Version du 16 mars 2020

Traces écrites pour les élèves
Quatrième

Consulter le document complet pour obtenir les démonstrations, les exercices et les éléments culturels...

Fabrice ARNAUD

pi.ac3j.fr

pi.3.14159@orange.fr

CC BY SA

Table des matières

1 Les nombres relatifs – Somme algébrique 7
Situation initiale : Moins c'est rouge et plus c'est noir ! 10
I Définition et comparaison 11
1 Définition – Notion d'opposé 11
Définition 1.1 : Opposé d'un nombre entier ou décimal 11
2 Comparaison et distance à zéro 11
Propriété 1.1 : Comparaison des relatifs 11
Définition 1.2 : Distance à zéro 12
II Somme algébrique des nombres relatifs 12
1 Somme des nombres relatifs 12
Propriété 1.2 : Somme des nombres relatifs 12
Méthode 1.1 : Ajouter des nombres relatifs 13
2 La soustraction — Somme algébrique 13
Propriété 1.3 : Soustraction des nombres relatifs 13
Méthode 1.2 : Écrire une expression sous forme de somme algébrique 14
III Annexes 15
1 Vocabulaire 15
2 Questions du jour 16
3 Exercices 19
4 Devoirs maison 20
DM : Le jeu 20
5 Évaluations 21
6 Documents pratiques 25
Tâche complexe : la pharmacie 29

2 Le théorème de Pythagore et sa réciproque 31
Situation initiale : Aire et quadrillage 34
I Le théorème de Pythagore 35
Définition 2.1 : Vocabulaire du triangles rectangle 35
Propriété 2.1 : Hypoténuse 35
Théorème 2.1 : Le théorème de Pythagore 35
II Application du théorème de Pythagore et racine carrée 38
Propriété 2.2 : La racine carrée 39
Méthode 2.1 : Calculer la mesure du côté d'un triangle rectangle 40
III La réciproque du théorème de Pythagore 40
Théorème 2.2 : Contraposée du théorème de Pythagore 40
Théorème 2.3 : Réciproque du théorème de Pythagore 41
Méthode 2.2 : Déterminer si un triangle est rectangle 42
IV Annexes 43
1 Questions du jour 44

2 Exercices . . . 45
3 Documents pratiques . . . 47
4 Évaluations . . . 61
5 Fiche de synthèse . . . 68

3 Nombres rationnels : égalité et somme de fractions 71
Situation initiale : La pêche à pied à Noirmoutier . . . 73
I Définition du quotient . . . 74
Définition 3.1 : Fraction . . . 74
II Égalité de fractions : le produit en croix . . . 74
Propriété 3.1 : Égalité de fractions . . . 74
III Somme algébrique de fractions . . . 75
IV Annexes . . . 75
1 Exercices . . . 75

4 La translation 83
Situation initiale : Deux symétries axiales consécutives . . . 85
Situation initiale : Pavage du plan . . . 86

5 Les nombres relatifs – Produit et quotient 89
I Produit des nombres relatifs . . . 91
Propriété 5.1 : Produit de deux nombres relatifs . . . 91
II Quotient des nombres relatifs . . . 92
Propriété 5.2 : Quotient des nombres relatifs . . . 92
III Annexes . . . 93
1 Vocabulaire . . . 93
2 Questions du jour . . . 94
3 Exercices . . . 95
4 Devoirs maison . . . 96
DM : Les Repunits . . . 96

6 Le théorème de Thalès 101

7 Produit et quotient de fractions 105
I Produit des fractions . . . 107
II Quotient des fractions . . . 107
Fiche de synthèses – Les fractions . . . 108

8 Repérage dans le pavé droit 111
I Repérage dans le plan . . . 113
II Repérage dans l'espace . . . 113
Fiche de synthèses – Repérage dans le pavé droit . . . 114

9 Les puissances de 10 117
Situation initiale : Le coeur de mon arrière-grand-mère . . . 119
Situation initiale : La légende du jeu d'échecs . . . 119
Intentions pédagogiques et éléments de correction : Le coeur de mon arrière-grand-mère . . . 120
I Exposant et puissances - Définition . . . 121
Définition 9.1 : Puissances d'un nombre . . . 121
II Les puissances de 10 . . . 121
III Quelques propriétés opératoires . . . 121
IV L'écriture scientifique . . . 122
Définition 9.2 : Écriture scientifique . . . 122
V Annexe . . . 123
Fiche de synthèses – Les puissances de 10 . . . 126

10 Tout le reste... 129
I Enigmes mathématiques 131

Chapitre 1

Les nombres relatifs – Somme algébrique

I — Définition et comparaison

1 Définition – Notion d'opposé

Définition 1.1 : Opposé d'un nombre entier ou décimal

a un nombre entier ou décimal
L' **opposé** du nombre a est l'unique nombre noté $-a$ [1] vérifiant :

$$a + (-a) = 0$$

On dit que a est un nombre **positif** on le note $(+a)$.
Son opposé $(-a)$ est un nombre **négatif** on le note $(-a)$.
Les nombres positifs et négatifs sont des **nombres relatifs** . [2]

Remarque :
Comme $a + (-a) = (-a) + a = 0$ on constate aussi que a est l'opposé du nombre $-a$.

Exemple :
-5 est l'opposé de 5 et 5 est l'opposé de -5 car $5 + (-5) = 0$
$0 + 0 = 0$ donc 0 est son propre opposé.

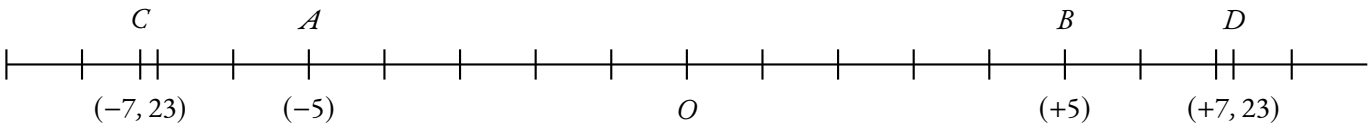
2 Comparaison et distance à zéro

Propriété 1.1 : Comparaison des relatifs

a et b des nombres entiers ou décimaux positifs.

1. $(-a) \leqslant (+b)$
2. Si $(+a) < (+b)$ alors $(-b) < (-a)$

Remarque :
Sur la droite graduée on peut positionner ces nombres :



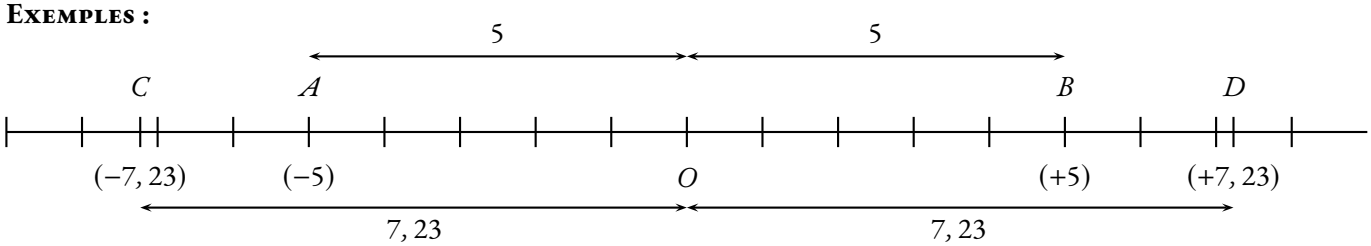
Deux points ayant des abscisses opposés sont symétriques par rapport à l'origine de la droite.

Exemple :
$-10\,000 < -0{,}000\,1$ mais $10\,000 > 0{,}000\,1$

Définition 1.2 : Distance à zéro

a un nombre relatif positif ou négatif.
La **distance à zéro** du nombre a est un nombre positif qui correspond à la distance entre l'origine de la droite graduée et le point ayant pour abscisse a.
Deux nombres relatifs opposés ont la même distance à zéro.

Exemples :



La distance à zéro de (-5) et $(+5)$ est 5.
La distance à zéro de $(-7, 23)$ et $(+7, 23)$ est 7, 23.

II — Somme algébrique des nombres relatifs

1 Somme des nombres relatifs

3

Propriété 1.2 : Somme des nombres relatifs

a et b deux nombres relatifs.

- Si a et b ont le même signe (positif ou négatif) alors la somme $a + b$ est du même signe et sa distance à zéro est égale à la somme des distances à zéro de a et b.
- Si a et b ont des signes différents alors la somme $a + b$ est du signe de celui des deux qui à la plus grande distance à zéro et la distance à zéro de cette somme est égale à la différence des deux distances à zéro.

Méthode 1.1 : Ajouter des nombres relatifs
Pour ajouter des nombres relatifs il est souvent pratique de commencer par ajouter ensemble les nombres de même signe puis d'effectuer à la fin la somme entre les deux nombres de signes différents.

$$\mathcal{A} = (-3) + (+6) + (-2) + (+8) + (-4)$$
$$\mathcal{A} = \underbrace{(+8) + (+6)}_{(+14)} + \underbrace{(-3) + (-2) + (-4)}_{(-9)}$$
$$\mathcal{A} = (+14) + (-9)$$
$$\mathcal{A} = (+5)$$

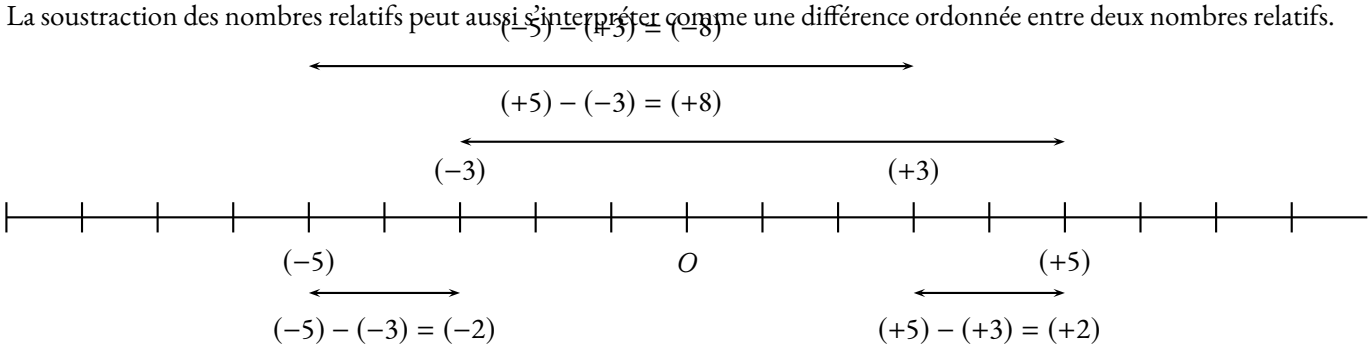
2 La soustraction — Somme algébrique

Propriété 1.3 : Soustraction des nombres relatifs

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

Exemples :
$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = (+2) = 2$: la soustraction usuelle est devenue une addition. [4]
$(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = (+8)$
$(-5) - (-3) = (-5) + (+3) = (-2)$
$(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = (-8)$

Interprétation :
La soustraction des nombres relatifs peut aussi s'interpréter comme une différence ordonnée entre deux nombres relatifs.



Convention :
On sait que la somme de relatifs $(+7) + (+6) + (+4)$ revient à la somme habituelle $7 + 6 + 4$
On sait aussi que toutes expressions contenant une soustraction peut s'écrire sous la forme d'une somme :
$(-3) + (+7) - (-4) - (+6) + (-3) = (-3) + (+7) + (+4) + (-6) + (-3)$

On convient dorénavant de ne plus écrire les symboles opératoires + dans une somme. On écrit seulement les nombres relatifs précédés des signes + ou −, signes qui indiquent les caractères positifs ou négatif du nombre.

Ainsi $(-6) + (+7) + (-3) + (-4) = -6 + 7 - 3 - 4$ ou encore $(+7) + (-3) + (-2) + (+3) = 7 - 3 - 2 + 3$: le signe + en première position est sous-entendu.

Méthode 1.2 : Écrire une expression sous forme de somme algébrique
Dans une expression ne contenant que des additions et des soustractions :
- on transforme toute les soustractions en addition en utilisant la propriété I.3 ;
- on élimine ensuite les symboles d'addition entre les parenthèses ;
- on supprime alors les parenthèses ;

— un signe + qui débute l'expression peut être supprimé.

Un moyen commode d'obtenir une expression algébrique consiste à appliquer les règles suivantes :[5]

— on supprime les parenthèses ;
— deux signes + ou deux signes − consécutifs deviennent un + ;
— une signe − suivi d'un + ou un signe + suivi d'un − devient un − ;
— un signe + qui débute l'expression peut être supprimé.

Exemple :

$A = (-5) + (+9) - (-4) - (+3) - (-7)$
$A = -5 + 9 + 4 - 3 + 7$
$A = 20 - 8$
$A = 12$

$B = (+7) - (-4) - (+9) + (-6)$
$B = 7 + 4 - 9 - 6$
$B = 11 - 15$
$B = -4$

Chapitre 2

Le théorème de Pythagore et sa réciproque

I — Le théorème de Pythagore

Définition 2.1 : Vocabulaire du triangles rectangle

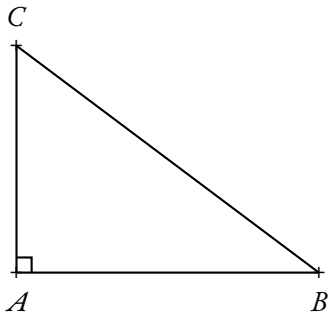
Un triangle ayant un angle droit est un **triangle rectangle** .
Les deux côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle sont les **côtés de l'angle droit** . Le côté restant est l' **hypoténuse** du triangle rectangle. C'est le **côté opposé** à l'angle droit.

Propriété 2.1 : Hypoténuse Admise

Si un triangle est rectangle **alors** son plus grand côté est l'hypoténuse. [1]

Théorème 2.1 : Le théorème de Pythagore Admis

Si un triangle est rectangle **alors** la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.



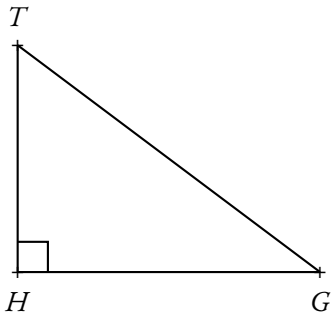
Si ABC est un triangle rectangle en A **alors** $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (**Égalité de Pythagore**)

Remarque :

$7^2 = \underbrace{7 \times 7}_{\text{2 fois}} = 49$. À ne pas confondre avec $7 \times 2 = \underbrace{7 + 7}_{\text{2 fois}} = 14$

II — Application du théorème de Pythagore et racine carrée

Calcul de l'hypoténuse connaissant les deux côtés de l'angle droit :
On étudie le triangle GHT rectangle en H tel que $HG = 4\ cm$ et $HT = 3\ cm$. On trace ce triangle et on constate en mesurant que $GT \approx 5\ cm$

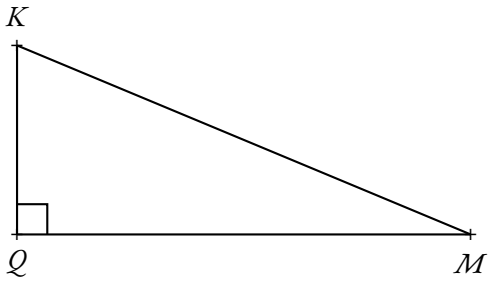


Dans le triangle GHT rectangle en H, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HG^2 + HT^2 = GT^2$$
$$4^2 + 3^2 = GT^2$$
$$GT^2 = 16 + 9$$
$$GT^2 = 25$$

GT est donc un nombre dont le carré est 25, $GT = 5$ car $5^2 = 25$
L'hypoténuse $[GT]$ mesure 5 cm.[2]

Calcul d'un côté de l'angle droit connaissant l'hypoténuse et un autre côté :
On étudie le triangle QMK rectangle en Q tel que $QM = 12\ cm$ et $MK = 13\ cm$. On mesure et on constate que $QK \approx 5\ cm$.

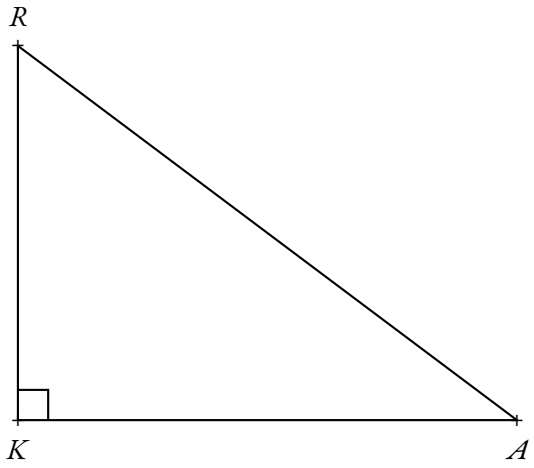


Dans le triangle QMK rectangle en Q, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$QM^2 + QK^2 = MK^2$$
$$12^2 + QK^2 = 13^2$$
$$144 + QK^2 = 169$$
$$QK^2 = 169 - 144$$
$$QK^2 = 25$$

QK est donc un nombre dont le carré est 25, $QK = 5$

Calcul d'un côté dont la mesure au carré ne soit pas un carré parfait :
On étudie le triangle RAK rectangle en K tel que $KR = 4,95\ cm$ et $KA = 6,6\ cm$. Calculons la mesure du côté $[AR]$.



Dans le triangle RAK rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KA^2 + KR^2 = AR^2$$
$$6,6^2 + 4,95^2 = AR^2$$
$$AR^2 = 43,56 + 24,5025$$
$$AR^2 = 68,0625$$

On ne connait pas immédiatement un nombre dont le carré vaut exactement 68,0625.
Notons x ce nombre.
Comme $8^2 = 64 < 68,0625 < 81 = 9^2$ on en déduit que $8 < x < 9$.[3]
En utilisant la calculatrice on trouve que $8,2^2 = 67,24 < 68,0625 < 68,89 = 8,3^2$ et donc que $8,2 < x < 8,3$.
On constate alors que $8,25^2 = 68,0625$.
Finalement $AR = 8,25\ cm$.

Propriété 2.2 : La racine carrée — Admise

Pour tout nombre positif a, il existe un unique nombre positif dont le carré vaut exactement le nombre a.
Ce nombre s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$.
Par définition $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

Exemples :

$\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.
$\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$.
La plupart des racines carrées ne sont pas des nombres décimaux, ni même des nombres rationnels.
$\sqrt{2} \approx 1,41421$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

Méthode 2.1 : Calculer la mesure du côté d'un triangle rectangle
Pour utiliser le théorème de Pythagore il faut connaître la mesure de deux côtés et vouloir calculer la mesure du troisième.
- Nommer le triangle rectangle et bien repérer l'angle droit ;
- invoquer le théorème de Pythagore et écrire l'égalité en veillant à l'angle droit ;
- si on cherche la mesure de l'hypoténuse, on effectue la somme des carrés des deux autres côtés ;
- si on cherche la mesure d'un autre côté, on fait la différence du carré de l'hypoténuse et de l'autre côté ;
- une fois le carré obtenu il suffit de calculer la racine carrée pour obtenir la mesure.

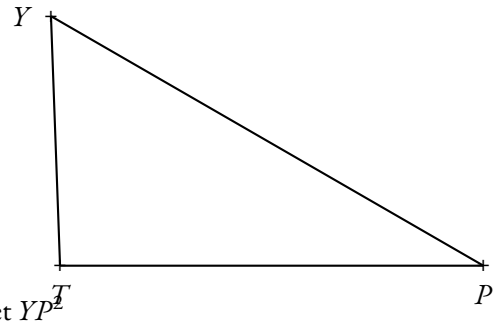
III — La réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 2.2 : Contraposée du théorème de Pythagore *(Admis)*

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée **alors** ce triangle n'est pas rectangle.

Exemple :

Un triangle TYP est tel que $TY = 33\ mm$, $TP = 56\ mm$ et $YP = 66\ mm$
En dessinant ce triangle, il semble rectangle.



Vérifions : comparons $TY^2 + TP^2$ et YP^2

$TY^2 + TP^2 = 33^2 + 56^2$
$TY^2 + TP^2 = 1\,089 + 3\,136$
$TY^2 + TP^2 = 4\,225$

$YP^2 = 66^2$
$YP^2 = 4\,356$

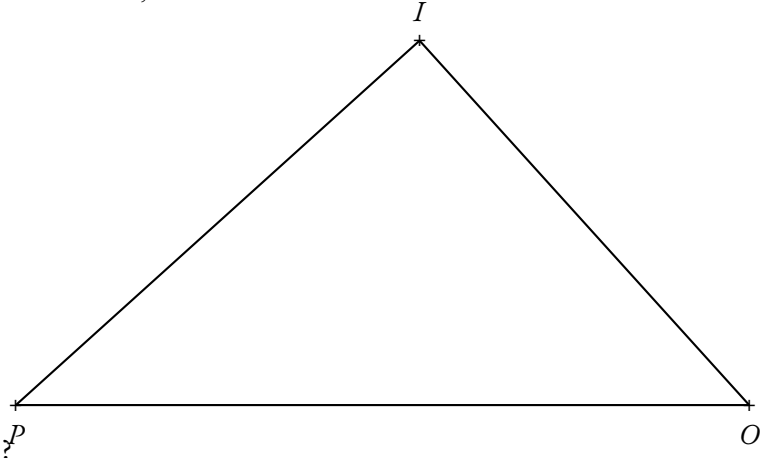
Ainsi $TY^2 + TP^2 \neq YP^2$
D'après **le théorème contraposé de Pythagore**, le triangle TYP n'est pas rectangle.

Théorème 2.3 : Réciproque du théorème de Pythagore *(Admis)*

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore est vérifiée **alors** ce triangle est rectangle.

Exemple :

POI un triangle tel que : $PO = 97\ mm$, $PI = 72\ mm$ et $OI = 65\ mm$.



Ce triangle est-il rectangle ?

Comme PO est le plus long côté, comparons PO^2 et $IP^2 + IO^2$

$$PO^2 = 97^2$$

$$PO^2 = 9\,409$$

$$IP^2 + IO^2 = 72^2 + 65^2$$

$$IP^2 + IO^2 = 5\,184 + 4\,225$$

$$IP^2 + IO^2 = 9\,409$$

Ainsi $IP^2 + IO^2 = PO^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle POI est rectangle en P.

Méthode 2.2 : Déterminer si un triangle est rectangle

Étant données les trois mesures des côtés d'un triangle :

- Déterminer le plus grand côté (il est candidat pour être l'hypoténuse) ;
- calculer le carré de la mesure du plus grand côté ;
- calculer la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés ;
- vérifier si les deux calculs précédent sont égaux ou non :
  - si les deux calculs sont exactement égaux, l'**égalité de Pythagore** est vérifiée, la réciproque du théorème de Pythagore affirme que le triangle est rectangle ;
  - si les deux calculs ne sont pas égaux, l'**égalité de Pythagore** n'est pas vérifiée, la contraposée du théorème de Pythagore affirme que le triangle n'est pas rectangle.

Chapitre 3

Nombres rationnels : égalité et somme de fractions

I — Définition du quotient

Définition 3.1 : Fraction

a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$

La **fraction** $\frac{a}{b}$ désigne le quotient $a \div b$ de a par b, c'est à dire un nombre vérifiant :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

- a est le **numérateur** de la fraction ;
- b est le **dénominateur** de la fraction ;
- a et b sont séparés par **la barre de fraction** ou vinculum.

Remarque :

la division par 0 n'est pas une opération autorisée ![1]

Exemples :

$5 \times \frac{15}{5} = 15$ ainsi $\frac{15}{5} = 3$: une fraction peut correspondre à un **nombre entier** .

Réciproquement, comme $3 = 3 \div 1 = \frac{3}{1}$, tout nombre entier a peut s'écrire sous la forme d'une fraction $a = \frac{a}{1}$ [2]

$4 \times \frac{7}{4} = 7$ et $7 \div 4 = 1,75$ donc la fraction $\frac{7}{4}$ correspond à **un nombre décimal** .

Réciproquement, le nombre décimal $3{,}141\,592 = \frac{3\,141\,592}{1\,000\,000}$, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

$3 \times \frac{4}{3} = 4$ et $4 \div 3 \approx 1,333$, $\frac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal, c'est **un nombre rationnel** .[3]

II — Égalité de fractions : le produit en croix

Propriété 3.1 : Égalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ [4]

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times b}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre non nul on obtient une fraction égale.

Exemples :

Cette propriété permet de simplifier les fractions :

$$A = \frac{56}{64} = \frac{⑧ \times 7}{⑧ \times 8} = \frac{7}{8}$$

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales entre elles :

III — Somme algébrique de fractions

À rédiger !

Notes

[1]Il aurait été plus judicieux d'utiliser un autre symbole que $-$ pour désigner l'opposé d'un nombre, par exemple $opp(a)$ ce qui aurait pour mérite d'éviter la confusion quand on aborde la soustraction

[2]C'est une des constructions possibles de cet ensemble.

[3]L'idée est de prolonger la somme des nombres positifs aux nombres relatifs. Cette prolongation doit respecter les propriétés usuelles de l'addition dont la commutativité

[4]J'aime à dire à ce moment là que nous venons de faire disparaître la soustraction. Plus précisément, nous avions quatre opérations fondamentales sur les nombres avant ce chapitre et il n'en reste maintenant plus que trois ! La soustraction n'est qu'une addition particulière. Ce sera bientôt le tour de la division. Cette manière de penser tient à la structure de groupe additif de $\mathbb{Z}$ et celle de corps pour $\mathbb{R}$.

[5]C'est une règle usuelle mais qui peut présenter une difficulté didactique. Cela n'a en effet aucun lien avec la multiplication des nombres relatifs et cela peut contribuer à créer de la confusion entre l'addition et la multiplication des nombres relatifs. Il est nécessaire de bien distinguer à l'oral ces deux notions.

Ainsi « $-\,-\,5$ devient $+5$ »est une phrase à proscrire. Il est raisonnable de dire « $-\,-\,5$ revient à soustraire l'opposé de 5 c'est à dire ajouter 5 ce qu'on écrit $+5$ »

[1]du latin hypotenusa venant du grec hypoteinousa, c'est le participe présent de hypoteínô qui signifie sous-tendre ou soutenir. Dans la proposition I.19 des Éléments d'Euclide, il est dit que « Dans tout triangle, le plus grand côté est celui opposé au plus grand angle. »

[2]Les nombres $(3; 4; 5)$ forment un triplet Pythagoricien. C'est un triplet primitif au sens où ces trois nombres n'ont pas de diviseurs communs. Voici les triplets primitifs inférieurs à 100

$(3; 4; 5)--(5; 12; 13)--(8; 15; 17)--(7; 24; 25)--(20; 21; 29)--(12; 35; 37)--(9; 40; 41)--(28; 45, 53)--(11; 60; 61)--(16; 63; 65)--(33; 56; 65)--(48; 55; 73$

[3]Il faut bien sur supposer connu le fait que la fonction racine carrée est croissante. Le raisonnement suivant demanderait d'utiliser la continuité et la stricte croissante de la fonction carrée pour obtenir son inverse et la continuité de la fonction racine. C'est hors de propos en troisième...

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence !

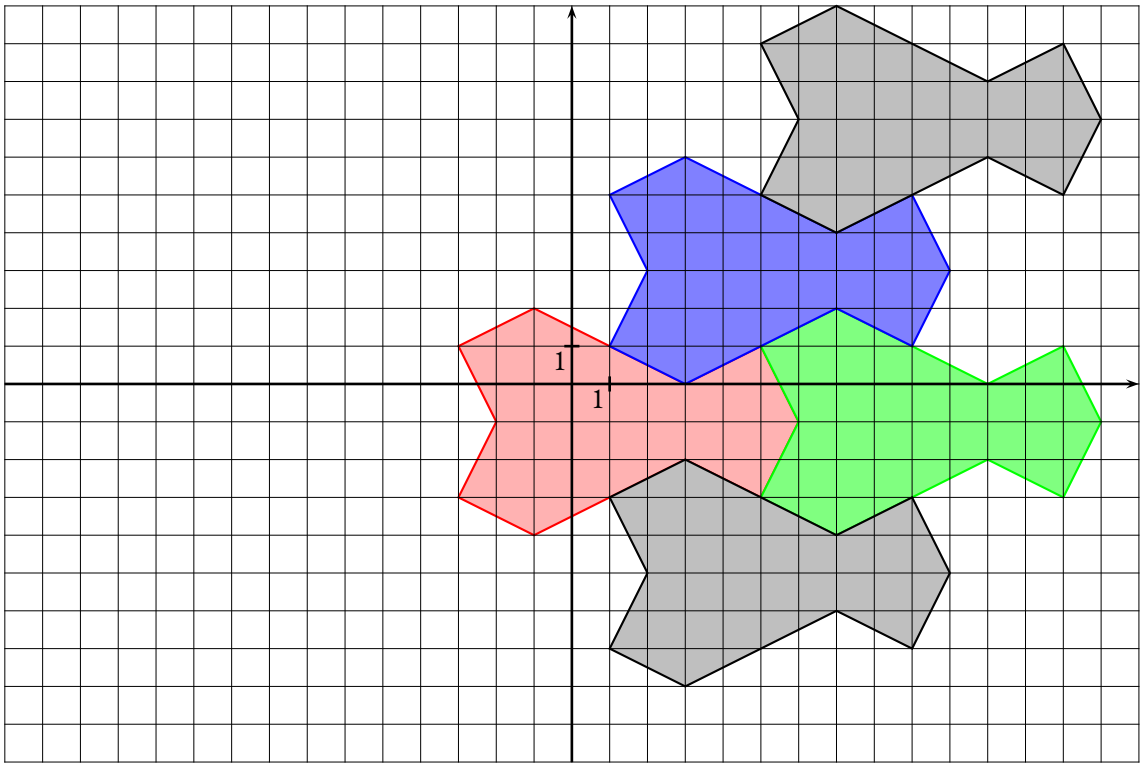
[2]De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme par exemple $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreints au cas des fractions, c'est à dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie !

Chapitre 4

La translation



Chapitre 5

Les nombres relatifs – Produit et quotient

I — Produit des nombres relatifs

Propriété 5.1 : Produit de deux nombres relatifs

La distance à zéro du produit de deux nombres relatifs est égale au produit des distances à zéro des deux facteurs.
- le produit de deux nombres de même signe est positif ;
- le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

Exemples :

$(-5) \times (+8) = (-40)$ [1]

On peut maintenant aborder des expressions plus complexes en utilisant les règles de priorités usuelles :

$A = (-5) \times (+7) + (-7) \times (-3)$

$A = -35 + 21$

$A = -14$

$B = (1 - 5 \times 2)(-7 \underbrace{-5 \times 2}_{\text{on effectue } -5\times 2})$

$B = (1 - 10)(-7 - 10)$

$B = -9 \times -17$

$B = 153$

$C = (-3 \times 5 - 5 \times (-2))(3 \times (-5) - 6 \times 3)$

$C = (-15 + 10) \times (-15 - 18)$

$C = -5 \times (-33)$

$C = 165$

II — Quotient des nombres relatifs

Propriété 5.2 : Quotient des nombres relatifs

La distance à zéro du quotient de deux nombres relatifs est éga

III — Annexes

1 Vocabulaire

Vocabulaire :

✧ **Nombres relatifs :** Ce sont les nombres dont le signe est déterminé par leurs positions par rapport à 0. Ces nombres sont positifs ou négatif.

2 Questions du jour

Question du jour n° 1 : Le chat

Lala

3 Exercices

Exercice n° 5.1 : Super exercice

Lala

4 Devoirs maison

Devoir maison : Nombres relatifs — **Les Repunits**

Un **Repunit** est un nombre dont l'écriture décimale est constituée que du chiffre 1.
1, 11, 111, 11 111... 111 111 111 111 sont des Repunits.

1. Effectuer la division euclidienne en la posant de 11 par 9, de 111 par 9, de 1 111 par 9 et enfin de 11 111 par 9

2. En utilisant votre calculatrice, écrire l'égalité euclidienne qui correspond à la division par 9 des Repunits 111 111, 1 111 111, 11 111 111 et 111 111 111.

3. Que remarquez-vous ?

4. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 3 ?

5. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 9 ?

6. [INTERNET] – Un Repunit peut-il être premier ?

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Nombres relatifs

Exercice 1 : Calculer en détaillant votre méthode.

$A = (-4) \times 3 + (-5) \times (-7) + 5 \times 2 + (-6) \times (-2)$

$B = (-3) \times (-3) - (-4) \times 5 - 9 \times 7 - (-5) \times (-4)$

$C = 5 - 3 \times 7 + 7 - (-5) \times (-2) + 3$

$D = (1 - 3 \times 2)(3 \times (-2) + 1)$

Exercice 2

On pose $a = -2$, $b = 5$, $c = -3$ et $d = -5$. Calculer :

$Z = a \times b + b \times c + c \times d + d \times a$

$Y = (a - b) \times (c - d)$

$X = (1 - b + c)(2 + a - d)$

$W = (a - d)(b - a) - (c - b)(b - a)$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Nombres relatifs

Exercice 1 : Calculer en détaillant votre méthode.

$A = (-4) \times 3 + (-5) \times (-6) + 5 \times 2 + (-5) \times (-2)$

$B = (-3) \times (-3) - (-4) \times 5 - 8 \times 7 - (-5) \times (-4)$

$C = 7 - 3 \times 7 + 7 - (-5) \times (-2) + 3$

$D = (2 - 3 \times 2)(3 \times (-2) + 1)$

Exercice 2

On pose $a = -3$, $b = 5$, $c = -2$ et $d = -5$. Calculer :

$Z = a \times b + b \times c + c \times d + d \times a$

$Y = (a - b) \times (c - d)$

$X = (1 - b + c)(2 + a - d)$

$W = (a - d)(b - a) - (c - b)(b - a)$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Nombres relatifs

Exercice 1 : Calculer en détaillant votre méthode.

$A = (-5) \times 3 + (-5) \times (-7) + 5 \times 2 + (-6) \times (-2)$

$B = (-4) \times (-3) - (-4) \times 5 - 9 \times 7 - (-5) \times (-4)$

$C = 2 - 3 \times 7 + 7 - (-5) \times (-2) + 3$

$D = (3 - 3 \times 2)(3 \times (-2) + 1)$

Exercice 2

On pose $a = -4$, $b = 5$, $c = -3$ et $d = -5$. Calculer :

$Z = a \times b + b \times c + c \times d + d \times a$

$Y = (a - b) \times (c - d)$

$X = (1 - b + c)(2 + a - d)$

$W = (a - d)(b - a) - (c - b)(b - a)$

Notes

[1]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »

Chapitre 6

Le théorème de Thalès

Notes

[1]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »

Chapitre 7

Produit et quotient de fractions

I — Produit des fractions

À rédiger !

II — Quotient des fractions

À rédiger !

Les fractions

Définition

a et b sont deux nombres entiers relatifs et b est différent de 0.
La fraction $\frac{a}{b}$ désigne le nombre vérifiant $b \times \frac{a}{b} = a$
a

Notes

[1]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »

Chapitre 8

Repérage dans le pavé droit

I — Repérage dans le plan

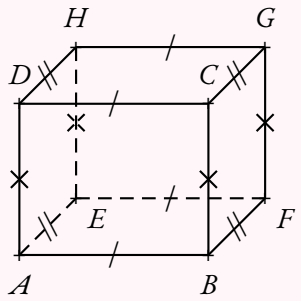
À rédiger !

II — Repérage dans l'espace

À rédiger !

Repérage dans le pavé droit

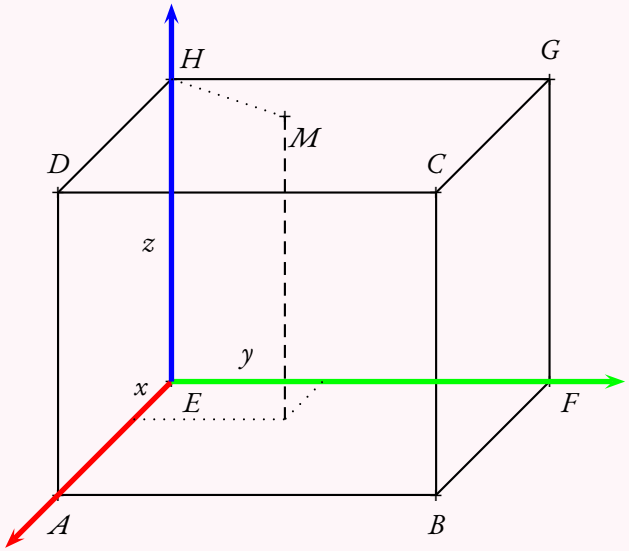
Le pavé droit



Le **pavé droit** ou **parallélépipède rectangle** est un solide de la famille des **prismes droits** .

Il possède 6 **faces** rectangulaires superposables deux à deux, 8 **sommets** , 12 **arêtes** .

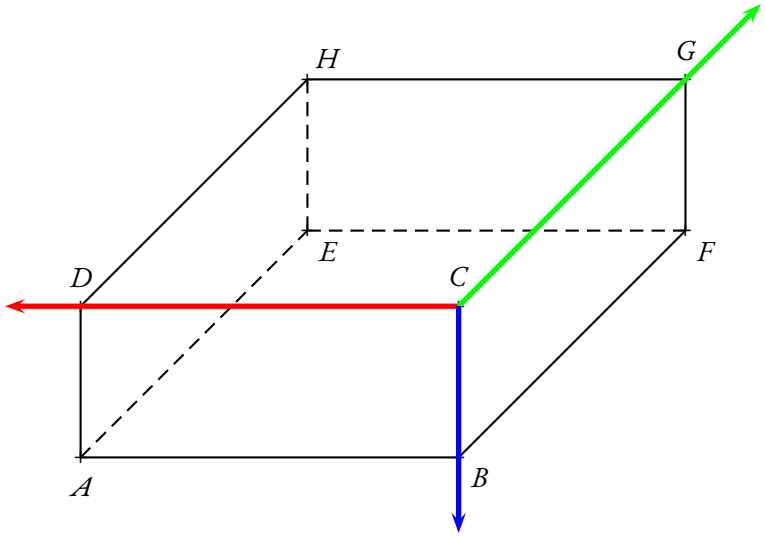
Repérage dans le pavé droit



On choisit un repère dans le pavé droit, par exemple :

- E est l'origine du repère ;
- (EA) est l' **axe des abscisses** ;
- (EF) est l' **axe des ordonnées** ;
- (EH) est l' **axe des altitudes ou des côtes** .

Un point M situé dans le pavé droit peut être repéré par ses coordonnées $M(x; y; z)$ où x est l'abscisse, y l'ordonnée et z l'altitude du point M.



Notes

[1]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »

Chapitre 9

Les puissances de 10

I — Exposant et puissances - Définition

Définition 9.1 : Puissances d'un nombre

a un nombre quelconque et n un nombre entier positif supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{\text{n fois}}$$

On dit a **exposant** n.

n est **l'exposant** de a^n et a^n est une **puissance** de a.

Exemples :

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

Ne pas confondre $3^2 = 9$ et $3 \times 2 = 6$. En effet $3^2 = \underbrace{3 \times 3}_{\text{2 fois}}$ et $3 \times 2 = \underbrace{3 + 3}_{\text{2 fois}}$

$7^5 = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}_{\text{5 fois}} = 16\,807$

$2,4^3 = \underbrace{2,4 \times 2,4 \times 2,4}_{\text{3 fois}} = 13,824$

$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}_{\text{5 fois}} = -32$

$(-1)^{2\,020} = 1$ et $(-1)^{2\,019} = -1$: le signe dépend de la parité de l'exposant !

$0^{15} = \underbrace{0 \times 0 \times ... \times 0}_{\text{15 fois}} = 0$

II — Les puissances de 10

À rédiger !

III — Quelques propriétés opératoires

À rédiger !

IV — L'écriture scientifique

Définition 9.2 : Écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

Exemples :

$2\,020 = 2,02 \times 10^3$
$0,007 = 7 \times 10^{-3}$
$3,141\,59 = 3,14159 \times 10^0$
$123\,000\,000\,000 = 1,23 \times 10^{11}$
$0,000\,000\,006\,7 = 6,7 \times 10^{-9}$

Remarque :
L'écriture scientifique permet de noter facilement des nombres dont l'écriture décimale demande beaucoup de chiffres.
La **mantisse** peut être plus ou moins précise.
La puissance de 10 utilisée est très importante, elle permet d'avoir un ordre de grandeur du résultat et de comparer des nombres entre eux.

Exemple :
L'eau est constituée d'hydrogène H et d'oxygène O. La molécule d'eau s'écrit H^2O ce qui signifie que un atome d'oxygène est lié à deux atomes d'hydrogène.

Un atome d'oxygène à une masse de $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,026\,g = 2,6 \times 10^{-23}\,g$.
Un atome d'hydrogène à une masse de $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67\,g = 1,67 \times 10^{-24}\,g$.

On remarque les ordres de grandeurs : l'oxygène est plus de 10 fois plus lourd que l'hydrogène, $10^{-23} = 10^{-24} \times 10$

La masse d'une molécule d'eau est donc $2 \times 1,67 \times 10^{-24}\,g + 2,6 \times 10^{-23}\,g = 3,34 \times 10^{-24}\,g + 26 \times 10^{-24}\,g$.
Vous avez remarqué au passage que $2,6 \times 10^{-23} = 26 \times 10^{-24}$ car $26 = 10 \times 2,6$.

La masse d'une molécule d'eau est donc d'environ $29,34 \times 10^{-24}\,g = 2,934 \times 10^{-23}$

Un litre d'eau a une masse d'environ $1\,kg = 1\,000\,g$ à $20C$.

Pour calculer un ordre de grandeur du nombre de molécules d'eau dans un litre il suffit d'effectuer le quotient : $1\,000\,g \div 2,934 \times 10^{-23}$

La calculatrice répond environ $3,408 \times 10^{25}$ molécules soit 34 080 000 000 000 000 000 000 000 molécules !

V — Annexe

Exercice n° 9.1 : Puissance – Définition

Écrire sous de forme de puissance puis calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$B = 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$C = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$
$D = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$
$E = 2 \times 4 \times 16 \times 32$
$F = 3 \times 9 \times 27 \times 81$
$G = 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$H = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1$
$I = 10 \times 100 \times 1\,000 \times 10\,000$

Exercice n° 9.2 : Puissances – Définition – Épisode 2

Calculer la valeur décimale sans calculatrice

$A = 2^6$
$B = 3^4$
$C = 5^3$
$D = 0^{10}$
$E = (-2)^7$
$F = (-3)^4$
$G = (-5)^3$
$H = (-1)^{2\,019}$
$I = (-1)^{2\,020}$
$J = 0,5^3$
$K = 0,3^4$
$L = (-0,2)^6$

Exercice n° 9.3 : Puissances de 10

Calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 10^4$
$B = 10^9$
$C = 10^{12}$
$D = 10^3 \times 10^4$
$E = 10^7 \times 10^5$
$F = 10^5 \times 10^5 \times 10^5$
$G = \frac{10^3}{10^2}$
$H = \frac{10^7}{10^5}$
$I = \frac{10^3}{10^5}$

Exercice n° 9.4 : Puissance de 10 – Épisode 2

Écrire sous forme de puissance de 10.

$A = 10^3 \times 10^7$
$B = 10^5 \times 10^7 \times 10^9$
$C = 10^{13} \times 10^{29}$
$E = \frac{10^9}{10^5}$
$F = \frac{10^{12}}{10^3}$
$G = \frac{10^3}{10^2}$
$H = \frac{10^5}{10^5}$
$I = \frac{10^7}{10^9}$
$J = \frac{10^5}{10^{10}}$

Exercice n° 9.5 : Puissance de 10 – Épisode 3

Écrire sous forme décimale sans calculatrice.

$A = 10^{13}$
$B = 10^1$
$C = 10^0$
$E = 10^{-1}$
$F = 10^{-5}$
$G = 10^5 \times 10^7$
$H = 10^3 \times 10^5 \times 10^2$
$I = 10^{-3} \times 10^7$
$J = 10^{-5} \times 10^{-7}$
$K = \frac{10^4}{10^8}$
$L = \frac{10^{-7}}{10^9}$
$M = \frac{10^{-5}}{10^{-10}}$

Exercice n° 9.6 : Compter jusqu'à un milliard

On se demande combien de temps il faudrait pour compter jusqu'à un milliard !
Dire certains nombres prend du temps, par exemple 978 797 469 : neuf-cent-soixante-dix-huit-millions-sept-cent-quatre-vingt-dix-sept-mille-quatre-cent-soixante-neuf, doit bien prendre quelques secondes pour être nommé.
Imaginons que vous décidiez de compter jusqu'à un milliard en passant 16 h par jour à cette activité (il faut bien manger, dormir...). On peut considérer qu'il faut environ 2 s pour chaque nombre.
Combien de temps allez-vous passer à cette tâche ? (en secondes, minutes, heures, jours, mois, années)

Exercice n° 9.7 : Écriture décimale et scientifique

Écrire sous forme décimale les nombres suivants écrits sous forme scientifique :

$A = 2,02 \times 10^{3}$
$B = 7 \times 10^{-3}$
$C = 3,14159 \times 10^{0}$
$D = 1,2345 \times 10^{9}$
$E = 7,3 \times 10^{-12}$
$F = 7,89 \times 10^{15}$
$G = 3,098 \times 10^{-11}$
$H = 1,234\,567\,89 \times 10^{11}$

Exercice n° 9.8 : Écriture scientifique et décimale

Écrire sous forme scientifique les nombres suivants :

$A = 2\,021$
$B = 0{,}000\,007$
$C = 2{,}718\,28$
$D = 1\,234\,567\,890$
$E = 0{,}000\,000\,670\,9$
$F = 5\,670\,000\,000\,000\,000$
$G = 0{,}000\,000\,000\,000\,4$
$H = 20\,200\,000\,000\,000\,000$

Exercice n° 9.9 : Bételgeuse

Bételgeuse est une étoile, une supergéante rouge, dans la constellation d'Orion. Elle se situe à environ 647 *a.l.* de la terre. L'année lumière (*a.l.*) est une unité de mesure astronomique qui correspond à la distance parcourue en un an par la lumière.

1. Sachant que la lumière parcoure environ 3×10^{5} km chaque seconde, donner une écriture scientifique de la distance parcourue en une année en kilomètres.

2. Donner une écriture scientifique de la distance entre Bételgeuse et la Terre en kilomètres.

3. Bételgeuse a un rayon environ 1 000 fois plus grand que celui du Soleil. Le Soleil à un rayon d'environ 7×10^{5} km.
Donner l'écriture scientifique du rayon de Bételgeuse en kilomètres.

4. Bételgeuse est une étoile jeune, elle a environ 8×10^{6} a (a désigne le préfixe pour année). Elle devrait disparaître dans les jours qui viennent ou plus surement dans une centaine de millier d'années au maximum. Les scientifiques surveillent cette étoile qui pourrait devenir une supernova ce qui illuminerait le ciel nocturne de la Terre.
Le Soleil a déjà 5×10^{9} a, il en est à la moitié de sa vie.
Comparer les durées de vie de ces deux étoiles et dire combien de fois plus aura existé le Soleil par rapport à Bételgeuse.

Les puissances de 10

Définition

a un nombre quelconque, n un entier supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times ... \times a}_{\text{n fois}}$$

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^3 \neq 2 \times 3$ en effet $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$1^{2\,020} = 1$

$(-1)^{2\,019} = -1$ car 2 019 est impair. $(-1)^{2\,020} = 1$ car 2 020 est pair.

$0^{100} = 0$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

Les puissances de 10

n un entier supérieur ou égal à 2.

$$10^n = \underbrace{10...0}_{\text{n zéros}}$$

Exemples :

$10^2 = 100$ $10^3 = 1\,000$ $10^6 = 1\,000\,000$ $10^9 = 1\,000\,000\,000$

Propriétés et extension de la définition

$10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Pour n un entiers supérieur ou égal à 1,

$$10^{-n} \text{ est l'inverse de } 10^n ; 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Pour n et p deux entiers relatifs,

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $(10^n)^p = 10^{n \times p}$

Préfixe et puissances de 10 :

n	nano	10^{-9}=0,000 000 001	un milliardième
μ	micro	10^{-6}=0,000 001	un millionième
m	milli	10^{-3}=0,001	un millième
c	centi	10^{-2}=0,01	un centième
d	déci	10^{-1}=0,1	un dixième
		10^0=1	
da	déca	10^1=10	une dizaine
h	hecto	10^2=100	une centaine
k	kilo	10^3=1 000	un millier
M	méga	10^6=1 000 000	un million
G	giga	10^9=1 000 000 000	un milliard

Inverses

L'écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

Exemples :

$2\,020 = 2,02 \times 10^3$
$0,007\,8 = 7,8 \times 10^-3$
$1\,234\,567\,890 = 1,23456789 \times 10^9$
$-5 = -5 \times 10^0$
$-0,000\,001\,23 = -1,23 \times 10^{-6}$
$15\,900 \times 10^5 = 1,59 \times 10^9$

Problème :

a

Notes

[1]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »

Chapitre 10

Tout le reste...

I — Enigmes mathématiques

Énigme n° 1 : Suite logique

Compléter la suite logique suivante :

U ; D ; T ; Q ; C ; S ; ?

Énigme n° 3 : Suite logique – Épisode 3

Compléter la suite logique suivante :

1 ; 11 ; 21 ; 1211 ; 111221 ; ?

Notes

[1]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »