

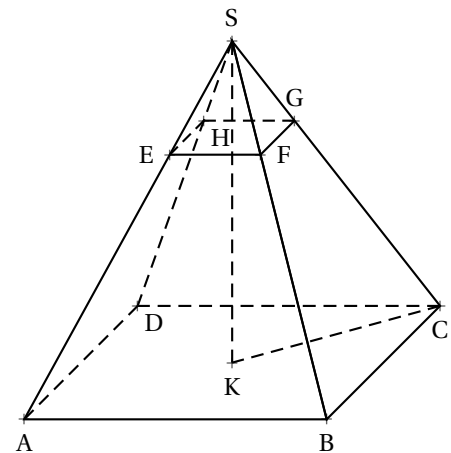
EXERCICE N° 79 : Volume des pyramides

Une boîte de chocolat à la forme d'un tronc de pyramide ABCDEFGH.



On sait que :

- ABCDS est une pyramide régulière;
- ABCD est un carré de côté 12 cm;
- la hauteur [SK] de la pyramide mesure 15 cm;
- EF = 2,4 cm;
- (EF)//(AB), (BC)//(FG), (CD)//(GH) et (AD)//(EH).



1. Calculer le volume de la pyramide ABCDS en centimètre cube.
2. Déterminer le coefficient de réduction qui permet de passer de la pyramide ABCDS à la pyramide EFGHS.
3. En déduire le volume de la pyramide EFGHS puis de la boîte de chocolat en centimètre cube.
- 4.a. Calculer la mesure exacte de la diagonale du carré ABCD.
- 4.b. Calcule la mesure exacte du segment [SA].
- 4.c. En déduire une valeur approchée de la mesure SE.
5. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle  $\widehat{KSC}$



EXERCICE N° 79 : Grandeurs et mesures— Les volumes

CORRECTION

Volume des pyramides

1. On sait que le volume d'une pyramide est donnée par la formule :

$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

La pyramide ABCDS a une base carrée de côté 12 cm et une hauteur de 15 cm.

Son volume :  $\frac{(12 \text{ cm})^2 \times 15 \text{ cm}}{3} = \frac{2160 \text{ cm}^3}{3} = 720 \text{ cm}^3$

2. Comme les côtés de la base des deux pyramides sont parallèles, l'une est la réduction de l'autre. Ainsi le côté [EF] qui mesure 2,4 cm est une réductions du côté [AB] qui mesure 12 cm.

Le coefficient de réduction est égal à  $\frac{2,4 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{1}{5} = 0,2$ .

Cela signifie que la petite pyramide est cinq fois plus petite que la grande.

3. On sait que si les longueurs d'un solide sont multipliées par un nombre  $k$  positif alors les aires sont multipliées par  $k^2$  et les volumes par  $k^3$ .

Comme la petite pyramide est 5 fois plus petite que la grande, son volume est  $5^2 = 25$  fois plus petit.

Le volume de la pyramide EFGHS est égal à  $720 \text{ cm}^3 \div 25 = 28,8 \text{ cm}^3$

Le volume de la boîte de chocolat est égal à  $720 \text{ cm}^3 - 28,8 \text{ cm}^3 = 691,2 \text{ cm}^3$

**4.a.** Dans le carré ABCD on sait que ABC est un triangle rectangle en B.

Dans le triangle ABC rectangle en B,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$

$$12^2 + 12^2 = AC^2$$

$$144 + 144 = AC^2$$

$$AC^2 = 288$$

$$AC = \sqrt{288}$$

La diagonale du carré mesure exactement  $\sqrt{288}$  cm soit environ 16,97 cm.

*On peut démontrer que la diagonale d'un carré de côté a vaut exactement  $a\sqrt{2}$  mais ce n'est pas une exigence de troisième!*

**4.b.** La hauteur du triangle est perpendiculaire (orthogonale) à la base ABCD. Ainsi le triangle AKS est rectangle en S.

De plus comme un carré est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Le côté [AK] mesure donc  $\sqrt{288}$  cm  $\div 2 \approx 8,49$  cm.

Dans le triangle AKS rectangle en S,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KA^2 + KS^2 = AS^2$$

*On peut calculer la valeur exacte de  $KA^2$  plutôt que de passer par des valeurs approchées (ce qui serait néanmoins accepté au brevet.)*

$$KA^2 = \left(\frac{\sqrt{288}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{288})^2}{2^2} = \frac{288}{4} = 72$$

$$72 + 15^2 = AS^2$$

$$72 + 225 = AS^2$$

$$AS^2 = 297$$

$$AS = \sqrt{297}$$

$$AS \approx 17,23$$

Le segment [AS] mesure exactement  $\sqrt{297}$  cm soit environ 17,23 cm.

**4.c.** Comme la pyramide EFGHS est une réduction de la pyramide ABCDS de coefficient 0,2,

Le côté [SE] mesure exactement  $0,2 \times \sqrt{297}$  cm  $\approx 0,72$  cm.

*On pouvait aussi utiliser le théorème de Thalès dans le triangle SAB avec (EF) // (AB). L'égalité des trois fractions permet de retrouver le coefficient de réduction.*

*Les droites (EA) et (FB) sont sécantes en S, les droites (EF) et (AB) sont parallèles,*

*D'après le théorème de Thalès on a :*

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB}$$

$$\frac{SE}{\sqrt{328} \text{ cm}} = \frac{SF}{SB} = \frac{2,4 \text{ cm}}{12 \text{ cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$SE = \frac{\sqrt{328} \text{ cm} \times 2,4 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} \text{ d'où } SE = \frac{2,4}{12} \times \sqrt{328} \text{ cm et } SE = 0,2 \times \sqrt{328} \text{ cm}$$

5. La pyramide est régulière donc nous avons  $SA = SB = SC = SD = \sqrt{328} \text{ cm}$ .

Le triangle SKC est rectangle en K.

On sait que  $SK = 15 \text{ cm}$ ,  $KC = \frac{\sqrt{288} \text{ cm}}{2}$  et  $SC = \sqrt{328} \text{ cm}$ .

On peut calculer le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle, au choix.

$$\cos \widehat{KSC} = \frac{KS}{SC} = \frac{15 \text{ cm}}{\sqrt{328} \text{ cm}} \quad \sin \widehat{KSC} = \frac{KA}{SC} = \frac{\frac{\sqrt{288} \text{ cm}}{2}}{\sqrt{328} \text{ cm}} \quad \tan \widehat{KSC} = \frac{KA}{KS} = \frac{\frac{\sqrt{288} \text{ cm}}{2}}{15 \text{ cm}}$$

Dans les trois cas on obtient à la calculatrice  $\widehat{KSC} \approx 34^\circ$