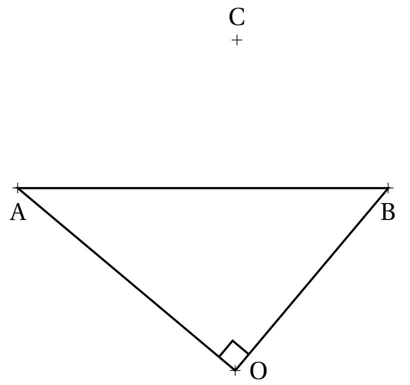
EXERCICE N° 47 : La symétrie centrale



Sur la figure ci-contre qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

— $AB = 4\,cm$, $AC = 3\,cm$ et $BC = 2\,cm$;
— ABO est rectangle en O ;
— $\widehat{ABO} = 50°$;

1. Tracer cette figure.

2. Tracer le symétrique du triangle ABC par la symétrie d'axe (OB). Nommer $A_1B_1C_1$ le triangle résultat.

3. Tracer le symétrique du triangle $A_1B_1C_1$ par la symétrie d'axe (OA). Nommer $A_2B_2C_2$ le triangle résultat.

4.a. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle $A_2B_2C_2$?
4.b. Démontrer que le triangle CC_1C_2 est rectangle.
4.c. On note I l'intersection des droites (OA) et C_1C_2. Démontrer que les triangles C_2IO et C_2C_1C sont semblables.
4.d. Quelle transformations géométrique permet de passer du triangle OC_2I au triangle CC_1C_2. Justifier votre réponse
4.e. Démontrer la conjecture de la question **4.a.**.

EXERCICE N° 47 : Géométrie plane— Transformations géométriques CORRECTION

La symétrie centrale

4.a. Il semble que le triangle $A_2B_2C_2$ soit le symétrique de ABC par rapport à O.

4.b. Par définition de la symétrie axiale, comme C_1 est le symétrique de C par rapport à (OB), on en déduit que (OB) est la médiatrice de $[CC_1]$. En particulier $(OB) \perp (CC_1)$.

De même, comme C_2 est le symétrique de C_1 par rapport à (OA), (OA) est la médiatrice de $[C_1C_2]$. En particulier $(OA) \perp (C_1C_2)$.

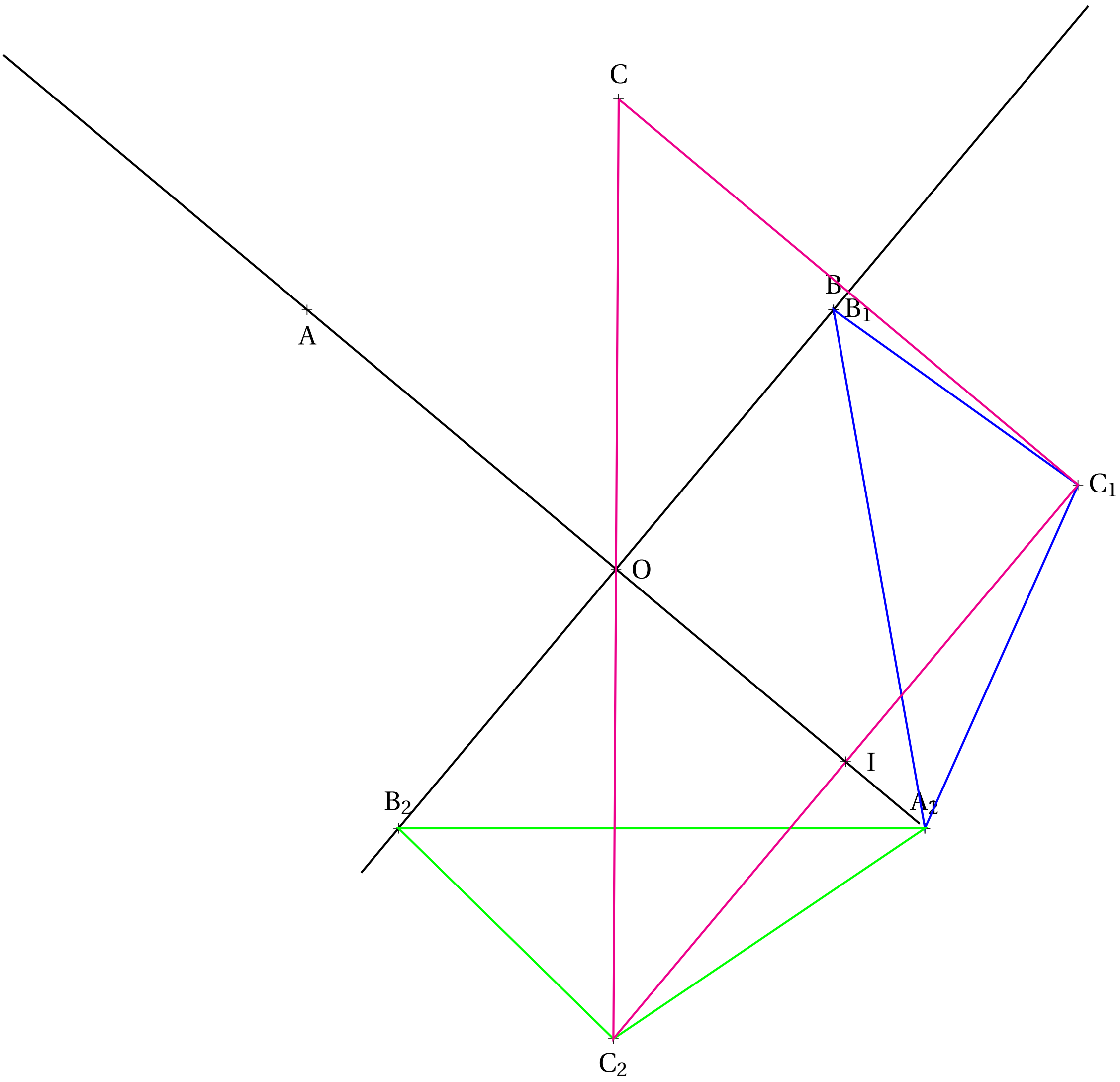
Or on sait que $(OA) \perp (OB)$.

Comme $(OB) \perp (OA)$ et que $(OB) \perp (CC_1)$, on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles**. Ainsi $(OA)//(CC_1)$.

Donc $(OA)//(CC_1)$ et $(OA) \perp (C_1C_2)$, on sait que **si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre**. Ainsi $(CC_1) \perp (C_1C_2$.

Le triangle CC_1C_2 est un triangle rectangle en C_1.

1. 2. 3.



4.c. On sait que (OA) $\perp$ (C_1C_2), le triangle OIC_2 est donc rectangle en I.
On remarque que le triangle CC_1C_2 et OIC_2 sont rectangles et ont l'angle $\widehat{OC_2I}$ en commun. Leur troisièmes angle est donc égal puisqu'il est égal à l'écart entre 180° et la somme des deux autres.

Les triangles CC_1C_2 et OIC_2 ont donc leurs trois angles égaux. Les triangles CC_1C_2) et OIC_2 sont semblables.

4.d. Comme CC_1C_2 et OIC_2 sont semblables, le triangle CC_1C_2 est un agrandissement du triangle OIC_2.
De plus on remarque que le sommet C_2 est commun au deux triangles.

Ainsi CC_1C_2 est l'image de OIC_2 par une homothétie de centre C_2 dont il reste à déterminer le coefficient.

Comme C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à (OA), (OA) est la médiatrice de [C_1C_2] et I est le milieu de [C_1C_2].

Donc $\dfrac{C_2C_1}{C_2I} = 2$.

Il s'agit de l'homothétie de centre C_2 et de coefficient 2.

4.e. Nous arrivons enfin au fait que l'image du point O par l'homothétie de centre C_2 et de coefficient 2 est le point C.
Cela a deux conséquences :

- Les points C_2, O et C sont alignés ;
- $C_2C = 2C_2I$, ce qui signifie que O est le milieu de [CC_2].

$\boxed{\text{Le point } C_2 \text{ est le symétrique de C par rapport à O.}}$

Nous venons de démontrer que la succession (la composée) de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale. Plus généralement, la composée de deux symétrie axiales d'axes sécants est une rotation dont le centre est l'intersection et l'angle le double de l'angle des deux droites.