EXERCICE nº XIXGENFRASV — Un programme de calcul et une conjecture

Tableur — Conjecture — Programme de calcul — Calcul littéral — Équation produit

On donne le programme de calcul suivant :

- **Étape 1** : Choisir un nombre de départ;
- **Étape 2** : Ajouter 6 au nombre de départ;
- **Étape 3** : Retrancher 5 au nombre de départ;
- **Étape 4** : Multiplier les résultats des étapes 2 et 3;
- **Étape 5** : Ajouter 30 à ce produit;
- **Étape 6** : Donner le résultat.

1.a Montrer que si le nombre choisi est 4, le résultat est 20.

1.b. Quel est le résultat quand on applique ce programme de calcul au nombre -3?

Zoé pense qu'un nombre de départ étant choisi, le résultat est égal à la somme de ce nombre et de son carré.
2.a Vérifier qu'elle a raison quand le nombre choisi au départ vaut 4, et aussi quand on choisit -3.

2.b. Ismaël décide d'utiliser un tableur pour vérifier l'affirmation de Zoé sur quelques exemples.

	A	B	C	D	E	F
1	Étape 1	2	5	7	10	20
2	Étape 2	8	11	13	16	26
3	Étape 3	-3	0	2	5	15
4	Étape 4	-24	0	26	80	390
5	Étape 5	6	30	56	110	420
6	Somme du nombre et de son carré	6	30	56	100	420

Il a écrit des formules en B2 et B3 pour exécuter automatiquement les **Étapes 2 et 3** du programme de calcul.

Quelle formule à recopier vers la droite a-t-il écrite dans la cellule B4 pour exécuter l'étape 4?

2.c. Zoé observe les résultats, puis confirme que pour tout nombre x choisi, le résultat du programme de calcul est bien $x^2 + x$.
Démontrer sa réponse.

2.d. Déterminer tous les nombres pour lesquels le résultat du programme est 0.

Correction

1.a. En partant du nombre 4 on obtient successivement :
- **Étape 1** : 4;
- **Étape 2** : $4+6=10$;
- **Étape 3** : $4-5=-1$;
- **Étape 4** : $10\times(-1)=-10$;
- **Étape 5** : $-10+30$;
- **Étape 6** : 20;

$\boxed{\text{En partant du nombre 4 on arrive bien à 20.}}$

1.b. En partant du nombre -3 on obtient successivement :
- **Étape 1** : -3;
- **Étape 2** : $-3+6=3$;
- **Étape 3** : $-3-5=-8$;
- **Étape 4** : $3\times(-8)=-24$;
- **Étape 5** : $-24+30$;
- **Étape 6** : 6;

$\boxed{\text{En partant du nombre } -3 \text{ on arrive bien à 6.}}$

2.a. Il faut tester en ajoutant le nombre à son carré.
- pour 4 : $4^2+4=16+4=20$ — la conjecture semble vraie!
- pour -3 : $(-3)^2+(-3)=9-3=6$ — la conjecture fonctionne encore!

$\boxed{\text{Cette conjecture semble vraie pour 4 et } -3.}$

2.b Dans la case B4 se trouve le résultat de l'**Étape 4** qui consiste à multiplier les résultats de l'**Étape 2** et de l'**Étape 3**. Ces résultats se trouvent en B2 et B3.

$\boxed{\text{Dans la case B4 la formule est } = \text{B2} * \text{B3}}$

2.c Il faut utiliser le programme de calcul sur un nombre générique.
Notons x le nombre de départ :
- **Étape 1** : x;
- **Étape 2** : $x+6$;
- **Étape 3** : $x-5$;
- **Étape 4** : $(x+6)\times(x-5)$;
- **Étape 5** : $(x+6)(x-5)+30$;

Développons cette expression :
$\text{A}=(x+6)(x-5)+30$
$\text{A}=x^2-5x+6x-30+30$
$\text{A}=x^2+x$

$\boxed{\text{Le programme de calcul consiste bien à ajouter le nombre à son carré.}}$

2.d. Il faut résoudre :

$$\begin{aligned} x^2+x &= 0 \\ x(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{array}{rcl} x+1 & = & 0 \\ x+1\color{red}{-1} & = & 0\color{red}{-1} \\ x & = & -1 \end{array}$$

$$x = 0$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{x = 0 \text{ et } x = -1}$

Testons ces solutions :

- ***Étape 1*** *:* 0 *;*
- ***Étape 2*** *:* $0+6=6$ *;*
- ***Étape 3*** *:* $0-5=-5$ *;*
- ***Étape 4*** *:* $6\times(-5)=-30$ *;*
- ***Étape 5*** *:* $(-30)+30=0$ *;*

- ***Étape 1*** *:* -1 *;*
- ***Étape 2*** *:* $-1+6=5$ *;*
- ***Étape 3*** *:* $-1-5=-6$ *;*
- ***Étape 4*** *:* $5\times(-6)=-30$ *;*
- ***Étape 5*** *:* $(-30)+30=0$ *;*

On ne sait pas résoudre une équation contenant un terme en x^2 sans la factoriser. Il faut donc chercher une factorisation à facteurs communs ou une factorisation utilisant les identités remarquables pour résoudre ce genre d'équation.