Session 2018

PE2-18-PG1

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 10 avril 2018

Deuxième épreuve d'admissibilité

Correction

PREMIÈRE PARTIE

Partie A

1.a Le diamètre de la jante est repéré par le code $R15$.
Cette information signifie que le diamètre mesure 15 *pouces*.
Comme 1 *pouce* correspond à $2,54\ cm$, le diamètre en est $15 \times 2,54\ cm = 38,1\ cm$.

$\boxed{\text{La jante a un diamètre de } 38,1\ cm.}$

1.b C'est l'information $195/65$ que nous allons utiliser. La hauteur est donc égale à 65 % de ma largeur qui mesure 195 *mm*.
$195\ mm \times \dfrac{65}{100} = 126,75\ mm = 12,675\ cm.$

$\boxed{\text{La hauteur du pneu mesure bien } 12,675\ cm.}$

1.c En observant l'image on constate que le diamètre est la somme du diamètre de la jante et du double de la hauteur.
Soit $12,675\ cm \times 2 + 38,1\ cm = 63,45\ cm$.

$\boxed{\text{Le diamètre du pneu mesure } 63,45\ cm.}$

2. C'est un pneu Radial, cela correspond au code lettre R.
Il correspond à une charge maximale de $412\ kg$, d'après le tableau 1 cela correspond à l'indice de poids toléré 77.
La vitesse maximale est $270\ km/h$ ce qui d'après le tableau 2 correspond à l'indice de vitesse W.
Sa largeur mesure $20,5\ cm = 205\ mm$.
Le diamètre de sa jante mesure $40,64\ cm$. En pouce cela revient à $40,64\ cm \div 2,54\ cm = 16$, soit 16 *pouces*.

Son diamètre total mesure $63,19\ cm$, on retire le diamètre de la jante : $63,19\ cm - 40,64\ cm = 22,55\ cm$.
Cette longueur correspond au double de la hauteur. La hauteur mesure donc : $22,55\ cm \div 2 = 11,275\ cm$

Reste à déterminer le pourcentage de la largeur qui représente cette hauteur : $\dfrac{11,275\ cm}{20,5\ cm} = 0,55$
Cela signifie que la hauteur représente 55 % de la largeur.
On pouvait aussi calculer ce pourcentage en utilisant un tableau de proportionnalité :

Largeur	$20,5\ cm$	$100\ cm$
Hauteur	$11,275\ cm$	$11,275\ cm \times 100\ cm \div 20,5\ cm = 55\ cm$

Finalement en regroupant les informations on obtient l'information suivante :

$\boxed{\text{205/55 R16 77W}}$

Partie B

1. On a $t_R = 0,75\ s$.
La route est mouillée donc $k = 0,14$.
Sa vitesse est de 90 km/h. Il faut la convertir en mètres par seconde.
$1\ h = 60\ min = 3\ 600\ s$.
Parcourir 90 km en 1 h signifie parcourir 90 000 m en 3 600 s soit $90\ 000\ m \div 3\ 600\ s = 25\ m/s$.
On remarque qu'en divisant une vitesse exprimée en km/h par 3,6 on obtient cette vitesse en m/s !

Ainsi en appliquant l'expression $d_A = V \times t_R + kV^2$ on obtient $25 \times 0,75 + 0,14 \times 25^2 = 106,25$.

$\boxed{\text{La distance d'arrêt dans ce cas est } d_A = 106,25\ m.}$

2. L'expression de la distance d'arrêt sur route sèche est $d_A = V \times t_R + 0,073V^2$

Premier argument : Cette expression en V contient le terme V^2. On sait que les situations de proportionnalité correspondent exactement aux fonctions linéaires, c'est à dire aux expressions du type $a \times V$ où a est une constante. La fonction qui donne la distance d'arrêt en fonction de la vitesse n'est pas une fonction linéaire ce qui permet d'affirmer que la distance d'arrêt n'est pas proportionnelle à la vitesse.

Second argument : Fixons le temps de réaction à $t_R = 0,75\ s$ comme dans la question **1.**.
Calculons la distance d'arrêt sur route sèche pour $V = 10\ m/s$ et $V = 20\ m/s$
Pour information cela correspond respectivement à 36 km/h et 72 km/h

Pour $V = 10\ m/s$, $d_A = 0,75 \times 10 + 0,073 \times 10^2 = 14,8\ m$
Pour $V = 20\ m/s$, $d_A = 0,75 \times 20 + 0,073 \times 20^2 = 44,2\ m$
Nous constatons que si la vitesse est deux fois plus grandes la distance d'arrêt est plus de 3 fois plus importantes.

$\boxed{\text{La distance d'arrêt n'est pas proportionnelle à la vitesse !}}$

3.a D'après le graphique, $\boxed{\text{la distance d'arrêt à 110 } km/h \text{ est de 101 } m.}$

3.b D'après le graphique, à 80 km/h le distance pendant le temps de réaction est 16,7 m et la distance d'arrêt du véhicule est 57,7 m.
Ainsi la distance parcourue pendant le temps de freinage est :

$\boxed{57,7\ m - 16,7\ m = 41\ m.}$

3.c D'après le graphique à 130 km/h $\boxed{\text{un véhicule met 6,76 } s \text{ pour s'arrêter.}}$

3.d D'après le graphique $\boxed{\text{c'est à 120 } km/h \text{ que la distance de réaction est de 25 } m.}$

3.e D'après le graphique, 27,8 m/s correspond à la vitesse de 100 km/h.
À cette vitesse il faut 85,4 m à un véhicule pour s'arrêter.

$\boxed{\text{À 27,8 } m/s \text{ un conducteur apercevant un obstacle à 100 } m \text{ pourra s'arrêter.}}$

Partie C

1. En fonction du rayon R le périmètre d'un cercle s'exprime par $2\pi R$, c'est à dire πD en fonction du diamètre D.

$\boxed{\text{Une roue de diamètre 54 } cm \text{ a donc une circonférence de 54 } cm \approx 169,6\ cm \text{ au } mm \text{ près.}}$

2.a 110 km/h correspond à 110 000 $m \div 3\ 600\ s \approx 30,6\ m/s$.
Une roue de 54 cm de diamètre parcoure $169,6\ cm = 1,696\ m$ à chaque tour.
En une seconde la roue parcoure $30,6\ m$.
$30,6\ m \div 1,696 \approx 18$ à l'unité près.

$\boxed{\text{À 110 } km/h \text{ cette roue fait 18 tours par seconde.}}$

2.b La roue fait 18 tours par seconde. On filme 24 images par seconde.
$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0,75$.

$\boxed{\text{La roue fait } \frac{3}{4} \text{ de tour par image.}}$

3. Pour avoir le sentiment que la roue ne tourne pas, il faut qu'elle fasse un tour complet entre chaque image. Il faut donc que la roue fasse exactement 24 tours par seconde, soit un tour complet entre chaque image.

Un tour de roue correspond à $1,696\ m$ donc $24 \times 1,696\ m = 40,704\ m$.
Le véhicule doit rouler à $40,704\ m/s$.
Or $40,704\ m \times 3\ 600 \approx 146\ 534\ m$ en 1 h.

$\boxed{\text{Le véhicule doit rouler approximativement à 147 } km/h.}$

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1

1. Il suffit d'identifier les objets géométriques et d'utiliser les formules fournies.

Le cylindre de révolution a une base circulaire de rayon $AB = 1,30\ m$ et une hauteur $AD = 2,40\ m$.
L'aire d'un disque en fonction du rayon R est donnée par πR^2.
Le volume du cylindre se calcule ainsi : $V_1 = (\pi \times (1,30\ m)^2) \times 2,40\ m \approx 12,742\ m^3$

Le cone de révolution a une base circulaire de rayon $AB = 1,30\ m$ et une hauteur de $AS = 1,60\ m$.
Le volume du cone se calcule ainsi : $V_2 = \frac{1}{3}(\pi \times (1,30\ m)^2) \times 1,60\ m \approx 2,831\ m^3$

Finalement le silo a un volume de $\boxed{V = V_1 + V_2 \approx 15,57\ m^3}$

J'ai utilisé un arrondi au millième près pour m'assurer de l'arrondi final au centième près.

2. Le silo est rempli de farine au $\frac{6}{7}$ de son volume total.
$\frac{6}{7} \times 15,57\ m^3 = 6 \times 15,57\ m^3 \div 7 \approx 13,35\ m^3$.

On sait que $1\ m^3 = 1\ 000\ L$ donc le silo contient 13 350 L de farine.

Une vache mange 3 L par jour. 48 vaches mangent donc $48 \times 3\ L = 144\ L$ de farine par jour.
En 90 jours, 48 mangent ainsi : $90 \times 144\ L = 12\ 960\ L$ de farine.

$\boxed{\text{Le silo contient assez de farine pour 48 vaches pendant 90 jours.}}$

3. C'est une situation classique qui utilise **le théorème de Thalès**.

Nous allons comparer les deux quotients suivants : $\frac{HM}{HN}$ et $\frac{HB}{HC}$

$HM = SM - SH = 2,1\ m - 1,3\ m = 0,8\ m$ et $HN = SN - SH = 3,3\ m - 1,3\ m = 2\ m$

Ainsi $\dfrac{HM}{HN} = \dfrac{0,8\ m}{2\ m} = 0,4$

$\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{1,6\ m}{1,6\ m + 2,4\ m} = \dfrac{1,6\ m}{4\ m} = 0,4$

Nous constatons donc que $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HM}{HN}$

De plus les points H, M et N sont alignés et dans le même ordre que les points alignés H, B et C.
D'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (BM) et (CN) sont parallèles.

$\boxed{\text{Les deux échelles sont parallèles.}}$

Exercice 2

1. Dans cette expérience aléatoire toutes les issues sont **équiprobables**.
Il y a 300 billets vendus et 2 qui permettent de gagner un télévision.

$\boxed{\text{La probabilité de gagner une télévision est } \dfrac{2}{300} = \dfrac{1}{150} \approx 0,007 \text{ soit } 0,7\ \%.}$

2. Il y a 5 bon de réduction de 100 € et 10 de 50 € soit 15 en tout.

$\boxed{\text{La probabilité de gagner un bon de réduction est } \dfrac{15}{300} = \dfrac{1}{20}) = 0,05 \text{ soit } 5\ \%.}$

3.a Le coût de cette loterie se calcule ainsi : 2×500 € $+5 \times 100$ € $+10 \times 50$ € $+20 \times 0,50$ € $= 2\ 010$ €.

Les 300 tickets doivent donc être vendus : $2\ 010$ € $\div 300 = 6,70$ €.

$\boxed{\text{Les tickets doivent être vendus } 6,70 \text{ €.}}$

3.b S'il veut vendre les billets de loterie 2 € , il faut partager le coût.
$2\ 010$ € $\div 2$ € $= 1\ 005$. Il faut donc vendre 1 005 tickets de loterie. $1\ 005 - 300 = 705$.

$\boxed{\text{Il faut rajouter 705 billets perdants.}}$

Exercice 3

1. Avant le premier passage $n = 0$, $a = 5$ et $b = 1$.
Après le premier passage $n = 0 + 1 = 1$, $a = 5$ et $b = 1 \times 5 = 5$.

$\boxed{\text{Après le premier passage } n = 1,\ a = 5 \text{ et } b = 5.}$

Après le second passage $n = 1 + 1 = 2$, $a = 5$ et $b = 5 \times 5 = 25$.

$\boxed{\text{Après le second passage } n = 2,\ a = 5 \text{ et } b = 25 = 5^2.}$

2. Après 10 passages, $n = 10$, $a = 5$ et $b = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10} = 9\ 765\ 625$.

$\boxed{\text{Ce programme permet de calculer } 5^{10}\text{, les puissances de 5 successives jusque l'exposant 10.}}$

Exercice 4

1. Un cube possède six faces carrées. La surface totale extérieure est donc la somme des aires de chacun de ces carrés.

$576\ cm^2 \div 6 = 96\ cm^2$. Chaque face a une surface carrée de $96\ cm^2$.
L'aire d'un carré s'obtient en multipliant le côté du carré par lui-même.
$\sqrt{96\ cm^2} \approx 9,8\ cm$.
Ce cube a une côté qui mesure environ $9,8\ cm$.
Le volume de ce cube est donc $(9,8\ cm)^3 \approx 941\ cm^3$
On sait aussi que $1\ L = 1\ 000\ cm^3$

$\boxed{\text{Affirmation n}^{\text{o}}\text{ 1 : Vraie.}}$

2. Prenons par exemple les nombres 2 et 3.
La somme de ces deux nombres vaut $2+3=5$.
L'inverse de la somme de ces deux nombres est donc $\frac{1}{5}$.
L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ et l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.
La somme des inverses des deux nombres est donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\neq\frac{1}{5}$.

$\boxed{\text{Affirmation n}^{\text{o}}\text{ 2 : Fausse.}}$

3. Une première manière de faire est de tester sur un exemple.
Prenons un prix de départ de 100 € . Une baisse de 30 % revient à le ramener à 70 € .
Puis si on augmente ce prix de 50 %, il augmente donc de 35 € . Il coûte maintenant 105 €.
Cela confirme l'affirmation.

On peut démontrer cela en utilisant les coefficients multiplicateurs correspondants.
On sait que diminuer une quantité de 30 % revient à multiplier cette quantité par $0,70$.
Augmenter une quantité de 50 % revient à la multiplier par $1,50$.
Effectuer ces deux opérations consécutivement revient donc à multiplier par $0,70$ puis par $1,50$.
Or $0,70\times 1,50 = 1,05$ ce qui est une augmentation de 5 % !

$\boxed{\text{Affirmation n}^{\text{o}}\text{ 3 : Vraie.}}$

4. L'affirmation est vraie si et seulement si $\widehat{CDE} = 180^o$.
Le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.
Comme la somme des angles dans un triangles vaut 180^o et que dans un triangles isocèle les angles à la bases sont égaux, on en déduit que $\widehat{CAD} = \widehat{CDA} = 45^o$.
ADB est un triangle isocèle en B donc $\widehat{DAB} = \widehat{BDA} = 50^o$.
Enfin, BDE est rectangle en E et on sait que $90^o + 25^o + \widehat{BDE} = 180^o$.
Ainsi $BDE = 180^o - 115^o = 65^o$

Finalement, $\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 45^o + 50^o + 65^o = 160^o$.

$\boxed{\text{Affirmation n}^{\text{o}}\text{ 4 : Fausse.}}$

TROISIÈME PARTIE

La correction proposée ici est plus subjective. Elle tente de s'appuyer sur les documents ressources officiels et les connaissances d'un enseignant de mathématiques au collège. Elle est très succincte et demande d'être correctement rédigée et approfondie.

Situation 1 :

1. Le document de référence sur cette question est : Le calcul en ligne au cycle 2

Le calcul mental et le calcul en ligne vivent indépendamment mais se nourrissent mutuellement :

— les habiletés développées en calcul mental sont au service du calcul en ligne, elles donnent progressivement accès au traitement en ligne de calculs de plus en plus complexes ;
— le calcul en ligne peut aussi être vu comme une étape dans le développement du calcul mental ; le fait d'écrire certaines étapes de calcul permet en effet de libérer la mémoire de travail, favorisant ainsi l'entrée dans le calcul mental pour tous les élèves. Le calcul en ligne ne se limite toutefois pas à cette conception, certains calculs proposés en ligne ne peuvent en effet pas être gérés de façon purement mentale.

Le calcul en ligne n'est pas une autre manière d'écrire un calcul posé. Le calcul posé repose sur une technique, un algorithme. Le calcul en ligne repose sur la compréhension de la notion de nombre, du principe de la numération décimale de position et des propriétés des opérations.

Comme le calcul mental, le calcul en ligne permet à l'élève d'utiliser la richesse de ses connaissances sur le nombre et sur les propriétés des opérations. L'élève est ainsi amené à « faire parler » les nombres, c'est à dire à en envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération.

2. $28+17=20+8+10+7=30+15=45$
Cette stratégie utilise la décomposition décimale des nombres en dizaines entières et unité mais aussi la commutativité de l'addition. Cette méthode est assez proche de l'algorithme d'addition posée qui consiste à ajouter les unités entre elles et les dizaines ensuite.

$28+17=30-2+20-3=50-5=45$
Ici on complète chaque nombre jusqu'à la dizaine entière suivante puis on retranche les compléments à 10 ajoutés.

$28+17=25+3+15+2=40+5=45$
On décompose les nombres en complément à 5 puis on utilise la commutativité de l'addition.

3. $14\times 5=7\times 2\times 5=7\times 10=70$
On utilise ici une décomposition d'un des facteurs puis la commutativité de la multiplication qui permet d'obtenir le facteur 10. La multiplication par 10 revient ensuite à multiplier le nombre de dizaines par 7.
$14\times 5=5\times 10+5\times 4=50+20=70$
Stratégie reposant sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
$14\times 5=5\times 14u=5d+20u=5d+2d=7d=70$
On utilise la décomposition décimale des nombres entiers et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Situation 2 :

Le document de référence pour cette partie est : Fractions et nombres décimaux au cycle 3

1. Nicolas

Nicolas commence par ajouter les parties entières des mesures des côtés du triangle. Il commet une première erreur en lien avec les compléments à 10. Il aurait du utiliser la commutativité de l'addition pour effectuer $6+5+4=6+4+5=10+5=15$.
Nicolas ajoute ensuite les parties décimales. Il commet la même erreur sur la somme des entiers $4+5+3$ ce qui montre un manque d'acquisition des compléments à 10.
Il se retrouve ainsi avec 16 unités et $\frac{11}{10}$. Il obtient l'écriture décimale $17,01$.
Il décompose vraisemblablement $\frac{11}{10}$ sous la forme $1+\frac{1}{10}$. Mais l'erreur de positionnement du dixième restant peut laisser penser une construction du type $\frac{11}{10}=1+\frac{01}{10}$.
Les compétences acquises concernent la décomposition d'un nombre décimal en partie entière et décimale. Cependant l'usage est encore très fragile.

Thomas

Thomas ajoute correctement les parties entières et décimales. Il exprime la somme finale sous la forme 15 unités et $\frac{12}{10}$.
Les parties entières et décimales semblent totalement indépendantes l'une de l'autre pour Thomas. L'écriture $\frac{12}{10}$ n'est pas été ramenée à $1+\frac{2}{10}$

Amina

L'usage du symbole $=$ est mal compris par Amina. Elle s'en sert pour indiquer une transition entre plusieurs calculs mais les termes ne sont pas identiques de part et d'autre du symbole. L'écriture $5+4=9+6=15$ est fausse. Il faut inciter Amina à n'utiliser le symbole $=$ qu'entre deux termes et à écrire ses calculs en colonne pour les rendre plus lisibles et mathématiquement juste.
La somme des termes est bien effectuée en deux parties : parties entières et parties décimales. Le regroupement du résultat final est correct. Amina a compris le lien entre écriture en fractions décimales et l'écriture à virgule.

2. On peut proposer à Thomas la même situation où on utiliserait l'unité de mesure centimètres plutôt que une unité non définie.
En demandant ensuite à Thomas de tracer un segment dont la longueur serait la même que le périmètre, il pourrait se retrouver dans la situation d'avoir à tracer un segment de 15 cm et $\frac{12}{10}$ cm. En utilisant une règle graduée il pourra observer la congruence de ce nombre avec 16 cm et 2 mm qu'on peut lui faire écrire $16,2$ cm.

Situation 3 :

1. Benjamin comprend de manière indépendante les parties décimales et entières. Il ajoute ainsi les parties entières, ce qui est une stratégie qui fonctionne pour les nombres entiers, puis il applique pour la partie décimale la même méthode. Pour la partie entière, 3 unités $+5$ unités8 unités, mais avec la partie décimale il ajoute 12 centièmes et 7 dixièmes en perdant le sens de l'écriture positionnelle.
Océane utilise une méthode assez semblable. L'alignement des chiffres dans la partie décimale de son addition, montre bien le caractère indépendant des partie entière et décimale. Elle ajoute 7 centièmes et 12 centièmes.
Benjamin et Océane traite le 7 dixième comme 7 centièmes. Ils ne différencient pas une écriture du type $5,7$ et $5,07$. Peut-être même que dans ce cas le zéro serait considéré comme inutile.
Isabelle fait référence aux fractions décimales quand elle traite des nombres à virgule. Elle a compris que le symbole virgule était un moyen pratique de faire référence à l'écriture en fractions décimales de la partie décimale. Elle termine ensuite son calcul en laissant $\frac{882}{100}$ sans employer l'écriture équivalente $8,82$. C'est une stratégie efficace pour manipuler les nombres décimaux !
Pierre quant à lui, comme Isabelle, s'appuie sur la décomposition en fractions décimales des nombres décimaux. Il manipule facilement des écritures du type $5,7=\frac{57}{10}=\frac{570}{100}$.

2. La représentation erronée concerne les erreurs de Benjamin et Océane qui ont construit le nombre décimal comme un juxtaposition de deux nombres indépendants : la partie entière et la partie décimale. Ce traitement erroné produit les erreurs décrites ci-dessus !

3. On peut imaginer une première situation utilisant les unités monétaires. Faire la distinction entre $3,07$ €et $3,7$ €en utilisant par exemple des pièces de monnaie pour manipuler la notion.
On peut également proposer des partages de l'unité en dixième puis en centième pour permettre la compréhension du nombre décimal et de l'écriture positionnelle. L'usage de la droite graduée où chaque unité est partagée en dixième, puis où chaque dixième est partagé en centième permet de comprendre le caractère positionnelle de l'écriture de la partie décimale.
On peut enfin proposer le même genre de découpage dans un carré unité de côté 10 cm où un découpage en dixième donne 10 bandes de 1 cm sur 10 cm, et le découpage de chaque bande en 10 un découpage en carré de côté 1 cm. L'usage de tels carré pour désigner les nombres permet de manipuler des expressions du type $1+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}$ et de la ramener sous la forme $1+\frac{73}{100}$ ou encore $\frac{173}{100}$