## EXERCICE Nº 86 : Agrandissement et réduction de figures

**1.a.** Un cylindre de révolution a un diamètre qui mesure 27 cm et une hauteur de 39 cm.
Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
**1.b.** Une réduction de ce cylindre a un rayon qui mesure 4,5 cm. Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.

**2.** Un pavé droit mesure 15 cm de long, 12 cm de large et 8 cm de haut.
On augmente sa longueur de 25 % et sa largeur de 20 %. On diminue la hauteur de 15 %.
Quelle est la pourcentage d'augmentation de son volume ?

**3.** Sur le plan du cadastre, un jardin rectangulaire mesure 7 cm de long sur 5 cm de large. L'échelle de ce plan est 1 : 150. Quelle est la surface réelle de ce jardin ? Exprimer ce résultat en mètre carré puis en are.

**4.** La Tour Eiffel mesure 324 m pour une masse totale 10 100 t.
Quelle serait la masse d'une réduction parfaite de la Tour Eiffel de 1 m de haut ?

## EXERCICE Nº 86 : Grandeurs et mesures— La proportionnalité CORRECTION

*Agrandissement et réduction de figures*

**1.a.** Le volume d'un cylindre se calcule en utilisant la formule Volume = Aire de la base × Hauteur.
L'aire latérale d'un cylindre est une rectangle dont un côté correspond à sa hauteur et l'autre correspond au périmètre du disque de base.

Ce cylindre a un diamètre de 27 cm donc un rayon de 13,5 cm.

$V = 2 \times \pi \times (13{,}5\,\text{cm})^2 \times (39\,\text{cm} = 7\,107{,}75\pi\ cm^3 \approx 22\,318\,\text{cm}^3$

Le cercle de base a un périmètre de $2 \times \pi \times 13{,}5\,\text{cm} = 27\pi\ cm$.

La surface latérale est un rectangle de $27\pi\ cm$ de long sur 39 cm de large.
Son aire mesure donc $A = 27\pi\ cm \times 39\ cm = 1\,053\pi\ cm^2 \approx 3\,306\,\text{cm}^2$

$\boxed{\text{Le volume mesure environ } 22\,318\,\text{cm}^3 \text{ et une aire latérale de } 3\,306\,\text{cm}^3.}$

**1.b.** En réduisant ce cylindre, le rayon passe de 13,5 cm à 4,5 cm. Le coefficient de réduction vaut donc $\dfrac{4{,}5\,\text{cm}}{13{,}5\,\text{cm}} = \dfrac{1}{3}$.

On sait que **si les longueurs d'une figure sont multipliées par une coefficient d'agrandissement/réduction $k$ alors les aires sont multipliées par $k^2$ et les volumes par $k^3$.**

Ici, $k = \dfrac{1}{3} < 1$, il s'agit bien d'une réduction : le solide réduit est trois fois plus petit.

Son volume est donc multiplié par $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$ soit 27 fois plus petit.
Le volume réduit vaut donc $7\,107{,}75\pi\ cm^3 \times \dfrac{1}{27} = 263{,}25\pi\ cm^3 \approx 826\,\text{cm}^3$.

L'aire latérale est multipliée par $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ soit 9 fois plus petit.
L'aire latérale réduite vaude donc $1\,053\pi\ cm^2 \times \dfrac{1}{9} = 117\pi\ cm^3 \approx 367\,\text{cm}^2$.

$\boxed{\text{Le volume réduit mesure environ } 826\,\text{cm}^3 \text{ et l'aire latérale réduite } 367\,\text{cm}^2.}$

*On pouvait aussi calculer la nouvelle hauteur soit* $39\,\text{cm} \times \dfrac{1}{3} = 13\,\text{cm}$ *puis recommencer les calculs de la question* ***1.a.***

**2.** Augmenter une quantité de 25 % revient à multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{25}{100} = 1 + 0,25 = 1,25$.

Augmenter une quantité de 20 % revient à multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$.

Diminuer une quantité de 15 % revient à multiplier cette quantité par $1 - \dfrac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$.

La longueur devient $15\,\text{cm} \times 1,25 = 18{,}75\,\text{cm}$.
La largeur devient $12\,\text{cm} \times 1,20 = 14{,}40\,\text{cm}$.
La hauteur devient $8\,\text{cm} \times 0,85 = 6{,}80\,\text{cm}$.

Le volume initial vaut $V_i = 15\,\text{cm} \times 12\,\text{cm} \times 8\,\text{cm} = 1\,440\,\text{cm}^3$.
Le volume final vaut $V_f = 18{,}75\,\text{cm} \times 14{,}40\,\text{cm} \times 6{,}80\,\text{cm} = 1\,836\,\text{cm}^3$.

On passe donc de $1\,440\,\text{cm}^3$ à $1\,836\,\text{cm}^3$. Il s'agit donc d'une augmentation de $\dfrac{1\,836\,\text{cm}^3}{1\,440\,\text{cm}^3} = 1,275$.

Or $1,275 = 1 + 0,275 = 1 + \dfrac{27,5}{100}$.

$\boxed{\text{Il s'agit d'une augmentation de } 27,5 \text{ \% du volume.}}$

*On pouvait aussi constater que* $1,25 \times 1,20 \times 0,85 = 1,275$.

3. L'échelle 1 : 150 qui est aussi un ratio, signifie qu'une unité sur le plan correspond à 150 unité dans la réalité.
Cela signifie aussi que le quotient entre une mesure sur le plan et une mesure réelle vaut $\dfrac{1}{150}$.
Ou encore que la mesure sur le plan est proportionnelle à la mesure dans la réalité :

| | | |
|---|---|---|
| Mesures sur le plan | 1 | |
| Mesure dans la réalité | 150 | |

7 cm sur le plan correspond à $150 \times 7\,\text{cm} = 1\,050\,\text{cm} = 10{,}5\,\text{m}$ dans la réalité.
5 cm sur le plan correspond à $150 \times 5\,\text{cm} = 750\,\text{cm} = 7{,}5\,\text{m}$ dans la réalité.

$\boxed{\text{L'aire du jardin mesure } 10{,}5\,\text{m} \times 7{,}5\,\text{m} = 78{,}75\,\text{m}^2}$

On sait qu'un are correspond à l'aire d'un carré de 10 m de côté. Cela correspond donc à $10\,\text{m} \times 10\,\text{m} = 100\,\text{m}^2$.

$\boxed{\text{Ce jardin mesure donc } 0{,}7875\,\text{a}}$

**4.** En passant de 324 m de haut dans la réalité à une maquette de 1 m le coefficient de réduction vaut $\dfrac{1\,\text{m}}{324\,\text{m}}$.

La masse de la struture métallique de la Tour Eiffel est proportionnelle à son volume. Il suffit en effet de multiplier le volume par la masse volumique du matériaux utilisé.

Comme la longueur est multipliée par $\dfrac{1}{324}$ c'est à dire divisée par 324, le volume et donc la masse est divisée par $324^3 = 34\,012\,224$.

La masse de la maquette vaut $\dfrac{10\,100\,\text{t}}{324^3} = \dfrac{10\,100\,000\,\text{kg}}{34\,012\,224} \approx 0{,}297\,\text{kg}$

$\boxed{\text{Une Tour Eiffel de 1 m de haut parfaitement identique à l'originale aurait une masse de } 297\,\text{g.}}$

*C'est particulièrement léger. On compare souvent la structure de la Tour Eiffel à de la dentelle métallique !*