



Proportionnalité — Ratio — Cylindre — Pavé droit — Volume du cylindre — Volume du pavé droit

Pour le mariage de Dominique et Camille, le pâtissier propose deux pièces montées constituées de gâteaux de tailles et de formes différentes.

La tour de Pise :

La première pièce montée est constituée d'un empilement de 4 gâteaux de forme cylindrique, de même hauteur et dont le diamètre diminue de 8 cm à chaque étage.

Le gâteau du bas a pour diamètre 30 cm et pour hauteur 6 cm.



La tour Carrée :

La deuxième pièce montée est constituée d'un empilement de 3 pavés droits à base carrée de même hauteur.

La longueur du côté de la base diminue de 8 cm à chaque étage.

La hauteur des gâteaux est 8 cm; le côté de la base du gâteau du bas mesure 24 cm.



Tous les gâteaux ont été confectionnés à partir de la recette ci-dessous qui donne la quantité des ingrédients correspondant à 100 g de chocolat.

Recette du gâteau pour 100 g de chocolat :

- 65 g de sucre;
- 2 œufs;
- 75 g de beurre;
- 30 g de farine.

1. Quel est le ratio (masse de beurre : masse de chocolat)?
Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

2. Calculer la quantité de farine nécessaire pour 250 g de chocolat noir suivant la recette ci-dessus.

3. Calculer la longueur du côté de la base du plus petit gâteau de la tour Carrée.

4. Quelle est la tour qui a le plus grand volume?

Justifier votre réponse en détaillant les calculs.

On rappelle que le volume V d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par la formule :

$$V = \pi \times r^2 \times h$$



CORRECTION

1. Pour 100 g de chocolat il faut 75 g de beurre.

Le ration masse de beurre : masse de chocolat est donc 75 : 100.

$$\frac{75}{100} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{3}{4}$$

Le ration masse de beurre : masse de chocolat est 3 : 4 soit $\frac{3}{4}$
--

2. La quantité de farine est proportionnelle à la quantité de chocolat :

Quantité de chocolat	100 g	250 g
Quantité de farine	30 g	$\frac{30 \text{ g} \times 250 \text{ g}}{100 \text{ g}} = \frac{7500 \text{ g}}{100} = 75 \text{ g}$

Pour 250 g de chocolat la quantité de farine est 75 g.
--

On pouvait aussi constater que 250 g = 2,5 × 100 g.

Ainsi la quantité de farine est 2,5 × 30 g = 75 g.

On pouvait aussi revenir à l'unité :

30 g ÷ 100 = 0,30 g de farine pour 1 g de chocolat.

Ainsi pour 250 g de chocolat on obtient 250 × 0,30 g = 75 g.

3. Le gâteau **Tour carré** a un gâteau de base qui mesure 24 cm de côté. Il y a 3 gâteaux superposés. La longueur du côté diminue de 8 cm à chaque étage.

Au second étage le gâteau central mesure 24 cm – 8 cm = 16 cm.

Le plus petit gâteau de la Tour carrée mesure 16 cm – 8 cm = 8 cm de côté.

4. Calcul du volume de la **Tour de Pise** :

Ce gâteau est composé de 4 cylindres de hauteur 6 cm dont les diamètres diminuent de 8 cm à chaque étage.

Les diamètres des quatre gâteaux sont donc : 30 cm ; 30 cm – 8 cm = 22 cm ; 22 cm – 8 cm = 14 cm et 14 cm – 8 cm = 6 cm

Les rayons de ces gâteaux sont : 15 cm ; 11 cm ; 7 cm et 3 cm.

Notons V_1, V_2, V_3 et V_4 les volumes des gâteaux du plus grand au plus petit.

$$V_1 = \pi \times (15 \text{ cm})^2 \times 6 \text{ cm} = 1350\pi \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \pi \times (11 \text{ cm})^2 \times 6 \text{ cm} = 726\pi \text{ cm}^3$$

$$V_3 = \pi \times (7 \text{ cm})^2 \times 6 \text{ cm} = 294\pi \text{ cm}^3$$

$$V_4 = \pi \times (3 \text{ cm})^2 \times 6 \text{ cm} = 54\pi \text{ cm}^3$$

Le volume de la **Tour de Pise** est donc $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 1350\pi \text{ cm}^3 + 726\pi \text{ cm}^3 + 294\pi \text{ cm}^3 + 54\pi \text{ cm}^3 = 2424\pi \text{ cm}^3 \approx 7615 \text{ cm}^3$

Il est conseillé dans cette situation d'utiliser les valeurs exactes plutôt que les valeurs approchées le plus longtemps possible dans les calculs.

Calcul du volume de la **Tour Carrée** :

Ce gâteau est composé de 3 pavés droits à base carrée de hauteur 8 cm dont les côtés diminuent de 8 cm à chaque étage.

Les côtés des trois gâteaux sont donc : 24 cm ; $24\text{ cm} - 8\text{ cm} = 16\text{ cm}$ et $16\text{ cm} - 8\text{ cm} = 8\text{ cm}$.

Notons V'_1 , V'_2 et V'_3 les volumes des gâteaux du plus grand au plus petit.

Le volume d'un pavé droit de longueur L , de largeur l et de hauteur h est donné par la formule :

$$V = L \times l \times h$$

$$V'_1 = 24\text{ cm} \times 24\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 4608\text{ cm}^3$$

$$V'_2 = 16\text{ cm} \times 16\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 2048\text{ cm}^3$$

$$V'_3 = 8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 512\text{ cm}^3$$

Le volume de la **Tour de Carrée** est donc $V_1 + V_2 + V_3 = 4608\text{ cm}^3 + 2048\text{ cm}^3 + 512\text{ cm}^3 = 7168\text{ cm}^3$

La Tour de Pise a un volume supérieur à celui de la Tour Carrée de près de $7615\text{ cm}^3 - 7168\text{ cm}^3 = 447\text{ cm}^3$
--