GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE — **GÉOMÉTRIE DES SOLIDES**

EXERCICE N° 65 : La pyramide

La pyramide du Louvre à Paris a été construite entre 1985 et 1989 par l'architecte Leoh Minh Pei durant le premier mandat de François Mitterand.
Il s'agit d'une pyramide régulière à base carré dont le côté mesure 35,42 m.
Elle s'élève à 21,64 m de hauteur.

1. Calculer la mesure du côté des quatre triangles isocèles identiques qui forment ses faces latérales.

2. Calculer l'angle que forme une face latérale avec la base carrée.
Donner une valeur approchée au dixième de degré près.

3. Calculer le volume de cette pyramide en mètre cube. Donner un arrondi au centième près.

4. La pyramide du Louvre est une réplique de la pyramide de Khéops près de Giseh en Égypte. À sa construction il y a 4 500 ans, elle mesurait 146,58 m.

4.a. Déterminer une valeur approchée au dixième près du coefficient d'agrandissement qui permet de passer des longueurs de la pyramide du Louvre à celles de la pyramide de Khéops.

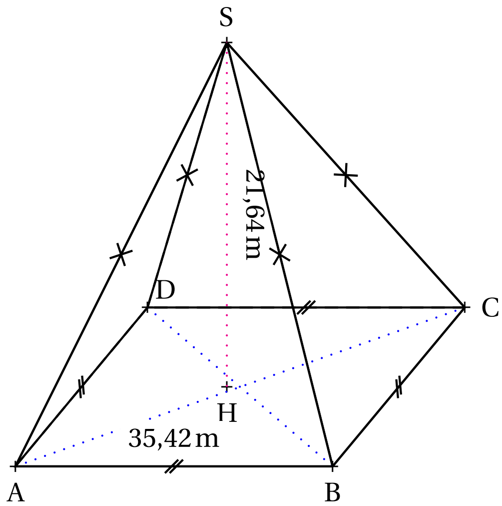
4.b. Quelles sont les mesures des longueurs de la pyramide de Khéops ?

4.c. Calculer une valeur approchée au décamètre cube près du volume de la pyramide de Khéops.

EXERCICE N° 65 : Géométrie de l'espace— Géométrie des solides

CORRECTION

La pyramide



1.
Le triangle SHA est rectangle en H. Comme la pyramide est régulière, SA = SB = SC = SD et H est le centre du carré ABCD.

Calculons la longueur de la diagonale [AC] du carré.

Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$$
$$35,42^2 + 35,42^2 = \mathrm{AC}^2$$
$$1\,254,5764 + 1\,254,5764 = \mathrm{AC}^2$$
$$\mathrm{AC}^2 = 2\,509,1528$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{2\,509,1528}$$
$$\mathrm{AC} \approx 50,09$$

Ainsi comme H est le centre du carré, il s'agit du milieu du segment [AC]. $\mathrm{AH} \approx 50{,}09\,\text{m} \div 2 \approx 25{,}05\,\text{m}$.

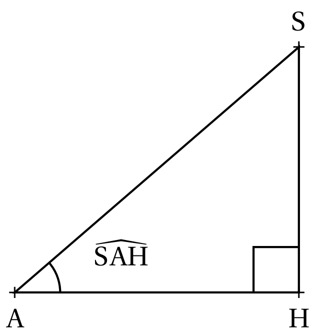
Calculons AS.

Dans le triangle AHS rectangle en H,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{HA}^2 + \mathrm{HS}^2 = \mathrm{AS}^2$$
$$25,05^2 + 21,64^2 = \mathrm{AS}^2$$
$$625,5025 + 468,2896 = \mathrm{AS}^2$$
$$\mathrm{AS}^2 = 1\,095,7921$$
$$\mathrm{AS} = \sqrt{1\,095,7921}$$
$$\mathrm{AS} \approx 33,1$$

La longueur du segment [AS] vaut environ 33,10 m.

2. Il s'agit d'obtenir l'angle suivant :



Dans le triangle SAH rectangle en H, on connaît l'hypoténuse, le côté adjacente et le côté opposé à l'angle $\widehat{\mathrm{SAH}}$.
Il y a donc trois méthodes pour calculer cet angle :

$$\cos\widehat{\mathrm{SAH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AS}} = \frac{25{,}05\,\text{m}}{33{,}10\,\text{m}} = \frac{25,05}{33,10} \qquad \sin\widehat{\mathrm{SAH}} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{AS}} = \frac{21{,}64\,\text{m}}{33{,}10\,\text{m}} = \frac{21,64}{33,10} \qquad \tan\widehat{\mathrm{SAH}} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{AH}} = \frac{21{,}64\,\text{m}}{25{,}05\,\text{m}} = \frac{21,64}{25,05}$$

Dans ces trois cas, à la calculatrice on obtient $\boxed{\widehat{\mathrm{SAH}} \approx 40,8°.}$

3. Le volume d'une pyramide est donné par Volume $= \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$

Ici la base est un carré donc $\boxed{V = \dfrac{(35{,}32\,\text{m})^2 \times 21{,}64\,\text{m}}{3} = \dfrac{26\,995{,}95\,\text{m}^3}{3} = 8\,998{,}651\,\text{m}^3}$

4.a. La pyramide du Louvre a une hauteur de 21,64 m et celle de Khéops de 146,58 m.
Le coefficient d'agrandissement est le nombre k tel que $k \times 21{,}64\,\text{m} = 146{,}48\,\text{m}$.

$\boxed{\text{Le coefficient d'agrandissement est égal à } \dfrac{146{,}48\,\text{m}}{21{,}64\,\text{m}} \approx 6{,}8.}$

4.b. Les mesures de la Pyramide de Khéops sont 6,8 fois plus grande que celles du Louvre.

$\boxed{\text{La base carré de la pyramide de Khéops mesure } 6{,}8 \times 35{,}42\,\text{m} \approx 240{,}86\,\text{m et un côté latérale de } 6{,}8 \times 33{,}10\,\text{m} \approx 225{,}08\,\text{m.}}$

4.c. On sait que **si les longueurs d'un solide sont multipliées par k alors les aires latérales sont multipliées par k^2 et le volume par k^3.**

La pyramide de Khéops a donc un volume $6{,}8^3 = 314{,}432$ fois plus grand que celui de la pyramide du Louvre.

$\boxed{\text{Le volume de la pyramide de Khéops vaut } 314{,}432 \times 8\,998{,}651\,\text{m}^3 = 2\,829\,463{,}831\,\text{m}^3 \approx 2\,829\,\text{dam}^3}$