EXERCICE Nº 5 : Raisonner avec des nombres entiers

Indiquez si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

— **Affirmation nº 1 :** La somme de deux nombres entiers pairs est paire.
— **Affirmation nº 2 :** La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.
— **Affirmation nº 3 :** La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.
— **Affirmation nº 4 :** Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.
— **Affirmation nº 5 :** Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.
— **Affirmation nº 6 :** Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.
— **Affirmation nº 7 :** Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.
— **Affirmation nº 8 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
— **Affirmation nº 9 :** Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.
— **Affirmation nº 10 :** Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

EXERCICE Nº 5 : Calcul numérique— Nombres entiers, arithmétique CORRECTION

Raisonner avec des nombres entiers

Pour démontrer qu'une affirmation est vraie, il faut prouver qu'elle est vraie pour tous les nombres! Il faut donc faire un raisonnement à partir d'une nombre générique souvent modélisé par une lettre.
Pour démontrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple!

— **Affirmation nº 1 :** La somme de deux nombres entiers pairs est paire.

On remarque que $2+8=10$, $34+100=134$... Cette affirmation semble vraie.

Un nombre pair est un multiple de 2, il peut s'écrire $2 \times n$ où n est un nombre entier.
Par exemple $34 = 2 \times 17$, $100 = 2 \times 50$.

Choisissons deux nombres entiers pairs génériques : $2 \times n$ et $2 \times k$ où n et k sont des entiers.
La somme $2 \times n + 2 \times k = 2 \times (n+k)$.
Cela signifie que $2 \times n + 2 \times k$ est le double de $n+k$. Ce nombre est pair.

Par exemple, $34 = 2 \times 17$ et $100 = 2 \times 50$.
Ainsi $34 + 100 = 2 \times 17 + 2 \times 50 = 2 \times (17+50) = 2 \times 67$

Affirmation nº 1 : Vraie

— **Affirmation nº 2 :** La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.

Comme $3+5=8$, 3 est impair, 5 est impair, la somme est paire.

Resultat**Affirmation nº 2 :** Fausse

— **Affirmation n^{o} 3 :** La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.

$3+8=11$, $12+9=21$: cela semble vrai !

On a vu qu'un nombre pair pouvait s'écrire sous la forme $2\times n$ où n est un nombre entier.
Un nombre impair est un nombre dont le reste dans la division par 2 vaut 1. Un nombre impair peut donc toujours s'écrire sous la forme $2\times k+1$ avec n entier. Cela signifie aussi qu'un nombre impair est le successeur d'un nombre pair.
Ainsi :
$2\times n+2\times k+1=2\times(n+k)+1$, comme $n+k$ est un nombre entier, $2\times(n+k)+1$ est impair.

Sur un exemple générique :
$12=2\times 6$ et $9=2\times 4+1$. Ainsi $12+9=2\times 6+2\times 4+1=2\times(6+4)+1=2\times 10+1$.

Affirmation n^{o} 3 : Vraie

— **Affirmation n^{o} 4 :** Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.

Voici les premiers multiples de 7 : 7 — 14 — 21 ...
7 est un multiple de 7 car $7=7\times 1$ et 7 est premier.

Affirmation n^{o} 4 : Fausse

— **Affirmation n^{o} 5 :** Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.

Voici quelques multiples de 10 : 10 — 20 — 30 ...
Comme $10=2\times 5$, un multiple de 10 peut s'écrire $10\times n=2\times 5\times n$ où n est un nombre entier.

On constate ainsi qu'un multiple de 10 est divisible par 2 et par 5. Il ne peut donc pas être premier !

Affirmation n^{o} 5 : Vraie

— **Affirmation n^{o} 6 :** Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.

Un multiple de 18 peut s'écrire sous la forme $18\times n=3\times 6\times n$ où n est un nombre entier.

Par exemple $90=18\times 5=3\times 6\times 5=3\times 30=6\times 15$.

Affirmation n^{o} 6 : Vraie

— **Affirmation n^{o} 7 :** Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.

$6=2\times 3=6\times 1$, $12=3\times 4=6\times 2$. 6 et 12 sont divisibles par 3 et par 6 mais pas par 18.

Affirmation n^{o} 7 : Fausse

— **Affirmation n^{o} 8 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

$5+6+7=18=3\times 6$, $27+28+29=84=3\times 28$, $301+302+303=906=3\times 202$: cela semble vrai.

Notons n le premier nombre entier. Le deuxième est égal à $n+1$ et le troisième à $n+1+1=n+2$.

Quand on les ajoute on obtient : $n+n+1+n+2=3n+3$.
Or $3n+3=3(n+1)$, il s'agit d'un multiple de 3.

Sur un exemple générique : $301+302+303=300+300+1+300+2=3\times 300+3$.

Affirmation n^{o} 8 : Vraie

— **Affirmation nº 9 :** Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.

$6^2 = 36$, $10^2 = 100$, $12^2 = 144$: cela semble vrai.

Un nombre entier pair est un multiple de 2, il peut s'écrire sous la forme $2n$ où n est un nombre entier.

$(2n)^2 = 4n^2$. Et $4n^2 = 2 \times 2n^2$, il s'agit donc d'un multiple de 2.

Sur un exemple générique : $12^2 = (2 \times 6)^2 = 4 \times 36 = 2 \times 2 \times 36$.

Affirmation nº 9 : Vraie

— **Affirmation nº 10 :** Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

$5^2 = 25$, $11^2 = 121$, $13^2 = 139$: cela semble vrai.

Un nombre entier impari est un successeur d'un nombre pair, il peut s'écrire $2n+1$ avec n un nombre entier.

$(2n+1)^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.
On peut donc écrire ce carré sous la forme $2k+1$ avec $k = 2n^2 + 2n$ un nombre entier. Ce carré est donc impair.

Sur un exemple générique : $13^2 = (12+1)^2 = (12+1)(12+1) = 12^2 + 12 + 12 + 1 = 12^2 + 2 \times 12 + 1$

Affirmation nº 10 : Vraie