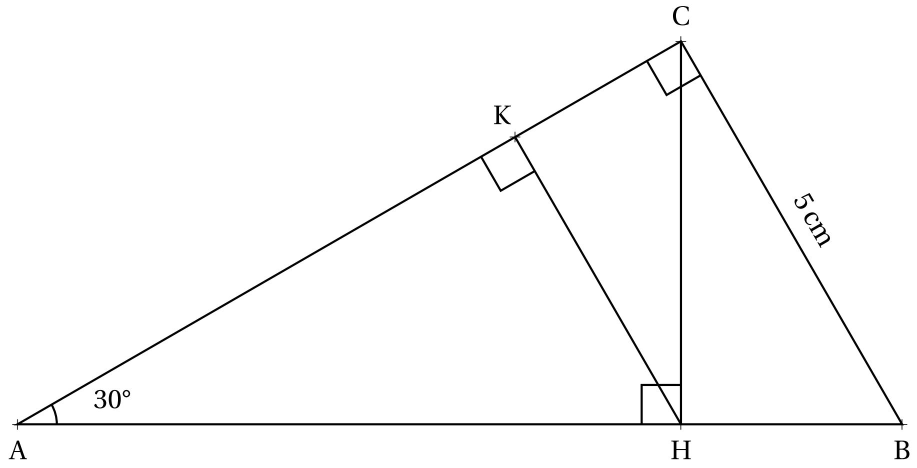
En attendant le brevet ... — Épisode 7

EXERCICE N° 1 — LES TRIANGLES SEMBLABLES — Thalès — Pythagore — Trigonométrie ☆☆☆



1. Montrer que AB = 10 cm.

2.a Calculer AC au dixième de millimètre près en utilisant la trigonométrie.
2.b. Montrer que la valeur exacte de AC vaut $\sqrt{75}$ cm en utilisant le théorème de Pythagore.

3. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle ABC.

4.a. Calculer au dixième de millimètre près les longueurs CH et AH.
4.b. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle AHC.

5.a. Calculer au dixième de millimètre près la longueur HB.
5.b. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle BHC.

6.a. Démontrer que les droites (KH) et (BC) sont parallèles.
6.b. Calculer au dixième de millimètre près les longueurs KH, AK et KC.
6.c. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle KHC et AKH.

7. Indiquer la mesure des angles des triangles ABC, AHC, HBC, HKC et AKH. Que peut-on dire de ces triangles ?

8.a. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer des mesures du triangles BHC à celles du triangle ABC ?
8.b. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer des mesures du triangles AHC à celles du triangle KHC ?
8.c. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'aire du triangle BHC à celle du triangle ABC ?
8.d. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'aire du triangle AHC à celle du triangle KHC ?

EXERCICE N° 2 — LES CHOCOLATS BLANCS ET NOIRS — Arithmétique ☆☆

1. Décomposer en produit facteurs premiers les nombres 7980 et 7140.

2. Simplifier au maximum la fraction $\dfrac{7140}{7980}$.

3. Un chocolatier vient de préparer 7980 chocolats blancs et 7140 chocolats noirs. Il souhaite préparer des sachets tous identiques contenant la même répartition de chocolats.
Combien de sachets pourra-t-il au maximum confectionner et quel sera la répartition dans chaque sachet.

Exercice n° 1 : Les triangles semblables CORRECTION

Théorème de Thalès — Théorème de Pythagore — Trigonométrie

1. Le triangle ABC est rectangle en C.
On connaît le côté opposé à l'angle $\widehat{CAB}$ et on cherche l'hypoténuse.
$\sin 30° = \dfrac{5\,\text{cm}}{AB}$ donc $AB = \dfrac{5\,\text{cm}}{\sin 30°} = 10\,\text{cm}$.

$\boxed{AB = 10\,\text{cm}}$

2.a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on connaît la mesure de l'hypoténuse et on cherche la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
$\cos 30° = \dfrac{AC}{10\,\text{cm}}$ donc $AC = 10\,\text{cm} \times \cos 30° \approx 8{,}66\,\text{cm}$.

$\boxed{AC \approx 8{,}66\,\text{cm au dixième de millimètre près.}}$

2.b. Dans le triangle ABC rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CA^2 + CB^2 = AB^2$$
$$CA^2 + 5^2 = 10^2$$
$$CA^2 + 25 = 100^2$$
$$CA^2 = 100 - 25$$
$$CA^2 = 75$$
$$AC = \sqrt{75}$$
$$AC \approx 8,66$$

$\boxed{AC = \sqrt{75}\text{ cm} \approx 8{,}66\,\text{cm}}$

3. $\boxed{\text{Aire}(ABC) = \dfrac{CA \times CB}{2} \approx \dfrac{8{,}66\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{86{,}6\,\text{mm} \times 50\,\text{mm}}{2} \approx 2165\,\text{mm}^2}$

4.a. Dans le triangle AHC rectangle en H, on connaît l'hypoténuse et on veut le côté opposé.
$\sin 30° = \dfrac{CH}{8{,}66\,\text{cm}}$ soit $\boxed{CH \approx 8{,}66\,\text{cm} \times \sin 30° \approx 4{,}33\,\text{cm}}$

Dans le triangle AHC rectangle en H, on connaît l'hypoténuse et on veut le côté adjacent.
$\cos 30° = \dfrac{AH}{8{,}66\,\text{cm}}$ soit $\boxed{AH \approx 8{,}66\,\text{cm} \times \cos 30° \approx 7{,}50\,\text{cm}}$

4.b. $\boxed{\text{Aire}(AHC) = \dfrac{HA \times HC}{2} \approx \dfrac{7{,}50\,\text{cm} \times 4{,}33\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{75\,\text{mm} \times 43{,}3\,\text{mm}}{2} \approx 1624\,\text{mm}^2}$

5.a. $\boxed{HB = AB - AH = 10\,\text{cm} - 7{,}50\,\text{cm} = 2{,}50\,\text{cm}}$

5.b. $\boxed{\text{Aire}(BHC) = \dfrac{HB \times HC}{2} \approx \dfrac{2{,}50\,\text{cm} \times 4{,}33\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{25\,\text{mm} \times 43{,}3\,\text{mm}}{2} \approx 541\,\text{mm}^2}$

6.a. Les droites (KH) et (CB) sont perpendiculaires à la droite (AC). On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**.

$\boxed{(KH)//(CB)}$

6.b. Les droites (KC) et (HB sont sécantes en A, les droites (KH) et (CB) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{HK}{BC}$$

$$\frac{7{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{AK}{8{,}66\,\text{cm}} = \frac{HK}{5\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AK = \dfrac{8{,}66\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$ d'où $AK = \dfrac{64{,}95\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}}$ et $AK \approx 6{,}50\,\text{cm}$
$HK = \dfrac{5\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$ d'où $HK = \dfrac{37{,}5\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}}$ et $HK \approx 3{,}75\,\text{cm}$

$\boxed{HK \approx 3{,}75\,\text{cm},\ AK \approx 6{,}50\,\text{cm et } KC = AC - AK \approx 8{,}66\,\text{cm} - 6{,}50\,\text{cm} \approx 2{,}16\,\text{cm.}}$

6.c. $\boxed{\text{Aire}(AKH) = \dfrac{KA \times KH}{2} \approx \dfrac{6{,}50\,\text{cm} \times 3{,}75\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{65\,\text{mm} \times 37{,}5\,\text{mm}}{2} \approx 1219\,\text{mm}^2}$

$\boxed{\text{Aire}(KHC) = \dfrac{KH \times KC}{2} \approx \dfrac{3{,}75\,\text{cm} \times 2{,}16\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{37{,}5\,\text{mm} \times 21{,}6\,\text{mm}}{2} \approx 405\,\text{mm}^2}$

7. Dans le triangle ABC rectangle en C,
$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$
$30° + \widehat{ABC} + 90° = 180°$ donc $\widehat{ABC} = 60°$.
Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont complémentaires.

Dans le triangle BHC rectangle en H, les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{BCH}$ sont complémentaires, donc $\widehat{BCH} = 60°$.

Dans le triangle AKH rectangle en K, les angles $\widehat{KAH}$ et $\widehat{AHK}$ sont complémentaires, donc $\widehat{AHK} = 60°$.

Dans le triangle KCH, $\widehat{KHC} = 90° - \widehat{AHK} = 90° - 60° = 30°$.
De plus $\widehat{KHC}$ et $\widehat{KCH}$ sont complémentaires, $\widehat{KCH} = 60°$.

$\boxed{\text{Les triangles ABC, AHC, CHB, KCH et AKH ont des angles à 90°, 60° et 30°, ils sont semblables.}}$

8.abcd Les triangles étant semblables, ils sont des agrandissements ou des réductions les uns des autres.

8.a. $\boxed{\text{En termes de mesures, ABC est deux fois plus grand que le triangle BHC.}}$

8.b. $\boxed{\text{En termes de mesures, KHC est deux fois plus grand que le triangle AHC.}}$

8.c. $\boxed{\text{En termes d'aires, ABC est quatre fois plus grand que le triangle BHC.}}$

8.d. $\boxed{\text{En termes d'aires, KHC est deux fois plus grand que le triangle AHC.}}$

Exercice n° 2 : Les chocolats blancs et noirs CORRECTION

Arithmétique

1.

7 980	2
3 990	2
1 995	3
665	5
133	7
19	19
1	

7 140	2
3 570	2
1 785	3
595	5
119	7
17	17
1	

$\boxed{7\,980 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19 \text{ et } 7\,140 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17}$

2. $\dfrac{7140}{7980} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19} = \boxed{\dfrac{17}{19}}$

3. Nous venons de voir que le nombre $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ est le plus grand diviseur commun de ces deux nombres.
En effet, $7140 = 420 \times 17$ et $7980 = 420 \times 19$.

$\boxed{\text{Il pourra constituer 420 sachets contenant chacun 17 chocolats noirs et 19 chocolats blancs.}}$