Diplôme national du brevet
Session 2021

Mathématiques

Série générale

Polynésie Française

25 juin 2021

Durée de l'épreuve : 2h00 100 points

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Il comporte 7 pages numérotées de la page 1 sur 7 à la page 7 sur 7.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice n° 1	22 points
Exercice n° 2	16 points
Exercice n° 3	21 points
Exercice n° 4	19 points
Exercice n° 5	22 points

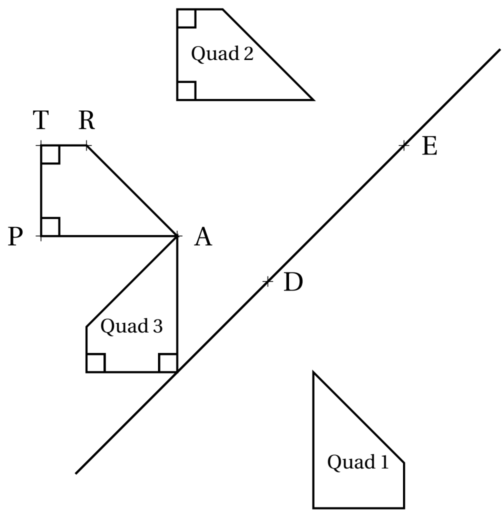
Indications portant sur l'ensemble du sujet.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.
Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche ; elle sera prise en compte dans la notation.

EXERCICE nº 1 — Cinq questions indépendantes *22 points*

Cet exercice est constitué de 5 questions indépendantes.

1. Sur la figure ci-dessous, chacun des quadrilatères Quad 1, Quad 2 et Quad 3 est l'image du quadrilatère TRAP par une transformation.



Recopier les trois phrases ci-dessous sur la copie et compléter, sans justifier, chacune d'elles par le numéro de l'une des transformations proposées dans la liste qui suit :
1.a. Le quadrilatère **Quad 1** est l'image du quadrilatère TRAP par la transformation numéro ....
1.b. Le quadrilatère **Quad 2** est l'image du quadrilatère TRAP par la transformation numéro ....
1.c. Le quadrilatère **Quad 3** est l'image du quadrilatère TRAP par la transformation numéro ....

- **Transformation nº 1 :** translation qui transforme le point D en le point E ;
- **Transformation nº 2 :** rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ;
- **Transformation nº 3 :** symétrie centrale de centre D ;
- **Transformation nº 4 :** translation qui transforme le point E en le point D ;
- **Transformation nº 5 :** rotation de centre A et d'angle 120° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ;
- **Transformation nº 6 :** symétrie axiale d'axe (DE).

2. Développer et réduire l'expression suivante : $(2x-3)(-5+2x)-4+6x$

3. Résoudre l'équation suivante : $(x+6)(5x-2)=0$

4.a. Décomposer, sans justifier, en produit de facteurs premiers les nombres 1 386 et 1 716.

4.b. En déduire la forme irréductible de la fraction $\dfrac{1386}{1716}$

5. Les coordonnées géographiques de la ville appelée Jokkmokk sont environ : 67° Nord et 19° Est.
Placer approximativement la ville de Jokkmokk sur la planisphère en ANNEXE à rendre avec la copie.

EXERCICE n° 2 — Le professeur joue avec ses élèves *16 points*

Un professeur propose un jeu à ses élèves.
Ils doivent tirer un jeton dans la boîte de leur choix et gagnent lorsqu'ils tombent sur un jeton noir. Le professeur précise que :

— La boîte A contient 10 jetons dont 1 jeton noir ;

— La boîte B contient 15 % de jetons noirs ;

— La boîte C contient exactement 350 jetons blancs et 50 jetons noirs.

Les jetons sont indiscernables au toucher. Une fois que l'élève a choisi sa boîte, le tirage se fait au hasard.

1. Montrer que, dans la boîte C, la probabilité de tirer un jeton noir est $\frac{1}{8}$.

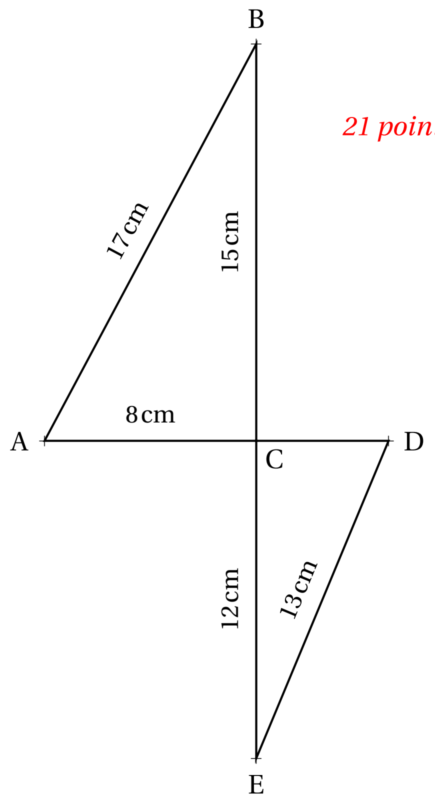
2. C'est le tour de Maxime. Dans quelle boîte a-t-il intérêt à tenter sa chance ? Justifier la réponse.

3. La boîte B contient 18 jetons noirs. Combien y-a-t-il de jetons dans cette boîte ?

4. On ajoute 10 jetons noirs dans la boîte C. Déterminer le nombre de jetons blancs à ajouter dans la boîte C pour que la probabilité de tirer un jeton noir reste égale à $\frac{1}{8}$.

EXERCICE n° 3 — Thalès, Pythagore et un peu de trigonométrie *21 points*

Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur, le point C est le point d'intersection des droites (BE) et (AD).



1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

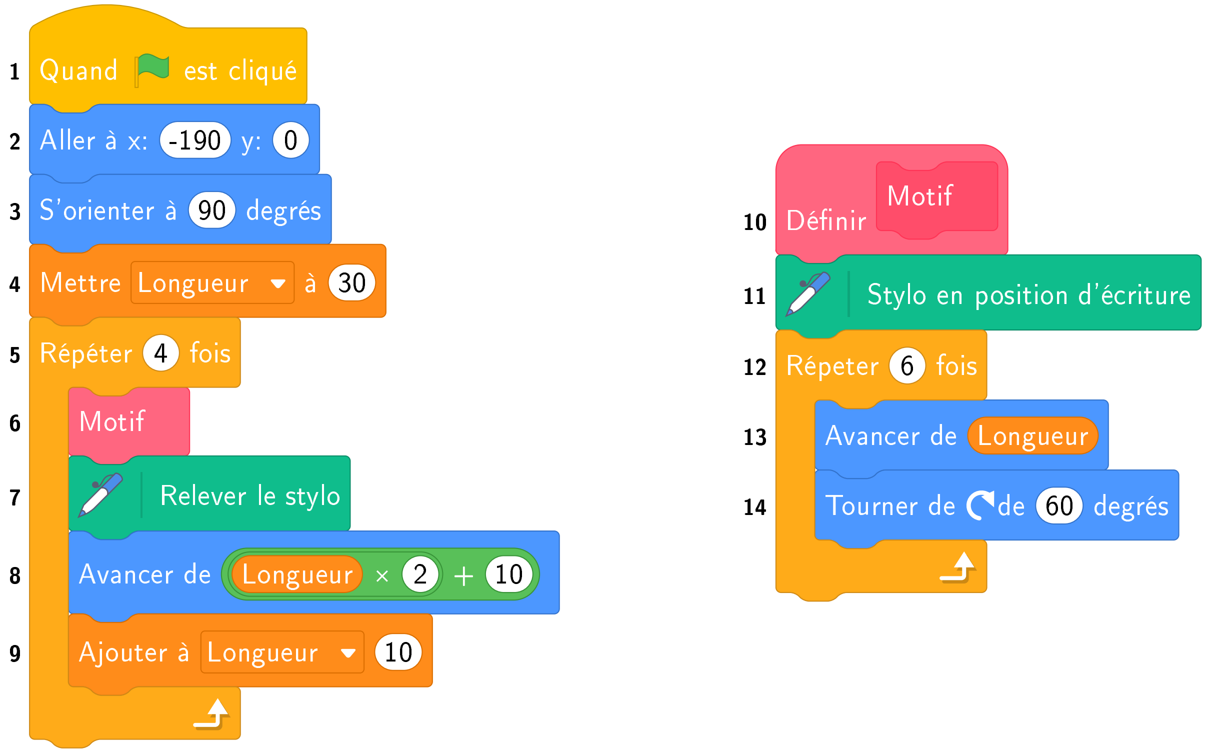
3. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

4. Calculer le périmètre du triangle CDE.

5. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 4 — Des hexagones avec Scratch *19 points*

1. On donne le programme suivant :



On rappelle que « s'orienter à 90 »signifie que l'on est orienté vers la droite.

1. On prendra dans cette question 1 mm pour un pixel.
Représenter en vraie grandeur sur votre copie la figure que trace le bloc **Motif** lorsque **Longueur** vaut 30 pixels.

2. Ce programme utilise une variable, quel est son nom ?
À quoi correspond-elle sur la figure réalisée par le bloc **Motif** ?

3. Laquelle de ces trois figures obtient-on lorsqu'on exécute ce programme ?
Indiquer sur votre copie le numéro de la bonne proposition parmi les trois suivantes. On expliquera son choix.

Figure n° 1

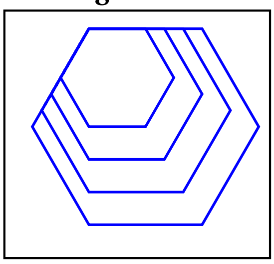


Figure n° 2

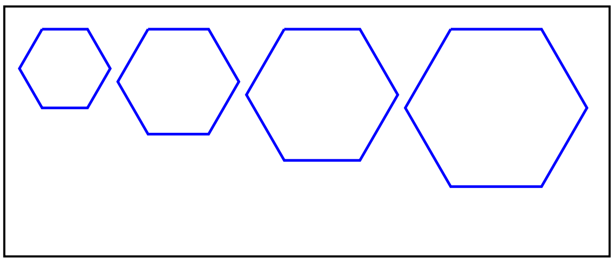
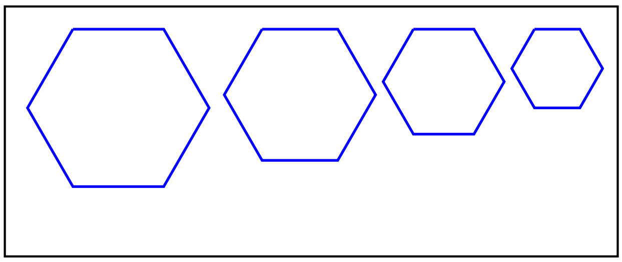
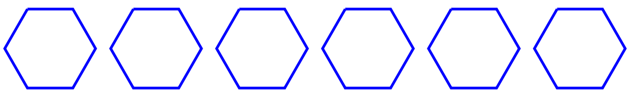


Figure n° 3



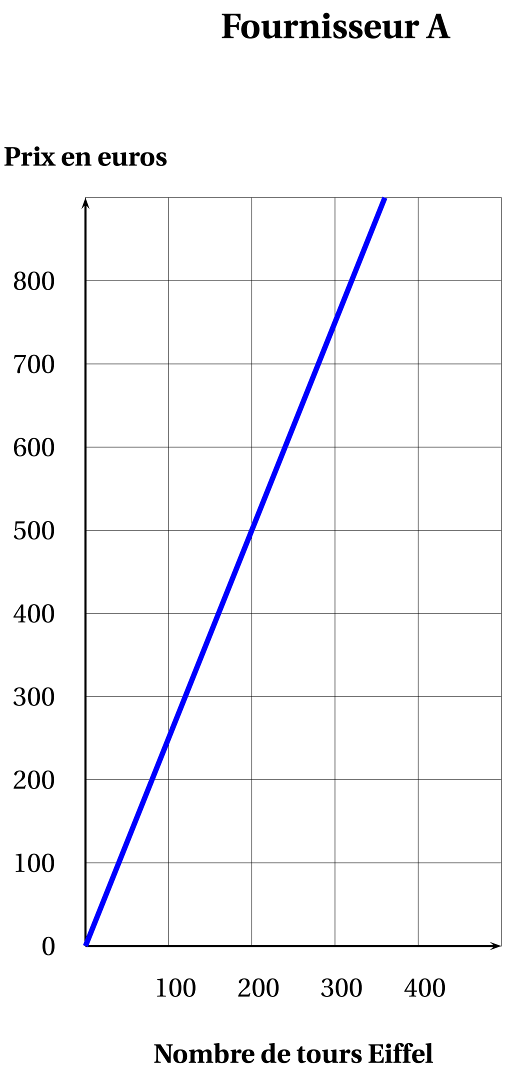
4. Modifier le programme précédent pour obtenir la figure ci-dessous. Pour cela indiquer les numéros des instructions à supprimer ou à modifier, et préciser les modifications à apporter :

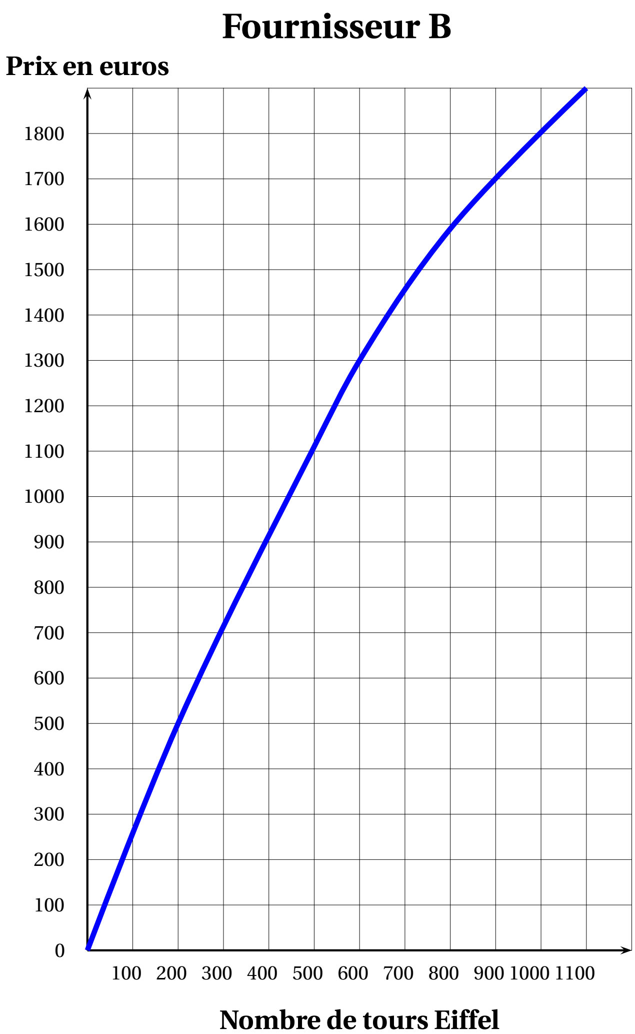


5. On souhaite modifier le bloc **Motif** afin qu'il permette de tracer un carré. Pour cela, indiquer les numéros des instructions à supprimer ou à modifier, et préciser les modifications à apporter.

EXERCICE n° 5 — Les Tours Eiffel miniatures *22 points*

Nora veut ouvrir un magazin de souvenirs à Paris et proposer à la vente des tours Eiffel miniatures. Elle contacte deux fournisseurs qui lui envoient chacun sous forme de graphiques le prix à leur payer en fonction du nombre de tours Eiffel achetées.





1. Par lecture graphique, avec la précision qu'elle permet, et sans justification.
1.a. Déterminer le prix à payer pour acheter 200 tours Eiffel chez le fournisseur A.
1.b. Nora a dépensé 1 300 € chez le fournisseur B. Combien de tours Eiffel lui a-t-elle achetées ?

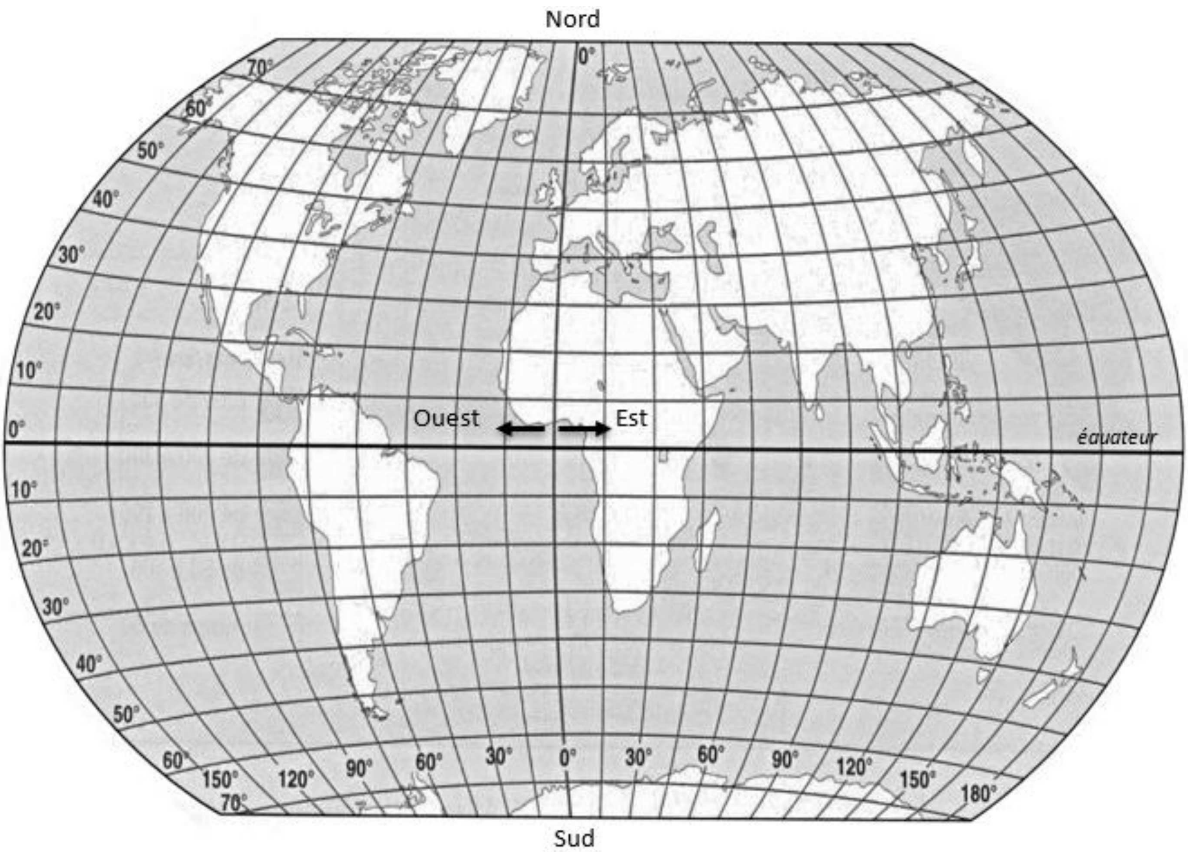
2. Ces fournisseurs proposent-ils des prix proportionnels au nombre de tours Eiffel achetées ?

3.a. Pour le fournisseur A, on admet que le prix des tours Eiffel est donné par la fonction linéaire f représentée ci-dessus. En particulier, $f(100) = 250$. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
3.b. Calculer $f(1\,000)$.
3.c. Nora veut acheter 1 000 tours Eiffel. Quel est le fournisseur le moins cher dans ce cas-là ?

4. Nora contacte un troisième fournisseur, le fournisseur C, qui lui demande un paiement initial de 150 € pour avoir accès à ses articles, en plus d'un prix unitaire de 2 € par tour Eiffel.
4.a. Remplir le tableau des tarifs sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.
4.b. Avec 580 €, combien de tour Eiffel peut acheter Nora chez le fournisseur C ?
4.c. Résoudre l'équation suivante : $2,5x = 150 + 2x$. Expliquer à quoi correspond la solution trouvée.

ANNEXES à rendre avec votre copie

Exercice 1 — 5.



Exercice 5 — 4.a

Nombre de tours Eiffel	1	100	200	1 000	x
Prix payés avec le fournisseur C	152 €	350 €			

Brevet — 2021 — Polynésie Française — Série générale

Correction

Un sujet très complet. Le premier exercice fait travailler les transformations. Le troisième exercice de géométrie permet de réviser efficacement les grands classiques de troisième. Le Scratch n'est pas si facile avec la construction d'un hexagone régulier. Le dernier exercice permet de lire deux fonctions et de travailler les fonctions linéaires et les équations.

Exercice n° 1 — Cinq questions indépendantes

22 points

Transformations — Développer — Équation-produit — Arithmétique — Coordonnées géographiques

Une compilation de cinq exercices très variés. La dernière question est originale, il faut placer une ville connaissant ses coordonnées géographiques.

1.a. Le quadrilatère **Quad 1** est l'image du quadrilatère TRAP par la transformation numéro **6**

1.b. Le quadrilatère **Quad 2** est l'image du quadrilatère TRAP par la transformation numéro **1**

1.c. Le quadrilatère **Quad 3** est l'image du quadrilatère TRAP par la transformation numéro **2**

2. $(2x-3)(-5+2x)-4+6x=-10x+4x^2+15-6x-4+6x=\boxed{4x^2-10x+9}$

$$(x+6)(5x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$x-6=0$$
$$x-6+6=0+6$$
$$x6$$

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=0+2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}$$
$$x=0,4$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{x=6 \text{ et } x=0,4}$

4.a.

1386	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

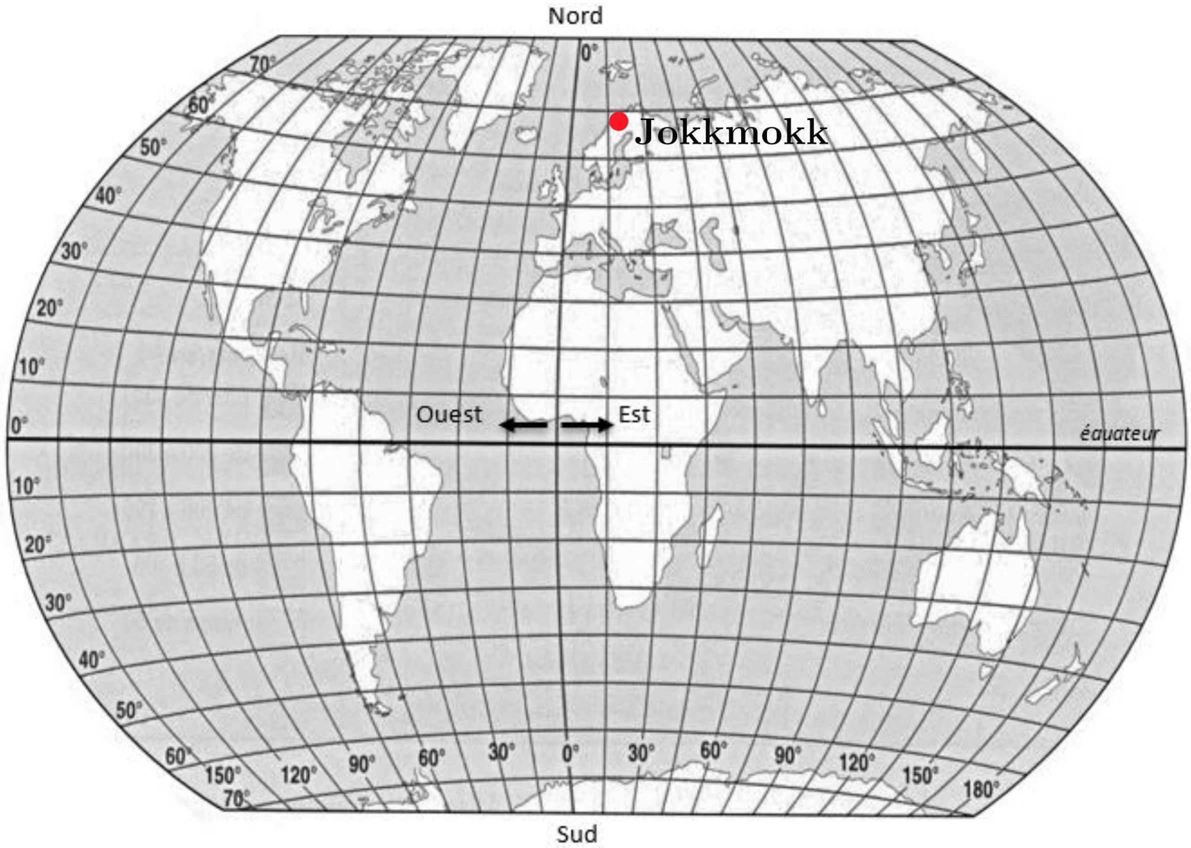
1716	2
858	2
429	3
143	11
13	13
1	

$\boxed{1386=2\times3\times3\times3\times7\times11}$

$\boxed{1716=2\times2\times3\times11\times13}$

4.b. $\dfrac{1386}{1716}=\dfrac{2\times3\times3\times3\times7\times11}{2\times2\times3\times11\times13}=\dfrac{3\times3\times7}{2\times13}=\boxed{\dfrac{63}{26}}$

5.



EXERCICE n° 2 — Le professeur joue avec ses élèves *16 points*

Probabilités

Un exercice de probabilités assez classique. La dernière question est assez difficile.

1. Nous supposerons que nous sommes **dans une situation d'équiprobabilité** c'est-à-dire une expérience aléatoire où toutes les issues élémentaires sont équiprobables.
Dans la boîte C il y a $350 + 50 = 400$ jetons dont 50 jetons noirs.
La probabilité d'obtenir un jeton noir est donc $\dfrac{50}{400} = \dfrac{1 \times 50}{8 \times 50} = \dfrac{1}{8}$.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est donc bien } \dfrac{1}{8}.}$

2. Nous supposons à nouveau que chacune des expériences aléatoires qui consistent à piocher un jeton dans une boule sont des **situations d'équiprobabilité**.

Dans la Boite A, il y a 10 jetons dont 1 noirs et la probabilité d'obtenir un jeton noir est $\dfrac{1}{10} = 0,10$ soit 10 %.

Dans la Boîte B, la probabilité d'obtenir un jeton noir est 15 %.

Dans la Boîte C, la probabilité est de $\dfrac{1}{8} = 0,125$ soit $12,5$ %.

$\boxed{\text{Maxime a intérêt à choisir le Boite B}}$

3. Il y a 18 jetons noirs dans la Boîte B ce qui représente 15 % du total.
On peut uiliser un tableau pour écrire ces grandeurs proportionnelles :

Jetons	18	$\dfrac{100 \times 18}{15} = 120$
Pourcentage	15	100

Il y a 120 jetons dans cette boîte.

4. Dans la Boîte C il y a 50 jetons noirs et 350 jetons blancs. En ajoutant 10 jetons noirs dans la boîte, il y a 60 jetons noirs et 410 jetons au total.

On peut raisonner de deux manières différentes :
Il faut qu'un huitième des jetons de cette boîte soient noirs. Il y a 60 jetons noirs, il faut qu'il y ait huit fois plus de jetons en tout, c'est-à-dire $8 \times 60 = 480$ jetons.
Il y a 410 jetons pour l'instant, il faut donc ajouter 70 jetons blancs.

On peut aussi raisonner à l'aide d'une équation :
On pose x le nombre de jetons blanc à rajouter. Il y aura ainsi $410+x$ jetons dont 60 noirs. On veut que $\dfrac{60}{410+x} = \dfrac{1}{8}$.

Résolvons cette équation, nous allons utiliser la propriété des produits en croix, elle affirme que **deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.**

$$\begin{aligned}
\frac{60}{410+x} &= \frac{1}{8} \\
(410+x) \times 1 &= 60 \times 8 \quad \text{Égalité des produits en croix} \\
410+x &= 480 \\
410+x-410 &= 480-410 \\
x &= 70
\end{aligned}$$

Vérifions :
En ajoutant 70 jetons blanc, il y aura 480 jetons dont 60 noirs et $\dfrac{60}{480} = \dfrac{1 \times 60}{8 \times 60} = \dfrac{1}{8}$.

Il faut ajouter 70 jetons blancs.

Exercice n° 3 — Thalès, Pythagore et un peu de trigonométrie *21 points*

Pythagore — Thalès — Trigonométrie

Un exercice très complet qui mélange de nombreuses notions de géométrie. Parfait pour les révisions.

1. Comparons $CA^2 + CB^2$ et AB^2 :

$CA^2 + CB^2$	$64 + 225$
$8^2 + 15^2$	289

17^2

AB^2 289

Comme

$$CA^2 + CB^2 = AB^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en C}}$.

2. Pour calculer l'aire d'un triangle il faut appliquer la formule Aire du triangle $= \dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$.

Comme ABC est rectangle en C, Aire $= \dfrac{CA \times CB}{2} = \dfrac{8\,\text{cm} \times 15\,\text{cm}}{2} = \boxed{60\,\text{cm}^2}$

3. Dans le triangle BAC rectangle en C, on connaît l'hypoténuse, le côté adjacent et le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.
On peut calculer au choix :

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{8\,\text{cm}}{17\,\text{cm}}$ $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{15\,\text{cm}}{17\,\text{cm}}$ $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{15\,\text{cm}}{8\,\text{cm}}$

Dans les trois cas précédents, à la calculatrice on arrive à $\boxed{\widehat{BAC} \approx 62°}$

4. Il manque la longueur CD.
Comme le triangle ABC est rectangle en C, les droites (BE) et (AD) sont perpendiculaires.
Ainsi CDE est un triangle rectangle en C.

Dans le triangle CDE rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CD^2 + CE^2 = DE^2$$
$$CD^2 + 12^2 = 13^2$$
$$CD^2 + 144 = 169$$
$$CD^2 = 169 - 144$$
$$CD^2 = 25$$
$$CD = \sqrt{25}$$
$$CD = 5$$

$\boxed{\text{Le périmètre de CDE vaut } 5\,\text{cm} + 12\,\text{cm} + 13\,\text{cm} = 30\,\text{cm}}$

5. Comparons les quotients $\dfrac{CA}{CD}$ et $\dfrac{CB}{CE}$.

$\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{8\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = 1{,}4$ $\dfrac{CB}{CE} = \dfrac{15\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = 1{,}25$

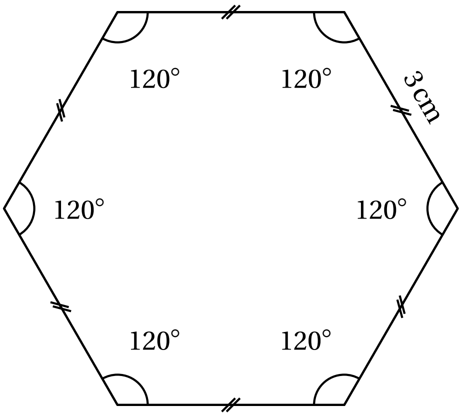
Comme $\dfrac{CA}{CD} \neq \dfrac{CB}{CE}$, d'après **le théorème de Thalès** (contraposé), $\boxed{\text{les droites (AB) et (ED) ne sont pas parallèles.}}$

Exercice n° 4 — Des hexagones avec Scratch *19 points*

Scratch

Un Scratch assez difficile avec un hexagone régulier dont la construction n'est pas si simple.

1. Ce **Motif** trace un hexagone de 30 pixels de côté. Comme 1 mm correspond à 1 pixel, il faut tracer un hexagone de 3 cm de côté.



On peut tracer cet hexagone en traçant un cercle de rayon 3 cm et en reportant le rayon 6 fois sur le cercle (comme une rosace !).
On peut aussi utiliser l'angle à 120°.

2. Ce programme utilise la variable **Longueur**.

Cette variable correspond à la longueur en pixel du côté de l'hexagone.

3. Dans le programme principal, on relève le stylo entre chaque motif. Il ne peut pas s'agir de la **Figure nº 1**.
Dans le programme principal, la variable **Longueur** augmente de 10 pixels entre chaque **Motif**. Donc le **Motif** devient de plus en plus grand.

Il s'agit de la **Figure nº 2**.

4. Il s'agit de 6 fois le premier **Motif**. Il ne faut pas modifier la longueur et donc supprimer la ligne 9.
Il faut aussi répéter 6 fois et non pas 4 en modifiant la ligne 5.

Supprimer la ligne 9 et modifier la ligne 5 en remplaçant 4 par 6.

5. Il faut modifier la ligne 12 en remplaçant 6 par 4.
Il faut modifier la ligne 14 en remplaçant 60 par 90.

EXERCICE nº 5 — Les Tours Eiffel miniatures *22 points*

Lecture graphique — Fonction linéaire — Équations du premier degré

Un exercice complet sur la fonction linéaire et la lecture graphique. La fin permet de résoudre deux équations

1.a. Pour l'achat de 200 tours Eiffel, le fournisseur A demande 500 € .
1.b. Pour 1 600 € , Nora peut acheter 600 tours Eiffel chez le fournisseur B.

2. On sait que **la représentation graphique de deux grandeurs proportionnelles est caractérisée par une droite qui passe par l'origine du repère.**

Seul le fournisseur A propose un prix proportionnel au nombre de tours Eiffel achetées.

3.a. On veut déterminer le coefficient de la fonction linéaire.
Plus précisément, on cherche le nombre a tel que $f(x) = ax$ donc comme $f(100) = 250$, tel que $a \times 100 = 250$ c'est-à-dire $a = \dfrac{250}{100} = 2,5$.

Ainsi $\boxed{f(x) = 2,5x}$.

3.b. On peut calculer $f(1\,000 = 2,5 \times 1\,000 = 2\,500$

On peut aussi la linéarité de la fonction linéaire, c'est-à-dire le fait que l'image est proportionnelle à l'antécédent.
Plus précisément, $f(100) = 250$ et comme $1\,000 = 10 \times 100$ ainsi $f(1\,000 = 10 \times f(100) = 10 \times 250 = 2\,500$.

$\boxed{f(1\,000 = 250}$

3.c. Pour le fournisseur A, Nora va payer 2 500 € .
Par lecture graphique, pour le fournisseur B, Nora va payer environ 1 800 € .

$\boxed{\text{Pour 1 000 tours Eiffel, le fournisseur le moins cher est le fournisseur B.}}$

4.a.
Pour 200 tours Eiffel, il faut calculer : 150 € +2 € ×200 = 150 € +400 € = 550 € .
Pour 1 000 tours Eiffel, il faut calculer : 150 € +2 € ×1 000 = 150 € +2 000 € = 2 150 € .
Pour x tours Eiffel, il faut calculer : $150 + 2 \times x = 150 + 2x$.

Nombre de tours Eiffel	1	100	200	1 000	x
Prix payés avec le fournisseur C	152 €	350 €	550 €	2 150 €	$150 + 2x$

4.b. Il faut déterminer le nombre de tours Eiffel x tel que $150 + 2x = 580$.

$$\begin{aligned}
150 + 2x &= 580 \\
150 + 2x - 150 &= 580 - 150 \\
2x &= 430 \\
x &= \frac{430}{2} \\
x &= 215
\end{aligned}$$

Vérifions : pour 215 tours Eiffel on paye : 150 € +2 € ×215 = 150 € 430 € = 580 € .

$\boxed{\text{Avec 580 € , Nora peut acheter 215 tours Eiffel chez le fournisseur C.}}$

4.c. Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned}
2,5x &= 150 + 2x \\
2,5x - 2x &= 150 + 2x - 2x \\
0,5x &= 150 \\
x &= \frac{150}{0,5} \\
x &= 300
\end{aligned}$$

L'expression $150 + 2x$ correspond au prix du fournisseur C pour un nombre x de tours Eiffel achetées.
L'expression $2,5x$ correspond au prix du fournisseur A pour un nombre x de tours Eiffel achetées.

Ce nombre 300 correspond au nombre de tour Eiffel pour lequel le tarif du fournisseur A fait payer le même prix que le fournisseur C.

Pour 300 tour Eiffel, les prix de fournisseurs A et du fournisseur C sont égaux.

On ne peut pas préciser lequel des deux fournisseurs est le plus intéressant à partir de 300 *tours Eiffel. Il faudrait résoudre une inéquation, ce qui ne fait plus partie des attendus de troisième. On peut cependant signaler qu'à partir de* 300*, la fonction affine qui représente le prix du fournisseur C devient plus intéressant que celui de la fonction linéaire qui représente le fournisseur A.*