Deux ou trois choses à savoir en mathématiques pour le brevet des collèges....

Opérations sur les nombres relatifs

Addition de nombres relatifs

Pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on additionne leur distance à zéro et on garde le signe commun.

Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires, on soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande et on prend le signe de celui qui à la plus grande distance à zéro.

(+7)+(+4)=(+11) (+7)+(-4)=(+3)

(-7)+(-4)=(-11) (-7)+(+4)=(-3)

(-5)+(+8)+(-7)+(-3)+(+9)=(-15)+(+17)

Opposé d'un nombre relatif

L'opposé d'un nombre relatif est le nombre de signe contraire qui a la même distance à zéro.

(-3) est l'opposé de (+3) ; (+7) est l'opposé de (-7)

Soustraction de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

$(+7)-(-3)=(+7)+(+3)=(+10)$ $(-7)-(+3)=(-7)+(-3)=(-10)$

$(+7)-(+3)=(+7)+(-3)=(+4)$ $(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=(-4)$

Écriture simplifiée des sommes de relatifs

(-5) + (+7) + (-6) = -5 +7 -6 (+11) - (+6) - (-4) = 11 -6 +4

Une astuce pour simplifier :
- deux signes identiques peuvent se remplacer par un +
- deux signes différents peuvent se remplacer par un -

Multiplication de nombres relatifs

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leur distance à zéro et on applique la règle des signes suivante :
- le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif;
- le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

Multiplier un nombre relatif par -1 revient à prendre son opposé.

Le produit de plusieurs nombres relatifs est :
- positif s'il comporte un nombre pair de facteurs négatifs;
- négatif s'il comporte un nombre impair de facteurs négatifs.

$(+7)\times(+3)=(+21)$
$(-7)\times(-3)=(+21)$
$(-7)\times(+3)=(-21)$
$(+7)\times(-3)=(-21)$

Quotient de nombres relatifs

Pour calculer le quotient d'un nombre relatif par un nombre relatif non nul, on divise leur distance à zéro et on applique la règle des signes suivante :
- le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif;
- le quotient de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

$(+15)\div(+3)=(+5)$ $(-15)\div(-3)=(+5)$

$(+15)\div(-3)=(-5)$ $(-15)\div(+3)=(-5)$

Les fractions

Définition

a et b sont deux nombres relatifs non nuls

La fraction $\frac{a}{b}$ désigne l'unique nombre vérifiant : $b \times \frac{a}{b} = a$

$2 \times \frac{3}{2} = 3$ $\quad -7 \times \frac{8}{-7} = 8$ $\quad 5 \times \frac{4}{5} = 4$

Egalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs non nuls

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

Exemples de simplification de fraction :

$\frac{56}{72} = \frac{8 \times 7}{8 \times 9} = \frac{7}{9}$ $\quad \frac{48}{54} = \frac{6 \times 8}{6 \times 9} = \frac{8}{9}$

Somme algébrique de fractions

a, b et c des nombres entiers relatifs non nuls

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Exemples de somme simple :

$\frac{5}{7} - \frac{11}{7} = -\frac{6}{7}$

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

$\frac{-7}{15} + \frac{11}{15} - \frac{9}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$

$\frac{3}{7} \times \frac{-6}{5} = -\frac{18}{35}$

Exemples de passage au même dénominateur

$\frac{3}{7} - \frac{9}{14} = \frac{2 \times 3}{2 \times 7} - \frac{9}{14} = \frac{6}{14} - \frac{9}{14} = -\frac{3}{14}$

$-\frac{11}{6} + \frac{7}{5} = -\frac{5 \times 11}{6 \times 5} + \frac{7 \times 6}{5 \times 6} = -\frac{55}{30} + \frac{42}{30} = -\frac{13}{30}$

$3 - \frac{2}{5} = \frac{3}{1} - \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$

Produit de fractions

a, b, c et d des nombres entiers relatifs non nuls

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Il faut penser à simplifier avant d'effectuer un produit !

$\frac{48}{49} \times \frac{63}{64} = \frac{6 \times 8 \times 7 \times 9}{7 \times 7 \times 8 \times 8} = \frac{6 \times 9}{7 \times 8} = \frac{2 \times 3 \times 9}{7 \times 2 \times 4} = \frac{27}{28}$

Définition

a un nombre entier relatif non nul

L'inverse du nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Inverse d'une fraction

a et b des nombres entiers non nuls

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

$\frac{1}{4}$ est l'inverse de 4 $\quad -\frac{1}{3}$ est l'inverse de -3 $\quad \frac{5}{3}$ est l'inverse de $\frac{3}{5}$ $\quad 1$ est l'inverse de 1

Quotient de deux fractions

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse

a, b, c et d des nombres entiers non nuls

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$\frac{6}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times 3 = 5$

Égalité des fractions et produits en croix

a, b, c et d des nombres entiers relatifs non nuls

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est équivalent à $a \times d = b \times b$

$34 \times 13 = 442$ et $21 \times 21 = 441$

On en déduit que $\frac{34}{21} \neq \frac{21}{13}$

Définition

Pour $n \geqslant 2$ et a un nombre quelconque

$$a^n = \underbrace{a \times \ \ldots \ \times a}_{n \ fois}$$

On dit a exposant n

Exemples :

$$3^5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5 \ fois} = 243$$

$7^2 = 7 \times 7 = 49$ 7 exposant 2 se dit 7 au carré

$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ 6 exposant 3 se dit 6 au cube

$(-1)^6 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^7 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

Les 12 premiers carrés parfaits

1² = 1	7² = 49
2² = 4	8² = 64
3² = 9	9² = 81
4² = 16	10² = 100
5² = 25	11² = 121
6² = 36	12² = 144

Les puissances de 10

n : nano	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$	un milliardième
μ : micro	$10^{-6} = 0,000\ 001$	un millionième
m : milli	$10^{-3} = 0,001$	un millième
c : centi	$10^{-2} = 0,01$	un centième
d : deci	$10^{-1} = 0,1$	un dixième
	$10^{0} = 1$	
da : deca	$10^{1} = 10$	une dizaine
h : hecto	$10^{2} = 100$	une centaine
k : kilo	$10^{3} = 1\ 000$	un millier
M : Méga	$10^{6} = 1\ 000\ 000$	un million
G : Giga	$10^{9} = 1\ 000\ 000\ 000$	un milliard

Les puissances de 10

Pour n un entier

$$10^n = \underbrace{10 \ \ldots \ 0}_{n \ zéros}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,0 \ \ldots \ 1}_{1 \ en \ n^{ième} \ position}$$

10^{-n} est l'inverse de 10^n

Pour n et p des entiers relatifs

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$$

$$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$$

$$(10^n)^p = 10^{n \times p}$$

L'écriture scientifique

$2\ 017\ 000\ 000 = 2,017 \times 10^9$

$0,000\ 002\ 017 = 2,017 \times 10^{-6}$

$2\ 017 = 2,017 \times 10^3$

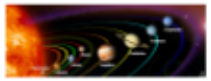
$0,020\ 17 = 2,017 \times 10^{-2}$

Tout nombre décimal peut s'écrire :

$$a \times 10^n$$

$-10 < a \leqslant -1$ ou $1 \leqslant a < 10$

10^{0}
1



Il y a 8 planètes dans le système solaire soit 8×10^{0}

$8 \times 10^{0} = 8$

10^{1}
déca
10

Il y a eu 28 présidents de la République en France depuis 1848 soit $2,8 \times 10^{1}$

$2,8 \times 10^{1} = 28$

10^{2}
hecto
100

Le squelette humain est constitué de 216 os articulés soit $2,16 \times 10^{2}$

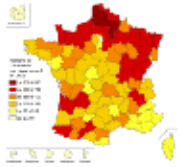
$2,16 \times 10^{2} = 216$

10^{3}
kilo
1 000

Il y a 4 565 communes en Occitanie soit $4,565 \times 10^{3}$

$4,565 \times 10^{3} = 4\ 565$

10^{4}
10 000



Il y a 35 416 communes en France soit $3,5416 \times 10^{4}$

$3,5416 \times 10^{4} = 35\ 416$

10^{5}
100 000

Nous avons en moyenne entre 100 000 et 150 000 cheveux soit $1,5 \times 10^{5}$

$1,5 \times 10^{5} = 150\ 000$

10^{6}
Méga
1 000 000

1,4 millions d'espèces animales ont été référencées et nommées soit $1,4 \times 10^{6}$

$1,4 \times 10^{6} = 1\ 400\ 000$

10^{7}
10 000 000

Il y a environ 67 millions d'habitants en France début janvier 2017 soit $6,7 \times 10^{7}$

$6,7 \times 10^{7} = 67\ 000\ 000$

10^{8}
100 000 000

Il y a environ 743,1 millions d'habitants en Europe soit $7,431 \times 10^{8}$

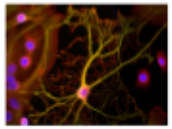
$7,431 \times 10^{8} = 743\ 100\ 000$

10^{10}
10 000 000 000 000 000 000

Il y a 43 milliards de milliards de configurations différentes au Rubik's Cube soit $4,3 \times 10^{19}$

$4,3 \times 10^{19} = 43\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

10^{12}
Téra
1 000 000 000 000



Il y a environ 5000 milliards de cellules gliales dans le cerveau humain soit 5×10^{12}

$5 \times 10^{12} = 5\ 000\ 000\ 000\ 000$

5 billions

10^{11}
100 000 000 000

Il y a environ 400 milliards d'étoiles dans notre galaxie, la Voie Lactée soit 4×10^{11}

$4 \times 10^{11} = 400\ 000\ 000\ 000$

10^{20}
100 000 000 000

Il y a environ 95 milliards de neurones dans un cerveau humain soit $9,5 \times 10^{20}$

$9,5 \times 10^{20} = 95\ 000\ 000\ 000$

10^{9}
Giga
1 000 000 000

Il y a environ 7,43 milliards d'habitants sur Terre soit $7,43 \times 10^{9}$

$7,43 \times 10^{9} = 7\ 430\ 000\ 000$

10^{15}
péta
1 000 000 000 000 000

Il y a un million de milliards de bactéries dans un corps humain soit 10^{15}

$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Un billiard

10^{14}
100 000 000 000 000

Le corps humain est constitué de 100 000 milliards de cellules soit 10^{14}

$10^{14} = 100\ 000\ 000\ 000\ 000$

10^{18}
exa
1 000 000 000 000 000 000

Il y a un milliard de milliard d'insectes sur terre soit 10^{18}

$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Un trillion

10^{13}
10 000 000 000 000

On connaît 13 000 milliards de décimales du nombre π soit $1,3 \times 10^{13}$

$1,3 \times 10^{13} = 13\ 000\ 000\ 000\ 000$

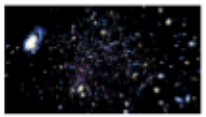
10^{21}
yotta
1 000 000 000 000 000 000 000

Il y a un million de milliards de milliards d'étoile dans l'univers, autant que de grains de sable au sahara ou de gouttes d'eau dans tous les océans soit 10^{21}

$10^{21} = 10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Un quadrillion

10^{80}



Il y a 1 suivi de 80 zéros particules dans l'univers

10^{100}

Gooooooooooogle

1 suivi de 100 zéros, un gogol, nombre qui a donné son nom au célèbre moteur de recherche.

$10^{10^{100}}$

1 suivi d'un gogol zéros, un gogolplex. Un des plus grands nombres possédant un nom.

10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

10^{0}
1

Nous avons 5 doigts sur chaque main soit 5×10^{0}

$5 \times 10^{0} = 5$

10^{-1}
déci
0,1

Il y a une chance sur 2 d'obtenir pile en lançant une pièce de monnaie soit 5×10^{-1}

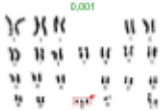
$5 \times 10^{-1} = 0,5$

10^{-2}
centi
0,01

Il y a une chance sur 36 de faire un double 6 soit $2,8 \times 10^{-2}$ ou 2,8 %

$2,8 \times 10^{-2} = 0,028$

10^{-3}
milli
0,001



La probabilité de mettre au monde un enfant atteint de trisomie 21 est de 1 cas sur 700 soit $1,4 \times 10^{-3}$

$1,4 \times 10^{-3} = 0,0014$

10^{-4}
100μ
0,000 1

Il y a une chance sur 6561 d'avoir 8 bonnes réponses dans à un QCM à 8 questions et 3 choix par question soit $1,5 \times 10^{-4}$

$1,5 \times 10^{-4} = 0,00015$

10^{-5}
10μ
0,000 01

Toutes choses égales par ailleurs nous avons tous une malchance sur 30 000 de mourir demain ! Soit 3×10^{-5}

$3 \times 10^{-5} = 0,000\ 03$

10^{-6}
micro
0,000 001

Il y a une chance sur 250 000 d'être foudroyé une fois dans sa vie soit 4×10^{-6}

$4 \times 10^{-6} = 0,000\ 004$

10^{-6}
micro
0,000 001

Il y a 1 chance sur 649 739 d'obtenir une quinte flush royale servie au Poker soit $1,54 \times 10^{-6}$

$1,54 \times 10^{-6} = 0,000\ 001\ 54$

10^{-6}
micro
0,000 001

Il y a une chance sur 720 000 d'être percuté par un objet céleste durant sa vie soit $1,4 \times 10^{-6}$

$1,4 \times 10^{-6} = 0,000\ 001\ 4$

De l'infiniment grand

À l'infiniment petit...

10^{-30}

$10^{-30} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Certains chercheurs estiment que c'est la probabilité qu'une molécule organique capable de se dupliquer apparaisse spontanément à la faveur de collisions aléatoires. En clair, c'est la probabilité que la vie apparaisse quelque part dans l'univers ...

10^{-9}
nano
0,000 000 001

Il y a 1 chance sur 116 631 800 de gagner à l'Euromillions soit $8,58 \times 10^{-9}$

$8,58 \times 10^{-9} = 0,000\ 000\ 008\ 58$

10^{-8}
10 n
0,000 000 01

Il y a 1 chance sur 13 983 816 de gagner au Loto soit 7×10^{-8}

$7 \times 10^{-8} = 0,000\ 000\ 07$

Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini ?

Blaise Pascal

Arithmétique

La division euclidienne

a et b deux nombres entiers positifs $b \neq 0$
Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver les deux uniques nombres entiers positifs q et r vérifiant l'égalité euclidienne :

$$a = bq + r \qquad 0 \leqslant r < b$$

a est le dividende — *q est le quotient*
b est le diviseur — *r est le reste*

Exemple :

567 (dividende)	65 (diviseur)
- 520	8 (quotient)
47 (reste)	

$$567 = 65 \times 8 + 47$$

Diviseur, multiple

a et b deux nombres entiers positifs
Si il existe un nombre entier q tel que a=bq
Alors on dit que :
- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- a est un multiple de b.
Dans ce cas le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.

Exemple :

2016	63
- 189	32
126	
-126	
0	

$$2016 = 63 \times 32$$

2016 est divisible par 63
2016 est un multiple de 63
63 est un diviseur de 2016

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4 6 ou 8.

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 4 si ses chiffres des dizaines et des unités forment un nombre multiple de 4.

Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2016 est divisible par 2, 3, 4 et 9 — *735 est divisible par 3 et 5*

Nombres premiers

Un nombre entier est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

1 ne possède qu'un seul diviseur, il n'est pas premier.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 sont des nombres premiers.
2017 est un nombre premier.

Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier se décompose de manière unique en un produit de nombres premiers

$$2016 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \qquad 2015 = 5 \times 13 \times 31$$

Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si elle n'est pas simplifiable. Dans ce cas 1 est le seul diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{210}{315} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{2}{3} \qquad \frac{765}{621} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 23} = \frac{5 \times 17}{3 \times 23} = \frac{85}{69}$$

Généralités sur les fonctions

Une fonction est un programme de calcul qui a un nombre de départ associe un unique résultat.

On note $f : x \to f(x)$

f est la fonction qui à x associe le nombre $f(x)$

f une fonction
x et y deux nombres tels que $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f

On dit que x est un antécédent de y par la fonction f

Un nombre possède une seule image par une fonction

Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents

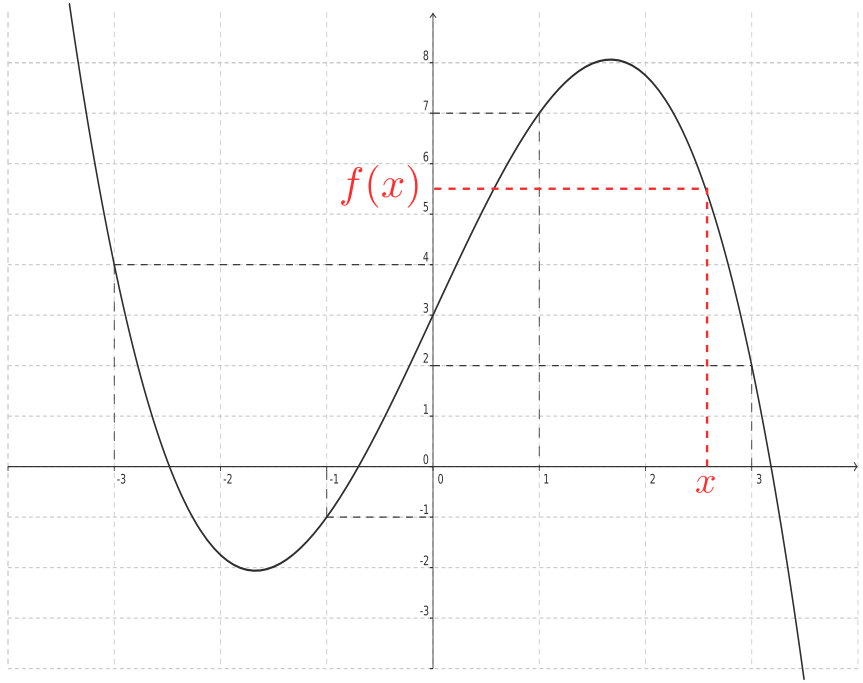
On représente souvent les images d'une fonction dans un tableau de valeurs.

Par exemple pour $k : x \to (x-3)(x+4)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$k(x)$	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	8

Ainsi -6 est l'image de -3 ; -4 et 3 sont deux antécédents de 0

f une fonction. La représentation graphique de cette fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tous les nombres x possibles



Sur la réprésentation graphique de la fonction ci-dessus

3 a image 2 -3 a pour image 4 -1 a pour image -1 1 a pour image 7

0 a trois antécédents -3 a un antécédent

Exemples :

$f : x \to 2x - 3$ f est la fonction qui à un nombre associe son double diminué de 3

$g : x \to x^2 - 4$ g est la fonction qui à un nombre associe son carré diminué de 4

$h : x \to -5$ h est la fonction constante égale à -5

$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ 1 est l'image de 2 par la fonction f

$f(-3) = 2 \times (-3) - 3 = -9$ -3 est un antécédent de -9 par la fonction f

$g(-4) = (-4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ 12 est l'image de -4 par la fonction g

$g(1) = 1^2 - 4 = -3$ 1 est un antécédent de -3 par la fonction g

$h(0) = -5$

$h(-13) = -5$ Tous les nombres ont pour image -5 par h

$h(1) = -5$ -5 possède une infinité d'antécédents

Augmention et diminution en pourcentage

Augmenter une quantité de $n\%$ revient à multiplier cette quantité par $1+\dfrac{n}{100}$

Diminuer une quantité de $n\%$ revient à multiplier cette quantité par $1-\dfrac{n}{100}$

Exemples :

- Une télévision à 489 € est soldée à -25 %.

$$489\times\left(1-\frac{25}{100}\right)=489(1-0,25)=0,75\times 489=366,75$$

Son nouveau prix est donc 366,75 €.

- Il y avait 875 € sur mon compte en banque rémunéré à 2%.

$$875\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=875(1+0,02)=1,02\times 875=892,5$$

Avec les intérêts j'ai maintenant 892,50 €.

- Il y avait 458 298 habitants à Toulouse en 2013 et 466 297 en 2014.

$$458\ 298\times k=466\ 297$$

$$k=\frac{466\ 297}{458\ 298}\approx 1,017$$

$$1,017=1+0,17=1+\frac{1,7}{100}$$

La population de Toulouse a augmenté de 1,7% entre 2013 et 2014.

- Une augmentation de 700% ?

$$1+\frac{700}{100}=\frac{100}{100}+\frac{700}{100}=\frac{800}{100}=8$$

Augmenter de 700% revient à multiplier par 8.

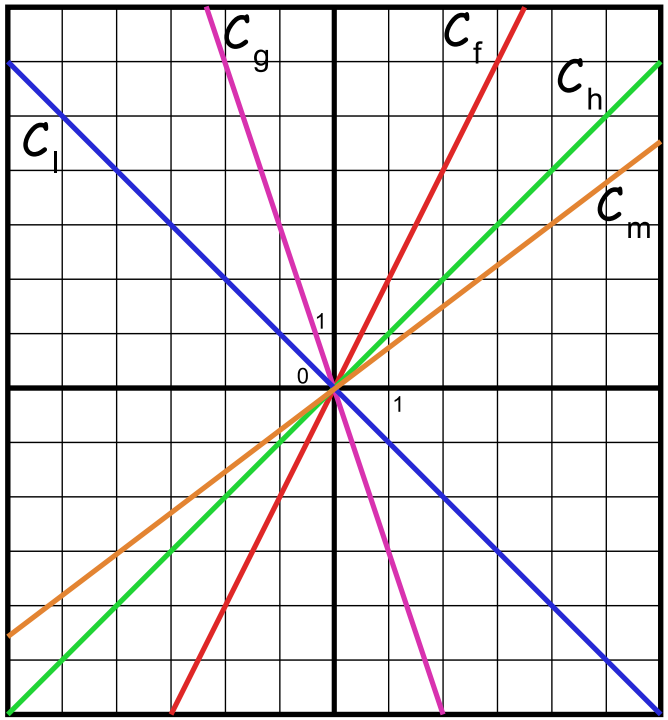
La fonction linéaire

a un nombre quelconque

La fonction linéaire de coefficient a est définie ainsi :

$$f:x\rightarrow f(x)=ax$$

La fonction linéaire multiplie le nombre donné par a



Exemples :

Les fonctions suivantes sont linéaires :

$f(x)=2x$ ($a=2$) $\quad g(x)=-3x$ ($a=-3$) $\quad h(x)=x$ ($a=1$)

$m(x)=\dfrac{3x}{4}$ ($a=\frac{3}{4}$) $\quad l(x)=-x$ ($a=-1$) $\quad n(x)=0$ ($a=0$)

Les fonctions suivantes ne sont pas linéaires :

$v(x)=3x-5 \quad w(x)=\dfrac{3}{x} \quad z(x)=x^2-3x+1$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

x 2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12

x -3

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$m(x)$	-3	-2,25	-1,5	-0,75	0	0,75	1,5	2,25	3

x $\frac{3}{4}$

Dans un tableau de proportionnalité tous les produits en croix sont égaux.

$$-2\times 2,25=-1,5\times 3=-4,5$$

Dans un tableau de proportionnalité on peut effectuer des combinaisons de colonnes.

$$(-4)+2=-2 \text{ et } -3+1,5=-1,5$$

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité de coefficient a .
Réciproquement un tableau de proportionnalité correspond à une fonction linéaire.

L'image du nombre 0 par une fonction linéaire vaut 0.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère. Les points issues d'un tableau de proportionnalité sont alignés avec l'origine.

Fonctions affines

Définition :

a et b des nombres quelconques
La fonction affine de coefficients a et b est définie par :

$$f(x) = ax + b$$

a est le coefficient directeur
b l'ordonnée à l'origine

Exemples :

$f(x) = -2x - 3$

$a = -2$ et $b = -3$

$f(x) = 2x + 3$

$a = 2$ et $b = 3$

$f(x) = -x - \frac{3}{4}$

$a = -1$ et $b = -\frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{x}{2} - 7$

$a = \frac{1}{2}$ et $b = -7$

$f(x) = 5x$

$a = 5$ et $b = 0$

Cette fonction est linéaire

$f(x) = -3$

$a = 0$ et $b = -3$

Cette fonction est constante

Propriété :

Une fonction linéaire est une fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine
est une droite qui passe par le point de coordonnées
(0;b) où b est l'ordonnée à l'origine

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction
affine f il suffit de calculer l'image d'un nombre u non nul.
Cette droite passe par les points de coordonnées (0;b) et (u,f(u)).

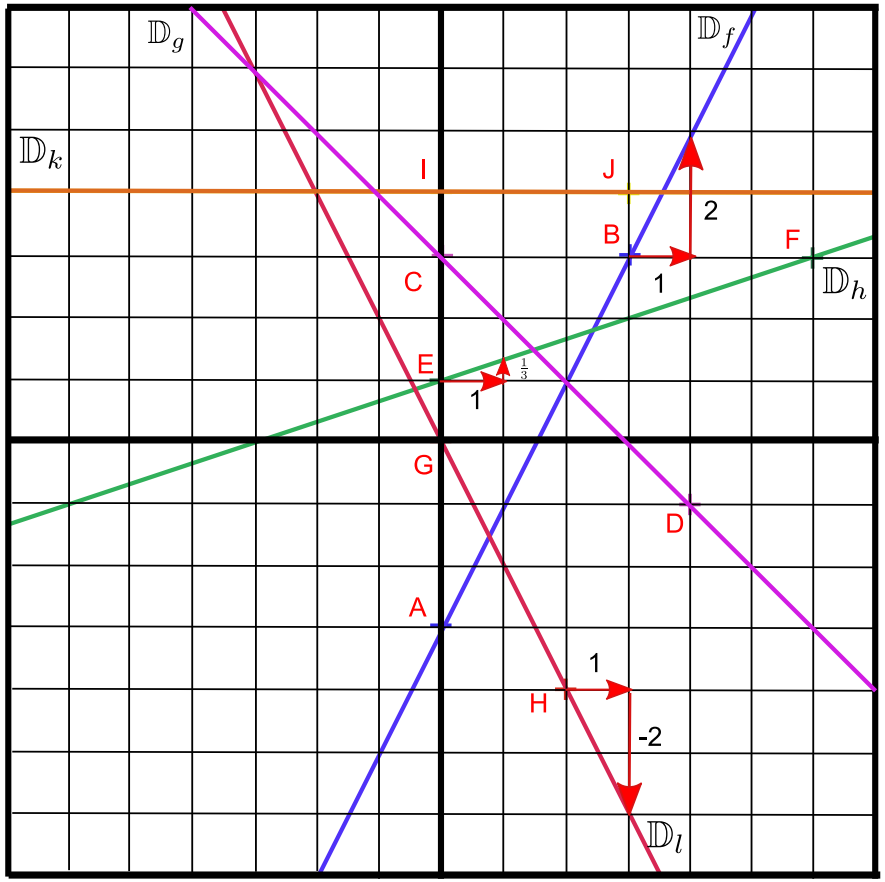
Si u et v sont deux nombres différents alors le coefficient directeur
de la fonction affine dont l'image de u est f(u) et l'image de v est f(v)
est donné par la formule suivante

$$a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$$

Représentons graphiquement : $f(x) = 2x - 3$ $\quad g(x) = -x + 3$

$h(x) = \frac{x}{3} + 1$ $\quad l(x) = -2x$ $\quad k(x) = 4$

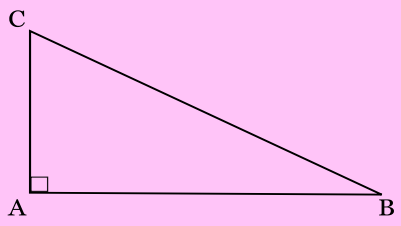
f(0)=-3 et f(3)=3 donc on trace la droite passant par A(0;-3) et B(3;3)
g(0)=3 et g(4)=-1 donc on trace la droite passant par C(0;3) et D(4;-1)
h(0)=1 et h(6)=3 donc on trace la droite passant par E(0;1) et F(6;3)
l(0)=0 et l(2)=-4 donc on trace la droite passant par G(0;0) et H(2;-4)
k(0)=4 et k(3)=4 donc on trace la droite passant par I(0;4) et J(3;4)



(AB) et (CD) se coupent en (1;2)
On remarque que f(1)=2 et g(1)=2
On peut trouver ces coordonnées en résolvant l'équation f(x)=g(x)

On peut lire l'ordonnée à l'origine sur l'axe des ordonnées
On lit le coefficient directeur en observant le décalage vertical correspondant
à un décalage horizontal d'une unité.

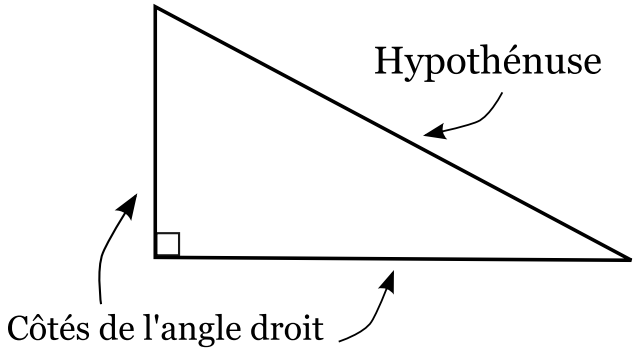
Le théorème de Pythagore



Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

c'est à dire

Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse.



Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long.

Le théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore

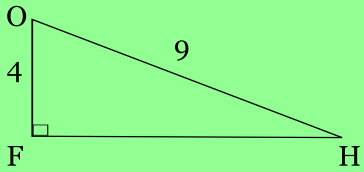
Si dans un triangle ABC on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A

c'est à dire

Si dans un triangle la somme des carrés des deux plus petits côtés est égale au carré du plus grand côté alors ce triangle est rectangle.

Exemples d'usage du théorème de Pythagore

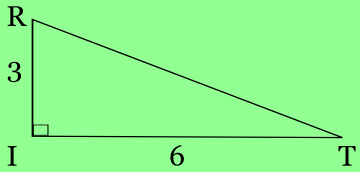
FOH un triangle rectangle en F



Calculons FH
FOH est un triangle rectangle en F
D'après

on a :
$$FO^2 + FH^2 = OH^2$$
$$4^2 + FH^2 = 9^2$$
$$16 + FH^2 = 81$$
$$FH^2 = 81 - 16$$
$$FH^2 = 65$$
$$FH = \sqrt{65}$$
$$FH \approx 8,1$$

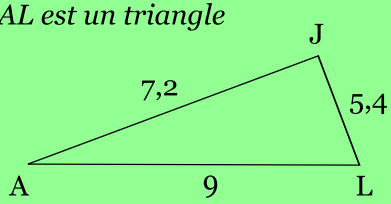
TRI un triangle rectangle en I



Calculons TR
TRI est un triangle rectangle en I
D'après le théorème de Pythagore
on a :
$$IR^2 + IT^2 = TR^2$$
$$3^2 + 6^2 = TR^2$$
$$TR^2 = 9 + 36$$
$$TR^2 = 45$$
$$TR = \sqrt{45}$$
$$TR \approx 6,7$$

Exemples d'usage de la réciproque du théorème de Pythagore

JAL est un triangle



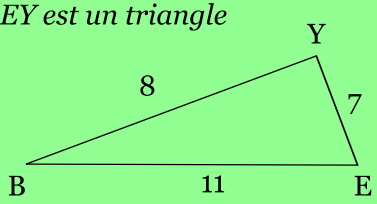
Démontrons que JAL est rectangle
Calculons $JA^2 + JL^2$ et AL^2

$$JA^2 + JL^2 = 7,2^2 + 5,4^2$$
$$JA^2 + JL^2 = 71,84 + 29,16$$
$$JA^2 + JL^2 = 81$$
Donc $JA^2 + JL^2 = AL^2$

$$AL^2 = 9^2$$
$$AL^2 = 81$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle JAL est rectangle en J

BEY est un triangle



BEY est-il rectangle ?
Calculons

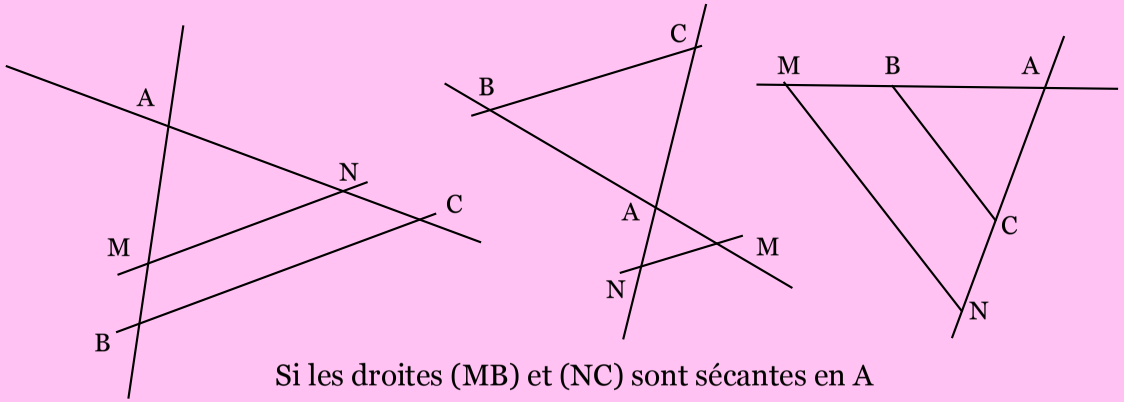
$$YB^2 + YE^2 = 8^2 + 7^2$$
$$YB^2 + YE^2 = 64 + 49$$
$$YB^2 + YE^2 = 113$$

$$BE^2 = 11^2$$
$$BE^2 = 121$$

Donc $YB^2 + YB^2 \neq BE^2$

D'après le théorème de Pythagore (contraposé), le triangle BEY n'est pas rectangle.

Le théorème de Thalès

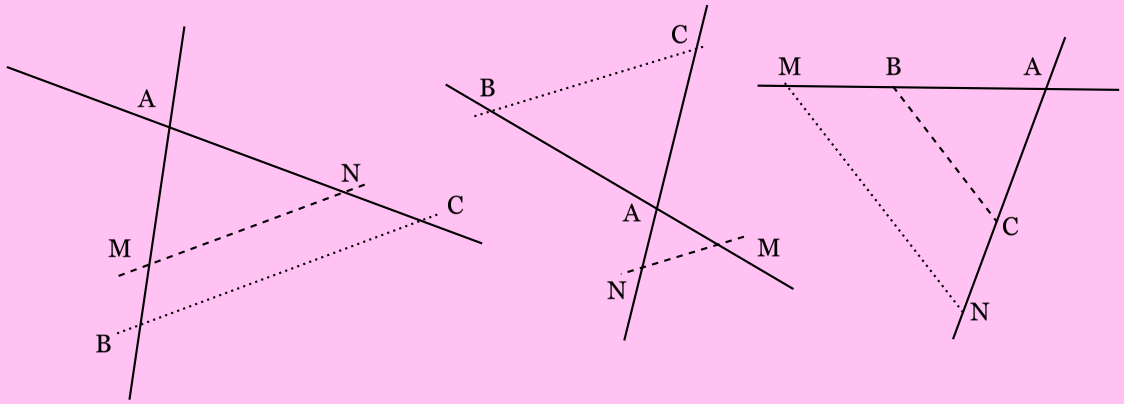


Si les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A

et **si les droites (MN) et (BC) sont parallèles**

Alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

La réciproque du théorème de Thalès

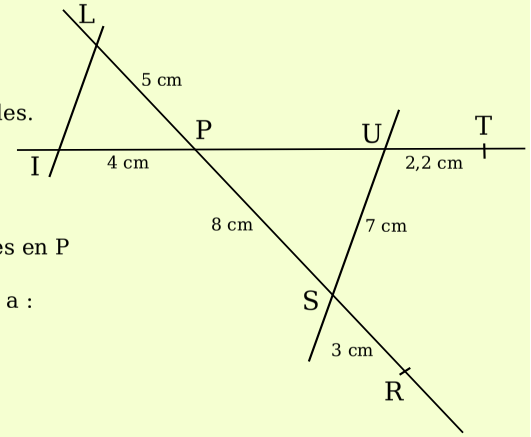


Si les points A, M, et B sont alignés et dans le même ordre que les points alignés A, N et C

et **si** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Les points L, P, S et R sont alignés.
Les points I, P, U et T sont alignés.
Les droites (LI) et (US) sont parallèles.



1) Calculons LI et PU

Les droites (LS) et (IU) sont sécantes en P
(LI)//(US)
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{PL}{PS} = \frac{PI}{PU} = \frac{LI}{US}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{4}{PU} = \frac{LI}{7}$$

On a donc en utilisant l'égalité des produits en croix :

$PU = \frac{4 \times 8}{5} = \frac{32}{5} = 6,4$ $\qquad$ $LI = \frac{7 \times 5}{8} = \frac{35}{8} = 4,375$

2) Démontrons que (US)//(TR)

Comparons $\frac{PU}{PT}$ et $\frac{PS}{PR}$

$\frac{PS}{PR} = \frac{8}{11}$ et $\frac{PU}{PT} = \frac{6,4}{8,8}$

Comme $8 \times 8,8 = 70,4$ et $11 \times 6,4 = 70,4$ alors $\frac{8}{11} = \frac{6,4}{8,8}$

Les points P, U et T sont alignés et dans le même ordre que les points P, S et R.

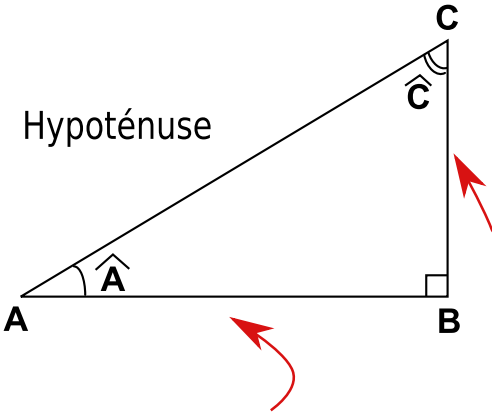
De plus $\frac{PS}{PR} = \frac{PU}{PT}$

D'après **la réciproque du théorème de Thalès**

Les droites (US) et (TR) sont parallèles.

Le théorème de Thalès et sa réciproque

Trigonométrie



Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires
Cela signifie que la somme de leurs mesures vaut 90°

Côté adjacent à l'angle de $\widehat{C}$

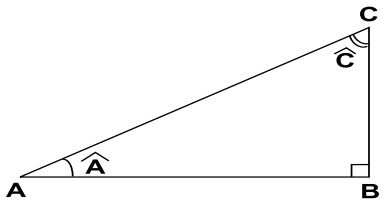
Côté opposé à l'angle de $\widehat{A}$

L'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle
Le côté adjacent d'un angle est un côté de l'angle droit qui touche cet angle
Le côté opposé d'un angle est un côté de l'angle droit qui se situe en face de l'angle

Côté adjacent à l'angle de $\widehat{A}$

Côté opposé à l'angle de $\widehat{C}$

Dans un triangle ABC rectangle en B



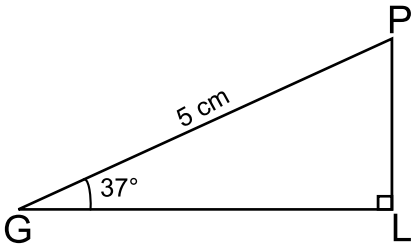
SOH CAH TOA

$$cos\widehat{A} = \frac{côté\ adjacent}{hypoténuse} = \frac{AB}{AC}$$

$$sin\widehat{A} = \frac{côté\ opposé}{hypoténuse} = \frac{BC}{AC}$$

$$tan\widehat{A} = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent} = \frac{BC}{AB}$$

Calculer une longueur



Calcul de GL

Dans GPL rectangle en L
On connait [GP] l'hypoténuse
On cherche [GL] le côté adjacent de 37°

$$cos\ 37^o = \frac{GL}{5\ cm}$$

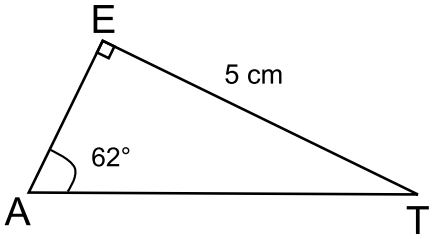
$$GL = 5\ cm\ \times cos\ 37^o \approx 4\ cm$$

Calcul de PL

Dans GPL rectangle en L
On connait [GP] l'hypoténuse
On cherche [PL] le côté opposé de 37°

$$sin\ 37^o = \frac{PL}{5\ cm}$$

$$PL = 5\ cm\ \times sin\ 37^o \approx 3\ cm$$



Calcul de AT

Dans EAT rectangle en E
On connait [ET] le côté opposé de 62°
On cherche [AT] l'hypoténuse

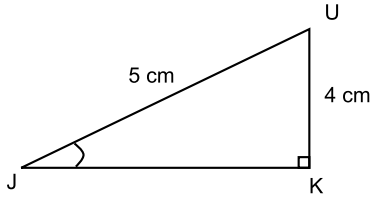
$$sin\ 62^o = \frac{5\ cm}{AT} \quad \text{et} \quad AT = \frac{5\ cm}{sin\ 62^o} \approx 5,7\ cm$$

Calcul de EA

Dans EAT rectangle en E
On connait [ET] le côté opposé de 62°
On cherche [AT] le côté adjacent de 62°

$$tan\ 62^o = \frac{5\ cm}{EA} \quad \text{et} \quad EA = \frac{5\ cm}{tan\ 62^o} \approx 2,7\ cm$$

Calculer la mesure d'un angle



Dans le triangle UJK rectangle en K
On connaît [UK] le côté opposé à l'angle $\widehat{J}$
On connaît [UJ] l'hypoténuse
On peut donc calculer le sinus de l'angle

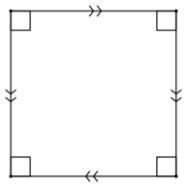
$$sin(\widehat{J}) = \frac{4}{5}$$

À la calculatrice on trouve $\widehat{J} \approx 53^o$

Formulaire de périmètres, aires et volumes

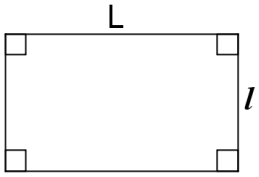
Figures Planes

Le carré



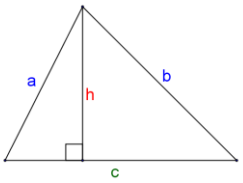
Périmètre = c x 4
Aire = c^2

Le rectangle



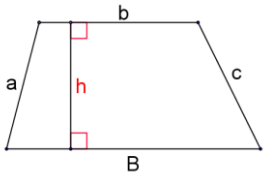
Périmètre = (L + ℓ) x 2
Aire = L x ℓ

Le triangle



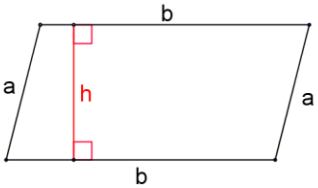
Périmètre = a + b + c
Aire = $\frac{c \times h}{2}$

Le trapèze



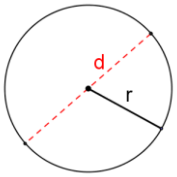
Périmètre = a + b + c + B
Aire = $\frac{(B + b) \times h}{2}$

Le parallélogramme



Périmètre = a + b + a + b
Aire = b x h

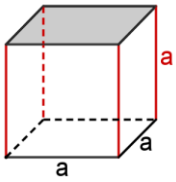
Le cercle



Longueur du cercle = d x π ou 2 π r
Aire du disque = πr^2

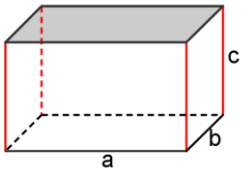
Solides

Le cube



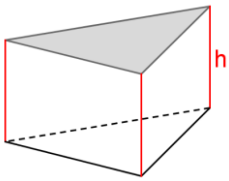
Volume = a^3
Aire totale = 6 x a^2

Le pave droit



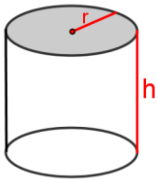
Volume = a x b x c

Le prisme



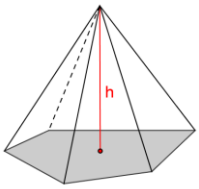
Volume = Aire de la base x h
Aire latérale = périmètre de la base x h

Le cylindre



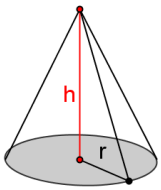
Volume = $\pi r^2 h$
Aire latérale = $2 \pi r h$

La pyramide



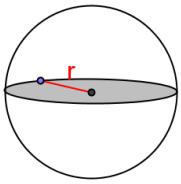
$V = \frac{\text{Aire de la base x h}}{3}$

Le cône



$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

La boule



Volume = $\frac{4}{3} \pi r^3$
Aire de la sphère = $4 \pi r^2$

Voir ici les tableaux pour les conversions des longueurs, des aires et des volumes