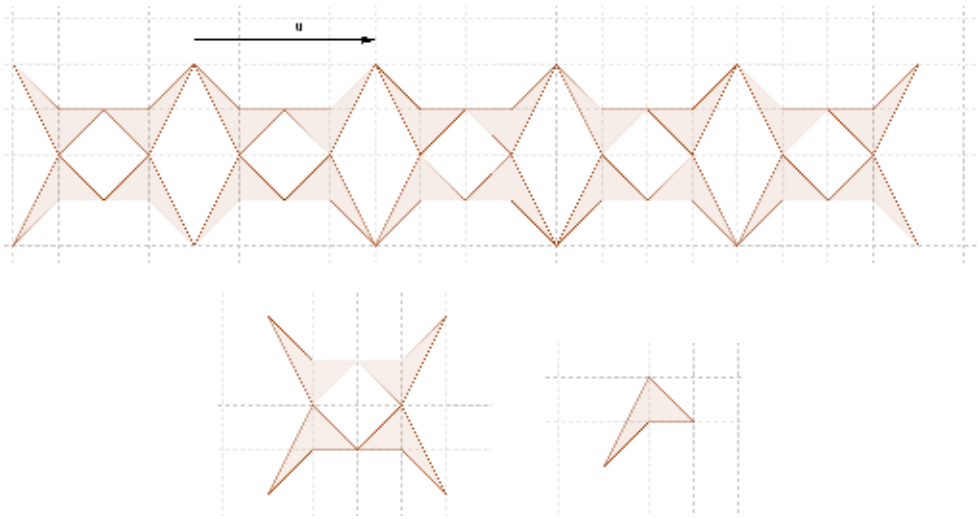
Frises, pavages, rosaces, polygones réguliers

Les frises, pavages et rosaces sont introduits pour modéliser des situations issues des arts visuels (fresques, bas-reliefs, vitraux, ...), du design (papier peint, carrelages, logos, ...), de l'architecture. Ces objets ne font pas l'objet d'une définition formalisée ni d'une étude en soi. L'élève peut être progressivement amené à observer, décrire et analyser certaines de ces figures dans des domaines variés, puis à en construire des modèles géométriques, exacts ou simplifiés. Les logiciels de géométrie sont privilégiés pour ces constructions. On peut adopter un petit nombre de conventions de vocabulaire destinées à faciliter l'analyse et la compréhension de ces objets. Les indications suivantes sont un guide de présentation pour le professeur, avec un vocabulaire possible. Ce vocabulaire, qui peut être introduit en situation, ne doit ni faire l'objet d'une institutionnalisation en classe, ni être évalué. Chaque énoncé permet de conforter ce vocabulaire, en conciliant précision et simplicité.

• Une **frise** est une bande de plan dans laquelle un **motif** se répète régulièrement par une même **translation**, schématisée par un **vecteur**. Un motif associé à une translation la plus courte possible est un **motif de base** ; celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un **motif élémentaire**, reproduit par d'autres transformations (symétries, rotations).

EXEMPLE

Voici une frise et un des deux vecteurs qui schématise une translation la plus courte.



Un motif de base

Un motif élémentaire associé

Un motif de base et un motif élémentaire associé ne sont pas uniques. Un motif de base peut être envisagé ou non avec un polygone ou une forme géométrique qui l'entoure, et qui peut par des translations successives recouvrir entièrement la bande de plan, quitte à négliger le chevauchement des bords. Chaque situation guidera le choix du motif envisagé, qui doit être précisé.

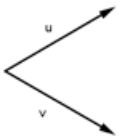
L'approche considérée permet de présenter le **vecteur** comme un **codage** de la translation. Elle n'est pas la seule : A et B étant deux points donnés, on peut aussi parler de translation qui transforme A en B.

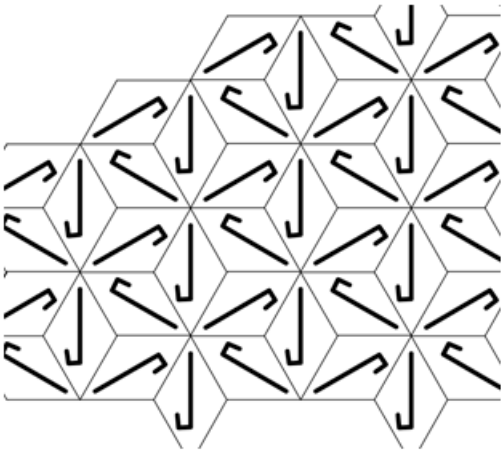
• Un **pavage** est une portion de plan dans laquelle un **motif** se répète régulièrement par deux translations, schématisées par des **vecteurs** non colinéaires (ou non parallèles). Comme pour les frises, un motif associé à deux translations les plus courtes possibles est un **motif de base** ; celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un **motif élémentaire**, reproduit par d'autres transformations (symétries, rotations).

EXEMPLE

Voici un pavage, et deux vecteurs qui schématisent les translations les plus courtes.

Comme pour les frises, la nature du motif (simple dessin ou dessin inclus dans un « pavé » qui l'entoure, comme le losange du pavage ci-avant) sera précisée dans chaque situation.





Un motif de base

Un motif élémentaire associé, reproduit par deux rotations

• Une **rosace** est formée d'un **motif** de base, qui se répète régulièrement par une rotation de centre O donné, et dont l'angle a pour mesure en degré un diviseur entier de 360. Une telle rosace est contenue dans un cercle de centre O.
• Les polygones réguliers, qui ne sont pas mentionnés en tant que tels dans le programme, n'ont pas à faire l'objet d'une définition formalisée. Ce sont néanmoins des objets d'étude intéressants qui, à l'instar des précédents, permettent de modéliser des situations naturelles (étoiles de mer, nids d'abeilles hexagonaux, ...), des objets technologiques (écrous, enjoliveurs d'une roue de voiture, ...), des œuvres d'art visuelles (rosaces, vitraux, ...), etc. Les polygones réguliers peuvent être vus comme des rosaces particulières, ce qui autorise une construction à l'aide de rotations.

Les outils numériques

Les outils numériques sont intégrés à la résolution de problèmes dans les constructions pour elles-mêmes, mais aussi dans la démarche d'investigation, dans l'observation, l'analyse et l'induction. L'élaboration d'un algorithme de construction sur le logiciel Scratch peut être proposée de façon différenciée à certains élèves, en formation. Cependant, cette élaboration n'est pas un objectif du collège et, de ce fait, ne doit pas être un objet d'évaluation.

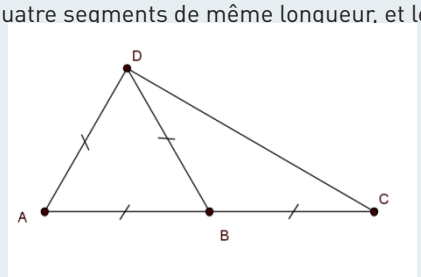
Le raisonnement et la démonstration

Le raisonnement intervient de façon diversifiée (déductif, par l'absurde, etc.). La **démonstration** est introduite avec prudence, sur des situations simples, qui nécessitent un argument de vérité dans le modèle de la géométrie abstraite[2], et sans décourager les élèves. Pour créer la possibilité d'îlots de démonstration, le professeur peut donner une liste – de longueur raisonnable – de définitions et théorèmes à connaître, en veillant à ce que cette liste soit cohérente et qu'elle permette de résoudre un nombre suffisant de problèmes.

Dans ces problèmes, il convient de dissocier l'exigence de résoudre la tâche, qui est source de motivation, de celle de communiquer cette résolution en rédigeant une démonstration. Cette dernière activité, pourtant essentielle et spécifique aux mathématiques, est plus délicate ; elle doit être conduite de façon progressive, non systématique, différenciée selon l'appétence et le niveau des élèves. Il convient surtout d'éviter les rédactions trop longues, trop lourdes, qui égarent les élèves et les détournent de la résolution d'un problème. **Si la rédaction formalisée d'une démonstration n'est pas un attendu du collège, l'exercice progressif du raisonnement est un objectif fondamental.**

EXEMPLE

La figure codée comprend quatre segments de même longueur, et les points A, B, C sont alignés.



Quelle est la nature exacte du triangle ACD ?

2. Voir à nouveau La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016

La solution peut d'abord être appréhendée à l'aide d'une figure tracée en vraie grandeur et en utilisant l'équerre, ou encore avec un logiciel de géométrie dynamique affichant les mesures d'angles, ou encore offrant un test d'orthogonalité.

Un débat peut s'ensuivre, autour de la question : le triangle est-il *exactement rectangle* en D, ou *à peu près* ? Tout dépend du contrat didactique : s'agit-il de la figure dessinée ou du modèle abstrait ?

Le choix du modèle abstrait justifie le fait de produire une preuve pour convaincre. La preuve peut être simplement trouvée par l'élève, par exemple en marquant successivement sur la figure les mesures des angles que l'on peut trouver : d'abord 60° dans le triangle équilatéral, puis 120° et 30° dans le triangle BCD isocèle en B, enfin 90° pour l'angle ($\widehat{ADC}$).

Le fait de rédiger une démonstration est un autre niveau d'exigence, qui peut être omis ou demandé à l'élève, en motivant la tâche par exemple par la nécessité de communiquer la preuve par écrit ou par téléphone.

Un exemple de modélisation en géométrie

EXEMPLE

Un professeur d'EPS trace un circuit de course à pied avec des plots :
- le plot n°2 est situé à 36 m au nord du plot n°1, qui est le plot de départ ;
- le plot n°3 est situé à 69 m à l'est du plot n°2 ;
- le plot n°4 est situé à 72 m au sud du plot n°3.

Chaque élève va d'un plot au suivant en ligne droite, et parcourt un certain nombre de fois le circuit 1-2-3-4-1. Il continue sur le même circuit jusqu'au plot d'arrivée, placé sur ce circuit de telle sorte le trajet total ait une longueur de 1,5 km.

Où le professeur doit-il placer le plot d'arrivée ?
Combien de fois un élève doit-il parcourir le circuit ?

Pour déterminer la distance entre les plots n°4 et n°1, un élève peut modéliser la situation de deux manières :
- par un dessin à l'échelle sur lequel il effectue une mesure de longueur ;
- par un schéma à main levée, support du raisonnement et de l'application du théorème de Pythagore.

Les deux méthodes sont correctes. Il est important de discuter avec les élèves de l'intérêt de chacune : la première ne nécessite pas de calculatrice, la deuxième permet d'obtenir une réponse plus précise ou plus sûre. Dans la même veine, voir l'activité Le cross du collège.

Différenciation

Dans ce thème, les possibilités de différenciation peuvent s'exercer de façon très diversifiée :
- en délivrant un accompagnement spécifique, que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- en changeant une variable didactique dans un problème (exemple : s'il s'agit de reproduire une figure par un agrandissement, le rapport 2, le rapport 1,6 et le rapport $\frac{7}{3}$ présentent des degrés de technicité graduels, et peuvent être donnés à différents élèves) ;
- en demandant une preuve sur un cas particulier à certains élèves, dans le cas général à d'autres ;
- en prolongeant une étude pour certains élèves ;
- en développant des scénarios pédagogiques collaboratifs (entraide, travail de groupe, ...) ;

Retrouvez Éduscol sur

• en offrant aux élèves des espaces où plusieurs types de démarches sont possibles (voir ci-avant l'exemple du circuit de course).

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

• Reconnaissance d'une configuration de base dans un environnement complexe.
• Programmes de construction.
• Compréhension et modification d'une construction donnée par un dessin ou un algorithme.
• Construction de frises, de rosaces, de pavages, à l'aide des instruments de tracé ou un logiciel.
• Calcul de grandeurs (longueurs, angles, aires).
• Modélisation de situations réelles (plans, frises, pavages) par des configurations et des transformations simples.
• Problèmes d'alignement, de parallélisme.
• Problèmes d'orthogonalité.

Exemples d'activités

Exemples de questions flash

Exemples de tâches intermédiaires :
• Le tangram
• Les frises de gouttes
• Analyse et construction d'un pavage

Exemples d'activités avec prise d'initiative :
• Le cross du collège
• La tour Charles le Téméraire
• La rosace de Sarajevo

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité donne du sens aux notions mathématiques, et doit s'exercer au sein de la classe et dans les enseignements complémentaires. Certaines notions de géométrie plane peuvent notamment trouver place dans le cadre des EPI (enseignements pratiques interdisciplinaires).

Par exemple :
• dans la thématique « Culture et création artistiques » : rosaces frises, pavages ;
• dans la thématique « Culture et création artistiques » : les figures géométriques dans le design, dans l'architecture, dans les jeux vidéo, dans la civilisation médiévale musulmane ;
• dans la thématique « Monde économique et professionnel » : la modélisation plane pour traiter certains problèmes liés au monde économique et professionnel ;
• dans la thématique « Sciences technologie et société » : distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Ératosthène, de la distance Terre-Lune au XVIIIe siècle) ; travaux sur plans et cartes, etc.

Ressources complémentaires

- Géométrie au collège
- La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016
- Logiciel Pavages, créé par Pascal Peter
- Frises ornementales et groupes 11e chapitre Recherches en éducation : pour une culture mathématique accessible à tous : élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes disponible sur www.enseignement.be
- Pavages rosaces et frises, réalisé à l'occasion de l'exposition 2000 Symétries du monde
- Frises et pavages, Philippe Garulo
- On trouvera de nombreuses activités faisant intervenir la construction de « belles » figures de géométrie plane, notamment liées aux arts plastiques, sur le site de l'IREM de Paris Nord.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Algorithmique et programmation

Algorithmique et programmation

SOMMAIRE

Introduction 2

- Objectifs de la formation 2
- Compétences développées 2
- Approches pédagogiques : élèments de réflexion 3
- Considérations didactiques : premiers éléments 6

Exemples de premieres séances avec les élèves 11

- Parcours d'un labyrinthe 11
- Programmation d'un dessin a l'écran 13

Quelques exemples d'activités 15

- Un jeu à trois personnages 15
- Un jeu de pong 16
- Un jeu avec des pièces 17
- Un jeu de tic-tac-toe 18

Annexe : présentation et installation de Scratch 19

- Installer Scratch 19
- Utiliser Scratch 19
- Les commandes de Scratch 20

Introduction

Comme l'indique le programme, l'enseignement de l'informatique au cycle 4 n'a pas pour objectif de former des élèves experts, ni de leur fournir une connaissance exhaustive d'un langage ou d'un logiciel particulier, mais de leur apporter des clés de décryptage d'un monde numérique en évolution constante. Cet enseignement permet d'acquérir des méthodes qui construisent la pensée algorithmique et développe des compétences dans la représentation de l'information et de son traitement, la résolution de problèmes, le contrôle des résultats. Il fournit également l'occasion de mettre en place des modalités d'enseignement fondées sur une pédagogie de projet, active et collaborative.

Le logiciel Scratch offre un environnement d'édition et d'exécution des programmes. Il s'agit d'un logiciel gratuit et disponible sur toutes les plates-formes usuelles, choisi pour sa simplicité, sa fiabilité et sa robustesse dans la mise en œuvre. Il permet de travailler tous les concepts figurant au programme, en particulier la programmation événementielle et la gestion de scripts s'exécutant en parallèle. L'annexe de ce document explique comment l'installer.

Objectifs de la formation

La lettre de saisine du Conseil supérieur des programmes datée du 19 décembre 2014 précisait les objectifs et démarches d'apprentissages : « L'enseignement de l'informatique et de l'algorithmique au cycle 4 n'a pas pour objectif de former des élèves experts, mais de leur apporter des clés de décryptage d'un monde numérique en évolution constante. Il permet d'acquérir des méthodes qui construisent la pensée algorithmique et développe des compétences dans la représentation de l'information et de son traitement, la résolution de problèmes, le contrôle des résultats. Il est également l'occasion de mettre en place des modalités d'enseignement fondées sur la pédagogie de projet, active et collaborative. [...] La maîtrise des langages informatique n'est pas la finalité de l'enseignement, mais leur pratique est le moyen d'acquérir d'autres démarches d'investigation, d'autres modes de résolution de problèmes, de simulation ou de modélisation. »

Compétences développées

Cet enseignement a pour objectif de développer chez les élèves les compétences suivantes :

- **décomposition** : analyser un problème compliqué, le découper en sous-problèmes, en sous-tâches ;
- **reconnaissance de schémas** : reconnaître des schémas, des configurations, des invariants, des répétitions, mettre en évidence des interactions ;
- **généralisation et abstraction** : repérer les enchaînements logiques et les traduire en instructions conditionnelles, traduire les schémas récurrents en boucles, concevoir des méthodes liées à des objets qui traduisent le comportement attendu ;
- **conception d'algorithme** : écrire des solutions modulaires à un problème donné, réutiliser des algorithmes déjà programmés, programmer des instructions déclenchées par des événements, concevoir des algorithmes se déroulant en parallèle.

Les modalités de l'apprentissage correspondant peuvent être variées : travail en mode débranché, c'est-à-dire sans utilisation d'un dispositif informatique, individuel ou en groupe, en salle informatique ou en salle banale, sur tablette ou sur ordinateur.

L'apprentissage associe trois types essentiels de démarche :

- une démarche de **projet** active et collaborative qui suppose l'établissement d'objectifs partagés et la répartition des tâches, la communication entre élèves contributeurs d'un même projet et qui permet l'intervention de plusieurs disciplines ;
- une démarche de **création** : l'enseignement permet la réalisation de productions collectives

Retrouvez Éduscol sur

(programmes, applications, animations, etc.), au cours desquelles les élèves développent leur autonomie, leur créativité et leur imagination, mais aussi le sens du travail collaboratif ;

- une démarche **interdisciplinaire** qui favorise la mise en œuvre de diverses activités de création numérique, en particulier dans le cadre des enseignements complémentaires.

L'apprentissage de la programmation en Scratch peut se développer sur les trois années du cycle suivant une progression liée à des concepts de programmation plutôt qu'à des éléments de syntaxe du langage :

- la programmation **événementielle** : conception de séquences d'instructions déclenchées par un événement (appui de touche, son reçu par le microphone, motif « touché » par un personnage, etc.) ;
- l'initiation à la programmation **parallèle** : déclenchement par le même événement de deux ou plusieurs séquences d'instructions ;
- le professeur pourra envisager une initiation de ses élèves à certains concepts simples de la **programmation-objet** par la programmation des « lutins » de Scratch, c'est-à-dire les objets tels que les différents personnages, en particulier pour la scénarisation d'une activité, comme il est expliqué plus bas dans « Déroulement de l'exécution d'un programme », mais aussi tout simplement en associant des scripts distincts aux différents lutins d'une même activité, comme il est expliqué plus loin par exemple dans le jeu de Pong.

Le thème « algorithmique et programmation » du programme de mathématiques du cycle 4

Le programme définit comme attendu de fin de cycle : *« Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. »* Il met l'accent sur l'analyse d'un problème en vue de concevoir un algorithme, mais aussi sur la phase de programmation effective, indissociable d'une étape de mise au point. Cependant, il ne faut pas nécessairement insister sur une chronologie précise, ces trois phases avançant souvent en parallèle : la mise au point comprend la phase d'essais-erreurs où l'élève construit petit à petit un programme qui répond au problème qu'il s'est posé. De même, au moment de la programmation effective l'élève peut se retrouver confronté à une question algorithmique qu'il n'avait pas prise en compte dès le départ.

L'attendu de fin de cycle évoquant un programme **simple**, il n'est pas question de formaliser d'aucune manière la distinction algorithme/programme. En particulier, il ne s'agit pas de définir un langage de description d'algorithme (ni pseudo-langage ni organigramme) même si son utilisation peut être envisagée, ponctuellement, mais sans souci de normalisation.

En revanche, il ne faut pas négliger la phase de mise au point : le professeur peut évoquer, si la situation s'y prête, l'utilisation d'un jeu de test. Les élèves sont amenés à comparer leurs solutions algorithmiques et leurs programmes, ce qui les conduit à une première approche, informelle, de la documentation d'un programme (commentaires et spécification[1]). Le partage de programmes entre classes ou entre collèges donne l'occasion de réutiliser en tout ou en partie les programmes écrits par d'autres, illustre la notion de réseau et introduit les questions liées à son usage, qui peuvent utilement être développées en lien avec le professeur-documentaliste.

Approches pédagogiques : éléments de réflexion

La mise en activité des élèves

Une séance d'apprentissage de l'algorithmique et de la programmation ne saurait se dérouler sous forme d'un cours descendant, magistral, où les élèves resteraient passifs. Ainsi, il serait par exemple inefficace de demander à des élèves de reproduire durant un tiers de la séance un programme que le professeur aurait expliqué au tableau durant les deux premiers tiers.

Si chaque séance doit viser des **objectifs de formation clairs et explicites**, par exemple découvrir

1. Spécifier un programme, ou un bloc de programme, c'est décrire avec précision les données attendues, les hypothèses éventuelles sur ces données, et l'action que réalise ce programme sur un tel jeu de données.

l'utilisation des variables, il convient de réserver l'essentiel du temps à une **activité autonome des élèves**.

Une séance peut commencer par quelques minutes où le professeur expose une situation-problème qui introduit la notion visée : par exemple, il propose de reprendre un jeu réalisé dans une séance précédente, en introduisant un score. Il montre comment créer une variable score[2], et comment l'incrémenter. Puis il laisse les élèves modifier leur programme, et peut proposer des défis pour aller plus loin, comme l'introduction de niveaux de difficulté, liés à la réalisation d'un score attestant chaque niveau. La séance peut se terminer par la récapitulation des instructions permettant d'utiliser les variables, éventuellement sous forme d'une fiche.

La pédagogie de projet

L'enseignement de l'algorithmique et de la programmation se prête particulièrement à la pédagogie de projet. L'objectif est de permettre à chaque élève de construire des connaissances et des compétences tout en développant son imagination et sa créativité dans le cadre d'un projet suivi sur quelques séances. Comme l'indique le programme, cet enseignement doit se traduire par la réalisation de productions collectives dans le cadre d'activités de création numérique, au cours de laquelle les élèves développent leur autonomie, mais aussi le sens du travail collaboratif. Pour autant, il ne s'agit bien sûr pas de monter des projets de trop grande envergure, qui se dérouleraient sur une année entière.

Une approche possible est la suivante : au cours d'une première séance, comme il est indiqué dans le paragraphe *« La mise en activité des élèves »*, le professeur propose une activité, dont il a fixé clairement les objectifs de formation et les concepts nouveaux qui devront être installés. Une deuxième séance peut permettre à chaque élève de développer son programme dans les directions qu'il aura lui-même choisies : la séance permet au professeur d'outiller l'élève selon ses besoins pour faire aboutir son projet. Il peut aussi aider l'élève à le redéfinir si la piste sur laquelle il s'est engagé est inadaptée. Une dernière séance peut permettre la finalisation des projets. Le professeur peut aussi proposer une mise en commun des concepts et des techniques utilisés par les uns et les autres.

Une mise en ligne de certains projets, sans distinction de niveau d'expertise, peut être envisagée afin de mettre en valeur les travaux des élèves. On peut également valoriser ces travaux par des ateliers-jeux, des expositions…

Mettre en œuvre la différenciation pédagogique

Les programmes du cycle 4 sont des programmes de cycle, et non pas des programmes annuels. L'organisation du cycle et la conception des enseignements ont pour objectif d'opérationnaliser l'acquisition par chacun des élèves des attendus du socle commun de connaissances, de compétences et de culture : il s'agit d'amener chaque élève à la meilleure maîtrise possible de tous ces attendus, dans le cadre d'un parcours de formation qui prend en compte ses acquis et ses marges de progression.

La différenciation pédagogique permet de réaliser cet objectif et ne saurait se réduire à de la remédiation pour les élèves qui ont plus de besoins. Il s'agit d'accompagner chaque élève, en permettant aux meilleurs de construire des méthodes expertes dans la résolution d'un problème algorithmique, de développer des projets personnels ambitieux, d'assimiler des concepts de programmation riches. Il s'agit en même temps de conduire les élèves les plus en difficulté à une maîtrise suffisante des attendus du programme pour valider l'acquisition du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.

C'est ainsi qu'une séance peut comporter un « défi » permettant aux élèves qui auraient rapidement réalisé l'objectif commun de poursuivre en autonomie leur travail, pendant que le professeur se rend disponible auprès d'autres élèves.

2. Il suffit pour cela de cliquer sur le bouton « Créer une variable » dans la catégorie Données.

Par exemple, dans le cadre du *« Parcours d'un labyrinthe »* de la partie *« Exemples de premières séances avec les élèves »*, l'objectif commun peut être dépassé par certains élèves qui peuvent utiliser un bloc de répétition, ou analyser le fonctionnement des scripts cachés par le professeur, comme le bloc-utilisateur « départ ». On propose d'autres stratégies de différenciation pédagogique dans d'autres exemples de ce document.
De même, comme on l'a dit au paragraphe « La pédagogie de projet », le professeur guide l'élève dans la définition de son projet, en respectant ses choix, mais en les adaptant si besoin au degré de maîtrise effectivement atteint, que ce soit pour l'enrichir ou en réduire les objectifs.

La boucle essai-erreur en informatique

L'apprentissage de l'algorithmique et de la programmation bénéficie d'une boucle essai-erreur qui est très courte : en cliquant sur un bloc ou un script on peut observer immédiatement l'effet sur les lutins, les tracés du stylo… D'autre part, aucun jugement de valeur n'est porté sur l'élève ou ses performances, la machine se contente d'effectuer les commandes et c'est l'élève lui-même qui constate s'il s'est trompé ou pas, et qui est invité à essayer une autre solution en cas d'échec. De plus, l'obtention d'une solution ne signifie pas la fin du processus de création, qui peut se poursuivre, pour en améliorer la qualité ou la performance.

Pour le professeur, cela signifie qu'il accepte pour ses élèves la nécessité de phases de tâtonnement et d'essais-erreurs, durant lesquelles il intervient le moins possible. En particulier, il est recommandé de résister à l'envie de taper sur le clavier ou de manipuler la souris à la place de l'élève, et de se contenter de répondre oralement aux questions de l'élève, de lui rappeler éventuellement tel ou tel script déjà écrit qui pourrait l'inspirer ou encore de lui suggérer de nouvelles pistes pour résoudre la difficulté qu'il rencontre, mais sans intervenir directement sur la machine de l'élève.

La préparation d'une séance

Nous proposons ci-après quelques exemples de séquences. Il convient, comme on l'a déjà dit, de définir par avance les objectifs de formation correspondants et de prévoir une chronologie en trois phases : très courte introduction de présentation d'un concept ou d'un problème, activité autonome des élèves comportant éventuellement des défis ou d'autres éléments de différenciation, et, le cas échéant, phase finale d'institutionnalisation des nouveaux concepts, de mise au propre et par écrit des notions rencontrées.

Pour favoriser le travail autonome des élèves, il est possible de préparer la séance en proposant aux élèves, via le réseau ou une clé USB, une « trame » de programme, qu'ils seront amenés à compléter. Cette trame doit être limitée à ce que les élèves n'auraient pas le temps de préparer, ou aux objets qu'ils ne sont pas encore en mesure de programmer eux-mêmes.
Il serait par exemple malavisé de faire travailler les élèves durant toute une séance à la création d'un arrière-plan : le professeur peut demander que ce travail soit effectué à la maison, ou proposer un arrière-plan qu'il met à disposition des élèves en début de séance[3].

On verra plus loin tout l'intérêt qu'il peut y avoir que les élèves disposent d'un bloc utilisateur « reset », créé par le professeur, qui permette de réinitialiser systématiquement la configuration avant un travail sur le déplacement et les tracés dont on prévoit qu'il nécessitera de nombreuses tentatives avant d'aboutir.

En revanche, il n'est pas souhaitable de systématiquement proposer aux élèves un programme incomplet qu'ils seraient chargés de compléter, d'améliorer ou de corriger. En effet, la phase de mise au point qui accompagne toujours l'écriture d'un programme développe précisément ces

3. Les observations déjà conduites en école et au collège montrent que les élèves s'amusent volontiers à dessiner leurs lutins, les arrière-plans, ou à jouer avec les différents sons. Mais le risque est de limiter une séance à ces seules activités, sans plus aucun objectif de formation. En revanche, il peut être intéressant de travailler avec un professeur d'arts plastiques sur la création d'arrière-plans, avec un professeur d'histoire sur la création d'un lutin figurant un personnage historique, etc.

compétences, et il ne faut pas perdre de vue l'objectif d'autonomie des élèves. Ceux-ci doivent être amenés, le plus souvent possible, à écrire eux-mêmes leurs propres programmes en développant leur inventivité, leur imagination et leur créativité.

Considérations didactiques : premiers éléments

Le lecteur est invité à installer Scratch sur sa machine personnelle[4], et à tester au fur et à mesure de sa lecture les activités proposées.

Le vocabulaire de scratch

Comme en mathématiques, le travail sur la compétence Communiquer, sur la construction d'une expression écrite et orale précise est un objectif de formation important.
Il convient donc de s'accorder sur un vocabulaire précis. Dans l'environnement Scratch, on évoquera en particulier les points suivants.

- les lutins sont les objets manipulés par Scratch. Par défaut, il s'agit du chat, mais on peut utiliser plusieurs lutins, qui peuvent interagir en échangeant des messages, en détectant des collisions, etc. Chaque lutin a ses propres scripts. Tout lutin est muni d'un stylo, inactif (car relevé en position haute) par défaut, qui se déplace avec le lutin et qui, s'il est en position d'écriture, laisse une trace lors de ses déplacements.
- Un lutin peut porter différents costumes, ce qui permet par exemple d'animer les déplacements d'un lutin ou encore de prévoir un dé avec 6 costumes, un par face.
- On pourra par exemple consulter le tutoriel « Comment simuler un lancer de dés dans mon projet Scratch ? » du site MagicMakers ;
- les *blocs ovales* représentent des expressions, c'est-à-dire des valeurs, sur lesquelles on peut effectuer des calculs ;

- les *blocs pointus* représentent également des expressions, mais à valeurs booléennes, c'est-à-dire vrai ou faux, et sont utilisés pour réaliser des expressions conditionnelles, ou des tests ;

4. Il peut pour cela s'aider de l'annexe qui figure à la fin de ce document.

- les *blocs aimantés* représentent des instructions : en les accolant les uns aux autres on construit des blocs de script, souvent initiés par un bloc chapeau associé à un événement. À chaque lutin peuvent être associés différents scripts. C'est le principe de construction des programmes en Scratch ;

- les scripts sont construits en accolant des blocs aimantés. Chaque lutin peut être muni de plusieurs scripts.

La notion de variable

La notion de variable en informatique diffère de la notion mathématique.

En mathématiques, la variable apparaît dans des formules comme celle du périmètre du cercle $2\pi R$ ou dans l'expression symbolique des fonctions, comme dans $y = f(x)$. On distingue : les indéterminées, comme dans une identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, qui indique que l'égalité est vraie pour toutes les valeurs données à a et à b ; les inconnues, comme dans l'équation $2x+3 = 4x-7$, où cette fois il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de la variable x l'égalité est vraie ; les paramètres, qui conservent une valeur fixe, mais de portée générale, comme a qui désigne le coefficient de la fonction linéaire $x \mapsto ax$.

Dans de nombreux langages informatiques, on est amené à écrire des instructions comme $x \leftarrow x+1$, souvent même sous la forme $x = x+1$, qui sont d'une nature totalement différente : il ne s'agit pas là d'une égalité, ni d'une équation, mais **d'une instruction d'affectation**, qui va modifier le contenu de la variable x et qui devrait être lue « x reçoit la valeur $x+1$ », et surtout pas « x égale $x+1$ ».

Il existe une façon à la fois claire et rigoureuse de présenter les variables informatiques.
On dira qu'une variable x est une **étiquette** collée sur une **boîte** qui peut **contenir** différentes valeurs. Il est important de faire comprendre que le contenu de chaque boîte varie au cours de l'exécution d'un programme, ce qui n'est pas le cas de la variable mathématique (la variable x pour une fonction ne varie pas au cours du calcul, ou encore la lettre x associée à une grandeur dans un problème reste attachée à cette grandeur pendant les calculs, cf la ressource thématique *Comprendre et utiliser la notion de fonction*).

Quand l'ordinateur évalue une expression dans laquelle figure une variable, comme

l'expression x + 4, le résultat de l'évaluation est la somme du nombre contenu dans la boîte étiquetée par x et de 4.

Une **instruction d'affectation** comme y = x + 4 signifie donc :

- évaluer l'expression x + 4, en ajoutant 4 à la valeur contenue dans la boîte étiquetée par x ;
- jeter le contenu de la boîte étiquetée par y, et le remplacer par la valeur calculée à l'étape précédente.

L'instruction x = x + 1 s'explique alors exactement de la même façon.

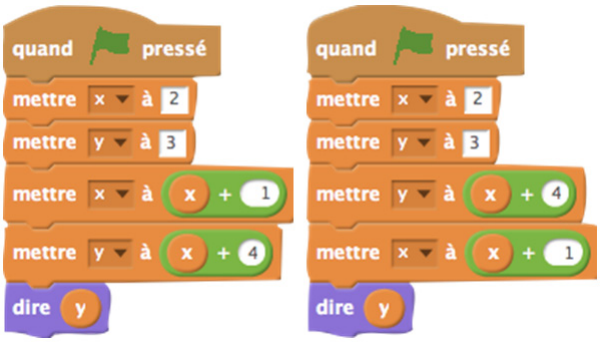
En Scratch, le risque de confusion est moindre puisqu'on dispose de blocs ovales comme

pour les expressions, et l'instruction d'affectation est le bloc aimanté ci-dessous, qui ne ressemble en rien à une équation mathématique, ni à une égalité[5].

Pour autant, il est important d'expliquer correctement la notion de variable, en illustrant le propos par exemple avec des boîtes dessinées au tableau. On fait évoluer le contenu en simulant l'exécution d'un programme. On fait ainsi explicitement la différence avec l'utilisation des variables en mathématiques.

Déroulement de l'exécution d'un programme

Quand on accole différents blocs aimantés, leur ordre est tout à fait essentiel. Ainsi, si l'on s'intéresse aux deux scripts suivants, en s'appuyant sur l'interprétation des variables que nous venons de développer, on observe des effets totalement différents :



Le script de gauche fera dire « 7 » au chat, le script de droite lui fera dire « 6 ». Pour expliquer le fonctionnement d'un programme, il est donc nécessaire de parler d'états ou de configurations successifs, la description d'une configuration précisant en particulier les étiquettes et les contenus de chaque boîte de mémoire. Ainsi est introduite une notion de temporalité, par la suite des états (ou configurations) successifs.

Il n'est évidemment pas question, au niveau du collège, d'entrer dans des détails trop précis sur le temps d'exécution de tel ou tel bloc, de tel ou tel script. Néanmoins, la notion d'états (ou configurations) successifs peut être introduite, pour expliquer le comportement d'un programme.

Si les deux scripts ci-dessus sont exécutés en même temps, que se passe-t-il ? On introduit ici la notion de parallélisme, c'est-à-dire d'exécution simultanée de deux scripts différents. Le terme *« parallélisme »* n'est d'ailleurs pas une connaissance attendue des élèves, c'est l'utilisation de

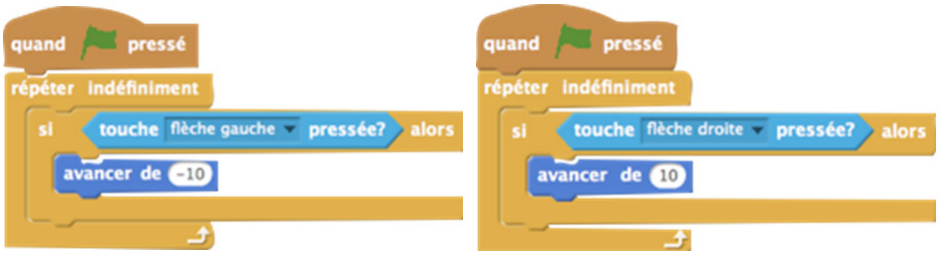
5. Il est sans doute préférable de ne pas recourir au bloc aimanté « ajouter à y 1 » dont la traduction n'est pas heureuse (« ajouter 1 à y » aurait assurément été plus clair).

scripts parallèles qui figure seule parmi les objectifs de formation. Bien sûr, tout développement théorique sur le parallélisme est à proscrire.

En l'occurrence, le résultat est assez imprévisible, car les deux scripts devraient se dérouler à peu près à la même vitesse, et on ne peut deviner ce qu'annoncera le chat…

Il est sans doute préférable de n'évoquer le parallélisme que dans des situations où les différents scripts amenés à se dérouler en parallèle sont déclenchés par des événements différents.

Par exemple :



On pourrait bien sûr n'écrire qu'un script, la boucle « répéter indéfiniment » comprenant les deux conditionnelles de façon consécutive : ce serait cependant un peu cacher le fonctionnement de l'algorithme, en compliquer la lecture et la compréhension. C'est ainsi un exemple typique d'utilisation pertinente de la notion de parallélisme.

Une activité prévoyant un scénario particulier, par exemple un dialogue entre plusieurs personnages, posera la question des « rendez-vous » : le personnage A commence, puis passe la main au personnage B qui réalise d'autres actions. Ceci peut être programmé à l'aide d'un message envoyé par A à B, qui lui indique que c'est à son tour d'agir : pour ce faire, Scratch, dans la catégorie « Événements » propose deux blocs

et

. Cette utilisation, très modeste, de la programmation-objet permet un travail intéressant de scénarisation d'une activité.

Les déplacements et les dessins au stylo

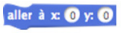
Les lutins de Scratch sont tous munis d'un stylo[6]. Le stylo se déplace avec le lutin, mais il faut le mettre en position d'écriture pour que le tracé s'effectue lors des déplacements du lutin, ou le relever en position haute pour déplacer le lutin sans rien dessiner.

Il y a deux façons de se déplacer :

- en déplacement relatif. Les commandes

et

,

déplacent le lutin dans la direction qu'il regarde, depuis la position courante, ou le font tourner, par rapport à la direction courante ;
- en déplacement absolu. Les commandes 

et

indiquent la nouvelle position ou la nouvelle direction du lutin.

Il est utile de faire le lien entre ces commandes et les notions mathématiques correspondantes, mais on peut également rapprocher la différence relatif/absolu des modes d'adressage d'une cellule dans un tableur.

Les mouvements relatifs correspondent bien à des instructions de déplacement données à un être humain : elles peuvent être simulées physiquement, par exemple sur un quadrillage dessiné dans la cour du collège.

6. La position précise du stylo par rapport au lutin est au centre de celui-ci : en éditant le costume et en cliquant sur l'icône en forme de croix tout en haut à droite, on voit apparaître avec précision cet emplacement sur le dessin du lutin.

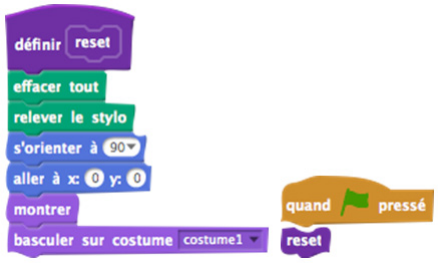
Il est sans doute utile, dans les premiers temps, de laisser apparent le lutin associé au stylo afin de comprendre la notion de direction courante : c'est la direction du regard du chat. Plus tard, on pourra cacher le lutin avant de dessiner.

Les mouvements absolus permettent de travailler plus directement les notions de géométrie du programme.

Il convient de préciser les conventions de repérage de Scratch : l'origine est au centre de l'écran de travail, ses bords gauche et droit sont d'abscisses -240 et +240, les bords bas et haut d'ordonnées -180 et +180. Les angles sont mesurés dans le sens des aiguilles d'une montre, la direction 0° visant le haut de l'écran, la direction 90° la droite, etc.

On peut faire afficher les coordonnées absolues d'un lutin en cochant les cases correspondantes devant abscisse x , ordonnée y , direction (dans la catégorie « Mouvement »). A contrario, les coordonnées affichées sous le coin droit de la zone de dessin sont celles de la souris…

Une difficulté se rencontre fréquemment lors de la mise au point d'un programme de dessin : quand on clique sur le drapeau vert pour lancer un script, aucune initialisation particulière n'est effectuée par Scratch[7], qui reprend le lutin dans l'état courant (position et direction). Ce peut être une bonne pratique que le professeur crée un nouveau bloc-utilisateur « reset » que les élèves pourront systématiquement insérer en tête de leurs scripts, même sans entrer dans les détails de la conception d'un tel bloc lors de ses premières utilisations.



Blocs crées par les utilisateurs

La création d'un bloc-utilisateur permet d'aborder la notion de typage des arguments, puisque Scratch autorise des blocs à plusieurs arguments, chacun d'entre eux étant d'un type bien défini, à choisir parmi nombre, chaîne de caractères ou booléen. Une attention particulière sera portée au nommage d'un bloc-utilisateur et de ses arguments, Scratch permettant d'introduire du texte entre plusieurs arguments. Par exemple, on pourra choisir comme entête d'un bloc-utilisateur :

La création d'un bloc-utilisateur peut être envisagée dans le cas de la réutilisation fréquente d'un script. Elle permet donc également d'aborder les notions de réutilisation du code, de partage de programme et de spécification : pour partager un programme, il est important de le documenter. Cela passe par un nommage pertinent et parlant et le typage explicite des arguments, comme on l'a déjà dit, mais aussi par la description (en français) de l'action réalisée par le bloc-utilisateur et la déclaration des hypothèses qu'on fait éventuellement sur les arguments. Là encore, l'objectif n'est pas de formaliser des protocoles de documentation,

7. Il y a une exception : le chronomètre est remis à zéro à chaque clic sur le drapeau.

mais de sensibiliser à son importance, à l'occasion d'un partage effectif de « morceaux de code » entre élèves.

Malheureusement, Scratch n'offre pas la possibilité d'écrire des fonctions, c'est-à-dire des blocs-utilisateurs qui renvoient un résultat. Les blocs-utilisateurs de Scratch opèrent par « effet de bord », c'est-à-dire en modifiant l'état de la mémoire, les objets ou la fenêtre de tracé : on peut modifier la valeur d'une variable, déplacer les lutins ou les faire changer de costume, dessiner à l'écran, etc. Mais on ne peut renvoyer un résultat, par exemple numérique, qui serait réutilisé dans une expression. Dans la philosophie de Scratch, on a créé un nouveau bloc, à l'image des blocs usuels, qu'on peut empiler dans un script complexe, mais dont le contour comporte les encoches aimantées habituelles, ce qui montre bien qu'il ne peut s'agir d'une expression.

Exemples de premieres séances avec les élèves

Parcours d'un labyrinthe

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint PremierLabyrinthe.sb2 en parallèle de sa lecture.

Cet exemple de première séance a comme objectif principal la prise en main par les élèves du logiciel.

Il s'agit :

- de commencer à utiliser le vocabulaire de Scratch pour savoir nommer les objets de l'interface ;
- de comprendre le fonctionnement des blocs, leur « aimantation », leur duplication par un clic droit dans la fenêtre de script ;
- de savoir exécuter et mettre au point un script, de déclencher son exécution par un clic sur le drapeau vert ;
- d'enregistrer son programme.

On ne cherche surtout pas ici à découvrir l'intégralité des commandes disponibles !

On peut par exemple proposer d'ouvrir un fichier préparé par le professeur, avec un arrière-plan déjà dessiné, un bloc utilisateur « départ », un script détectant le succès.

L'arrière-plan peut être celui-ci[8] :
Le bloc « départ » permet de positionner le « chat » à sa bonne place et à la bonne taille.
Le défi proposé aux élèves est de combiner des déplacements (« avancer de » et « tourner ») pour amener le chat à la cible jaune.

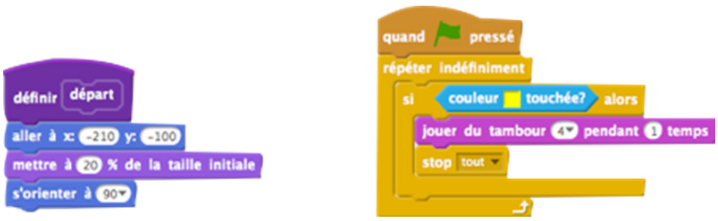
8. Spécifier un programme, ou un bloc de programme, c'est décrire avec précision les données attendues, les hypothèses éventuelles sur ces données, et l'action que réalise ce programme sur un tel jeu de données.

On peut présenter dans la fenêtre de script le squelette du script visé : déclenchement par le drapeau vert, utilisation du bloc départ, et les trois blocs aimantés qu'il faut dupliquer et « attacher » pour obtenir le script final.

En ayant déjà placé un bloc « avancer de 100 », l'élève peut tester que le chat arrive au bout du premier trajet horizontal, ce qui lui donne une première idée de l'échelle en pixels.

Il est d'ailleurs possible de proposer à l'élève, pour l'aider, d'afficher les coordonnées du chat en cochant les cases devant abscisse x et ordonnée y de la catégorie « Mouvement ».

Le professeur a préparé ces éléments de script, qu'il n'est pas nécessaire de présenter aux élèves lors d'une première séance :



Aux élèves qui réussiraient très vite à terminer l'exercice, on peut expliquer le fonctionnement de ces deux blocs. Une autre idée consiste à simplifier leur script à l'aide d'un bloc de répétition :

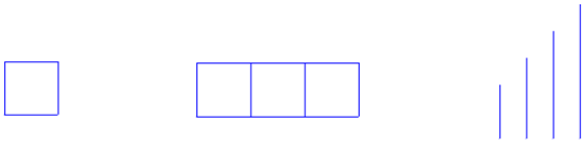
Cette façon de procéder, donner un même objectif à tous et proposer selon l'avancement de chacun des compléments de recherche, peut être utilisée régulièrement, tout au long du cycle.

Programmation d'un dessin a l'écran

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint PremierDessins.sb2 en parallèle de sa lecture.

Il s'agit là aussi d'une activité qui peut être menée dès le début du cycle, et qui a pour objectifs de faire découvrir les commandes de déplacement et de tracé.

On demande de réaliser des tracés très simples, comme, par exemple :

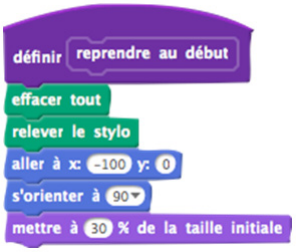


Comme il est indiqué dans le paragraphe « Les déplacements et les dessins au stylo », on peut commencer par une activité débranchée, où les élèves peuvent se répartir par paire : un élève écrit, à la main, un jeu d'instructions avancer, tourner, relever le stylo ou le descendre en position d'écriture, l'autre exécute en respectant scrupuleusement le « programme » de son camarade. On échange les rôles pour d'autres dessins.

On passe ensuite à la programmation en Scratch, le professeur montre rapidement quels sont les quelques blocs aimantés à utiliser (trois pour les mouvements, deux pour le stylo, et le bloc effacer tout), et propose de reprendre les tracés précédents, et éventuellement de nouvelles figures simples.

Il n'est pas ici besoin de travailler longuement sur les unités : on peut par exemple proposer que 1 carreau = 50 pixels, sans préciser une taille en millimètres. De même, l'objectif n'est pas que les élèves utilisent nécessairement un bloc de répétition avant qu'ils en ressentent eux-mêmes l'utilité : la différenciation pédagogique joue ici pleinement son rôle, et le professeur propose ces blocs aux seuls élèves qui en font la demande, et ne procède à leur institutionnalisation que dans une séance ultérieure.

Le professeur peut avoir préparé un bloc utilisateur « reprendre au début », pour effacer l'écran, positionner le lutin à un endroit de départ précis, dans une orientation précise.

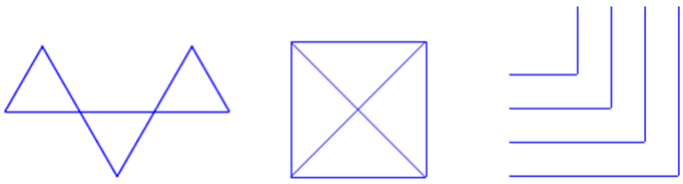


Afin d'aider les élèves à gérer les rotations, il est probablement préférable dans un premier temps de laisser le chat apparent, la direction de son regard pouvant aider à la mise au point des programmes.

Chacune des figures proposées ci-dessus peut être obtenue de nombreuses façons différentes. Par exemple, pour la troisième, on pourra simplement utiliser le script ci-dessous.

Des élèves peuvent chercher à utiliser des répétitions pour simplifier leur script, se confrontant à une difficulté : la taille variable des 4 bâtons à dessiner.

On peut dans une séance suivante, introduire la notion de variable et proposer ainsi de reprendre la figure des 4 bâtons, et en proposer d'autres, comme les suivantes : là encore, chaque élève doit pouvoir avancer à son rythme, et ne devrait pas être contraint à utiliser trop tôt des procédures expertes avant d'avoir maîtrisé les commandes élémentaires de mouvement et de tracé.



Il ne faut pas exclure que des élèves souhaitent eux-mêmes expérimenter sur des figures qu'ils auront choisies sans l'intervention du professeur. On veillera toutefois à éviter deux écueils : le choix de figures trop complexes, et une situation où un élève s'amuserait à jouer avec la couleur, l'épaisseur du trait, ou d'autres détails « cosmétiques » alors que l'objectif est de mettre en place des éléments de programmation et des compétences de repérage dans le plan[9].

Quelques exemples d'activités

Ces exemples d'activités ne prétendent pas recouvrir exhaustivement le programme.
Ils ne sont en rien prescriptifs, mais fournissent simplement des pistes de travail qui pourront inspirer les professeurs.

Un jeu à trois personnages

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint PoissonsChatChiens.sb2 en parallèle de sa lecture.

Cette activité se prête facilement à un découpage, en ajoutant au fur et à mesure un personnage et des interactions, ce qui permet une pédagogie différenciée.

Elle permet de revoir la gestion des déplacements et introduit l'utilisation conjointe de plusieurs personnages, ainsi que leur interaction. On rencontre également naturellement la notion de variable, et l'utilisation du chronomètre intégré à Scratch.

On peut commencer avec le seul lutin habituel (le chat). On demande d'abord aux élèves de gérer son déplacement à l'aide des quatre flèches du clavier, ce qui relève de la programmation événementielle.

On ajoute un nouveau lutin, un chien, qui doit effecteur indéfiniment des allers-retours du bord gauche au bord droit de l'écran, ce qui est facilement réalisé à l'aide d'une répétition infinie et des blocs et . Un défi supplémentaire, pour les élèves les plus à l'aise, consiste à demander de programmer un parcours aléatoire du chien. Pour l'intérêt du jeu, il convient de prévoir un déplacement pas trop rapide.

On souhaite alors que chaque lutin réagisse au moment où il rencontre l'autre : le chien pourra simplement dire bonjour et le chat exprimer sa frayeur. La « rencontre » est détectée par le capteur et il faudra la tester au sein d'une répétition infinie. Il est probable que la nécessité de cette boucle n'apparaisse pas immédiatement aux élèves et que certains se contentent d'effectuer le test une seule fois. Il peut être intéressant de comparer la gestion directe d'un événement comme l'appui d'une touche avec celle du contact détecté par la valeur d'un capteur. La distinction entre les scripts de chaque lutin est également un élément qui mérite d'être souligné.

On peut d'ores et déjà ajouter une variable globale qui permet de gérer un score, chaque rencontre du chat et du chien faisant baisser le score.

On propose alors d'ajouter un troisième personnage, un poisson. Il s'agit de programmer un déplacement aléatoire dans le plan de ce lutin.

Une fois cette étape franchie, on gère l'interaction chat-poisson : à chaque contact, on incrémente le score, et on souhaite faire disparaître le poisson (le chat l'a mangé) et le faire réapparaître à un endroit aléatoire après un délai fixé.

Il s'agit donc de simuler le fait que le chat mange les poissons qu'il réussit à attraper et qu'à chaque fois un nouveau poisson apparaît, même si c'est un lutin unique qui gère les poissons.
La difficulté tient au délai fixé. Cela permet d'introduire le chronomètre de Scratch, mais également une variable qui conservera l'heure où le poisson a été attrapé : le script du poisson étant le seul qui ait besoin de cette variable, on la définira comme variable privée du lutin, à la différence du score que plusieurs lutins ont besoin de modifier ou de consulter, qui doit

9. Le fichier joint *PremiersDessins.sb2* montre un exemple d'activité. L'utilisation d'un message a permis de regrouper les tracés de deux figures différentes dans le même script : ce n'est évidemment pas recommandé pour des premières séances.

donc être une variable publique (ou globale). Cette distinction est une première introduction aux concepts de la programmation-objet qui n'a évidemment pas à être formalisée.

La commande qui permet d'attendre le délai fixé (ici à 2 secondes) ne va pas de soi et mérite sans doute un moment collectif de réflexion et d'explication :

Une dernière étape consiste à ajouter un quatrième lutin, l'arbitre, qui apparaît quand le score devient négatif (après des rencontres du chat et du chien) ou dépasse une valeur fixée (le chat a réussi à manger suffisamment de poissons). Là encore, on met en évidence la nécessité d'une boucle infinie pour scruter la valeur d'une variable globale, le score, et il peut être utile de réfléchir au nombre de scripts qui se déroulent en parallèle à un moment donné.

On peut imaginer différents prolongements : par exemple, un étang où nage le poisson, le chat ne pouvant l'attraper, et le manger, qu'au bord de l'étang. Ou encore la présence de plusieurs poissons…

Un exemple de production est proposé dans le fichier joint PoissonChatChien.sb2.

Un jeu de pong

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint Pong.sb2 en parallèle de sa lecture.

Le professeur peut choisir ce type d'activité avec différents objectifs : travailler la notion de direction angulaire relative ou absolue, découvrir et utiliser les constructions conditionnelles, découvrir et utiliser des variables, programmer une gestion d'événements.

Selon le(s) choix qu'il effectue, il développera plus tel ou tel aspect de l'activité, proposera des défis différents aux élèves, prolongera l'activité suivant diverses directions.

On peut commencer par une activité concernant le rebond sur les bords d'une balle. Il vaut mieux choisir pour commencer un lutin dont la direction est immédiatement visible (le chat, une flèche), et reporter à plus tard l'utilisation d'un lutin en forme de balle. De la même façon, il est sans doute utile d'afficher la direction du lutin (en cochant la case appropriée tout en bas de la catégorie « Mouvement »).

Une répétition infinie de

,

, permet alors l'observation de ce qui se passe aux bords : un objectif est que les élèves conjecturent les règles de changement de direction.

On peut alors proposer un défi, qui est de réaliser le même processus, mais sans utiliser le bloc

. Il faut toutefois prendre garde à repérer l'approche des bords, en ajoutant des répétitions infinies de test sur l'abscisse (inférieure à -215 ou supérieure à 215) et sur l'ordonnée. Ce défi n'est pas si simple pour des élèves inexpérimentés.

On ajoute deux raquettes (que les élèves peuvent dessiner, un simple rectangle suffit). On pensera à les nommer de façon explicite, raquette gauche et raquette droite, par exemple. Il n'est pas très difficile d'associer à chaque raquette un script qui permet à l'utilisateur de la faire monter ou descendre, à l'appui d'une touche ou d'une autre. Il faudra donc choisir quatre touches différentes du clavier, pour le joueur gauche et le joueur droit.

Il s'agit là d'une programmation événementielle très simple à mettre en œuvre.

Pour l'instant, la balle et les raquettes agissent sans aucune interaction.

Il convient maintenant de gérer le rebond de la balle sur chaque raquette.

Pour cela on crée une boucle infinie qui teste le contact à l'aide du premier bloc de la catégorie « Capteurs ». Si la raquette gauche est touchée, il suffit de changer la direction de la balle en l'opposé de la direction actuelle. Remarquons que puisqu'il s'agit de modifier la direction de la

balle, c'est bien sur le script de la balle qu'il faut travailler, et non sur celui de la raquette !

C'est un objectif important que les élèves comprennent bien quelles commandes sont à écrire dans le script de la balle et quelles autres dans celui de chaque raquette : on introduit ici des concepts liés à la programmation-objet, sans avoir pour autant besoin du moindre formalisme.

Une autre remarque s'impose ici : on peut bien sûr créer un unique script long et compliqué pour la balle, mais il est sans doute plus simple de créer plusieurs scripts associés chacun à un comportement particulier : le déplacement perpétuel sur le terrain de jeu, la gestion du rebond sur les bords (si on ne veut pas utiliser la commande

), le contact avec la raquette gauche, le contact avec la raquette droite. Cela introduit à la fois la notion de programmation d'actions en parallèle et permet une mise au point beaucoup plus facile des programmes.

Plusieurs prolongements sont envisageables.

En premier lieu, on peut ajouter un score pour chacun des deux joueurs, en créant deux variables score gauche et score droit (toujours utiliser des identifiants explicites et non abrégés), qui sont incrémentées à chaque rebond réussi sur la raquette correspondante.

Les élèves peuvent décider si la balle rebondit sur les côtés gauche et droit au cas où les raquettes l'auraient ratée, ou si dans ce cas la partie continue avec la balle au centre et une direction tirée au hasard. On peut également ajouter des pénalités au score adéquat dans ce cas de balle ratée.

Un prolongement plus ardu consisterait à gérer des niveaux de difficulté, à chaque fois qu'un score dépasse une dizaine (par exemple) : ce pourra correspondre à une accélération de la balle, à des raquettes moins longues, etc.

Un exemple de production est proposé dans le fichier joint Pong.sb2.

Un jeu avec des pièces

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint Francs.sb2 en parallèle de sa lecture.

L'activité est reprise d'un exercice du rallye mathématique de l'académie de Lyon.

On dispose de quatre pièces, disposées initialement respectivement du côté face, pile, face, pile.

Chaque clic sur une pièce la retourne, ainsi que son éventuelle voisine de droite.

Le joueur gagne quand les quatre pièces sont du même côté.

Bien entendu, on peut varier le nombre de pièces, ainsi que la disposition initiale — mais attention, certaines dispositions ne sont pas résolubles !

L'objectif de cette activité est de travailler les notions suivantes :
- instructions conditionnelles ;
- utilisation d'une variable ;
- utilisation simple d'une liste ;
- gestion d'événements déclenchés par la souris ;
- déclenchement de plusieurs actions en parallèle ;
- échange de messages entre objets.

Chaque pièce est représentée par un lutin, avec deux costumes, pour le côté pile et le côté face.

On propose, dans le fichier joint Francs.sb2 , un exemple de production autour de cette activité.

Dans cet exemple, on a également créé deux costumes pour l'arrière-plan, avec un costume pour signaler la victoire et un autre pour préciser qu'on aurait pu gagner en moins de clics. En effet, avec la configuration initiale choisie, il existe des solutions en seulement 2 clics.

Une difficulté de l'activité tient à ce qu'un clic sur une pièce doit entraîner une action sur sa voisine : c'est une occasion naturelle d'introduire la notion de message entre lutins. Les actions déclenchées par un clic sur la pièce et la réception d'un message sont très similaires, mais différentes : c'est là aussi une difficulté.

Retrouvez Éduscol sur

Dans un objectif de différenciation pédagogique, on peut apporter de l'aide en fournissant le script de la pièce 3, par exemple, et demander d'écrire les scripts des pièces 1, 2 et 4, ce qui demande une bonne analyse des actions, et correspond bien aux compétences « mettre au point un programme simple » et « reconnaître des schémas ».

L'initialisation de la variable qui compte le nombre de clics et de la liste qui retient les faces courantes des pièces est réalisée, à l'appui du drapeau vert, par un script lié à l'arrière-plan. Cette méthode permet de distinguer ce qui relève du comportement global de l'application et ce qui est spécifique de chaque pièce. On notera qu'on a choisi également de tester la victoire dans le même script, lié à l'arrière-plan.

L'utilisation d'une liste paraît indispensable, car chaque lutin est le seul à avoir accès au numéro de son costume courant : aucun lutin ne peut donc tester l'égalité des côtés des quatre pièces en utilisant seulement le bloc

.

Cette activité ne demande qu'une utilisation très élémentaire d'une liste, et peut donc servir d'introduction à cette notion.

Le test de victoire peut être réalisé de plusieurs façons : par une imbrication de plusieurs conditionnelles, comme dans la production jointe, mais aussi en utilisant les connecteurs logiques. Ce peut être intéressant de ne pas guider les élèves sur telle ou telle voie, mais de les laisser choisir. On peut s'attendre à ce que les élèves cherchent un bloc pour tester des égalités simultanées, et expliquer qu'on ne peut tester que l'égalité de deux quantités.
On a choisi de représenter les valeurs pile et face par les nombres 1 et 0, ce qui permet d'utiliser

qui devra naturellement faire l'objet d'un travail spécifique : une fois qu'on aura trouvé comment modifier un élément d'une liste, il faudra encore trouver comment une seule expression arithmétique simple permet de passer de pile à face et vice versa.

L'utilisation d'images trouvées sur Internet pour les lutins figurant les pièces sera l'occasion d'évoquer la question de licence liée à l'utilisation de ces images : sont-elles du domaine public ? Est-ce le cas pour les pièces de 1 €, par exemple ?

Un jeu de tic-tac-toe

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint TicTacToe.sb2 en parallèle de sa lecture.

Le lecteur est invité à expérimenter à partir du fichier joint TicTacToe.sb2 , et à regarder en détail les scripts proposés en parallèle à sa lecture. Cette activité est plus ambitieuse, et le fichier joint n'est qu'un exemple de production qui demande un niveau de maîtrise important. Mais on pourra s'en inspirer, car elle se découpe aisément en sous-problèmes dont la résolution permet d'approcher de nombreuses notions différentes.

On se propose de faire jouer tour à tour le joueur (l'utilisateur du programme) et la machine. C'est le joueur qui joue le premier. Les marques du joueur sont des croix vertes, celles de la machine des disques rouges. Ainsi chacune des 9 cases du jeu peut-elle se retrouver dans 3 états différents.

Chaque case est simulée par un lutin, qui porte 3 costumes : un carré blanc, une croix ou un disque. Jouer revient donc à changer le costume d'une case blanche. On introduit ainsi le concept d'attribut d'un objet : il s'agit ici du costume. Ces attributs sont privés : seul un lutin peut savoir quel est son costume actuel. Or l'arbitre, pour décider de la victoire du joueur ou de la machine, doit connaître l'état de chaque case du jeu.

C'est pourquoi on introduit une liste des valeurs des différentes cases : cette liste étant une variable globale, les lutins pourront mettre à jour la valeur qui leur correspond, et l'arbitre examiner les valeurs de toutes les cases qui l'intéressent. On peut commencer en choisissant les valeurs 0, 1, 2 pour coder les trois états. La victoire est déclarée lors de l'alignement de 3 croix ou de 3 disques, et se teste donc en faisant par exemple la somme des trois valeurs

Retrouvez Éduscol sur

correspondantes 1+1+1 = 3 ou 2+2+2 = 6. En jouant on s'aperçoit cependant que l'arbitre rend des décisions inexactes. Il est sans doute intéressant de laisser les élèves trouver sans aide du professeur l'erreur commise : en effet, 0+1+2 = 3 donc l'alignement blanc / croix / disque provoque, à tort, la victoire. Une façon simple de corriger le programme consiste à choisir les valeurs 0, 1 et 4 pour coder les trois états : il suffit de vérifier que la seule décomposition de 3, respectivement de 12, comme somme de trois de ces valeurs est 3 = 1+1+1, respectivement 12 = 4+4+4.

Le joueur joue en cliquant une case blanche, chaque lutin a donc un petit script qui gère l'événement clic de souris. Il faut tester, par une conditionnelle, que la case cliquée était blanche, ce que le lutin peut faire en examinant son costume actuel (lui en a bien le droit) ou en consultant la liste globale des valeurs des cases. Après avoir joué, on passe la main à l'arbitre, pour qu'il puisse éventuellement constater une victoire, en lui envoyant un message, puis on cède la main à la machine, par un nouveau message « À la machine ! » que reçoit en fait l'arbitre.

L'arbitre choisit alors au hasard une case jusqu'à trouver une blanche (avec une boucle répéter tant que) qu'il conserve dans une variable globale case avant d'envoyer à son tour un message « coup machine ». Chaque lutin gère la réception de ce message, en testant s'il concerne bien sa case à l'aide de la variable de même nom. Si tel est le cas, il poursuit de façon analogue à ce qu'il sait déjà faire pour répondre à un clic.

Dans le cadre d'un projet courant sur plusieurs séances, on peut distribuer le travail de conception des scripts à différents élèves, en distinguant par exemple, pour un lutin simulant une case, le script à utiliser en réponse à un clic ou en réponse au message « coup machine », et, pour l'arbitre, le test de victoire et la commande du déroulé du jeu, avec la gestion des messages.

Annexe : présentation et installation de Scratch

SCRATCH est un langage de programmation visuel inventé par le laboratoire Lifelong Kindergarten Group du Massachusetts Institute of Technology à vocation ludique et éducative. Son interface ludique et la simplicité de sa prise en main le rendent accessible à tous.
Le logiciel est libre, gratuit et multiplateforme. Le petit chat orange est le « lutin » par défaut.

Site officiel

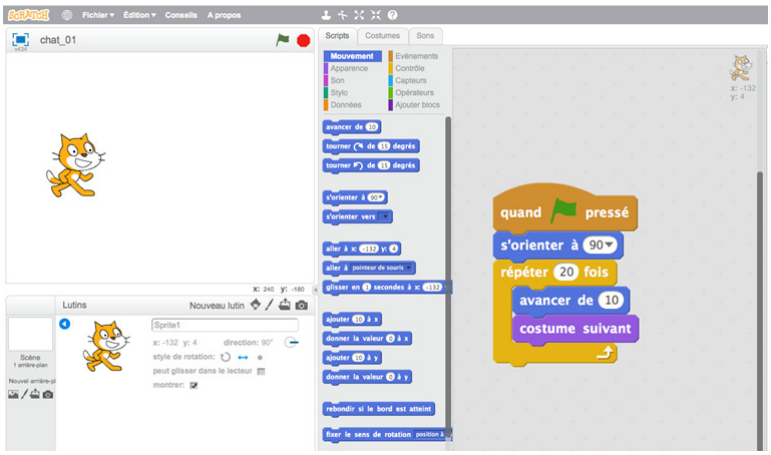
Installer Scratch

Il existe deux méthodes pour utiliser ce logiciel.

- Utilisation hors connexion
  Il faut suivre les indications qu'on trouve en suivant le lien.
  Télécharger (et exécuter si cela ne se fait pas automatiquement) :
  – la dernière version du logiciel Adobe Air ;
  – l'éditeur Scratch hors ligne.
- Utilisation en ligne
  Il faut :
  – disposer d'une version à jour du logiciel Adobe FlashPlayer ;
  – aller sur le site et cliquer sur l'onglet Créer.

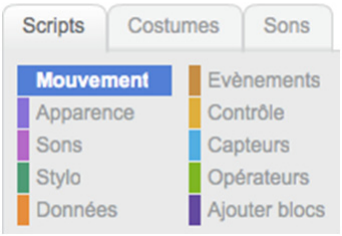
Utiliser Scratch

La langue d'utilisation est par défaut l'anglais ; pour la changer : en haut à gauche de l'écran dans la barre de menu.



Principe général : pour écrire un programme, on encastre des blocs dans la fenêtre de script, tout à droite. Pour le lancer, on double-clique sur l'assemblage d'instructions ou, si l'on a fait commencer la série par le bloc événement avec le drapeau vert – comme dans l'exemple ci-dessus –, il suffit de cliquer sur le drapeau vert situé au-dessus de la fenêtre d'action, à gauche ; l'octogone rouge situé à sa droite est un bouton d'arrêt.

Les commandes de Scratch

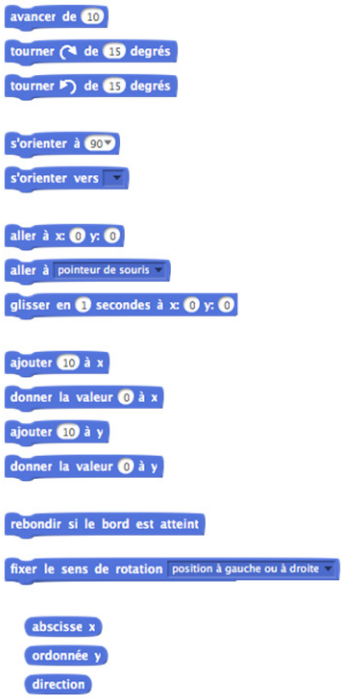


Les différentes commandes sont accessibles, sous l'onglet Scripts, dans la zone centrale. Elles sont regroupées par fonctions, explicitées dans le rectangle représenté ci-dessus. Un code couleur est utilisé pour permettre de distinguer ensuite les fonctions des commandes utilisées.

On récapitule dans le tableau ci-dessous la liste des blocs disponibles, regroupés par catégorie.

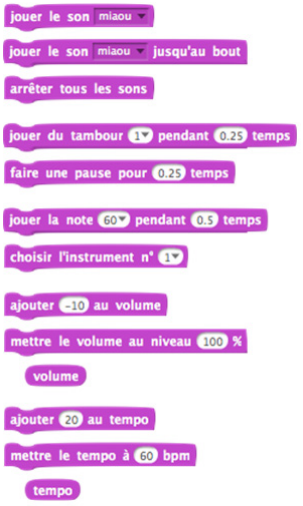
Remarque : les blocs ovales (comme taille ou tempo) représentent des valeurs qui peuvent être utilisées dans les autres blocs. Elles sont précédées d'une case à cocher : si on coche la case, la valeur courante est affichée à l'écran, dans la fenêtre où évolue le lutin (par défaut il s'agit du chat).

MOUVEMENT



APPARENCE

SONS



STYLO

DONNÉES

ÉVÉNEMENTS

Retrouvez Éduscol sur

CONTRÔLE	CAPTEURS	OPÉRATEURS