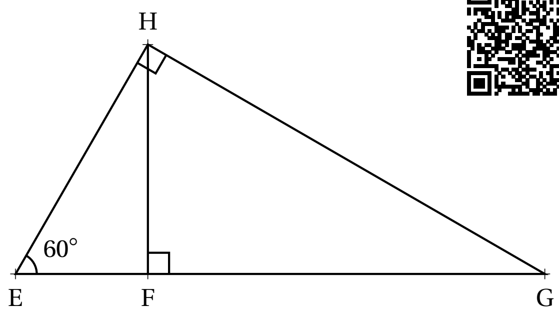
GÉOMÉTRIE PLANE — **BASES DE LA GÉOMÉTRIE**

EXERCICE Nº 45 : Triangles semblables



La figure ci-contre n'est pas dessinées en vraie grandeur.

- EHG est rectangle en H ;
- F ∈ [EG] ;
- EG = 10 cm.

1. Calculer la mesure des angles : $\widehat{EFH}$, $\widehat{EHF}$, $\widehat{HGF}$ et $\widehat{FHG}$.

2. En déduire que les triangles EHG, EHF et HFG sont semblables.

3. Calculer les longueurs : EH, HG, EF, FG et FH.

4. Déterminer le coefficient d'agrandissement réduction qui permet de passer du triangle EHG au triangle HFG, puis celui qui permet de passer du triangle EHG au triangle HEF.

5. Déterminer les aires des triangles EHG, HFG et HEF. Que remarquez-vous ?

EXERCICE Nº 45 : Géométrie plane— Bases de la géométrie

CORRECTION

Triangles semblables

1. Comme F ∈ [EG], on sait que l'angle $\widehat{EFG}$ est plat. On sait aussi que le triangle HFG est rectangle en F donc $\boxed{\text{l'angle } \widehat{EFH} = 90°}$

Dans le triangle EHF, on sait que la somme des angles vaut 180° ou plus simplement que deux angles aigus dans un triangle rectangle sont complémentaires (cela signifie que leur somme vaut 90°.).
Ainsi $\boxed{\widehat{AHF} = 90° - 60° = 30°}$

Dans le triangle EHG rectangle en H, les angles $\widehat{HEG}$ et $\widehat{HGF}$ sont complémentaires.
Donc $\boxed{\widehat{HGF} = 90° - 60° = 30°}$

Dans le triangle FHG rectangle en F, les angles $\widehat{FHG}$ et $\widehat{FGH}$ sont complémentaires.
Donc $\boxed{\widehat{FHG} = 90° - 30° = 60°}$

2. Les angles du triangle EHG mesurent respectivement 90°, 60° et 30°.
Les angles du triangle EHF mesurent respectivement 90°, 60° et 30°.
Les angles du triangle HFG mesurent respectivement 90°, 60° et 30°.

$\boxed{\text{Ces triangles ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont semblables !}}$

3. Calcul de EH.
Dans le triangle EHG rectangle en H,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EG] qui mesure 10 cm et on cherche la mesure du côté adjacent à l'angle $\widehat{HEG}$, le côté [EH].

$$\cos 60° = \frac{EH}{10\,\text{cm}} \text{ donc } \boxed{EH = 10\,\text{cm} \times \cos 60° = 5\,\text{cm}}$$

Calcul de HG
Dans le triangle EHG rectangle en H,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EG] qui mesure 10 cm et on cherche la mesure du côté opposé à l'angle $\widehat{HEG}$, le côté [HG].

Il vaut mieux repartir des mesures données dans l'exercices plutôt que de celle trouvée précédemmen. Cela évite le cumul d'erreur !

$\sin 60° = \dfrac{\text{HG}}{10\,\text{cm}}$ donc $\boxed{\text{HG} = 10\,\text{cm} \times \sin 60° \approx 8{,}66\,\text{cm}}$

Calcul de EF

Dans le triangle HEF rectangle en F,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EH] qui mesure 5 cm et on cherche la mesure du côté adjacent à l'angle $\widehat{\text{HEF}}$, le côté [EF].

$\cos 60° = \dfrac{\text{EF}}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{\text{EF} = 5\,\text{cm} \times \cos 60° = 2{,}5\,\text{cm}}$

Calcul de FG

Comme les points E, F et G sont alignés, $\boxed{\text{FG} = \text{EG} - \text{EF} = 10\,\text{cm} - 2{,}5\,\text{cm} = 7{,}5\,\text{cm}}$.

Calcul de FH

Dans le triangle HEF rectangle en F,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EH] qui mesure 5 cm et on cherche la mesure du côté opposé à l'angle $\widehat{\text{HEF}}$, le côté [FH].

$\sin 60° = \dfrac{\text{FH}}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{\text{FH} = 5\,\text{cm} \times \sin 60° \approx 4{,}33\,\text{cm}}$.

4. Comme les triangles EHG et HFG sont semblables, HFG est un réduction du triangle EHG. Il existe donc un coefficient multiplicateur de réduction qui permet de passer des longueurs de EHG à celles de HFG.

En observant les plus grands côtés de ces triangles, on en déduit que le côté [EG] du triangle EHG correspond au côté de [HG] du triangle HFG.

Comme $\dfrac{\text{HG}}{\text{EG}} = \dfrac{8{,}66\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} \approx 0,866$, $\boxed{\text{le coefficient de réduction vaut environ } 0,866.}$

En passant par les valeurs exactes on arrive à : $\dfrac{\text{HG}}{\text{EG}} = \dfrac{10\,\text{cm} \times \sin 60°}{10\,\text{cm}} = \sin 60°$.

Le coefficient de réduction vaut exactement $\sin 60°$.

Comme les triangles EHG et HEF sont semblables, HEF est un réduction du triangle EHG. Il existe donc un coefficient multiplicateur de réduction qui permet de passer des longueurs de EHG à celles de HEF.

En observant les plus grands côtés de ces triangles, on en déduit que le côté [EG] du triangle EHG correspond au côté de [EF] du triangle HEF.

Comme $\dfrac{\text{HF}}{\text{EG}} = \dfrac{5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 0,5$, $\boxed{\text{le coefficient de réduction vaut } 0,5.}$

En passant par les valeurs exactes on arrive à : $\dfrac{\text{HF}}{\text{EG}} = \dfrac{10\,\text{cm} \times \cos 60°}{10\,\text{cm}} = \cos 60°$.

Le coefficient de réduction vaut exactement $\cos 60°$.

5. Ces trois triangles sont rectangles. Les côtés de l'angle droit sont donc respectivement une base et une hauteur de ces triangle.

$Aire(\text{EHG}) = \dfrac{\text{HE} \times \text{HG}}{2} = \dfrac{5\,\text{cm} \times 8{,}66\,\text{cm}}{2} = \dfrac{43{,}3\,\text{cm}^2}{2} \approx 21{,}65\,\text{cm}^2$

$\text{A}ire(\text{HFG}) = \dfrac{\text{FH} \times \text{FG}}{2} = \dfrac{4{,}33\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}}{2} = \dfrac{32{,}475\,\text{cm}^2}{2} \approx 16{,}24\,\text{cm}^2$

$\text{A}ire(\text{EHF}) = \dfrac{\text{FH} \times \text{FE}}{2} = \dfrac{4{,}33\,\text{cm} \times 2{,}5\,\text{cm}}{2} = \dfrac{10{,}825\,\text{cm}^2}{2} \approx 5{,}41\,\text{cm}^2$

On remarque que $\text{A}ire(\text{EHG}) = 4 \times \text{A}ire(\text{EHF})$.

C'est une conséquence du résultat sur le coefficient de réductions des aires.

On sait que **Si les longueurs d'une figure sont multipliées par un coefficient positif d'agrandissement/réduction k alors les aires de cette figures sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.**

Comme l'un des coefficients est ici $0,5$ soit $\dfrac{1}{2}$, le carré vaut $\dfrac{1}{4} = 0,25$.