EXERCICE N° 46 : La symétrie axiale

1. Tracer un triangle équilatéral ABC tel que AB = 5 cm.

2.a. Construire le point D symétrique du point A par rapport à la droite (BC).
2.b. Construire le point E symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
2.c. Construire le point F symétrique du point C par rapport à la droite (AB).

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la position des points A, B et C dans le triangle DEF.

4.a. Démontrer que AC = CD et que AB = BD.
4.b. Que dire du quadrilatère ACDB ?

5. Démontrer de même que ABCE et que CAFB sont des losanges.

6. Démontrer la conjecture observée à la question **3.**.

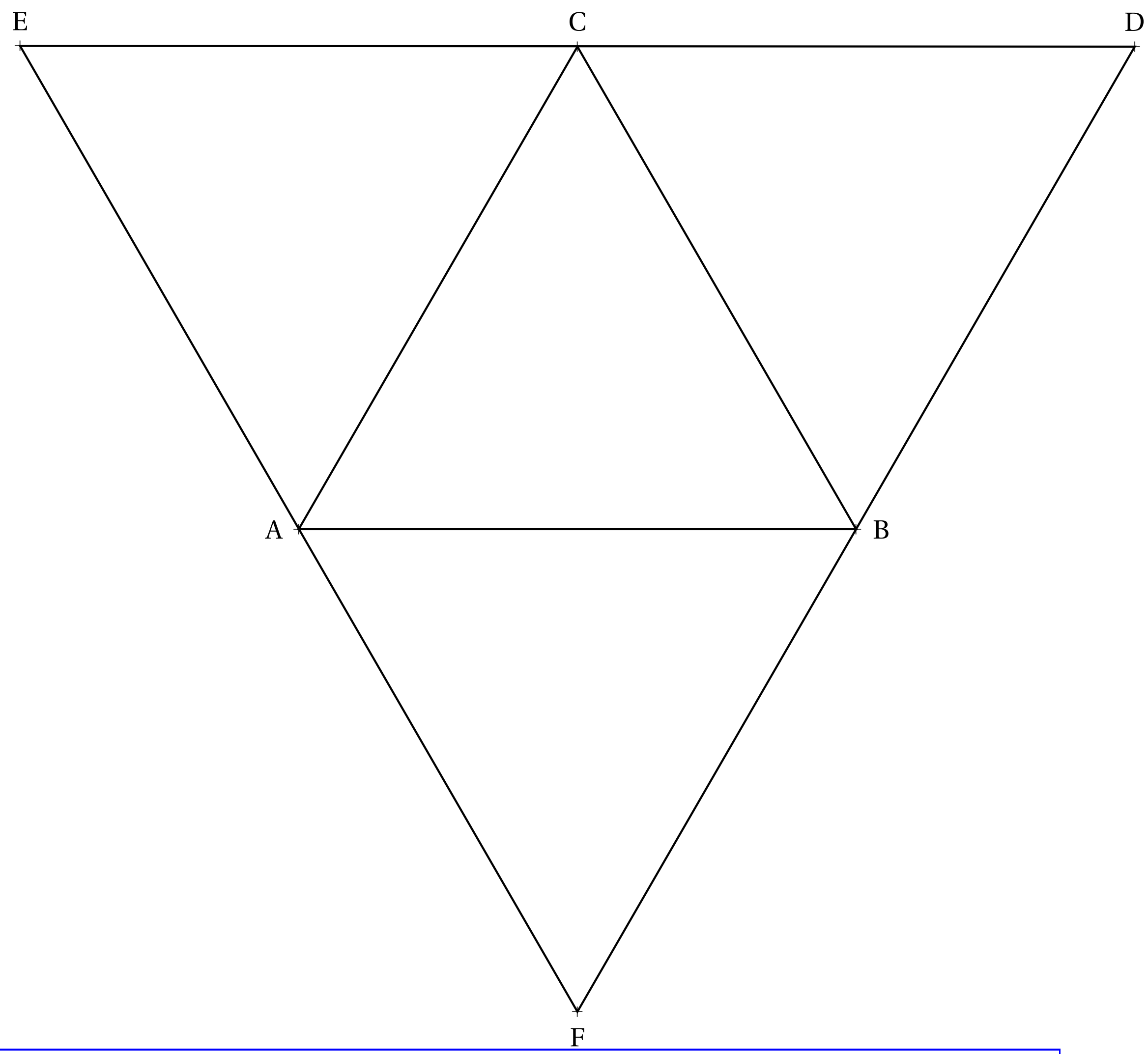
7.a. Que dire du triangle DEF ?
7.b. Exprimer l'aire du triangle DEF en fonction de celle du triangle ABC.

8.a. Quelle transformation géométrique transforme le triangle ACE en le triangle BCD ?
8.b. Quelle transformation géométrique transforme le triangle ACE en le triangle ABF ?
8.c. Quelle transformation géométrique transforme le triangle BCD en le triangle ABF ?

EXERCICE N° 46 : Géométrie plane— Transformations géométriques CORRECTION

La symétrie axiale

1. 2.a.b.c.



3. $\boxed{\text{Il semble que les points A, B et C soient les milieux respectifs des segments [EF], [DF] et [ED].}}$

4.a. Considérons la symétrie axiale d'axe (CB).
D est l'image de A, C est l'image de C et B est l'image de B.
Ainsi le segment [AC] a pour image le segment [DC] et le segment [AB] a pour image le segment [DB].

On sait que **la symétrie axiale conserve la mesure des longueurs** *c'est une isométrie... hors programme...* .

On en déduit que les segments et leurs images ont la même longueur, $\boxed{AC = DC \text{ et } AB = DB}$.

4.b. Dans le quadrilatère ACDB on sait que AC = CD et que AB = BD.
Comme ABC est un triangle équilatéral on sait aussi que AB = BC = CA.
Finalement AC = CD = AB = BD, le quadrilatère ACDB a quatre côtés égaux, $\boxed{\text{ACDB est un losange.}}$

5. Nous allons reproduire le raisonnement précédent deux fois de suite!

Considérons la symétrie axiale d'axe (CA).
E est l'image de B, C est l'image de C et A est l'image de A.
Ainsi le segment [BC] a pour image le segment [EC] et le segment [BA] a pour image le segment [EA].

On sait que **la symétrie axiale conserve la mesure des longueurs** *c'est une isométrie... hors programme...* .

On en déduit que les segments et leurs images ont la même longueur, $\boxed{BC = EC \text{ et } BA = EA}$.

Dans le quadrilatère ECBA on sait que BC = EC et que BA = EA.
Comme ABC est un triangle équilatéral on sait aussi que AB = BC = CA.
Finalement BC = EC = BA = EA, le quadrilatère ECBA a quatre côtés égaux, $\boxed{\text{ECBA est un losange.}}$

Considérons la symétrie axiale d'axe (AB).
F est l'image de C, A est l'image de A et B est l'image de B.
Ainsi le segment [CB] a pour image le segment [FB] et le segment [CA] a pour image le segment [FA].

On sait que **la symétrie axiale conserve la mesure des longueurs** *c'est une isométrie... hors programme...* .

On en déduit que les segments et leurs images ont la même longueur, $\boxed{\text{CB = FB et CA = FA}}$.

Dans le quadrilatère ACBF on sait que CB = FB et que CA = FA.
Comme ABC est un triangle équilatéral on sait aussi que AB = BC = CA.
Finalement CB = FB = CA = FA, le quadrilatère ACBF a quatre côtés égaux, $\boxed{\text{ACBF est un losange.}}$

6. Nous venons de démontrer que ABCE et ABDC sont des losanges.
On en déduit d'abord que la droite (AB) est parallèle aux droites (EC) et (CD).
On sait que **si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**, les droites (EC) et (CD) sont donc parallèles.
Comme ces deux droites ont un point commun, le point C, on en déduit que les points D, C et E sont alignés.

On en déduit aussi que AB = EC = CD. Cela prouve que $\boxed{\text{C est le milieu du segment [ED].}}$

Nous allons recommencer deux fois cette démonstration...

Nous venons de démontrer que ACDB et ACBF sont des losanges.
On en déduit d'abord que la droite (AC) est parallèle aux droites (BD) et (BF).
On sait que **si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**, les droites (BD) et (BF) sont donc parallèles.
Comme ces deux droites ont un point commun, le point B, on en déduit que les points B, D et F sont alignés.

On en déduit aussi que AC = BD = BF. Cela prouve que $\boxed{\text{B est le milieu du segment [DF].}}$

Nous venons de démontrer que ABCE et ACBF sont des losanges.
On en déduit d'abord que la droite (CB) est parallèle aux droites (EA) et (AF).
On sait que **si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**, les droites (EA) et (AF) sont donc parallèles.
Comme ces deux droites ont un point commun, le point A, on en déduit que les points A, E et F sont alignés.

On en déduit aussi que CB = EA = AF. Cela prouve que $\boxed{\text{A est le milieu du segment [EF].}}$

7. Nous venons de prouver que AE = AF = BC, que BD = BF = AC et que CD = CE = AB.
Comme le triangle ABC est équilatéral on sait que AB = BC = CA.
Ainsi AE = AF = BD = BF = CD = CE

Comme DE = 2 × CD, EF = 2 × AE et DF = 2 × BD on arrive à DE = EF = FD.

$\boxed{\text{Le triangle DEF est équilatéral!}}$

8.a. Comme ABCE et ABDC sont des parallélogrammes on en déduit que
$\boxed{\text{BCD est l'image de ACE par la translation qui transforme A en B.}}$

8.b. Comme ABCE et ACBF sont des parallélogrammes on en déduit que
$\boxed{\text{ABF est l'image de ACE par la translation qui transforme C en B.}}$

8.c. Comme ACDB et ACBF sont des parallélogrammes on en déduit que
$\boxed{\text{ABF est l'image de BCD par la translation qui transforme C en A.}}$