EXERCICE nº XIXGENPOLIV — Les ailes du moulin à vent

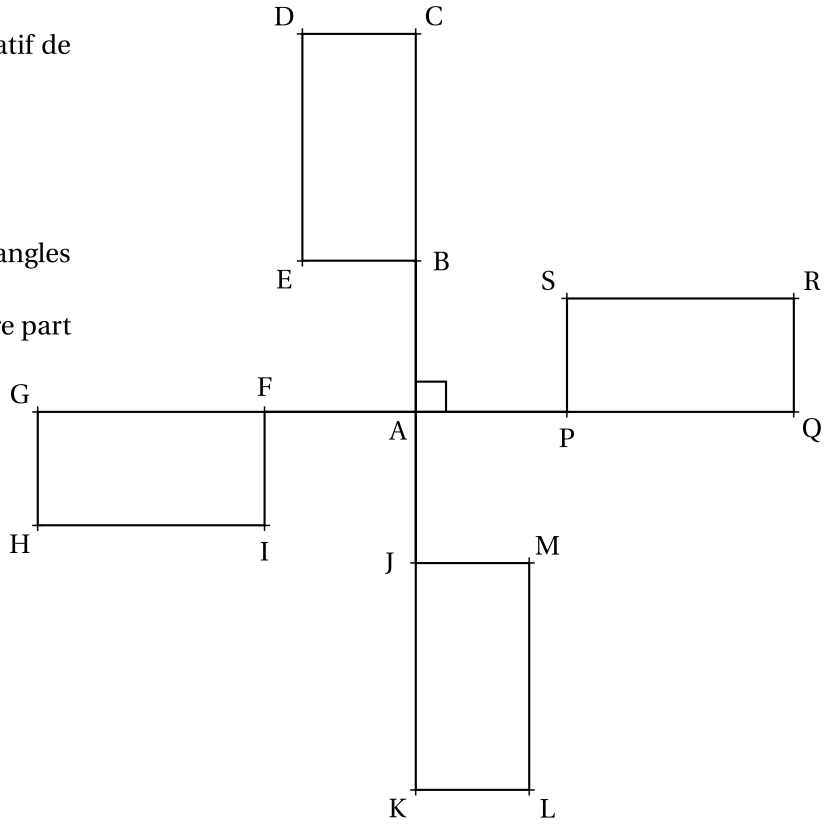
Polynésie française 2019 — Série générale

Symétrie centrale — Rotation — Théorème de Thalès — Trigonométrie

On s'intéresse aux ailes d'un moulin à vent décoratif de jardin.
Elles sont représentées par la figure ci-contre :

On donne :

— BCDE, FGHI, JKLM et PQRS sont des rectangles superposables ;
— C, B, A, J, K d'une part et G, F, A, P, Q d'autre part sont alignés ;
— AB = AF = AJ = AP.



1. Quelle transformation permet de passer du rectangle FGHI au rectangle PQRS ?

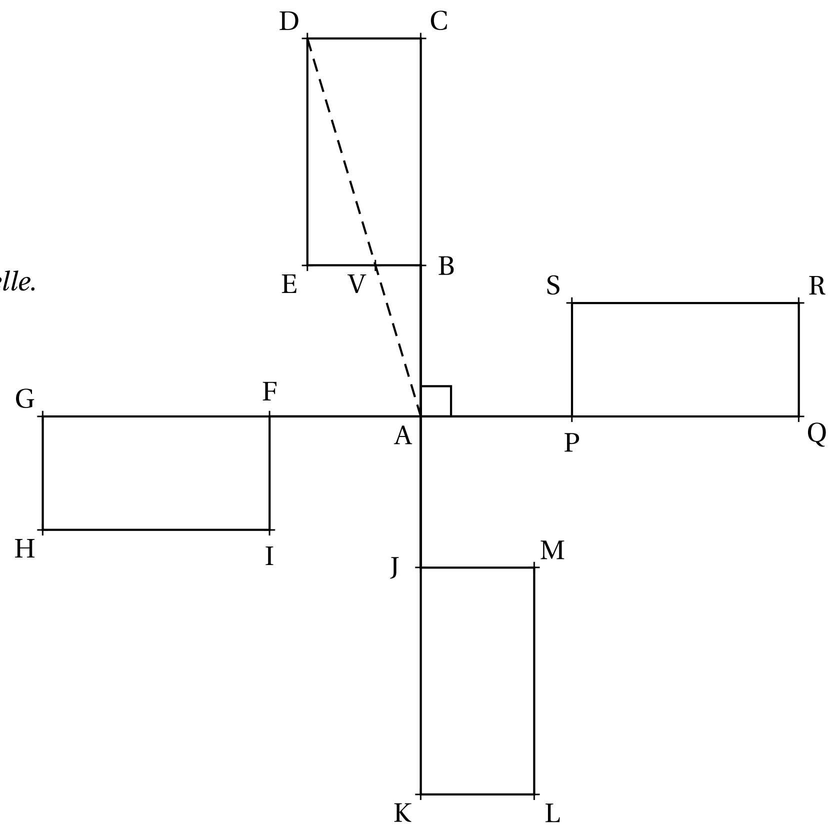
2. Quelle est l'image du rectangle FGHI par la rotation de centre A d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ?

Soit V un point de [EB] tel que BV = 4 cm.

On donne :

AB = 10 cm et AC = 30 cm ;

Attention la figure n'est pas construite à la taille réelle.



3.a. Justifier que (DC) et (VB) sont parallèles.

3.b. Calculer DC.

3.c. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{DAC}$.
Arrondir au degré près.

Correction

1. On sait que F, A et P sont alignés et que AF = AP.
Ainsi F **et** P **sont symétrique par rapport au point** A.

Comme les rectangles sont superposables, GF = PQ. De plus G, A et Q sont alignés.
On en déduit que G **et** Q **sont symétriques par rapport à** A.

On sait que la symétrie centrale conserve la mesure des angles et les longueurs. En particulier elle transforme un rectangle en un rectangle superposable.
On en déduit que les rectangles FGHI et PQRS sont symétriques par rapport à A.

$\boxed{\text{Il s'agit de la symétrie centrale de centre A.}}$

Toutes les justifications ne sont pas attendues dans cette question.

2. $\boxed{\text{Il s'agit du rectangle BCDE}}$

Pour justifier ce résultat on peut utiliser quelques un des arguments suivants :
- $\widehat{\text{FAB}} = 90°$ *et* AF = AB *;*
- G, F *et* A *sont alignés ainsi que* C, B *et* A *;*
- *la rotation conserve les mesures des angles et les longueurs ;*
- *la rotation transforme un rectangle en un rectangle superposable.*

3.a. BCDE est un rectangle donc un parallélogramme : cela implique que (DC)//(EB)
Comme V ∈ [EB] on arrive à :

$\boxed{(\text{DC})//(\text{VB})}$

3.b.
Les droites (DV) et (CB) sont sécantes en A, les droites (DC) et (VB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{AV}}{\text{AD}} = \frac{\text{BV}}{\text{CD}}$$

$$\frac{10\ cm}{30\ cm} = \frac{\text{AV}}{\text{AD}} = \frac{4\ cm}{\text{DC}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :
$\text{DC} = \dfrac{4\ cm \times 30\ cm}{10\ cm}$ d'où $\text{DC} = \dfrac{120\ cm}{10\ cm}$ et $\text{DC} \approx 12\ cm$

$\boxed{\text{DC} = 12\ cm}$.

3.c. Le triangle DCA est rectangle en C puisque BCDE est un rectangle.

Dans le triangle DCA rectangle en C on a :

$\tan\widehat{\text{DAC}} = \dfrac{\text{DC}}{\text{AC}}$ donc $\tan\widehat{\text{DAC}} = \dfrac{12\ cm}{30\ cm} = 0,4$

À la calculatrice on a $\widehat{\text{DAC}} \approx 22°$.

$\boxed{\widehat{\text{DAC}} \approx 22° \text{ au degré près.}}$