

EXERCICE N° 86 : Agrandissement et réduction de figures



- 1.a. Un cylindre de révolution a un diamètre qui mesure 27 cm et une hauteur de 39 cm. Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
- 1.b. Une réduction de ce cylindre a un rayon qui mesure 4,5 cm. Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
2. Un pavé droit mesure 15 cm de long, 12 cm de large et 8 cm de haut. On augmente sa longueur de 25 % et sa largeur de 20 %. On diminue la hauteur de 15 %. Quelle est la pourcentage d'augmentation de son volume ?
3. Sur le plan du cadastre, un jardin rectangulaire mesure 7 cm de long sur 5 cm de large. L'échelle de ce plan est 1 : 150. Quelle est la surface réelle de ce jardin ? Exprimer ce résultat en mètre carré puis en are.
4. La Tour Eiffel mesure 324 m pour une masse totale 10 100 t. Quelle serait la masse d'une réduction parfaite de la Tour Eiffel de 1 m de haut ?



EXERCICE N° 86 : Grandeurs et mesures— La proportionnalité

CORRECTION

Agrandissement et réduction de figures

1.a. Le volume d'un cylindre se calcule en utilisant la formule $\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$. L'aire latérale d'un cylindre est un rectangle dont un côté correspond à sa hauteur et l'autre correspond au périmètre du disque de base.

Ce cylindre a un diamètre de 27 cm donc un rayon de 13,5 cm.

$$V = 2 \times \pi \times (13,5 \text{ cm})^2 \times (39 \text{ cm}) = 7\,107,75\pi \text{ cm}^3 \approx 22\,318 \text{ cm}^3$$

Le cercle de base a un périmètre de $2 \times \pi \times 13,5 \text{ cm} = 27\pi \text{ cm}$.

La surface latérale est un rectangle de $27\pi \text{ cm}$ de long sur 39 cm de large. Son aire mesure donc $A = 27\pi \text{ cm} \times 39 \text{ cm} = 1\,053\pi \text{ cm}^2 \approx 3\,306 \text{ cm}^2$

Le volume mesure environ $22\,318 \text{ cm}^3$ et une aire latérale de $3\,306 \text{ cm}^2$.

1.b. En réduisant ce cylindre, le rayon passe de 13,5 cm à 4,5 cm. Le coefficient de réduction vaut donc $\frac{4,5 \text{ cm}}{13,5 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$.

On sait que **si les longueurs d'une figure sont multipliées par un coefficient d'agrandissement/réduction k alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 .**

Ici, $k = \frac{1}{3} < 1$, il s'agit bien d'une réduction : le solide réduit est trois fois plus petit.

Son volume est donc multiplié par $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ soit 27 fois plus petit.

Le volume réduit vaut donc $7\,107,75\pi \text{ cm}^3 \times \frac{1}{27} = 263,25\pi \text{ cm}^3 \approx 826 \text{ cm}^3$.

L'aire latérale est multipliée par $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ soit 9 fois plus petit.

L'aire latérale réduite vaut donc $1\,053\pi \text{ cm}^2 \times \frac{1}{9} = 117\pi \text{ cm}^2 \approx 367 \text{ cm}^2$.

Le volume réduit mesure environ 826 cm^3 et l'aire latérale réduite 367 cm^2 .

On pouvait aussi calculer la nouvelle hauteur soit $39 \text{ cm} \times \frac{1}{3} = 13 \text{ cm}$ puis recommencer les calculs de la question 1.a.

2. Augmenter une quantité de 25 % revient à multiplier cette quantité par $1 + \frac{25}{100} = 1 + 0,25 = 1,25$.

Augmenter une quantité de 20 % revient à multiplier cette quantité par $1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$.

Diminuer une quantité de 15 % revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$.

La longueur devient $15 \text{ cm} \times 1,25 = 18,75 \text{ cm}$.

La largeur devient $12 \text{ cm} \times 1,20 = 14,40 \text{ cm}$.

La hauteur devient $8 \text{ cm} \times 0,85 = 6,80 \text{ cm}$.

Le volume initial vaut $V_i = 15 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 1440 \text{ cm}^3$.

Le volume final vaut $V_f = 18,75 \text{ cm} \times 14,40 \text{ cm} \times 6,80 \text{ cm} = 1836 \text{ cm}^3$.

On passe donc de 1440 cm^3 à 1836 cm^3 . Il s'agit donc d'une augmentation de $\frac{1836 \text{ cm}^3}{1440 \text{ cm}^3} = 1,275$.

Or $1,275 = 1 + 0,275 = 1 + \frac{27,5}{100}$.

Il s'agit d'une augmentation de 27,5 % du volume.

On pouvait aussi constater que $1,25 \times 1,20 \times 0,85 = 1,275$.

3. L'échelle 1 : 150 qui est aussi un ratio, signifie qu'une unité sur le plan correspond à 150 unités dans la réalité.

Cela signifie aussi que le quotient entre une mesure sur le plan et une mesure réelle vaut $\frac{1}{150}$.

Ou encore que la mesure sur le plan est proportionnelle à la mesure dans la réalité :

Mesures sur le plan	1	
Mesure dans la réalité	150	

7 cm sur le plan correspond à $150 \times 7 \text{ cm} = 1050 \text{ cm} = 10,5 \text{ m}$ dans la réalité.

5 cm sur le plan correspond à $150 \times 5 \text{ cm} = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$ dans la réalité.

L'aire du jardin mesure $10,5 \text{ m} \times 7,5 \text{ m} = 78,75 \text{ m}^2$

On sait qu'un are correspond à l'aire d'un carré de 10 m de côté. Cela correspond donc à $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 100 \text{ m}^2$.

Ce jardin mesure donc 0,7875 a

4. En passant de 324 m de haut dans la réalité à une maquette de 1 m le coefficient de réduction vaut $\frac{1 \text{ m}}{324 \text{ m}}$.

La masse de la structure métallique de la Tour Eiffel est proportionnelle à son volume. Il suffit en effet de multiplier le volume par la masse volumique du matériaux utilisé.

Comme la longueur est multipliée par $\frac{1}{324}$ c'est à dire divisée par 324, le volume et donc la masse est divisée par $324^3 = 34012224$.

La masse de la maquette vaut $\frac{10100 \text{ t}}{324^3} = \frac{10100000 \text{ kg}}{34012224} \approx 0,297 \text{ kg}$

Une Tour Eiffel de 1 m de haut parfaitement identique à l'originale aurait une masse de 297 g.

C'est particulièrement léger. On compare souvent la structure de la Tour Eiffel à de la dentelle métallique!