

EXERCICE N° 82 : Déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles



1. Le périmètre d'un cercle est-il proportionnel à son rayon ?
2. L'aire d'un disque est-elle proportionnelle à son rayon ?
3. Le volume d'une pyramide est-elle proportionnelle à sa hauteur ?
4. Pour un être humain, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ?
5. Voici un tableau de conversion entre les trois unités de mesures usuelles de la température :

Température en degré Celsius	-273,15°C	-40°C	-10°C	0°C	37°C	100°C
Température en degré Fahrenheit	-459,67°F	-40°F	14°F	32°F	98,6°F	212°F
Température en degré Kelvin	0°K	233,15°K	263,15°K	273,15°K	310,15°K	373,15°K

- 5.a. La température en degré Celsius est-elle proportionnelle à celle en degré Fahrenheit ?
- 5.b. La température en degré Fahrenheit est-elle proportionnelle à la celle en degré Kelvin ?
- 5.c. On sait que la fonction qui exprime les degrés Fahrenheit en fonction des degrés Celsius est une fonction affine.
Déterminer cette expression.
- 5.d. On sait que la fonction qui exprime les degrés Kelvin en fonction des degrés Celsius est une fonction affine.
Déterminer cette expression.



EXERCICE N° 82 : Grandeurs et mesures— La proportionnalité

CORRECTION

Déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles

Attention au vocabulaire. La notion de proportionnalité concerne des grandeurs quelque soit l'unité de mesure. Dire que deux grandeurs sont proportionnelles signifie qu'il existe une relation linéaire entre les deux (l'existence d'un unique coefficient multiplicateur). La notion de tableau de proportionnalité est abusive : les grandeurs représentées dans le tableau peuvent être proportionnelles. D'où l'intérêt de bien indiquer en entête des lignes ou des colonnes la nature des grandeurs représentées.

1. La fonction qui exprime le périmètre d'un cercle en fonction de son rayon r est $f(r) = 2\pi \times r$.
Il s'agit donc d'une fonction linéaire dont le coefficient est 2π .

Le rayon d'un cercle est proportionnel au périmètre du cercle.

2. La fonction qui exprime l'aire d'un disque en fonction de son rayon r est $g(x) = \pi \times r^2$.
Cette fonction n'est pas linéaire. Ces grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Par exemple pour $r = 2 \text{ cm}$ on a $g(2) = \pi \times (2 \text{ cm})^2 = 4\pi \text{ cm}^2$.

Pour un rayon trois fois plus grand, $r = 6 \text{ cm}$, $g(6) = \pi \times (6 \text{ cm})^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

On remarque que $\frac{36\pi \text{ cm}^2}{4\pi \text{ cm}^2} = 9$ donc pour rayon trois fois plus grand, l'aire n'est pas trois fois plus grande!

L'aire d'un disque n'est pas proportionnelle à son rayon.

3. Le volume d'une pyramide est donné par l'expression $\frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$.

Pour une pyramide dont on ne fait varier que la hauteur h , la base a une aire fixée A . La fonction qui exprime le volume en fonction de la hauteur est donc $V(h) = \frac{A}{3} \times h$.

Il s'agit d'une fonction linéaire de coefficient constant $\frac{A}{3}$.

Le volume d'une pyramide est proportionnel à sa hauteur.

4. Si la taille et l'âge d'un être humain étaient proportionnelles alors un humain deux fois plus âgé serait deux fois plus grand.

Un adulte de 20 ans mesurant 1,83 m mesurerait 3,66 m à 40 ans... ce qui est absurde!

La taille et l'âge d'un humain ne sont pas proportionnelles.

5.a. La température 0°C correspond à 32°F . Or s'il existait un coefficient multiplicateur unique k qui permet de passer des degrés Celsius au degré Fahrenheit, nous aurions $0^\circ\text{C} \times k = 0^\circ\text{F}$.

La température en degré Celsius n'est pas proportionnelle à celle en degré Fahrenheit.

5.b. On peut faire la même remarque en observant la colonne 0°K et $-459,67^\circ\text{F}$.

On peut aussi comparer les quotients sur deux colonnes pour montrer l'existence ou non d'un coefficient multiplicatif unique :

$$\frac{263,15}{14} \approx 18,796 \text{ et } \frac{273,15}{32} \approx 8,536.$$

La température en degré Kelvin n'est pas proportionnelle à celle en degré Fahrenheit.

5.c. Notons P cette fonction affine. Elle s'écrit $P(x) = ax + b$ où a et b sont les nombres que nous cherchons. Comme $P(0) = 32$ on en déduit que $b = 32$ (en effet $P(0) = a \times 0 + b = b$)

De plus $P(100) = 212$ (on prend cet exemple mais un autre conviendrait aussi) donc $P(100) = a \times 100 + 32 = 212$
Il faut résoudre :

$$\begin{aligned} 100a + 32 &= 212 \\ 100a + 32 - 32 &= 212 - 32 \\ 100a &= 180 \\ a &= \frac{180}{100} \\ a &= 1,8 \end{aligned}$$

La fonction cherchée est $P(x) = 1,8x + 32$

5.d. Notons K cette fonction affine. Elle s'écrit $K(x) = ax + b$ où a et b sont les nombres que nous cherchons. Comme $K(0) = 273,15$ on en déduit que $b = 273,15$ (en effet $K(0) = a \times 0 + b = b$)

De plus $K(37) = 310,15$ (on prend cet exemple mais un autre conviendrait aussi) donc $K(37) = a \times 37 + 273,15 = 310,15$

Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}37a + 273,15 &= 310,15 \\37a + 273,15 - 273,15 &= 310,15 - 273,15 \\37a &= 37 \\a &= \frac{37}{37} \\a &= 1\end{aligned}$$

La fonction cherchée est $K(x) = x + 273,15$