

EXERCICE N° 3 : Décomposition en produit de facteurs premiers



1. Décomposer les nombres 6 120 et 5 712 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire la liste des diviseurs communs à ces deux nombres entiers.
3. Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.
4. Simplifier la fraction $\frac{5712}{6120}$.
5. Un confiseur vient de recevoir 6120 dragées à la violette et 5712 galets de la Garonne. Il souhaite répartir tous les bonbons en sachets comprenant la même répartition de bonbons de deux sortes.
Quel est le nombre maximal de sachets qu'il peut composer et quelle est la répartition de chaque sachet?



EXERCICE N° 3 : Calcul numérique— Nombres entiers, arithmétique

CORRECTION

Décomposition en produit de facteurs premiers

1.

6 120	2
3 060	2
1 530	2
765	3
255	3
85	5
17	17
1	

5 712	2
2 856	2
1 428	2
714	2
357	3
119	7
17	17
1	

$$6120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17$$

$$5712 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 17$$

$$6120 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17$$

$$5712 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 17$$

2. *Il faut faire toutes les combinaisons des facteurs premiers.*

Diviseurs de 6 120 : 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 8 — 9 — 10 — 12 — 15 — 17 — 18 — 20 — 24 — 30 — 34 — 36 — 40 — 45 — 51 — 60 — 68 — 72 — 85 — 90 — 102 — 120 — 136 — 153 — 170 — 180 — 204 — 255 — 306 — 360 — 340 — 408 — 510 — 612 — 680 — 765 — 1 020 — 1 224 — 1 530 — 2 040 — 3 060 — 6 120

Diviseurs de 5 712 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 7 — 8 — 12 — 14 — 16 — 17 — 21 — 24 — 28 — 34 — 42 — 48 — 51 — 56 — 68 — 84 — 102 — 112 — 119 — 136 — 168 — 204 — 238 — 272 — 336 — 357 — 408 — 476 — 714 — 816 — 952 — 1 428 — 1 904 — 2 856 — 5 712

On peut calculer à l'avance le nombre de diviseurs d'un nombre en observant la décomposition en facteurs premiers. Par exemple pour 6 120 le nombre premier 2 apparaît trois fois, le nombre 3 deux fois, le nombre 5 une fois et le nombre 17 une fois.

Un diviseur est une combinaison multiplicative de ces nombres.

On peut donc choisir de prendre 2, zéro fois, une fois, deux fois ou trois fois, soit quatre possibilités. Le 3 peut être choisi zéro fois, une fois ou deux fois soit trois possibilités. Le 5 zéro fois ou une fois comme pour le 17.

Il y a donc $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ manières de les combiner.

De même pour 5 712, il y a cinq possibilités pour le 2, deux pour le 3, deux pour le 7 et deux pour le 17 soit $5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$ manière de les combiner.

Ce résultat n'est pas au programme du brevet!

3. Le plus grand diviseur commun est 408

La méthode la plus rapide pour obtenir ce nombre est l'algorithme d'Euclide, mais il n'est pas au programme du brevet.

On aurait en effet par division euclidienne successive :

$$6120 = 5712 \times 1 + 408$$

$$5712 = 408 \times 14 + 0$$

Et on obtient ainsi le plus grand diviseur commun.

4. $\frac{5712}{6120} = \frac{408 \times 14}{408 \times 15} = \frac{14}{15}$

5. Cela revient à utiliser le plus grand diviseur commun au deux nombres : 408.

Comme $6120 = 408 \times 15$ et que $5712 = 408 \times 14$ on en déduit que :

Il y aura 408 sachets contenant 15 dragées à la violette et 14 galets de la Garonne chacun.