EXERCICE n° XXGENFRASII — Un programme de calcul

France septembre 2020 — Série générale

Programme de calcul — Expression littérale — Conjecture — Équation du premier degré

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre ;
- Ajouter 7 à ce nombre ;
- Soustraire 7 au nombre choisi au départ ;
- Multiplier les deux résultats précédents ;
- Ajouter 50.

1. Montrer que si le nombre choisi au départ est 2, alors le résultat obtenu est 5.

2. Quel est le résultat obtenu avec ce programme si le nombre choisi au départ est -10 ?

3. Un élève s'aperçoit qu'en calculant le double de 2 et en ajoutant 1, il obtient 5, le même résultat que celui qu'il a obtenu à la question 1.
Il pense alors que le programme de calcul revient à calculer le double du nombre de départ et à ajouter 1.
A-t-il raison ?

4. Si x désigne le nombre choisi au départ, montrer que le résultat du programme de calcul est x^2+1.

5.. Quel(s) nombre(s) doit-on choisir au départ du programme de calcul pour obtenir 17 comme résultat ?

Correction

1. On obtient successivement : 2, $2+7=9$ puis $2-7=-5$ et $9\times(-5)=-45$ enfin $-45+50=5$

$\boxed{\text{On obtient bien 5 en prenant 2 au départ.}}$

2. On obtient successivement : -10, $-10+7=-3$ puis $-10-7=-17$ et $-3\times(-17)=51$ enfin $51+50=101$

$\boxed{\text{On obtient 101 en partant de } -10}$

3. Cette conjecture fonctionne bien pour le premier exemple.
Cependant en prenant -10 comme à la question **2.** on arrive à $-10\times2=-20$ puis $-20+1=-19$.
Cela ne fonctionne donc pas avec le second exemple !

$\boxed{\text{La conjecture de l'élève est fausse.}}$

4. Notons x le nombre de départ.
On obtient $x+7$ puis $x-7$. Il faut calculer $(x+7)(x-7)=x^2-49$.
On utilise ici l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
On peut aussi développer : $(x+7)(x-7)=x^2-7x+7x-49=x^2-49$.
Enfin on ajoute 50 soit $x^2-49+50=x^2+1$.

$\boxed{\text{En notant } x \text{ le nombre de départ on obtient bien } x^2+1}$

5. On peut tenter de « remonter »le programme :
Le résultat final est 17, donc avant d'ajouter 50 nous avions $17-50=-33$.
Il faut maintenant décomposer -33 en facteurs, mais il y a trop de possibilités ! ($1\times-33=-1\times33=11\times-3=-11\times3=-2\times16,5=...$)

La méthode experte consiste à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 17\\ x^2+1-1 &= 17-1\\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

On sait que cette équation admet deux solutions : $x=-4$ et $x=4$.
On peut aussi redémontrer ce résultat :

$$\begin{aligned} x^2 &= 16\\ x^2-16 &= 16-16\\ x^2-16 &= 0\\ x^2-4^2 &= 0\\ (x+4)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

À la dernière ligne on reconnaît l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
Or on sait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ x+4-4 &= 0-4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-4 &= 0 \\ x-4+4 &= 0+4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vérifions :
$-4+7=3$ et $-4-7=-11$ d'où $3\times(-11)=-33$ et $-33+50=17$
$4+7=11$ et $4-7=-3$ d'où $11\times(-3)=-33$ et $-33+50=17$

$\boxed{\text{En prenant 4 ou } -4 \text{ au départ on obtient 17 à la fin !}}$