Exercice n° XXGENNCVII — L'habitation

Fonction linéaire — Volume du cylindre — Volume du cône

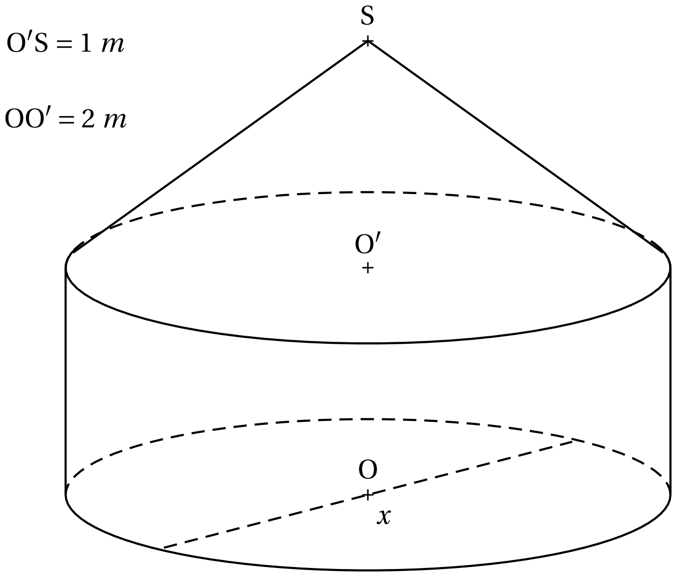
Nolan souhaite construire une habitation.

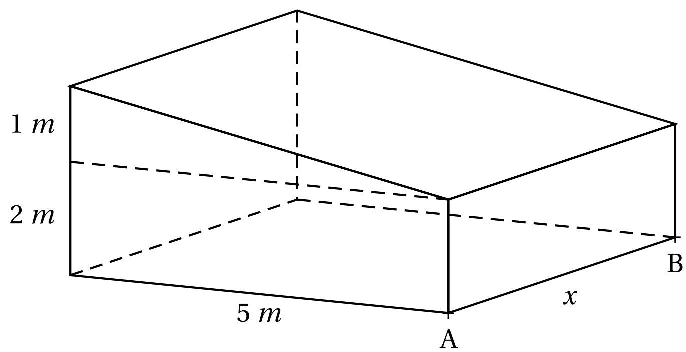
Il hésite entre **une case** et **une maison** en forme de prisme droit.

La case est représentée par un cylindre droit d'axe (OO') surmontée par un cône de révolution de sommet S.

Les dimensions sont données sur les figures suivantes.

***x* représente à la fois le diamètre de la case et la longueur** AB **du prisme droit.**





Partie 1

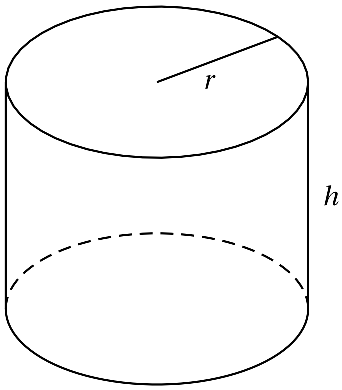
Dans cette partie, on considère que $x = 6\ m$.

1. Montrer que le volume exact de la partie cylindrique de la case est $18\pi\ m^3$.

2. Calculer le volume de la partie conique. Arrondir à l'unité.

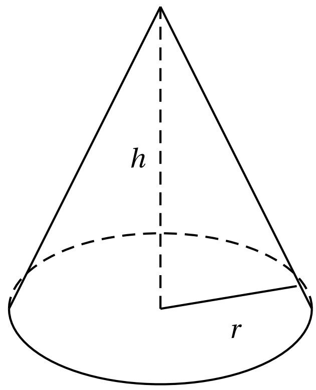
3. En déduire que le volume total de la case est environ $66\ m^3$.

Cylindre de rayon r et de hauteur h



Volume = $\pi \times r^2 \times h$

Cône de rayon r et de hauteur h



Volume = $\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$

Partie 2

Dans cette partie, le diamètre est exprimé en mètres, le volume en m^3.
Sur l'**Annexe**, on a représenté la fonction qui donne le volume total de la case en fonction de son diamètre x.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du volume d'une case de 7 m de diamètre.
Tracer en pointillés permettant la lecture.

La fonction qui donne le volume de la maison en forme de prisme droit est définie par $\mathrm{V}(x) = 12,5x$.

2. Calculer l'image de 8 par la fonction V.

3. Quel est la nature de la fonction V ?

4. Sur l'**Annexe**, tracer la représentation graphique de la fonction V.
Pour des raisons pratiques, la valeur maximale de x est de 6 m. Nolan souhaite choisir la construction qui lui offrira le plus grand volume.

5. Quelle construction devra-t-il choisir ? Justifier.

CORRECTION

Partie 1

1. Le volume du cylindre s'obtient en calculant : $\pi \times r^2 \times h$.
Ici comme $x = 6\ m$ on a $r = 3\ m$ et $h = OO' = 2\ m$.
Donc le volume mesure : $\pi \times (3\ m)^2 \times 2\ m = \pi \times 9\ m^2 \times 2\ m = 18\pi\ m^3$.

$\boxed{\text{On a bien un volume de } 18\pi\ m^3.}$

2. Le volume d'un cône s'obtient en calculant : $\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$.
Ici comme $x = 6\ m$ on a $r = 3\ m$ et $h = SO' = 1\ m$.
Donc le volume mesure : $\frac{1}{3}\pi \times (3\ m)^2 \times 1\ m = \frac{1}{3}\pi \times 9\ m^3 = \frac{9\pi}{3}\ m^3 = 3\pi\ m^3 \approx 9\ m^3$

$\boxed{\text{Le volume du cône mesure environ } 9\ m^3 \text{ à l'unité près.}}$

3. Le volume total de la case mesure donc : $18\pi\ m^3 + 3\pi\ m^3 = 21\pi\ m^3 \approx 66\ m^3$.

$\boxed{\text{Le volume total de la case mesure environ } 66\ m^3 \text{ à l'unité près.}}$

Partie 2

1. $\boxed{\text{Pour } 7\ m \text{ de diamètre le volume de la case mesure environ } 90\ m^3}$

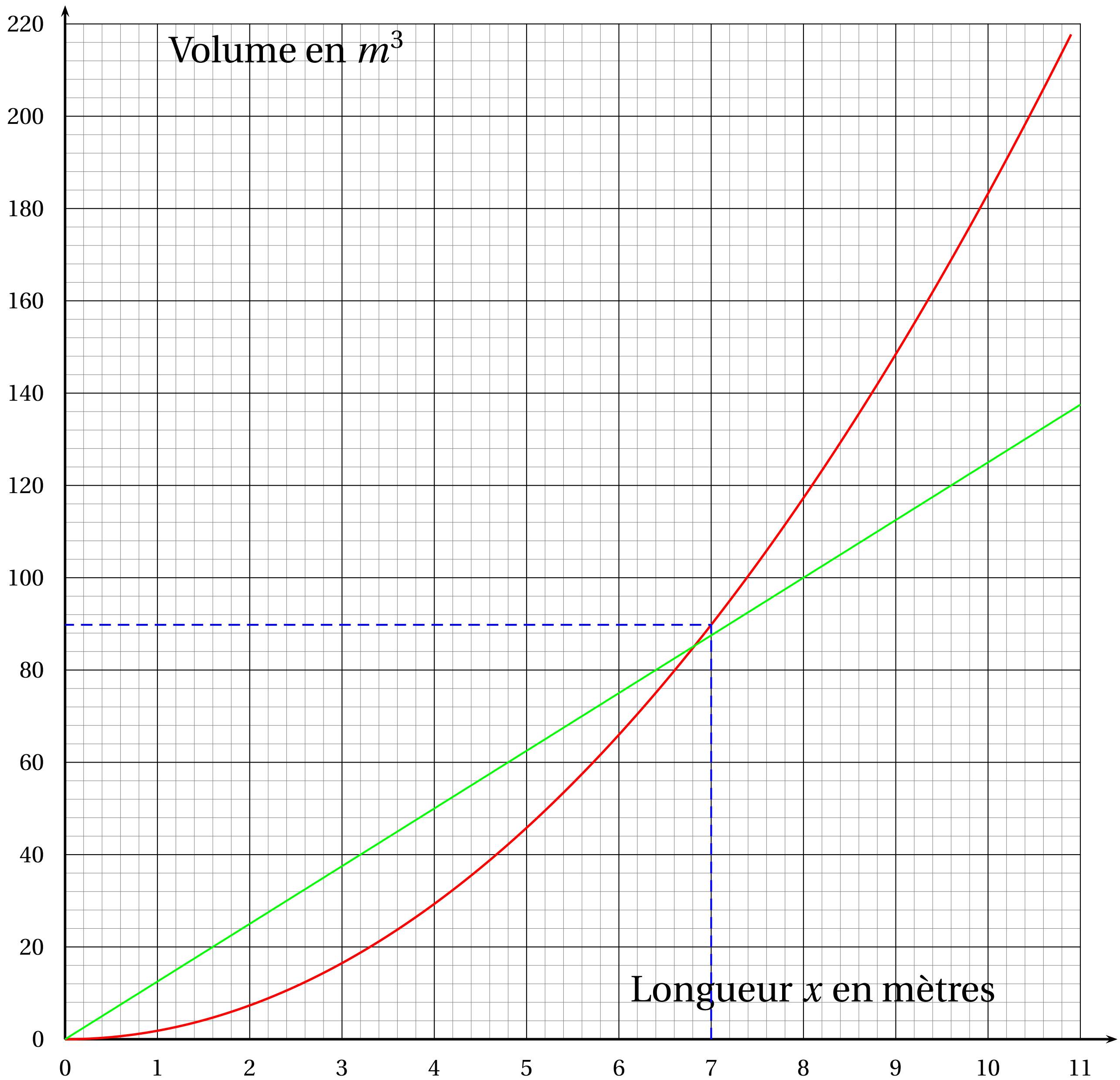
2. $\boxed{V(8) = 12{,}5 \times 8 = 100}$

3. $\boxed{V \text{ est une fonction linéaire de coefficient } 12{,}5.}$

4. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
Comme $V(0) = 0$ et que $V(8) = 100$, la droite qui représente V passe par les points de coordonnées $(0;0)$ et $(8;100)$.

5. Pour $x < 6\ m$ la courbe de la fonction V est au dessus de l'autre courbe.

$\boxed{\text{Il devra choisir la maison et non pas la case.}}$


Volume en m^3
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Longueur x en mètres