



**EXERCICE n° XIXGENFRASII** — Un cube est égal à un carré

France 2019 — Série générale

QCM — Médiane — Décomposition en produit de facteurs premiers — Volume de la boule — Homothétie

- 1.a.** Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2744.
- 1.b.** En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de  $2744^2$ .
- 1.c.** À l'aide de cette décomposition, trouver  $x$  tel que  $x^3 = 2744^2$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que  $a^3 = b^2$ .

- 2.a.** Calculer  $b$  lorsque  $a = 100$ .
- 2.b.** Déterminer deux nombres entiers  $a$  et  $b$  supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité  $a^3 = b^2$ .



## CORRECTION

1.a

2744		2
1372		2
686		2
343		7
49		7
7		7
1		

Ainsi  $2744 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7$  soit  $2744 = 2^3 \times 7^3$ .

1.b  $2744^2 = (2^3 \times 7^3)^2$  donc  $2744^2 = (2^3)^2 \times (7^3)^2$ .

$$2744^2 = 2^6 \times 7^6$$

*Aucune connaissance sur les puissances n'est nécessaire pour résoudre cet exercice.*

$$2744^2 = 2744 \times 2744$$

$$2744^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$2744^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

1.c  $2744^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

$$2744^2 = 2^3 \times 2^3 \times 7^3 \times 7^3$$

$$2744^2 = (2 \times 2 \times 7 \times 7)^3$$

$$2744^2 = 196^3$$

$$x = 196 \text{ est une solution de l'équation } x^3 = 2744^2$$

2.a. Il faut résoudre :

$$100^3 = b^2$$

$$1\,000\,000 = b^2$$

Il y a deux solutions :  $b = \sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$  et  $b = -\sqrt{1\,000\,000} = -1\,000$ .

Comme  $b$  est un entier positif.

$$\text{La seule solution positive est } b = 1\,000.$$

2.b. On peut faire une recherche exhaustive des solutions en examinant les carrés et les cubes des nombres entiers compris entre 2 et 10.

$$2^2 = 4; 3^2 = 9; 4^2 = 16; 5^2 = 25; 6^2 = 36; 7^2 = 49; 8^2 = 64; 9^2 = 81 \text{ et } 10^2 = 100$$

On se contente des cubes inférieurs à  $10^2 = 100$  :

$$2^3 = 8; 3^3 = 27; 4^3 = 64; 5^3 = 125.$$

La seule solution dans cet encadrement est  $4^3 = 8^2$ .

$$a = 4 \text{ et } b = 8 \text{ sont une solution de l'équation } a^3 = b^2.$$