EXERCICE n° XIXGENFRAII — Le décor de la pièce de théatre

France 2019 — Série générale

Trigonométrie — Aire du rectangle — Pourcentage — Triangles semblables — Agrandissement / Réduction — Théorème de Pythagore

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près.

Pour construire le décor d'un pièce de théatre (Figure 1), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (Figure 2).

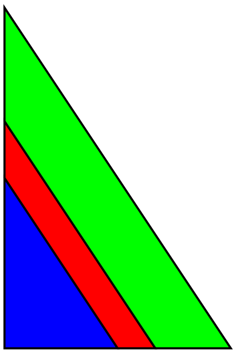

Figure 1

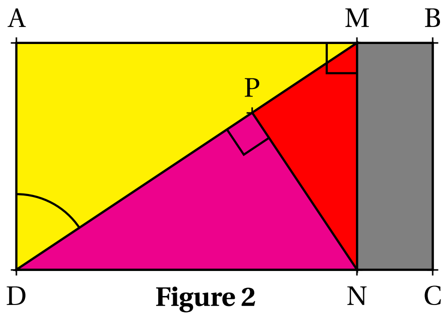

Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes :
- Le triangle ADM est rectangle en A;
- AD = 2 m;
- $\widehat{ADM} = 60°$

1. Montrer que [AM] mesure environ 3,46 m.

2. La partie de la plaque non utilisée est représentée sur la Figure 2 par le rectangle MBCN. Calculer un valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.

3. Pour que la superposition des triangles soit hamonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables. Démontrer que c'est bien le cas.

4. Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que 1,5. Est-ce le cas? Justifier votre réponse.

Correction

1. *C'est une situation d'usage de la trigonométrie !*

Dans le triangle PAD rectangle en A (puisque ABCD est un rectangle), on connaît le côté adjacent à l'angle $\widehat{\text{ADM}}$ et le côté opposé de cet angle.

$\tan\widehat{\text{ADM}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AD}} = \dfrac{\text{AM}}{2\ m}$ d'où $\text{AM} = 2\ m \times \tan 60° \approx 3,46\ m$.

$\boxed{\text{AM} \approx 3,46\ m}$

2. La partie de plaque non utilisée est un rectangle de longueur BC = 2 m et de largeur $\text{MB} = \text{AB} - \text{AM} = 4\ m - 3,46\ m \approx 0,54\ m$.
L'aire de cette partie non utilisée est donc $\text{A}_1 = 2\ m \times 0,54\ m = 1,08\ m^2$
Or le rectangle ABCD a une aire qui mesure $\text{A} = 4\ m \times 2\ m = 8\ m^2$

La proportion de la plaque non utilisée est donnée par le quotient : $\dfrac{1,08\ m^2}{8\ m^2} = 0,135$

$\boxed{\text{La proportion de la plaque non utilisée est d'environ 14 \% soit } 0,14.}$

3. Le triangle AMD et le triangle DMN sont rectangles. Comme ABCD est un rectangle, les droites (AM) et (DN) sont parallèles. Ainsi les angles **alterne-interne** $\widehat{\text{DMN}}$ et $\widehat{\text{ADM}}$ sont égaux à 60°. Pour être complet on en déduit que le troisième angle de ces triangles mesure 30° puisque $90° + 60° + 30° = 180°$

On en déduit que les triangles AMD et MDN sont semblables

Le triangle DPM est rectangle en P. De plus comme ABCD est un rectangle, $\widehat{\text{PDN}} = 90° - \widehat{\text{ADM}} = 90° - 60° = 30°$
Finalement les angles du triangle DPM mesurent aussi 90°, 30° et 60°.
DPM est semblable avec AMD et MDN.

Enfin le triangle PMN est encore rectangle. L'angle $\widehat{\text{PMN}} = 60°$.

$\boxed{\text{Les triangles AMD, MDN, PMN et DPM sont semblables.}}$

4. *C'est une question assez difficile. Il faut observer les deux triangles et déterminer les côtés deux à deux homothétiques.*

PDN et AMD sont rectangles. Les hypoténuses des deux triangles sont donc homothétiques. Plus clairement [MD] est un agrandissement de [DN].
On connaît la mesure de [DN] en effet $\text{DN} \approx 3,46\ m$.
Reste à calculer la mesure de [MD].
Dans le triangle AMD rectangle en A, d'après le **théorème de Pythagore** on a :
$\text{AM}^2 + \text{AD}^2 = \text{DM}^2$
$3,46^2 + 2^2 = \text{DM}^2$
$\text{DM}^2 = 11,9716 + 4$
$\text{DM}^2 = 15,9716$
$\text{DM} = \sqrt{15,9716} \approx 4$

Cette proximité avec 4 peut paraître étonnante ! Il suffit d'utiliser un peu de trigonométrie au lieu du théorème de Pythagore pour le comprendre.

Dans le triangle AMD rectangle en A on connaît le côté adjacent à l'angle à 60° et on cherche la mesure de l'hypoténuse.

$\cos 60° = \dfrac{2\ m}{\text{DM}}$ donc $\text{DM} = \dfrac{2\ m}{\cos 60°} = 4$ cela vient du fait que $\cos 60° = 0,5$.

Finalement $\text{DM} = 4\ m$ et $\text{DN} \approx 3,46\ m$.
On cherche le coefficient d'agrandissement k tel que $3,46\ m \times k = 4\ m$ d'où $k = \dfrac{4\ m}{3,46\ m} \approx 1,16$.

On pouvait aussi adopter un raisonnement trigonométrique.
Il faut évaluer le quotient $\dfrac{\text{DM}}{\text{DN}}$ ou son inverse $\dfrac{\text{DN}}{\text{DM}}$

Dans le triangle rectangle DMN rectangle en A, le quotient $\dfrac{\text{DN}}{\text{DM}} = \cos 30°$
Donc $\dfrac{\text{DM}}{\text{DN}} = \dfrac{1}{\cos 30°} \approx 1,16$

$\boxed{\text{Le coefficient d'agrandissement est bien inférieur à } 1,5.}$