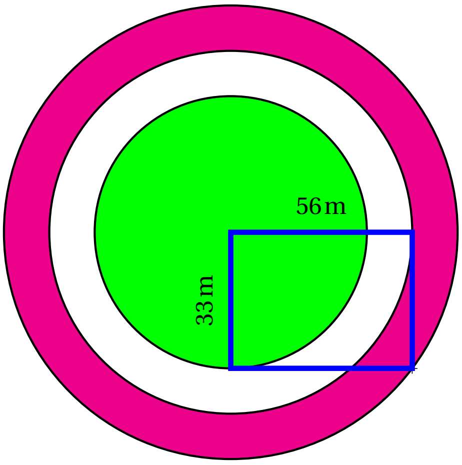
EXERCICE N° 74 : Aire du disque



Sur cette figure qui n'est pas dessinée en vraie grandeur on sait que :

- les trois cercles sont concentriques ;
- le centre de ces cercles est un des sommets d'un rectangle mesurant 56 m de long sur 33 m de large ;
- le premier cercle a pour rayon la largeur du rectangle ;
- le deuxième cercle a pour rayon la longueur du rectangle ;
- le troisième cercle a pour rayon la diagonale du rectangle.

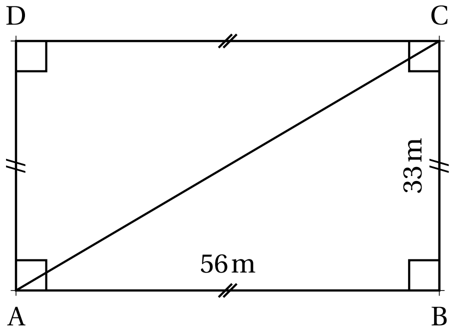
Comparer l'aire de la surface constituée par la couronne extérieure (en magenta) et le disque intérieure (en vert).

EXERCICE N° 74 : Grandeurs et mesures— Les aires

CORRECTION

Aire du disque

On peut modéliser le rectangle ainsi :



Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$

$$56^2 + 33^2 = AC^2$$

$$3\,136 + 1\,089 = AC^2$$

$$AC^2 = 4\,225$$

$$AC = \sqrt{4\,225}$$

$$AC = 65$$

Le cercle le plus petit a un rayon de 33 m, le cercle moyen un rayon de 56 m et le grand cercle un rayon de 65 m.

Calculons les aires de chacun de ces disques.

$A_1 = \pi \times (33\,\text{m})^2 = 1\,089\pi\ \text{cm}^2$
$A_2 = \pi \times (56\,\text{m})^2 = 3\,136\pi\ \text{cm}^2$
$A_3 = \pi \times (65\,\text{m})^2 = 4\,225\pi\ \text{cm}^2$

La disque vert a une aire de $A_2 - A_1 = 3\,136\pi\ \text{cm}^2 - 1\,089\pi$

La courronne magenta a une aire de $A_3 - A_2 = 4\,225\pi\ \text{cm}^2 - 3\,136\pi\ \text{cm}^2 = 1\,089\pi\ \text{cm}^2$.

$\boxed{\text{Le disque vert et la courrone magenta ont exactement la même aire !}}$

Remarquez l'usage de valeurs exactes plutôt que de valeurs approchée !
On peut aussi généraliser ce résultat.
Le théorème de Pythagore nous donne que $AC^2 = BA^2 + BC^2$ *donc* $BC^2 = AC^2 - AB^2$
Les trois disques ont une aire de :
$A_1 = BC^2\pi\ cm^2$, $A_2 = AB^2\pi\ cm^2$ *et* $A_3 = AC^2\pi\ cm^2$.

La courrone magenta a une aire de $A_3 - A_2 = AC^2\pi\ cm^2 - AB^2\pi\ cm^2 = (AC^2 - AB^2)\pi\ cm^2 = BC^2\pi\ cm^2$.

Cela prouve la généralité du résultat !