



Étendue — Médiane — Moyenne — Volume du cylindre — Débit

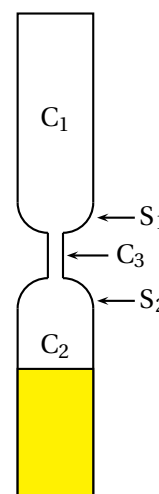
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Un sablier est composé de :

- Deux cylindres C_1 et C_2 de hauteur $4,2\text{ cm}$ et de diamètre $1,5\text{ cm}$;
- un cylindre C_3 ;
- deux demi-sphères S_1 et S_2 de diamètre $1,5\text{ cm}$.

On rappelle que le volume V d'un cylindre d'aire de base B et de hauteur h :

$$V = B \times h$$



1.a. Au départ, le sable remplit le cylindre C_2 aux deux tiers.

Montrer que le volume du sable est environ $4,95\text{ cm}^3$.

1.b. On retourne le sablier. En supposant que le débit d'écoulement du sable est constant et égal à $1,98\text{ cm}^3/\text{min}$, calculer le temps en minutes et secondes que va mettre le sable à s'écouler dans le cylindre inférieur.

2. En réalité, le débit d'écoulement d'un sablier n'est pas constant.

Dans une usine où on fabrique des sabliers comme celui-ci, on prend un sablier au hasard et on teste plusieurs fois le temps d'écoulement dans ce sablier. Voici les différents temps récapitulés dans le tableau suivant :

Temps mesuré	2 min 22 s	2 min 24 s	2 min 26 s	2 min 27 s	2 min 28 s	2 min 29 s	2 min 30 s
Nombre de tests	1	1	2	6	3	7	6

Temps mesuré	2 min 31 s	2 min 32 s	2 min 33 s	2 min 34 s	2 min 35 s	2 min 38 s
Nombre de tests	3	1	2	3	2	3

2.a. Combien de tests ont été réalisés au total?

2.b. Un sablier est mis en vente s'il vérifie les trois conditions ci-dessous, sinon il est éliminé.

- L'étendue des temps est inférieure à 20 s ;
- la médiane des temps est comprise entre $2\text{ min }29\text{ s}$ et $2\text{ min }31\text{ s}$;
- la moyenne des temps est comprise entre $2\text{ min }28\text{ s}$ et $2\text{ min }32\text{ s}$.

Le sablier testé sera-t-il éliminé?



CORRECTION

1.a Le cylindre C_2 a un diamètre $1,5\text{ cm}$ donc un rayon de $0,75\text{ cm}$ et une hauteur de $4,2\text{ cm}$.
La base d'un cylindre est un disque. L'aire d'un disque se calcule par l'expression $\pi \times r^2$ où r est le rayon.

$$V_{C_2} = \pi \times (0,75\text{ cm})^2 \times 4,2\text{ cm} = 2,3625\pi\text{ cm}^3 \approx 7,42\text{ cm}^3$$

Ce cylindre est rempli au deux-tiers de sable : $\frac{2}{3} \times 7,42\text{ cm}^3 \approx 4,95\text{ cm}^3$

Le volume de sable est d'environ $4,95\text{ cm}^3$

1.b Le débit d'écoulement est égal à $1,98\text{ cm}^3/\text{min}$ ce qui signifie qu'en 1 min s'écoule exactement $1,98\text{ cm}^3$ de sable.

$$4,95\text{ cm}^3 \div 1,98\text{ cm}^3 = 2,5$$

Or $2,5\text{ min} = 2\text{ min } 30\text{ s}$ car $2,5 \times 60\text{ s} = 150\text{ s}$ et que $150\text{ s} = 2 \times 60\text{ s} + 30\text{ s}$

Le sable va mettre $2\text{ min } 30\text{ s}$ à s'écouler.

2.a Il faut faire la somme suivante : $1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 + 6 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 40$ 40 tests ont été effectués.

2.b Le temps minimale de cette série est $2\text{ min } 22\text{ s}$. Le temps maximal est $2\text{ min } 38\text{ s}$.
L'étendue de cette série pour ce sablier est donc $2\text{ min } 38\text{ s} - 2\text{ min } 22\text{ s} = 16\text{ s}$

L'étendue est bien inférieure à 20 s .

C'est une série à 40 valeurs mesurées. La médiane est donc, par exemple, la moyenne de la vingtième et vingt-et-unième valeurs.

La vingtième valeurs est $2\text{ min } 29\text{ s}$ et la vingt-et-unième est $2\text{ min } 30\text{ s}$.

La médiane est donc bien comprise entre $2\text{ min } 29\text{ s}$ et $2\text{ min } 31\text{ s}$.

Pour calculer la moyenne des temps il y a plusieurs méthodes :

Méthode 1 : On fait la moyenne avec les temps complets mais il faut convertir chaque mesure en secondes.
La moyenne pondérée des temps est :

$$m = \frac{1 \times 142\text{ s} + 1 \times 144\text{ s} + 2 \times 146\text{ s} + 6 \times 147\text{ s} + 3 \times 148\text{ s} + 7 \times 149\text{ s} + 6 \times 150\text{ s} + 3 \times 151\text{ s} + 1 \times 152\text{ s} + 2 \times 153\text{ s} + 2 \times 154\text{ s} + 2 \times 155\text{ s} + 3 \times 158\text{ s}}{40}$$
$$m = \frac{6004\text{ s}}{40} \approx 150,1\text{ s} \text{ soit } 2\text{ min } 30,5\text{ s}.$$

Méthode 2 : On ne tient pas compte des 2 min et on ne fait que la moyenne des secondes restantes :

$$m = \frac{1 \times 22\text{ s} + 1 \times 24\text{ s} + 2 \times 26\text{ s} + 6 \times 27\text{ s} + 3 \times 28\text{ s} + 7 \times 29\text{ s} + 6 \times 30\text{ s} + 3 \times 31\text{ s} + 1 \times 32\text{ s} + 2 \times 33\text{ s} + 2 \times 34\text{ s} + 2 \times 35\text{ s} + 3 \times 38\text{ s}}{40}$$
$$m = \frac{1204\text{ s}}{40} = 30,1$$

La moyenne des temps est bien comprise entre $2\text{ min } 28\text{ s}$ et $2\text{ min } 32\text{ s}$.

Le sablier testé peut donc être mis en vente!