Diplôme national du brevet
Session 2021

Mathématiques

Série générale

Asie

21 juin 2021

Durée de l'épreuve : 2h00 — 100 points

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Il comporte 6 pages numérotées de la page 1 sur 6 à la page 6 sur 6.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice n° 1	24 points
Exercice n° 2	21 points
Exercice n° 3	23 points
Exercice n° 4	16 points
Exercice n° 5	16 points

Indications portant sur l'ensemble du sujet.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.
Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche ; elle sera prise en compte dans la notation.

Exercice n° 1 — Un QCM à six questions *24 points*

Pour chacun des six énoncés suivants, écrire sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Il y a une seule réponse correcte par énoncé.
On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Réponse A</th><th>Réponse B</th><th>Réponse C</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Le nombre 126 a pour diviseur</td><td>252</td><td>20</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x^2 - 2$</td><td>L'image de 2 par f est -2</td><td>$f(-2) = 0$</td><td>$f(0) = -2$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Dans la cellule A2 du tableur ci-dessous, on a saisi la formule

$= -5 * \text{A1} * \text{A1} + 2 * \text{A1} - 14$

puis on l'a étirée vers la droite.

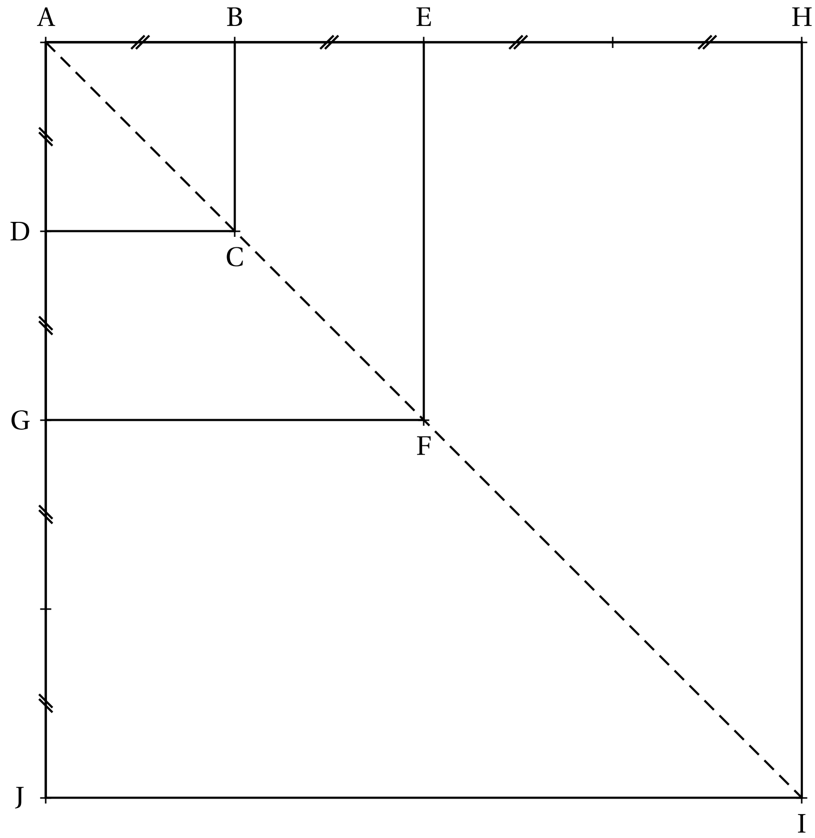
Quel nombre obtient-on dans la cellule B2 ?

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>-4</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-102</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>-65</td><td>205</td><td>25</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Les solutions de l'équation $x^2 = 16$ sont</td><td>-8 et 8</td><td>-4 et 4</td><td>-32 et 32</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>2×2^{400} est égal à</td><td>2^{401}</td><td>4^{400}</td><td>2^{800}</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>La largeur et la hauteur d'une télévision suivent le ratio 16 : 9.
Sachant que la hauteur de cette télévision est de 54 cm, combien mesure sa largeur ?</td><td>94 cm</td><td>96 cm</td><td>30,375 cm</td></tr>
</table>

Exercice n° 2 — Une agrandissement de carré *21 points*

Le quadrilatère ABCD est un carré de côté 1 cm. Il est noté **Carré ❶**.
Les points A, B, E et H sont alignés, ainsi que les points A, D, G et J.
On construit ainsi une suite de carrés (**Carré ❶ — Carré ❷ — Carré ❸ — ...**) en doublant la longueur du côté du carré, comme illustré ci-dessous pour les trois premiers carrés.

La figure n'est pas en vraie grandeur.



Carré ❶ : ABCD

Carré ❷ : ABCD

Carré ❸ : ABCD

1. Calculer la longueur AC.

2. On choisit un carré de cette suite de carrés.
*Aucune justification n'est demandée pour les questions **2.a.** et **2.b.**.*

2.a. Quel coefficient d'agrandissement des longueurs permet de passer de ce carré au carré suivant ?
2.b. Quel type de transformation permet de passer de ce carré au carré suivant ?

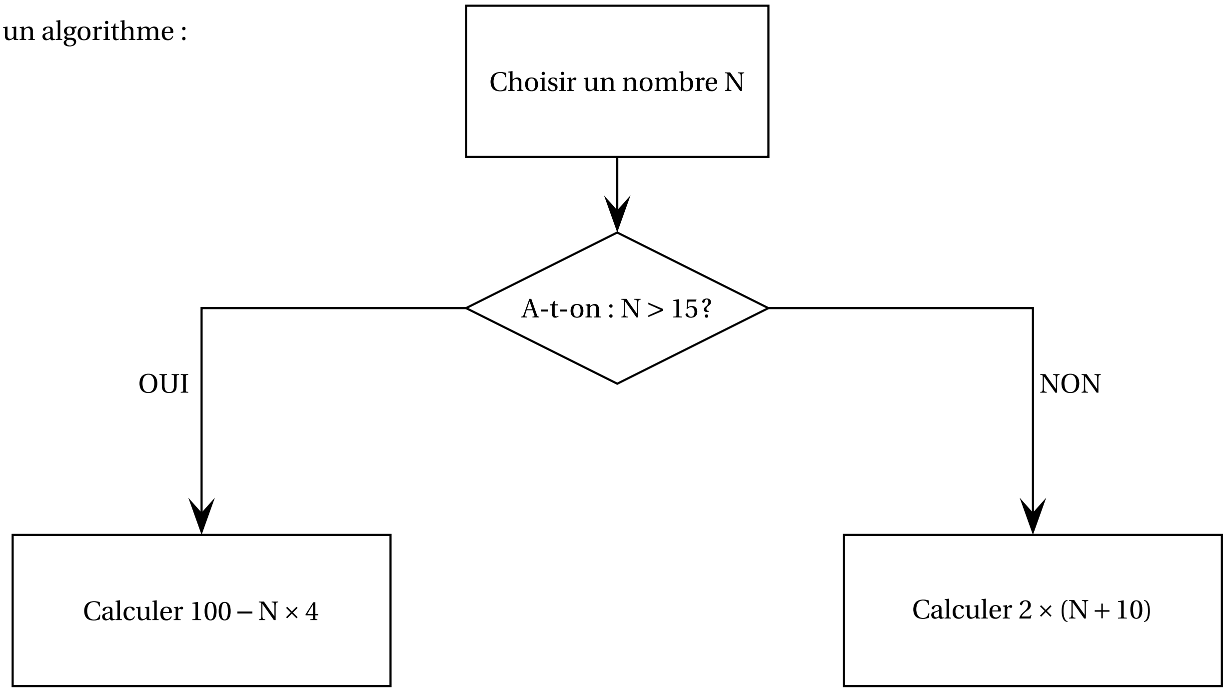
symétrie axiale — homothétie — rotation — symétrie centrale — translation

3. L'affirmation « la longueur de la diagonale du **Carré ❸** est trois fois plus grande que la longueur de la diagonale du **Carré ❶** »est-elle correcte ?

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{\text{AJB}}$ au degré près.

EXERCICE n° 3 — Deux algorithmes *23 points*

Voici un algorithme :

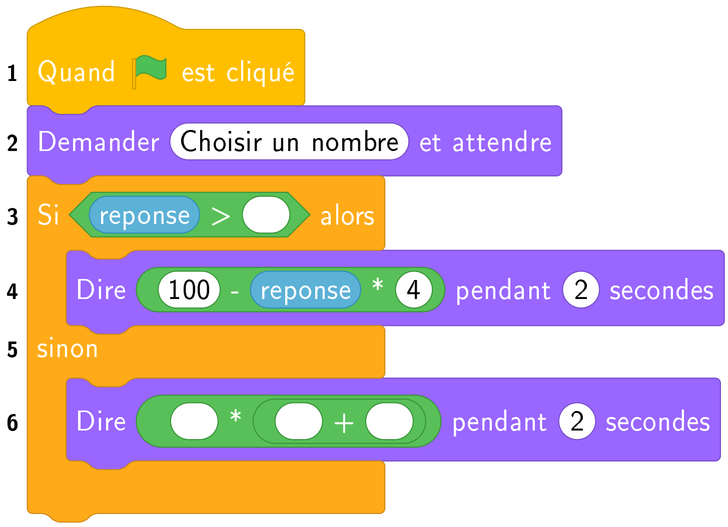


1. Justifier que si on choisit le nombre N de départ égal à 18, le résultat final de cet algorithme est 28.

2. Quel résultat final obtient-on si on choisit 14 comme nombre N de départ ?

3. En appliquant cet algorithme, deux nombres de départ différents permettent d'obtenir 32 comme résultat final. Quels sont ces deux nombres ?

4. On programme l'algorithme précédent :



4.a. Recopier la ligne 3 en complétant les pointillés. **Ligne 3 :** Si Réponse > .... alors

4.b. Recopier la ligne 6 en complétant les pointillés. **Ligne 6 :** Dire .... * (.......... + ...) pendant 2 secondes

5. On choisit au hasard un nombre premier entre 10 et 25 comme nombre N de départ.
Quelle est la probabilité que l'algorithme renvoie un multiple de 4 comme résultat final ?

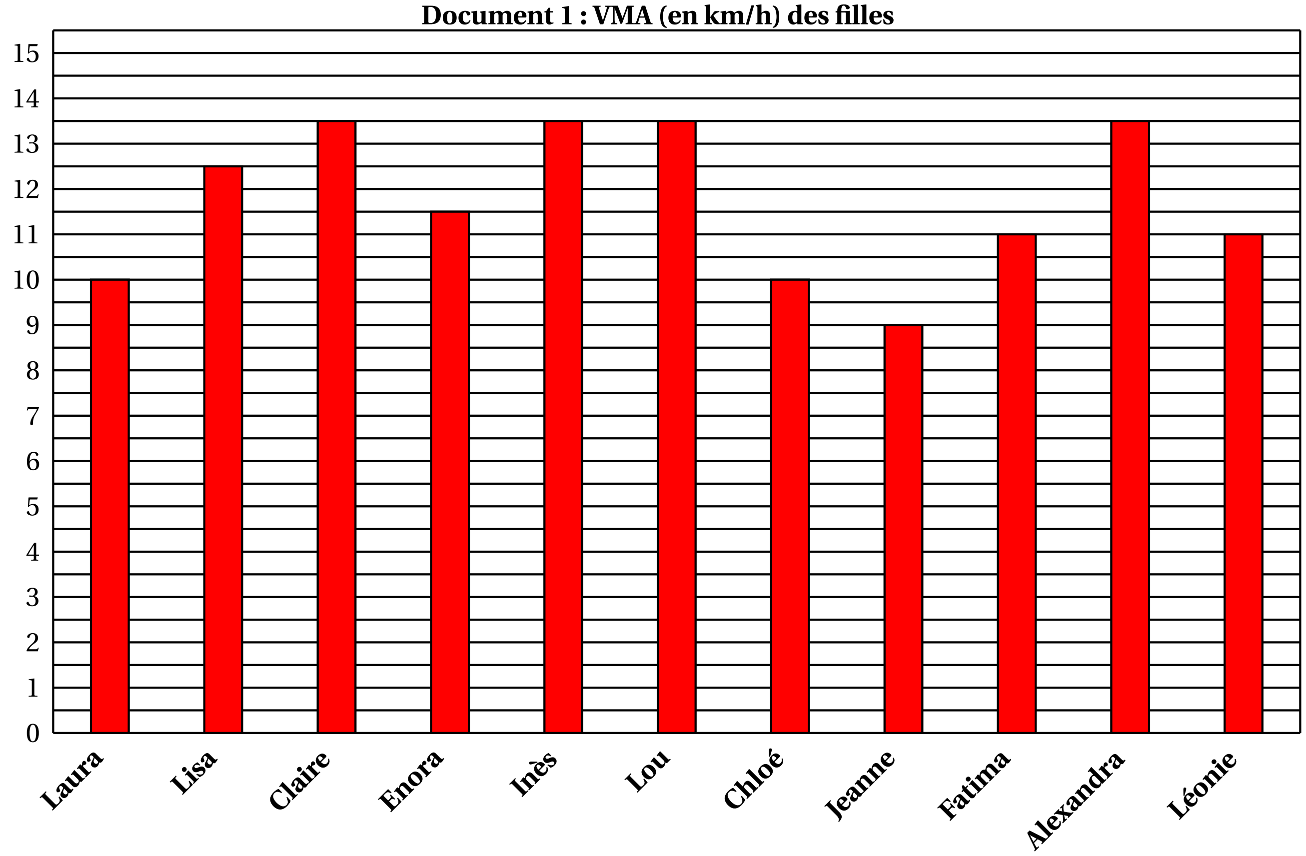
EXERCICE n° 4 — Le test de demi-Cooper *16 points*

En cours d'éducation physique et sportive (EPS), les 24 élèves d'une classe de troisième pratiquent la course de fond.
Les élèves réalisent le test de demi-Cooper : ils doivent parcourir la plus grande distance possible en six minutes.
Chaque élève calcule ensuite sa vitesse moyenne sur cette course. Le résultat obtenu est appelé VMA (Vitesse Maximale Aérobie).

1. Après son échauffement, Chloé effectue ce test de demi-Cooper. Elle parcourt 1 000 m en 6 minutes.
Montrer que sa VMA est égale à 10 km/h.

2. L'enseignante a récolté les résultats et a obtenu les Documents 1 et 2 ci-dessous :

Document 1 : VMA (en km/h) des filles



Document 2 : VMA (en km/h) des garçons

Nathan : 12	Lucas : 11	Jules 14	Abdel : 13,5	Nicolas : 14
Thomas : 14,5	Martin : 11	Youssef : 14	Mathis : 13	Léo : 15
Simon : 12	José : 14	Ilan : 14		

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On rappelle que *toutes les réponses doivent être justifiées.*

2.a. Affirmation n° 1 : l'étendue de la série statistique des VMA des filles de la classe est plus élevée que celle de la série statistique de VMA des garçons de la classe.

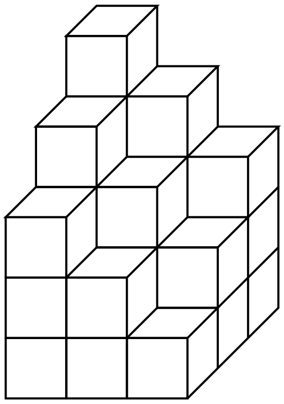
2.b. Affirmation n° 2 : plus de 25 % des ékèves de la classe a une VMA inférieure ou égale à 11,5 km/h.

2.c. L'enseignante souhaite que la moitié de la classe participe à une compétetion. Elle selectionne donc les douze élèves dont la VMA est la plus élevée.
Affirmation n° 3 : Lisa participe à la compétition.

EXERCICE n° 5 — Le pavé droit et les petits cubes *16 points*

Première partie

En plaçant plusieurs cubes unités, on construit ce solide :

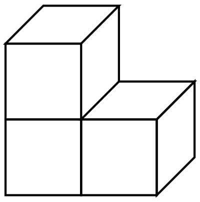


Question : Combien de cubes unités au minimum manque-t-il pour compléter ce solide et obtenir un pavé droit ?

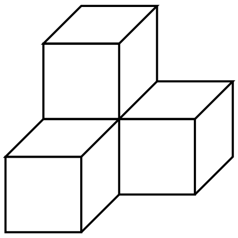
Deuxième partie

Un jeu en 3D contient les sept pièces représentées ci-dessous. Chaque pièce est constituée de cubes identiques d'arête 1 dm.

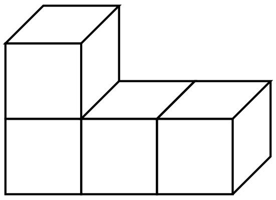
Pièce n° 1
3 cubes



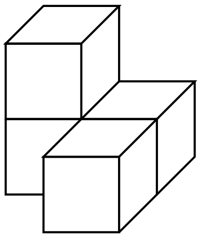
Pièce n° 2
4 cubes



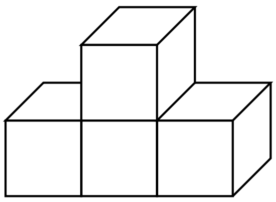
Pièce n° 3
4 cubes



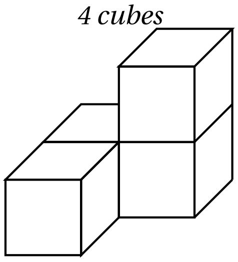
Pièce n° 4
4 cubes



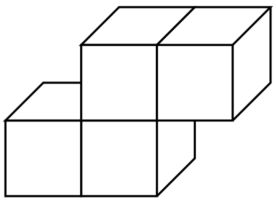
Pièce n° 5
4 cubes



Pièce n° 6
4 cubes



Pièce n° 7
4 cubes



1. Dessiner une vue de dessus de la **Pièce n° 4** (en prenant 2 cm sur le dessin pour représenter 1 dm dans la réalité.

2. À l'aide de la totalité des sept pièces, il est possible de construire un grand cube sans espace vide.

2.a. Quel sera alors le volume en decimètre cube de ce grand cube ?

2.b. Quelle est la longueur d'une arête en décimètre de ce grand cube ?

✂ -

BREVET — 2021 — ASIE — SÉRIE GÉNÉRALE

CORRECTION

Un sujet intéressant et assez original. Le QCM est constitué de six questions touchant des domaines différents dont le ratio et le tableur. Encore un exercice sur les transformations qui sont très à la mode en ce mois de juin 2021. L'exercice d'algorithmique utilise Scratch mais aussi une représentation plus schématique des algorithmes. Les statistiques sont aussi bien représentées. Le dernier exercice sur le cube et le puzzle 3D est très original même si on peut se demander ce qu'il vise comme objectifs pédagogiques !

EXERCICE n° 1 — Un QCM à six questions *24 points*

Arithmétique — Fonction — Tableur — Équation — Puissance — Ratio

Un QCM très complet qui mélange de nombreuses notions. On remarquera un ratio et un tableur.

1. $252 = 126 \times 2$, 252 est un multiple de 126.
$126 = 20 \times 6 + 6$ donc 20 n'est pas un diviseur de 126.
$126 = 6 \times 21$, 6 est un diviseur de 126. **1. — Réponse C**

2. $f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ donc la **Réponse A** est fausse.
$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ donc la **Réponse B** est fausse.
$f(0) = 0^2 - 2 = 0 - 2 = -2$, **2. — Réponse C**

3. L'expression écrite dans le cellule A2 correspond à la fonction $f(x) = -5x^2 + 2x - 14$.
Dans la cellule B2 le nombre utilisé pour le calcul est B1.
Il faut donc calculer $f(-3)$.
$f(-3) = -5 \times (-3)^2 + 2 \times (-3) - 14 = -5 \times 9 - 6 - 14 = -45 - 6 - 14 = -65$.

3. — Réponse A

4. On peut utiliser la leçon et affirmer que les solutions de $x^2 = 16$ sont $-\sqrt{16} = -4$ et $\sqrt{16} = 4$.
On peut aussi refaire la démonstration :

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ x^2 - 16 &= 16 - 16 \\ x^2 - 16 &= 0 \\ x^2 - 4^2 &= 0 \\ (x+4)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

On a factorisé en utilisant l'identité remarquable $(a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$(x-4)(x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$x-4=0$$
$$x-4+4=0+4$$
$$x4$$

$$x+4=0$$
$$x+4-4=0-4$$
$$x=-4$$

Il y a deux solutions : -4 et 4.

$\boxed{\textbf{4. — Réponse B}}$

5. $2\times 2^{400}=2^{1}\times 2^{400}=2^{1+400}=2^{401}$. $\boxed{\textbf{5. — Réponse A}}$.

6. La largeur et la hauteur sont dans un ration 16 : 9, cela signifie que nous avons des grandeurs proportionnelles :

Largeur	16	$\dfrac{16\times 54\,\text{cm}}{9}=96\,\text{cm}$
Hauteur	9	54 cm

On pouvait aussi écrire que $\dfrac{\text{Largeur}}{\text{Hauteur}}=\dfrac{16}{9}$ et on arrive au même résultat.

$\boxed{\textbf{6. — Réponse B}}$

Exercice n° 2 — Une agrandissement de carré *21 points*

Théorème de Pythagore — Agrandissement/réduction — Homothétie — Trigonométrie

Un exercice assez simple et rapide au sujet de l'homothétie. On remarquera une question de trigonométrie pour conclure.

1.
Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{BA}^2+\text{BC}^2=\text{AC}^2$$
$$1^2+1^2=\text{AC}^2$$
$$1+1=\text{AC}^2$$
$$\text{AC}^2=2$$
$$\text{AC}=\sqrt{2}$$
$$\text{AC}\approx 1{,}41$$

$\boxed{\text{Le segment [AC] mesure } \sqrt{2}\text{ cm}\approx 1{,}41\text{ cm.}}$

2.a. On double la longueur à chaque étape. $\boxed{\text{Le coefficient d'agrandissement des longueurs vaut donc 2.}}$

2.b. $\boxed{\text{Il s'agit d'une homothétie de centre A et de rapport 2.}}$

3. Le **Carré ❸** a des longueurs deux fois plus grandes que le **Carré ❷** qui lui même est deux fois plus grand que le **Carré ❶**.

Le **Carré ❸** est donc $2 \times 2 = 4$ fois plus grand que le **Carré ❸**.

$\boxed{\text{Cette affirmation est fausse.}}$

4. Le triangle AJB est rectangle en A.
On sait que le côté opposé à l'angle $\widehat{\text{AJB}}$ est [AB], il mesure AB = 1 cm.
On sait que le côté adjcent à l'angle $\widehat{\text{AJB}}$ est [AJ], il mesure AJ = 4 cm.

$\tan \widehat{\text{AJB}} = \dfrac{1\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = 0,25.$

$\boxed{\text{À la calculatrice on trouve } \widehat{\text{AJB}} \approx 14°.}$

Exercice n° 3 — Deux algorithmes *23 points*

Algorithmique — Scratch — Programme de calcul

*Un exercice d'algorithmique original qui mélange programme de calcul sous forme schématique et Scratch. L'exercice termine sur une question mélant arithmétique et probabilité : ambitieux ! La question **3.** qui demande de résoudre deux équations en fonction de la position de la solution est également délicat.*

1. En prenant N = 18 comme nombre de départ. Comme 18 > 15 il faut calculer $100 - 18 \times 4 = 100 - 72 = 28$

$\boxed{\text{En prenant 18 au départ on obtient bien 28 à la fin.}}$

2. En prenant N = 14 comme nombre de départ. Comme 14 < 15 il faut calculer $2 \times (14 + 10 = 2 \times 24 = 48_{=}$.

$\boxed{\text{En prenant 14 au départ on obtient 48 à la fin.}}$

3. Nous allons résoudre deux équations suivant si N > 15 ou pas :

Si $N \leqslant 15$

$$\begin{aligned}
2 \times (N + 10) &= 32\\
2N + 20 &= 32\\
2N + 20 - 20 &= 32 - 20\\
2N &= 12\\
N &= \frac{12}{2}\\
N &= 6
\end{aligned}$$

On constate que 6 < 15

Si $N > 15$

$$\begin{aligned}
100 - N \times 4 &= 32\\
100 - 4N &= 32\\
100 - 4N - 100 &= 32 - 100\\
-4N &= -68\\
N &= \frac{-68}{-4}\\
N &= 17
\end{aligned}$$

On constate que 17 > 15

$\boxed{\text{6 et 17 sont les deux seuls nombres qui permettent d'obtenir 32 avec ce programme.}}$

4.a. $\boxed{\text{Si Réponse} > 15 \text{ alors}}$

4.b. $\boxed{\text{Dire } 2 * (\text{ Réponse} + 10) \text{ pendant 2 secondes}}$

5. Voici la liste des nombres premiers compris entre 10 et 25 : 11 −−− 13 −−− 17 −−− 19 −−− 23.
Il faut calculer le résultat du programme pour chacun d'entre eux.
Pour $N = 11$, comme $11 < 15$ on obtient $2 \times (11 + 10) = 2 \times 21 = 42$
Pour $N = 13$, comme $13 < 15$ on obtient $2 \times (13 + 10) = 2 \times 23 = 46$
Pour $N = 17$, comme $17 > 15$ on obtient $100 - 17 \times 4 = 100 - 68 = 32$
Pour $N = 19$, comme $19 > 15$ on obtient $100 - 19 \times 4 = 100 - 76 = 24$
Pour $N = 23$, comme $23 > 15$ on obtient $100 - 23 \times 4 = 100 - 92 = 8$

Sur les cinq nombres premiers il y en a trois, 17, 19 et 23 qui donnent un multiple de 4.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{3}{5} = 0,6 \text{ soit } 60\ \%.}$

Exercice n° 4 — Le test de demi-Cooper *16 points*

Statistiques — Pourcentages

Un exercice de statistiques assez complet qui mélange lecture graphique de données et données exhaustives.

1. On sait que dans le calcul d'une vitesse moyenne on considère que la distance et le temps sont proportionnels.

Distance	1 000 m	$\dfrac{60\,\text{min} \times 1\,000\,\text{m}}{6\,\text{min}} = 10\,000\,\text{m}$
Temps	6 min	$1\,\text{h} = 60\,\text{min}$

On pouvait aussi remarquer que $6\,\text{min} \times 10 = 60\,\text{min}$, Chloé va donc parcourir une distance dix fois plus grande en un temps dix fois supérieur.

$\boxed{\text{Elle parcourt } 10\,000\,\text{m en } 1\,\text{h ce qui correspond à une VMA de } 10\,\text{km/h.}}$

2.a. Affirmation n° 1

La VMA maximale des filles vaut 13,5 km/h. La VMA minimale 9 km/h. L'étendue pour les filles vaut $13{,}5\,\text{km/h} - 9\,\text{km/h} = 4{,}5\,\text{km/h}$.
La VMA maximale des garçons vaut 15 km/h. La VMA minimale 11 km/h. L'étendue pour les garçons vaut $15\,\text{km/h} - 11\,\text{km/h} = 4\,\text{km/h}$.

$\boxed{\textbf{Affirmation n° 1} : \text{Vraie}}$

2.b. Affirmation n° 2

Dans cette classe il y a 13 garçons et 11 filles. Chez les filles 5 ont une VMA inférieure à 11,5 km/h. Chez les garçons il y en a 2.
Il y a donc 7 élèves sur 24 qui ont une VMA inférieure à 11,5 km/h.

Or $\dfrac{7}{24} \approx 0,29$ soit 29 %.

Affirmation nº 2 : Vraie

2.c. Affirmation nº 3

Lisa a une VMA de 12,5 km/h. Il y a 4 filles qui ont une VMA supérieure à la sienne et 8 garçons soit 12 élèves en tout. Elle a donc la treizième VMA.

Affirmation nº 3 : Fausse

EXERCICE nº 5 — Le pavé droit et les petits cubes *16 points*

Volume — Cube —

Un exercice très original au sujet du cube. Un puzzle en 3D!

Première partie

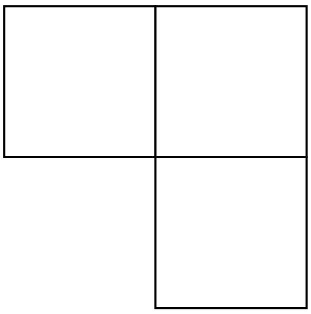
Question :
Le pavé que l'on cherche à construire mesure 3 unités sur 3 unités sur 5 unités.
Son volume en unité cube vaut donc exactement $3 \times 3 \times 5 = 45$ unités cube.

On peut compter le nombre de cubes unités présents dans le solide. On peut compter les lignes de la face de devant vers la face de derrière.
$6 + (6 + 3) + (6 + 3) + 3 = 27$ cubes unités. Il en manque donc $45 - 27 = 18$.

Il manque 18 cubes unités à ce solide pour faire un pavé.

Deuxième partie

1. Voici le dessin de la **Pièce nº 4** en vue de dessus :



2.a. Il suffit de compter le nombre de cubes unités pour les sept pièces.

Il y a $3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 27$ cubes unités, soit un volume de 27 dm^3

2.b. En notant x la mesure du côté du cube en décimètre. Il faut trouver un nombre x tel que $x^3 = 27$.

On ne sait pas résoudre une telle équation en troisième.

On peut supposer que le côté de ce cube est un nombre entier. Testons quelques nombres entiers :
$1^3 = 1$ — $2^3 = 8$ — $3^3 = 27$ — $4^3 = 64$

Le côté du cube mesure 3 dm.