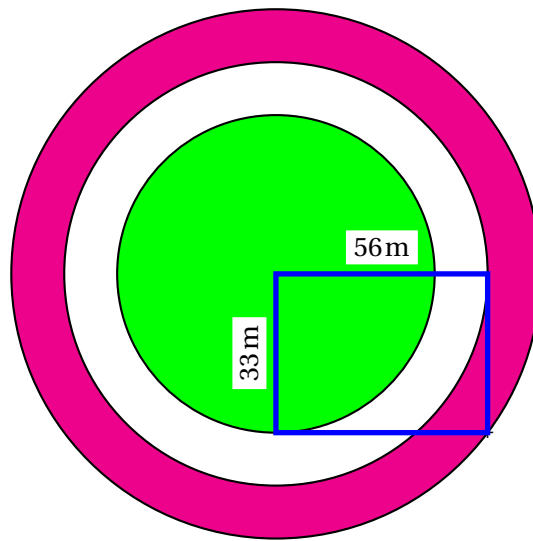


EXERCICE N° 74 : Aire du disque



Sur cette figure qui n'est pas dessinée en vraie grandeur on sait que :

- les trois cercles sont concentriques;
- le centre de ces cercles est un des sommets d'un rectangle mesurant 56 m de long sur 33 m de large;
- le premier cercle a pour rayon la largeur du rectangle;
- le deuxième cercle a pour rayon la longueur du rectangle;
- le troisième cercle a pour rayon la diagonale du rectangle.

Comparer l'aire de la surface constituée par la couronne extérieure (en magenta) et le disque intérieure (en vert).

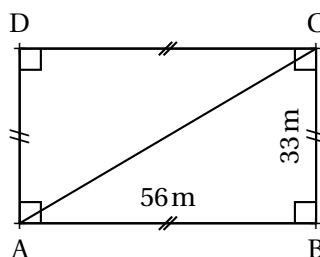


EXERCICE N° 74 : Grandeurs et mesures— Les aires

CORRECTION

Aire du disque

On peut modéliser le rectangle ainsi :



Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned}
 BA^2 + BC^2 &= AC^2 \\
 56^2 + 33^2 &= AC^2 \\
 3136 + 1089 &= AC^2 \\
 AC^2 &= 4225
 \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{4225}$$

$$AC = 65$$

Le cercle le plus petit a un rayon de 33 m, le cercle moyen un rayon de 56 m et le grand cercle un rayon de 65 m.

Calculons les aires de chacun de ces disques.

$$A_1 = \pi \times (33 \text{ m})^2 = 1089\pi \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \pi \times (56 \text{ m})^2 = 3136\pi \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \pi \times (65 \text{ m})^2 = 4225\pi \text{ cm}^2$$

La disque vert a une aire de $A_2 - A_1 = 3136\pi \text{ cm}^2 - 1089\pi$

La couronne magenta a une aire de $A_3 - A_2 = 4225\pi \text{ cm}^2 - 3136\pi \text{ cm}^2 = 1089\pi \text{ cm}^2$.

Le disque vert et la couronne magenta ont exactement la même aire!

Remarquez l'usage de valeurs exactes plutôt que de valeurs approchée!

On peut aussi généraliser ce résultat.

Le théorème de Pythagore nous donne que $AC^2 = BA^2 + BC^2$ donc $BC^2 = AC^2 - AB^2$

Les trois disques ont une aire de :

$$A_1 = BC^2\pi \text{ cm}^2, A_2 = AB^2\pi \text{ cm}^2 \text{ et } A_3 = AC^2\pi \text{ cm}^2.$$

La couronne magenta a une aire de $A_3 - A_2 = AC^2\pi \text{ cm}^2 - AB^2\pi \text{ cm}^2 = (AC^2 - AB^2)\pi \text{ cm}^2 = BC^2\pi \text{ cm}^2$.

Cela prouve la généralité du résultat!