DIPLÔME NATIONAL DU BREVET

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série générale

Durée de l'épreuve : 2 h 00 – 100 points

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet

Ce sujet comporte **7** pages numérotées de la page **1/7** à **7/7**

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

L'utilisation du dictionnaire est interdite

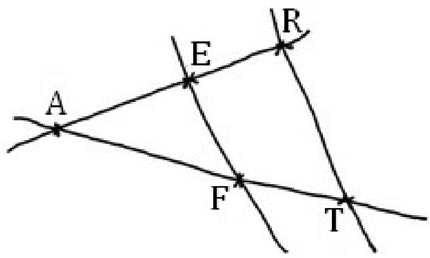
Indication portant sur <u>l'ensemble du sujet.</u>
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.
Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche ; elle sera prise en compte dans la notation.

<u>Exercice 1</u> (14 points)

On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle.

On donne les informations suivantes :

- les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A ;
- AE = 8 cm, AF = 10 cm, EF = 6 cm ;
- AR = 12 cm, AT = 14 cm.



1) Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.

2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{EAF}$ au degré près.

3) Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles ?

<u>Exercice 2</u> (17 points)

Voici quatre affirmations. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou fausse. On rappelle que la réponse doit être justifiée.

1) **Affirmation 1 :** $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{5+2}$

2) On considère la fonction $f : x \mapsto 5 - 3x$

Affirmation 2 : l'image de -1 par f est -2 .

3) On considère deux expériences aléatoires :

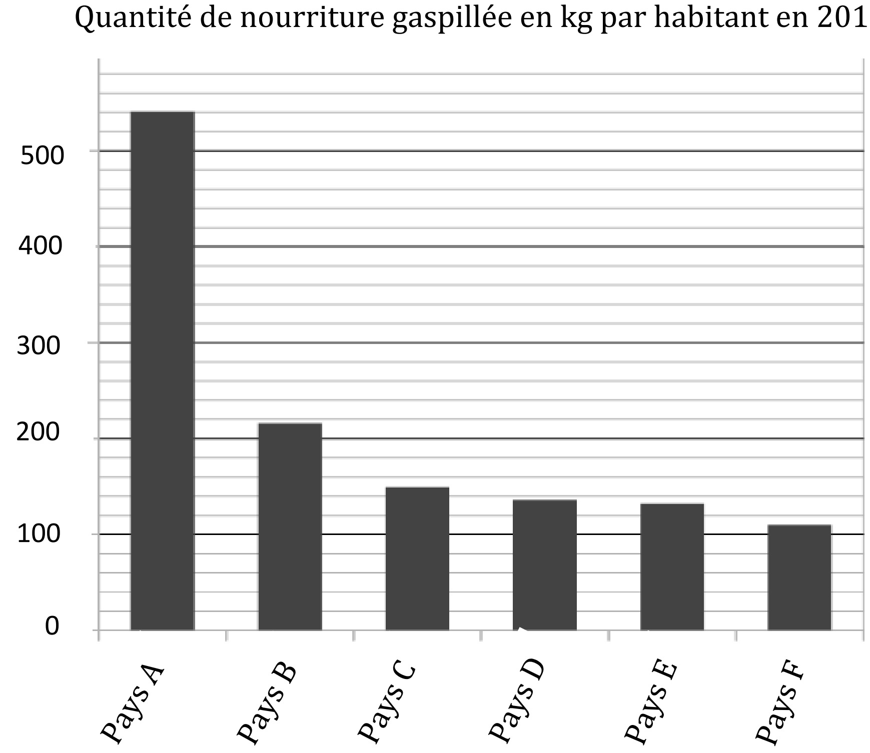
- *expérience n°1 : choisir au hasard un nombre entier compris entre 1 et 11 (1 et 11 inclus).*
- *expérience n°2 : lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et annoncer le nombre qui apparait sur la face du dessus.*

Affirmation 3 : il est plus probable de choisir un nombre premier dans l'expérience n°1 que d'obtenir un nombre pair dans l'expérience n°2.

4) **Affirmation 4 :** pour tout nombre x, $(2x + 1)^2 - 4 = (2x + 3)(2x - 1)$.

Exercice 3 **(12 points)**

Le diagramme ci-dessous représente, pour six pays, la quantité de nourriture gaspillée (en kg) par habitant en 2010.



1) Donner approximativement la quantité de nourriture gaspillée par un habitant du pays D en 2010.

2) Peut-on affirmer que le gaspillage de nourriture d'un habitant du pays F représente environ un cinquième du gaspillage de nourriture d'un habitant du pays A ?

3) On veut rendre compte de la quantité de nourriture gaspillée pour d'autres pays. On réalise alors le tableau ci-dessous à l'aide d'un tableur. *Rappel : 1 tonne = 1 000 kg*.

	A	B	C	D
1		Quantité de nourriture gaspillée par habitant en 2010 (en kg)	Nombre d'habitants en 2010 (en millions)	Quantité totale de nourriture gaspillée (en tonnes)
2	Pays X	345	10,9	3 760 500
3	Pays Y	212	9,4	
4	Pays Z	135	46,6	

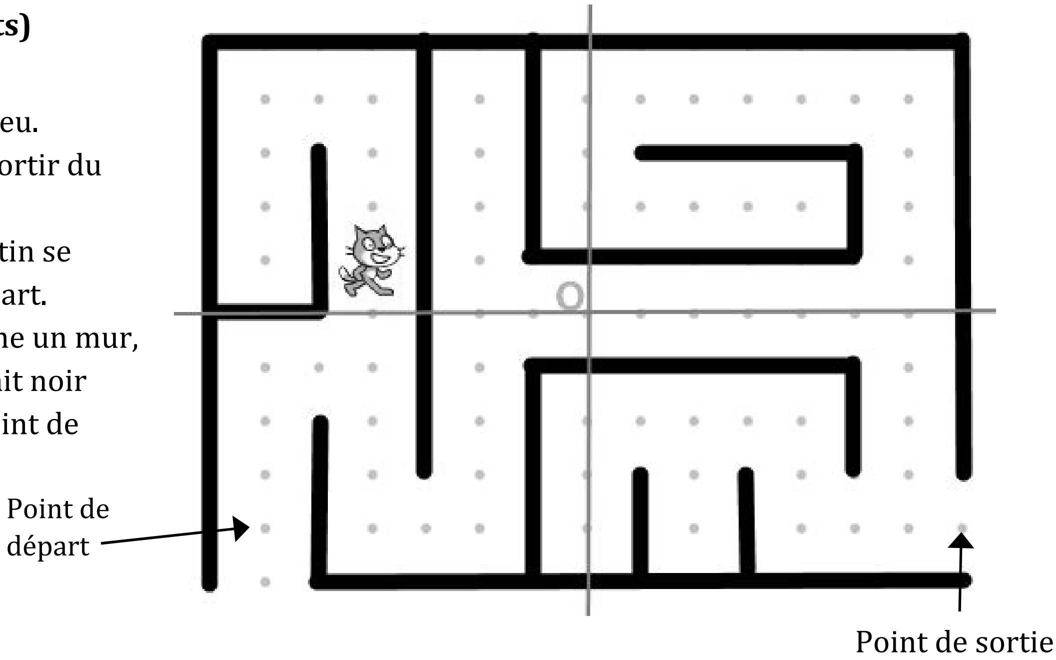
a) Quelle est la quantité totale de nourriture gaspillée par les habitants du pays X en 2010 ?

b) Voici trois propositions de formule, recopier sur votre copie celle qu'on a saisie dans la cellule D2 avant de l'étirer jusqu'en D4.

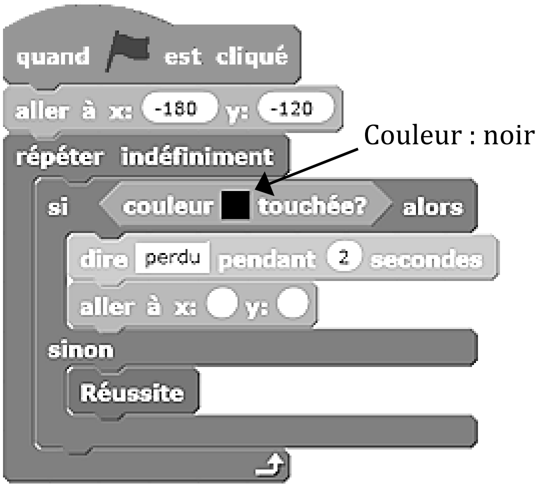
Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
= B2*C2*1 000 000	= B2*C2	= B2*C2*1 000

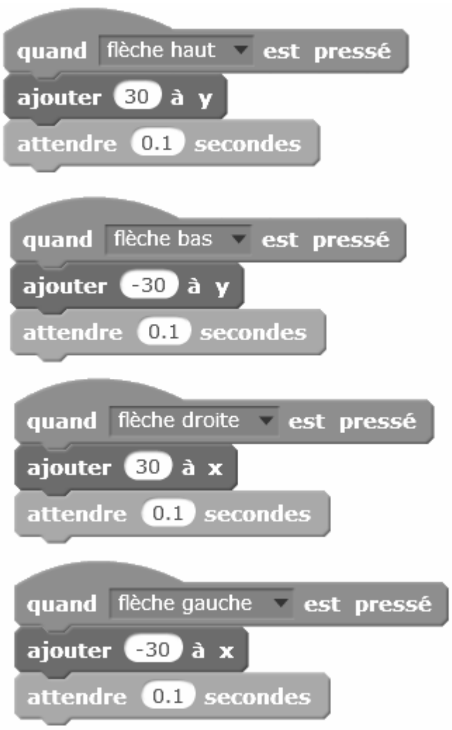
<u>Exercice 4</u> (10 points)

On a programmé un jeu.
Le but du jeu est de sortir du labyrinthe.
Au début du jeu, le lutin se place au point de départ.
Lorsque le lutin touche un mur, représenté par un trait noir épais, il revient au point de départ.



L'arrière-plan est constitué d'un repère d'origine O avec des points espacés de 30 unités verticalement et horizontalement.
Dans cet exercice, on considèrera que seuls les murs du labyrinthe sont noirs.
Voici le programme :





Le bloc  correspond à un sous-programme qui fait dire « Gagné ! » au lutin lorsqu'il est situé au point de sortie ; le jeu s'arrête alors.

1) Recopier et compléter l'instruction  du programme pour ramener le lutin au point de départ si la couleur noire est touchée.

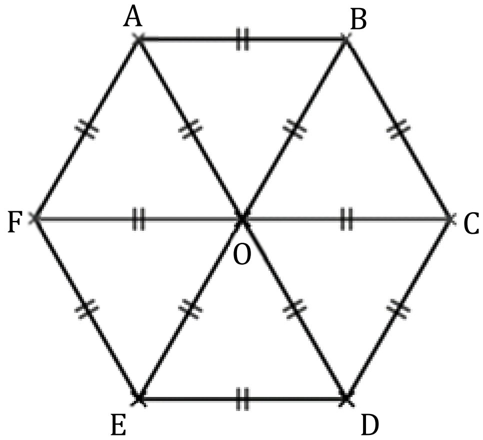
2) Quelle est la distance minimale parcourue par le lutin entre le point de départ et le point de sortie ?

3) On lance le programme en cliquant sur le drapeau. Le lutin est au point de départ.
On appuie brièvement sur la touche ↑ (« flèche haut ») puis sur la touche → (« flèche droite »). Quelles sont toutes les actions effectuées par le lutin ?

Exercice 5 **(10 points)**

Dans cet exercice aucune justification n'est attendue.

On considère l'hexagone ABCDEF de centre O représenté ci-contre.



1) Parmi les propositions suivantes, recopier celle qui correspond à l'image du quadrilatère CDEO par la symétrie de centre O.

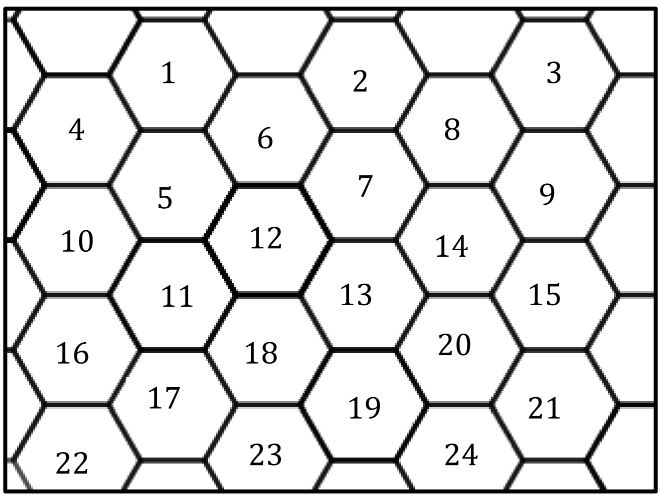
Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
FABO	ABCO	FODE

2) Quelle est l'image du segment [AO] par la symétrie d'axe (CF) ?

3) On considère la rotation de centre O qui transforme le triangle OAB en le triangle OCD. Quelle est l'image du triangle BOC par cette rotation ?

La figure ci-contre représente un pavage dont le motif de base a la même forme que l'hexagone ci-dessus.

On a numéroté certains de ces hexagones.



4) Quelle est l'image de l'hexagone 14 par la translation qui transforme l'hexagone 2 en l'hexagone 12 ?

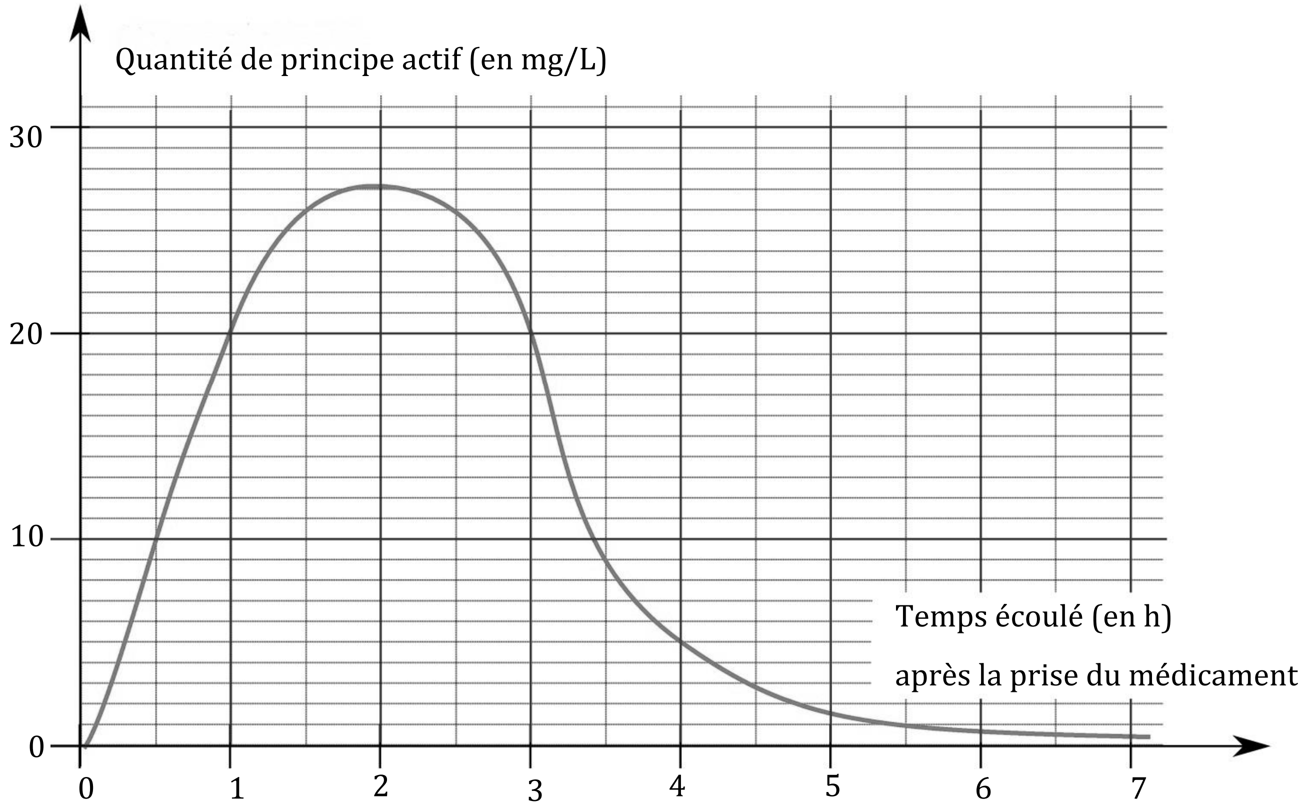
Exercice 6 (12 points)

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A : absorption du principe actif d'un médicament

Lorsqu'on absorbe un médicament, que ce soit par voie orale ou non, la quantité de principe actif de ce médicament dans le sang évolue en fonction du temps. Cette quantité se mesure en milligrammes par litre de sang.

Le graphique ci-dessous représente la quantité de principe actif d'un médicament dans le sang, en fonction du temps écoulé, depuis la prise de ce médicament.



a) Quelle est la quantité de principe actif dans le sang, trente minutes après la prise de ce médicament ?

b) Combien de temps après la prise de ce médicament, la quantité de principe actif est-elle la plus élevée ?

Partie B : comparaison de masses d'alcool dans deux boissons

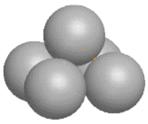
On fournit les données suivantes :

<table>
<tr><td rowspan="2">Formule permettant de calculer la masse d'alcool en g dans une boisson alcoolisée :
m = $V \times d \times 7{,}9$
V : volume de la boisson alcoolisée en cL
d : degré d'alcool de la boisson
(exemple : un degré d'alcool de 2 % signifie que d est égal à 0,02)</td><td colspan="2">Deux exemples de boissons alcoolisées</td></tr>
<tr><td>Boisson ①
Degré d'alcool : 5 %
Contenance : 33 cL</td><td>Boisson ②
Degré d'alcool : 12 %
Contenance : 125 mL</td></tr>
</table>

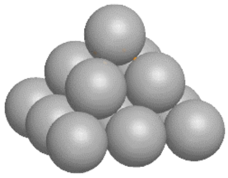
Question : la boisson ① contient-elle une masse d'alcool supérieure à celle de la boisson ② ?

<u>Exercice 7</u> (15 points)

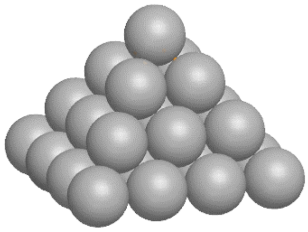
Pour ranger les boulets de canon, les soldats du XVI^{e} siècle utilisaient souvent un type d'empilement pyramidal à base carrée, comme le montrent les dessins suivants :



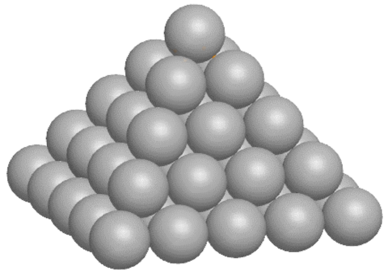
Empilement à 2 niveaux



Empilement à 3 niveaux



Empilement à 4 niveaux



Empilement à 5 niveaux

1) Combien de boulets contient l'empilement à 2 niveaux ?

2) Expliquer pourquoi l'empilement à 3 niveaux contient 14 boulets.

3) On range 55 boulets de canon selon cette méthode. Combien de niveaux comporte alors l'empilement obtenu ?

4) Ces boulets sont en fonte ; la masse volumique de cette fonte est de 7 300 kg/m^3.
On modélise un boulet de canon par une boule de rayon 6 cm.
Montrer que l'empilement à 3 niveaux de ces boulets pèse 92 kg, au kg près.
Rappels :

- *volume d'une boule =* $\frac{4}{3} \times \pi \times rayon \times rayon \times rayon$
- *une masse volumique de 7 300 kg/m^3 signifie que 1 m^3 pèse 7 300 kg*

<u>Exercice 8</u> (10 points)

Dans une classe de Terminale, huit élèves passent un concours d'entrée dans une école d'enseignement supérieur.

Pour être admis, il faut obtenir une note supérieure ou égale à 10.

Une note est attribuée avec une précision d'un demi-point (par exemple : 10 ; 10,5 ; 11 ;…)

On dispose des informations suivantes :

Information 1	**Information 2**	
Notes attribuées aux 8 élèves de la classe qui ont passé le concours : 10 ; 13 ; 15 ; 14,5 ; 6 ; 7,5 ; ◆ ; ●	La série constituée des huit notes : - a pour étendue 9 - a pour moyenne 11,5 - a pour médiane 12.	75 % des élèves de la classe qui ont passé le concours ont été reçus.

1) Expliquer pourquoi il est impossible que l'une des deux notes désignées par ◆ ou ● soit 16.

2) Est-il possible que les deux notes désignées par ◆ et ● soient 12,5 et 13,5 ?

Brevet 2019 - Amérique du Nord
Correction

Exercice 1

1. *C'est une application habituelle de la réciproque du théorème de Pythagore.*
On remarque que dans le triangle AEF, le côté $[AF]$ est le plus long.

Dans le triangle AEF comparons EA^2+EF^2 et AF^2.

$EA^2+EF^2 = 8^2+6^2$
$EA^2+EF^2 = 64+36$
$EA^2+EF^2 = 100$

$AF^2 = 10^2$
$AF^2 = 100$

Comme $EA^2+EF^2 = AF^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, $\boxed{\text{le triangle } EAF \text{ est rectangle en } E.}$

2. *Nous allons utiliser la trigonométrie.*

Dans le triangle AEF rectangle en E.

Comme on connaît les mesures des trois côtés du triangle, il est possible de déterminer l'angle en utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente de cette angle. On propose ici les trois méthodes. Au brevet, une seule des trois doit être rédigée.
Le côté $[AE]$ est adjacent à l'angle $\widehat{EAF}$, le côté $[EF]$ est opposé à l'angle $\widehat{EAF}$ et le côté $[AF]$ est l'hypoténuse du triangle.

$\cos\widehat{EAF} = \frac{AE}{AF}$
$\cos\widehat{EAF} = \frac{8\ cm}{10\ cm}$
$\cos\widehat{EAF} = 0,8$

$\sin\widehat{EAF} = \frac{EF}{AF}$
$\sin\widehat{EAF} = \frac{6\ cm}{10\ cm}$
$\sin\widehat{EAF} = 0,6$

$\tan\widehat{EAF} = \frac{EF}{AE}$
$\tan\widehat{EAF} = \frac{6\ cm}{8\ cm}$
$\tan\widehat{EAF} = 0,75$

À la calculatrice on obtient $\widehat{EAF} \approx 37°$
Il faut utiliser les fonctions inverses des calculatrices à l'aide des touches Seconde puis cos, sin ou tan.

3. *On pense à la réciproque ou le théorème contraposé de Thalès.*

Comparons les quotients $\dfrac{AE}{AR}$ et $\dfrac{AF}{AT}$:

$\dfrac{AE}{AR} = \frac{8\ cm}{12\ cm}$
$\dfrac{AE}{AR} = \frac{2}{3}$
$\dfrac{AE}{AR} \approx 0,667$

$\dfrac{AF}{AT} = \frac{10\ cm}{14\ cm}$
$\dfrac{AF}{AT} = \frac{5}{7}$
$\dfrac{AF}{AT} \approx 0,714$

On constate avec les valeurs approchées que $\dfrac{AE}{AR} \neq \dfrac{AF}{AT}$.

Une méthode plus experte consiste à vérifier l'égalité des produits en croix.
Comme $2\times7 = 14$ et que $5\times3 = 15$ on en déduit que $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{5}{7}$

D'après **le théorème contraposé de Thalès** $\boxed{\text{les droites } (EF) \text{ et } (RT) \text{ sont sécantes.}}$

Exercice 2

Affirmation 1 : $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{10}+\dfrac{5}{10} = \dfrac{11}{10}$
Or $\dfrac{3+1}{5+2} = \dfrac{4}{7}$
On peut à nouveau constater avec les valeurs approchées que $\dfrac{11}{10} = 1,1 \neq \dfrac{4}{7} \approx 0,571$
Ou de manière plus experte que $11\times7 = 77$ et que $10\times4 = 40$.
Ou encore que $\dfrac{11}{10} > 1$ car $11 > 10$ et que $\dfrac{4}{7} < 1$ car $4 < 7$...

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 : $f(x) = 5 - 3x$ et $f(-1) = 5 - 3 \times (-1) = 5 + 3 = 8$

L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 : Dans l'expérience aléatoire 1 il y a 11 issues équiprobables. Les cinq issues 2, 3, 5, 7 et 11 produisent des nombres premiers.
La probabilité d'obtenir un nombre premier dans l'expérience 1 est donc $\frac{5}{11} \approx 0,455$ soit environ $45,5$ %

Dans l'expérience aléatoire 2 il y a 6 issues équiprobables. Les trois issues 2, 4 et 6 produisent des nombres pairs.
La probabilité d'obtenir un nombre pair dans l'expérience 2 est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ soit 50 %

L'affirmation 3 est encore fausse.

Affirmation 4 : *Il faut développer et réduire les deux expressions pour pouvoir les comparer !*

$A = (2x+1)^2 - 4$
$A = (2x+1)(2x+1) - 4$
$A = 4x^2 + 2x + 2x + 1 - 4$
$A = 4x^2 + 4x - 3$

$B = (2x+3)(2x-1)$
$B = 4x^2 - 2x + 6x - 3$
$B = 4x^2 + 4x - 3$

On pouvait utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour développer A.
On pouvait aussi penser à factoriser A en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pour vérifier l'affirmation.
$A = (2x+1)^2 - 4$
$A = (2x+1)^2 - 2^2$
$A = [(2x+1)+2]\,[(2x+1)-2]$
$A = (2x+1+2)(2x+1-2)$
$A = (2x+3)(2x-1)$

L'affirmation 4 est enfin vraie !

Exercice 3

1. *Il y a 5 graduations pour 100 unités en ordonnée, donc une graduation correspond à 20 unités.*
Dans le pays D on gaspille en moyenne 140 *kg* de nourriture.

2. Le pays F gaspille environ 110 *kg* de nourriture. Le pays A environ 540 *kg*.

Comme $540\ kg \times \frac{1}{5} = 108\ kg$ on peut faire cette affirmation.

3. Il suffit de lire la colonne D. Dans le pays X les habitants gaspillent $3\,760\,500\ tonnes = 3\,760\,500\,000\ kg$

On passe donc à la colonne D en effectuant le produit de 345 par $10,9 \times 1\,000\,000$. Comme le résultat est en tonne on divise ensuite par 1 000. Finalement cela revient à effectuer $345 \times 10,9 \times 1\,000 = 3\,760\,500$

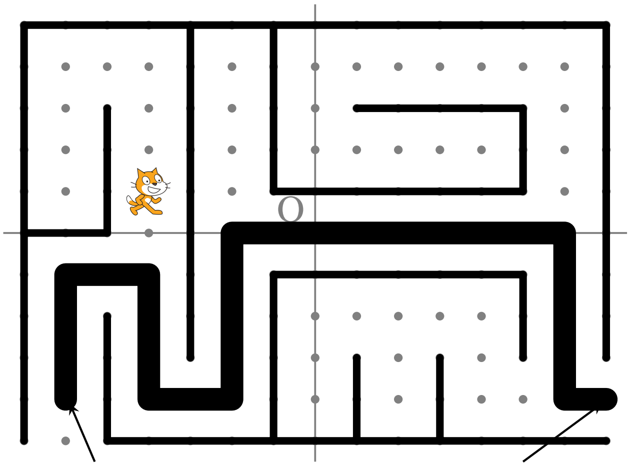
4. La proposition 3 : =B2*C2*1 000.

La réponse 1 est très tentante... il faut résister !

Exercice 4

1. Il faut le placer en $(-180; -120)$ comme au début du programmes.
Donc `aller à x: -180 y: -120`

2. Il faut commencer par compter le nombre points.



Cela correspond à 27 points soit $27 \times 30 = \boxed{810 \text{ unités}}$.

3. En appuyant brièvement sur la touche ↑, le lutin monte de 30 unité vers le point juste au dessus. Puis en cliquant sur la touche →, il fonce dans le mur !
Le programme rentre alors dans la boucle qui teste si la couleur noire est touchée.
Il est alors affiché perdu pendant 2 secondes puis le lutin revient au départ.

Exercice 5

1. Dans la symétrie de centre O : C devient F ; D devient A ; E devient B ; O ne bouge pas.
Donc l'image de $CDEO$ par la symétrie de centre O est $FABO$: proposition 1

On utilise les codages de la figure en utilisant tous les segments dont le milieu est le point O.

2. Dans la symétrie axiale d'axe (CF) : A devient E ; O ne bouge pas.
L'image du segment $[AO]$ est le segment $[EO]$.

Il faut penser au losange $AFEO$ dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

3. Dans la rotation de centre O qui transforme OAB en OCD : O ne bouge pas ; B devient D ; C devient E.
L'image de OBC est donc ODE.

Il s'agit d'une rotation de centre O, d'angle $120°$ $(60° + 60°)$ dans le sens des aiguilles d'une montre.

4. Il s'agit de l'hexagone 19.

En traçant un segment entre 2 et 12 et entre 14 et 19, on constate qu'il s'agit bien de la même translation !

Exercice 6

Partie A

1. *En ordonnée il y a 10 graduations pour 10 unités, en abscisse 2 graduations pour 2 unités.*

Au bout de 30 min la quantité de principe actif est 10 mg/L.

2. Au bout de 2 h le principe actif est au maximum, environ 27 mg/L.

Partie B

Pour la boisson **1.** $d = 0,05$ et $V = 33$ cL donc $m = 33 \times 0,05 \times 7,9 = 13,035$
Pour la boisson **2.** $d = 0,12$ et $V = 125$ $mL = 12,5$ cL donc $m = 12,5 \times 0,12 \times 7,9 = 11,85$

La boisson **1.** contient une masse d'alcool supérieure à la boisson **2.**.

Exercice 7

1. $\boxed{\text{Il y a 5 boulets dans l'empilement à 2 niveaux.}}$

2. Dans l'empilement à 3 niveaux il y a 1 boulet sur le niveau du haut, 4 boulets sur celui du milieu et 9 boulets sur le niveau du bas. $9+4+1=14$.

$\boxed{\text{Il y a 14 boulets sur l'empilement à 3 niveaux.}}$

3. Observons l'empilement à 4 niveaux. Il y a 1 boulet sur le niveau 1, 4 sur le niveau 2, 9 sur le niveau 3 et 16 sur le niveau 4.
$16+9+4+1=30$
On peut faire la conjecture que pour passer à l'empilement à 5 niveaux il faut ajouter 25 boulets soit $5^2=25$.
On a ainsi $30+25=55$.

On constate que sur le niveau 2, le carré de base est constitué de 4 boulets soit 2^2 boulet. Il y a 1 boulet au dessus soit 1^2 boulet. Finalement sur l'empilement à 2 niveaux il y a 1^2+2^2 boulets.
Sur l'empilement à 3 niveaux, les niveaux 2 et 3 sont ceux du cas précédent. Le premier niveau est un carré de 3 boulets de côté soit $9=3^2$ boulets. Il y a ainsi pour 3 niveaux $1^2+2^2+3^2$ boulets.
On en déduit de même qu'il y a $1^2+2^2+3^2+4^2=30$ boulets dans l'empilement à 4 niveaux et $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$ boulets pour l'empilement à 5 niveaux... et ainsi de suite !

$\boxed{\text{L'empilement à 5 niveaux contient 55 boulets de canon.}}$

4. Nous allons calculer le volume d'un boulet de canon : $V_{boulet}=\dfrac{4}{3}\times\pi\times 6\ cm\times 6\ cm\times 6\ cm=288\pi\ cm^3$

Il y a 14 boulets dans l'empilement à 3 niveaux.
$3\times V_{boulet}=14\times 288\pi=4\,032\pi\ cm^3\approx 12\,667\ cm^3$

Attention la masse volumique donne la masse pour un volume de $1\ m^3$. Il faut penser à convertir les volumes et passer des cm^3 au m^3.

On sait que $1\ m^3=1\,000\ dm^3=1\,000\,000\ cm^3$. Donc le volume de l'empilement à 3 niveaux a un volume d'environ $12\,667\ cm^3=12{,}667\ dm^3=0{,}012\,667\ m^3$

Or $1\ m^3$ pèse $7\,300\ kg$. Ainsi $0{,}012\,667\times 7\,300\ kg\approx 92\ kg$

$\boxed{\text{On a prouvé l'affirmation de l'énoncé.}}$

Exercice 8

1. Sur les six notes connues, on constate que la plus faible est 6 et la note la plus forte est 15. L'étendue de ces six notes est 9. C'est la même étendue que pour les huits notes. On en déduit que les deux notes manquantes ne peuvent pas être supérieures à 15 ni inférieures à 6.

$\boxed{\text{Aucune des notes manquantes ne peut être égale à 16.}}$

2. 75 % des huit élèves ont été reçu. Or $8\times 0{,}75=6$. Ainsi 6 élèves ont eu une note supérieure ou égale à 10. Parmi les notes connues, seules quatre sont supérieures à 10, il en manque deux.
Les notes $12{,}5$ et $13{,}5$ sont donc possibles par rapport à cette information.

Calculons la moyenne des huit notes : $m=\dfrac{10+13+15+14{,}5+6+7{,}5+12{,}5+13{,}5}{8}=\dfrac{92}{8}=11{,}5$
Cela correspond à nouveau à l'information fournie.

Calculons la médiane des huit notes. Il s'agit de la moyenne entre la quatrième et cinquième note lorsqu'elles sont classées dans l'ordre croissant.
Voici ce classement : 6, $7{,}5$, 10, $12{,}5$, 13, $13{,}5$, $14{,}5$, 15.
Une médiane est une note comprise entre $12{,}5$ et 13. Cela ne correspond pas à l'information de l'exercice.

$\boxed{\text{Les notes manquantes ne sont pas 12,5 et 13,5.}}$

Les notes 12 et 14 pourraient être les notes manquantes.