EXERCICE n° XXGENFRASIII — Le portique de balançoires

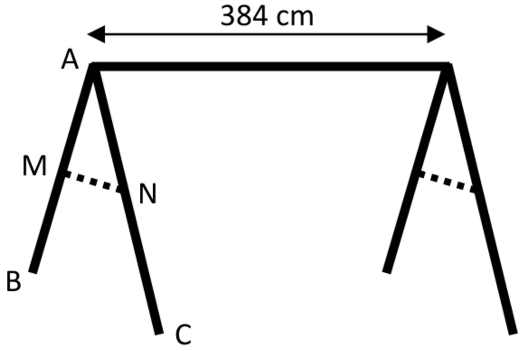
France septembre 2020 — Série générale

Tâche complexe — Théorème de Pythagore — Théorème de Thalès — Pourcentages — Trigonométrie

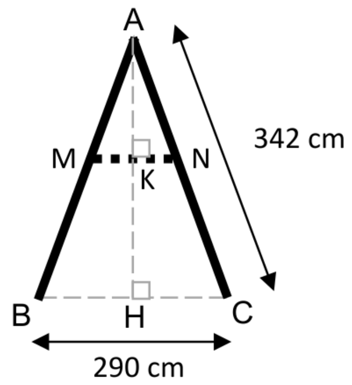
Une entreprise fabrique des portiques pour installer des balançoires sur des aires de jeux.

Document 1 : croquis d'un portique

Vue d'ensemble



Vue de côté



: poutres en bois de diamètre 100 mm

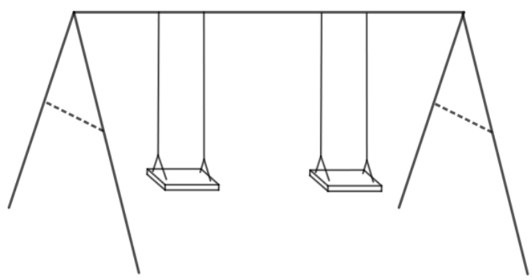
: barres de maintien latérales en bois.

ABC est un triangle isocèle en A.
H est le milieu de [BC]
(MN) est parallèle à (BC).

Document 2 : coût du matériel.

Poutres en bois de diamètre 100 mm :
- Longueur 4 m : 12,99 € l'unité ;
- Longueur 3,5 m : 11,75 € l'unité ;
- Longueur 3 m : 10,25 € l'unité.

Barres de maintien latérales en bois :
- Longueur 3 m : 6,99 € l'unité ;
- Longueur 2 m : 4,75 € l'unité ;
- Longueur 1,5 m : 3,89 € l'unité.



Ensemble des fixations nécessaires pour un portique : 80 €.
Ensemble de deux balançoires pour un portique : 50 €.

1. Déterminer la hauteur AH du portique, arrondie au cm près.

2. Les barres de maintien doivent être fixées à 165 cm du sommet (AN = 165 cm).
Montrer que la longueur MN de chaque barre de maintien est d'environ 140 cm.

3. Montrer que le coût minimal d'un tel portique équipé de balançoires s'élève à 196,98 €.

4. L'entreprise veut vendre ce portique équipé 20 % plus cher que son coût minimal.
Déterminer ce prix de vente arrondi au centime près.

5. Pour des raisons de sécurité, l'angle $\widehat{BAC}$ doit être compris entre 45° et 55°.
Ce portique respecte-t-il cette condition ?

CORRECTION

1. Le triangle ABH est rectangle en H.
Comme H est le milieu de [BC] on a HB = 290 $cm \div 2 = 145$ cm
Comme ABC est isocèle en A, AB = AC = 342 cm.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{HA}^2 + \mathrm{HB}^2 = \mathrm{AB}^2$$

$$\mathrm{HA}^2 + 145^2 = 342^2$$

$$\mathrm{HA}^2 + 21\,025 = 116\,964$$

$$\mathrm{HA}^2 = 116\,964 - 21\,025$$

$$\mathrm{HA}^2 = 95\,939$$

$$\mathrm{HA} = \sqrt{95\,939}$$

$$\mathrm{HA} \approx 310$$

$\boxed{\text{La hauteur du portique est d'environ 310 } cm}$

2. Dans le triangle ABC, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

$$\frac{\mathrm{AM}}{342\ cm} = \frac{165}{342\ cm} = \frac{\mathrm{MN}}{290\ cm}$$

Ainsi MN = $\dfrac{165\ cm \times 290\ cm}{342\ cm} \approx 140\ cm$

$\boxed{\text{La longueur de la barre est bien d'environ 140 } cm.}$

3. Pour construire ce portique, il faut :

- 1 poutre de longueur 4 m de diamètre 100 mm à 12,99 € ;
- 4 poutres de longueur 3,5 m de diamètre 100 mm à 11,75 € ;
- 2 barre latérale de maintien en bois de longueur 1,5 m à 3,89 € ;
- 1 ensemble de fixations pour le portique à 80 € ;
- 1 ensemble de balançoires à 50 €.

12,99 € +4 × 11,75 € +2 × 3,89 € +80 € +50 € = 197,77 € .
On n'obtient pas le montant de l'énoncé !
L'astuce consiste à remarquer qu'il est possible de prendre une seule barre latérale de 3 m à 6,99 € puis de couper les barres de maintiens qui font chacune 1,40 m.
On a alors :
12,99 € +4 × 11,75 € +6,99 € +80 € +50 € = 196,98 € .

$\boxed{\text{Oui le montant minimal pour construire ce portique est bien 196,98 € .}}$

4. Il faut ajouter 20 % au prix.
On sait qu'ajouter 20 % à un nombre revient à multiplier ce nombre par $1 + \dfrac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$.
1,20 × 196,98 € ≈ 236,38 € .
On peut aussi calculer les 20 % de 196,98 € : 196,98 € × $\dfrac{20}{100}$ ≈ 39,40 € .
Puis on ajoute : 196,98 € +39,40 € = 236,38 € .

$\boxed{\text{Le prix augmenté est } 236,38 \text{ €}.}$

5. Comme ABC est isocèle en A, la droite (AH) est un axe de symétrie du triangle.
Ainsi l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ vaut exactement le double de l'angle $\widehat{\text{BAH}}$.

Dans le triangle BAH rectangle en H nous avons :
$sin(\widehat{\text{BAH}}) = \dfrac{\text{BH}}{\text{BA}} = \dfrac{145\ cm}{342\ cm}$
À la calculatrice on trouve ainsi l'angle dont le sinus est égal à $\dfrac{145}{243}$.
$\widehat{\text{ABH}} \approx 25°$.
Finalement $\widehat{\text{ABC}} \approx 50°$.

$\boxed{\text{Ce portique respecte les conditions de sécurité.}}$