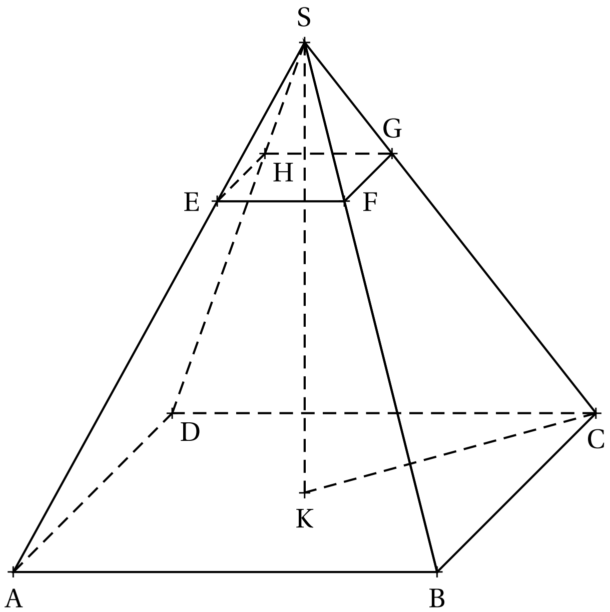
EXERCICE N° 79 : Volume des pyramides

Une boite de chocolat à la forme d'un tronc de pyramide ABCDEFGH.

On sait que :

- ABCDS est une pyramide régulière ;
- ABCD est un carré de côté 12 cm ;
- la hauteur [SK] de la pyramide mesure 15 cm ;
- EF = 2,4 cm ;
- (EF)//(AB), (BC)//(FG), (CD)//(GH) et (AD)//(EH).



1. Calculer le volume de la pyramide ABCDS en centimètre cube.

2. Déterminer le coefficient de réduction qui permet de passer de la pyramide ABCDS à la pyramide EFGHS.

3. En déduire le volume de la pyramide EFGHS puis de la boite de chocolat en centimètre cube.

4.a. Calculer la mesure exacte de la diagonale du carré ABCD.
4.b. Calcule la mesure exacte du segment [SA].
4.c. En déduire une valeur approchée de la mesure SE.

5. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{KSC}$

EXERCICE N° 79 : Grandeurs et mesures— Les volumes CORRECTION

Volume des pyramides

1. On sait que le volume d'une pyramide est donnée par la formule :

$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

La pyramide ABCDS a une base carrée de côté 12 cm et une hauteur de 15 cm.

Son volume : $\boxed{\frac{(12\,\text{cm})^2 \times 15\,\text{cm}}{3} = \frac{2\,160\,\text{cm}^3}{3} = 720\,\text{cm}^3}$

2. Comme les côtés de la base des deux pyramides sont parallèles, l'une est la réduction de l'autre. Ainsi le côté [EF] qui mesure 2,4 cm est une réductions du côté [AB] qui mesure 12 cm.

$\boxed{\text{Le coefficient de réduction est égal à } \frac{2{,}4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.}$

Cela signfie que la petite pyramide est cinq fois plus petite que la grande.

3. On sait que **si les longueurs d'un solide sont multipliées par un nombre k positif alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.**

Comme la petite pyramide est 5 fois plus petite que la grande, son volume est $5^2 = 125$ fois plus petit.

$\boxed{\text{Le volume de la pyramide EFGHS est égal à } 720\,\text{cm}^3 \div 125 = 5{,}76\,\text{cm}^3}$

$\boxed{\text{Le volume de la boite de chocolat est égal à } 720\,\text{cm}^3 - 5{,}76\,\text{cm}^3 = 714{,}24\,\text{cm}^3}$

4.a. Dans le carré ABCD on sait que ABC est un triangle rectangle en B.
Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{BA}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$$
$$12^2 + 12^2 = \text{AC}^2$$
$$144 + 144 = \text{AC}^2$$
$$\text{AC}^2 = 288$$
$$\text{AC} = \sqrt{288}$$

$\boxed{\text{La diagonale du carré mesure exactement } \sqrt{288}\ cm \text{ soit environ } 16{,}97\,\text{cm.}}$

On peut démontrer que la diagonale d'un carré de côté a vaut exactement $a\sqrt{2}$ mais ce n'est pas une exigence de troisième!

4.b. La hauteur du triangle est perpendiculaire (orthogonale) à la base ABCD. Ainsi le triangle AKS est rectangle en S.
De plus comme une carré est une parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Le côté [AK] mesure donc $\sqrt{288}\ cm \div 2 \approx 8{,}49\,\text{cm}$.

Dans le triangle AKS rectangle en S,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{KA}^2 + \text{KS}^2 = \text{AS}^2$$

On peut calculer la valeur exacte de KA^2 plutôt que de passer par des valeurs approchées (ce qui serait néanmoins accepté au brevet.)

$$\text{KA}^2 = \left(\frac{\sqrt{288}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{288}\right)^2}{2^2} = \frac{288}{4} = 72$$

$$72 + 15^2 = \text{AS}^2$$
$$72 + 256 = \text{AS}^2$$
$$\text{AS}^2 = 328$$
$$\text{AS} = \sqrt{328}$$
$$\text{AS} \approx 18{,}11$$

$\boxed{\text{Le segment [AS] mesure exactement } \sqrt{328}\ cm \text{ soit environ } 18{,}11\,\text{cm}}$

4.c. Comme la pyramide EFGHS est une réduction de la pyramide ABCDS de coefficient $0,2$.

$\boxed{\text{Le côté [SE] mesure exactement } 0{,}2 \times \sqrt{328}\ cm \approx 0{,}72\,\text{cm.}}$

On pouvait aussi utiliser le théorème de Thalès dans le triangle SAB *avec* (EF)//(AB). *L'égalité des trois fractions permet de retrouver le coefficient de réduction.*
Les droites (EA) *et* (FB) *sont sécantes en* S, *les droites* (EF) *et* (FB) *sont parallèles,*
D'après ***le théorème de Thalès*** *on a :*

$$\frac{\text{SE}}{\text{SA}} = \frac{\text{SF}}{\text{SB}} = \frac{\text{EF}}{\text{AB}}$$

$$\frac{\text{SE}}{\sqrt{328}\ cm} = \frac{\text{SF}}{\text{SB}} = \frac{2{,}4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{SE} = \dfrac{\sqrt{328}\ cm \times 2{,}4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}}$ *d'où* $\text{SE} = \dfrac{2,4}{12} \times \sqrt{328}\ cm$ *et* $\text{SE} = 0,2 \times \sqrt{328}\ cm$

5. La pyramide est régulières donc nous avons $\text{SA} = \text{SB} = \text{SC} = \text{SD} = \sqrt{328}\ cm$.
Le triangle SKC est rectangle en K.
On sait que $\text{SK} = 15\,\text{cm}$, $\text{KC} = \dfrac{\sqrt{288}\ cm}{2}$ et $\text{SC} = \sqrt{328}\ cm$.
On peut calculer le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle, au choix.

$$\cos\widehat{\text{KSC}} = \frac{\text{KS}}{\text{SC}} = \frac{15\,\text{cm}}{\sqrt{328}\ cm} \qquad \sin\widehat{\text{KSC}} = \frac{\text{KA}}{\text{SC}} = \frac{\frac{\sqrt{288}\ cm}{2}}{\sqrt{328}\ cm} \qquad \tan\widehat{\text{KSC}} = \frac{\text{KA}}{\text{KS}} = \frac{\frac{\sqrt{288}\ cm}{2}}{15\,\text{cm}}$$

Dans les trois cas on obtient à la calculatrice $\boxed{\widehat{\text{KSC}} \approx 34°}$