

## EXERCICE N° 5 : Raisonner avec des nombres entiers



Indiquez si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

- **Affirmation n° 1** : La somme de deux nombres entiers pairs est paire.
- **Affirmation n° 2** : La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.
- **Affirmation n° 3** : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.
- **Affirmation n° 4** : Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.
- **Affirmation n° 5** : Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.
- **Affirmation n° 6** : Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.
- **Affirmation n° 7** : Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.
- **Affirmation n° 8** : La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
- **Affirmation n° 9** : Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.
- **Affirmation n° 10** : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.



## EXERCICE N° 5 : Calcul numérique— Nombres entiers, arithmétique

CORRECTION

*Raisonner avec des nombres entiers*

*Pour démontrer qu'une affirmation est vraie, il faut prouver qu'elle est vraie pour tous les nombres! Il faut donc faire un raisonnement à partir d'une nombre générique souvent modélisé par une lettre.*

*Pour démontrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple!*

- **Affirmation n° 1** : La somme de deux nombres entiers pairs est paire.

On remarque que  $2 + 8 = 10$ ,  $34 + 100 = 134$ ... Cette affirmation semble vraie.

Un nombre pair est un multiple de 2, il peut s'écrire  $2 \times n$  où  $n$  est un nombre entier.

Par exemple  $34 = 2 \times 17$ ,  $100 = 2 \times 50$ .

Choisissons deux nombres entiers pairs génériques :  $2 \times n$  et  $2 \times k$  où  $n$  et  $k$  sont des entiers.

La somme  $2 \times n + 2 \times k = 2 \times (n + k)$ .

Cela signifie que  $2 \times n + 2 \times k$  est le double de  $n + k$ . Ce nombre est pair.

Par exemple,  $34 = 2 \times 17$  et  $100 = 2 \times 50$ .

Ainsi  $34 + 100 = 2 \times 17 + 2 \times 50 = 2 \times (17 + 50) = 2 \times 67$

**Affirmation n° 1** : Vraie

- **Affirmation n° 2** : La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.

Comme  $3 + 5 = 8$ , 3 est impair, 5 est impair, la somme est paire.

Resultat **Affirmation n° 2** : Fausse

- **Affirmation n° 3** : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.

$3 + 8 = 11$ ,  $12 + 9 = 21$  : cela semble vrai!

On a vu qu'un nombre pair pouvait s'écrire sous la forme  $2 \times n$  où  $n$  est un nombre entier.

Un nombre impair est un nombre dont le reste dans la division par 2 vaut 1. Un nombre impair peut donc toujours s'écrire sous la forme  $2 \times k + 1$  avec  $n$  entier. Cela signifie aussi qu'un nombre impair est le successeur d'un nombre pair.

Ainsi :

$2 \times n + 2 \times k + 1 = 2 \times (n + k) + 1$ , comme  $n + k$  est un nombre entier,  $2 \times (n + k) + 1$  est impair.

Sur un exemple générique :

$12 = 2 \times 6$  et  $9 = 2 \times 4 + 1$ . Ainsi  $12 + 9 = 2 \times 6 + 2 \times 4 + 1 = 2 \times (6 + 4) + 1 = 2 \times 10 + 1$ .

**Affirmation n° 3 : Vraie**

— **Affirmation n° 4 :** Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.

Voici les premiers multiples de 7 : 7 — 14 — 21 ...

7 est un multiple de 7 car  $7 = 7 \times 1$  et 7 est premier.

**Affirmation n° 4 : Fausse**

— **Affirmation n° 5 :** Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.

Voici quelques multiples de 10 : 10 — 20 — 30 ...

Comme  $10 = 2 \times 5$ , un multiple de 10 peut s'écrire  $10 \times n = 2 \times 5 \times n$  où  $n$  est un nombre entier.

On constate ainsi qu'un multiple de 10 est divisible par 2 et par 5. Il ne peut donc pas être premier !

**Affirmation n° 5 : Vraie**

— **Affirmation n° 6 :** Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.

Un multiple de 18 peut s'écrire sous la forme  $18 \times n = 3 \times 6 \times n$  où  $n$  est un nombre entier.

Par exemple  $90 = 18 \times 5 = 3 \times 6 \times 5 = 3 \times 30 = 6 \times 15$ .

**Affirmation n° 6 : Vraie**

— **Affirmation n° 7 :** Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.

$6 = 2 \times 3 = 6 \times 1$ ,  $12 = 3 \times 4 = 6 \times 2$ . 6 et 12 sont divisibles par 3 et par 6 mais pas par 18.

**Affirmation n° 7 : Fausse**

— **Affirmation n° 8 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

$5 + 6 + 7 = 18 = 3 \times 6$ ,  $27 + 28 + 29 = 84 = 3 \times 28$ ,  $301 + 302 + 303 = 906 = 3 \times 302$  : cela semble vrai.

Notons  $n$  le premier nombre entier. Le deuxième est égal à  $n + 1$  et le troisième à  $n + 1 + 1 = n + 2$ .

Quand on les ajoute on obtient :  $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$ .

Or  $3n + 3 = 3(n + 1)$ , il s'agit d'un multiple de 3.

Sur un exemple générique :  $301 + 302 + 303 = 300 + 300 + 1 + 300 + 2 = 3 \times 300 + 3$ .

**Affirmation n° 8 : Vraie**

— **Affirmation n° 9 :** Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.

$6^2 = 36$ ,  $10^2 = 100$ ,  $12^2 = 144$  : cela semble vrai.

Un nombre entier pair est un multiple de 2, il peut s'écrire sous la forme  $2n$  où  $n$  est un nombre entier.

$(2n)^2 = 4n^2$ . Et  $4n^2 = 2 \times 2n^2$ , il s'agit donc d'un multiple de 2.

Sur un exemple générique :  $12^2 = (2 \times 6)^2 = 4 \times 36 = 2 \times 2 \times 36$ .

**Affirmation n° 9 : Vraie**

— **Affirmation n° 10 :** Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

$5^2 = 25$ ,  $11^2 = 121$ ,  $13^2 = 169$  : cela semble vrai.

Un nombre entier impair est un successeur d'un nombre pair, il peut s'écrire  $2n+1$  avec  $n$  un nombre entier.

$(2n+1)^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ .

On peut donc écrire ce carré sous la forme  $2k+1$  avec  $k = 2n^2 + 2n$  un nombre entier. Ce carré est donc impair.

Sur un exemple générique :  $13^2 = (12+1)^2 = (12+1)(12+1) = 12^2 + 12 + 12 + 1 = 12^2 + 2 \times 12 + 1$

**Affirmation n° 10 : Vraie**