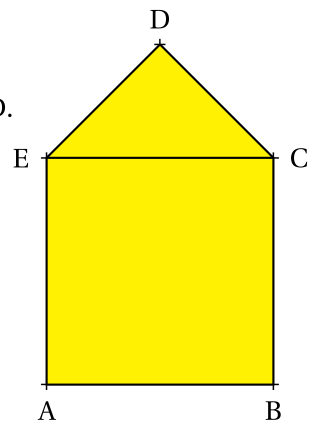
EXERCICE n° XXGENPOSIII — Les transformations d'une enveloppe Polynésie septembre 2020 — Série générale

Théorème de Pythagore — Translation — Symétrie axiale — Symétrie centrale — Rotation — Agrandissement / Réduction



On considère le motif initial ci-contre.
Il est composé d'un carré ABCE de côté 5 cm et d'un triangle EDC, rectangle et isocèle en D.

PARTIE 1

1. Donner, sans justification, les mesures des angles $\widehat{DEC}$ et $\widehat{DCE}$.
2. Montrer que le côté [DE] mesure environ $3,5$ cm au dixième de centimètre près.
3. Calculer l'aire du motif initial. Donner une valeur approchée au centimètre carré près.

PARTIE 2

On réalise un pavage du plan en partant du motif initial et en utilisant différentes transformations du plan.

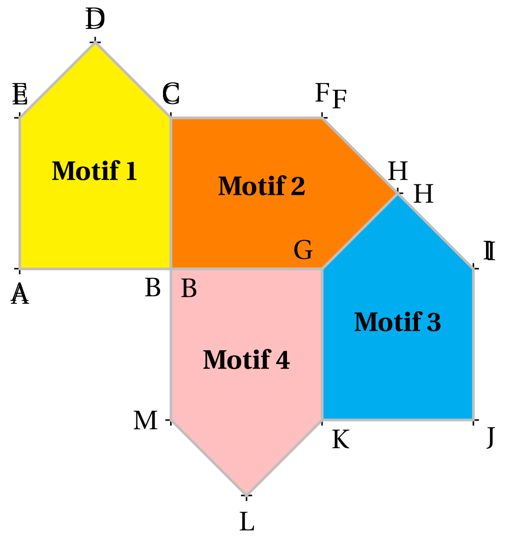
Dans chacun des quatre cas suivants, donner sans justifier une transformation du plan qui permet de passer :

a. Du motif 1 au motif 2.

b. Du motif 1 au motif 3.

c. Du motif 1 au motif 4.

d. Du motif 2 au motif 3.



PARTIE 3

Suite à un agrandissement de rapport $\frac{3}{2}$ de la taille du motif initial, on obtient un motif agrandi.

1. Construire en vraie grandeur le motif agrandi.
2. Par quel coefficient doit-on multiplier l'aire du motif initial pour obtenir l'aire du motif agrandi ?

Correction

Partie 1

1. Le triangle EDC est rectangle est isocèle en D. Cela signifie que l'angle $\widehat{EDC} = 90°$ et que $\widehat{DEC} = \widehat{ECD}$.
On sait que la somme des angles dans un triangle vaut 180°.
Ainsi $\widehat{EDC} + \widehat{DEC} + \widehat{DCE} = 180°$ d'où $90° + \widehat{DEC} + \widehat{DEC} = 180°$.
Donc $2 \times \widehat{DEC} = 90°$ et $\widehat{DEC} = 45°$.

$\boxed{\widehat{DEC} = 45° \text{ et } \widehat{CDE} = 45°}$

2. Dans le triangle DEC rectangle en D, on sait que DE = DC,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{DE}^2 + \mathrm{DC}^2 = \mathrm{EC}^2$$
$$\mathrm{DE}^2 + \mathrm{DE}^2 = 5^2$$
$$2 \times \mathrm{DE}^2 = 25$$
$$\mathrm{DE}^2 = 12{,}5$$
$$\mathrm{DE} = \sqrt{12{,}5}$$
$$\mathrm{DE} \approx 3{,}5$$

$\boxed{\mathrm{DE} \approx 3{,}5\ cm \text{ au dixième de centimètre près.}}$

3. L'aire du motif est constituée de l'aire du carré et de l'aire du triangle rectangle.
L'aire du carré mesure : $5\ cm \times 5\ cm = 25\ cm^2$.

L'aire du triangle : $\dfrac{3{,}5\ cm \times 3{,}5\ cm}{2} \approx 6{,}1\ cm^2$

On peut aussi considérer que l'aire du triangle rectangle est exactement égale au quart de l'aire du carré soit $25\ cm^2 \div 4 = 6{,}25\ cm^2$

$\boxed{\text{L'aire du motif est donc } 25\ cm^2 + 6{,}25\ cm^2 = 31{,}25\ cm^2 \text{ soit } 31\ cm^2 \text{ à l'unité près.}}$

Partie 2

a. On passe du **Motif 1** au **Motif 2** par la rotation de centre B d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

b. On passe du **Motif 1** au **Motif 3** par la translation qui transforme D en H.

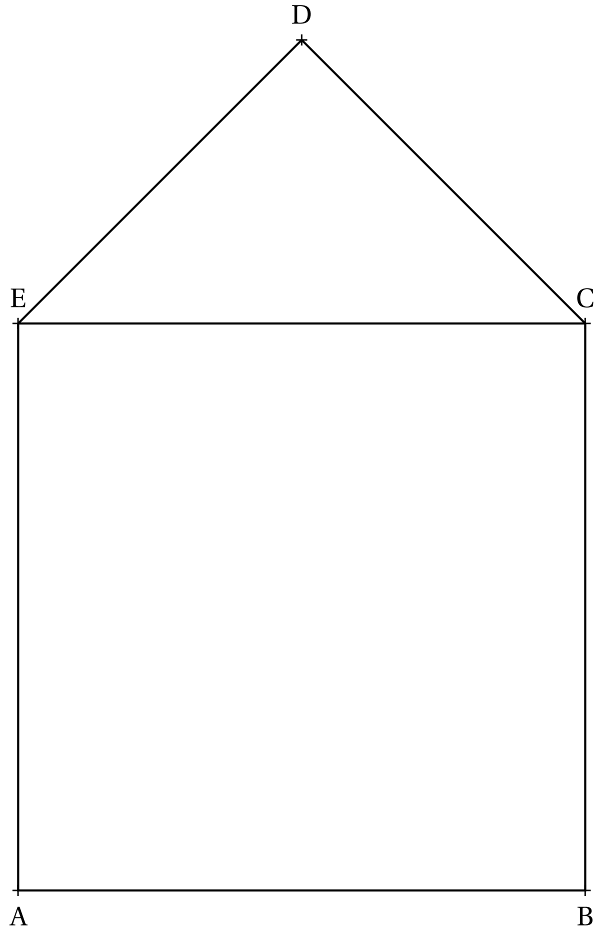
c. On passe du **Motif 1** au **Motif 4** par la symétrie centrale de centre B.
On peut aussi parler de la rotation de centre B et d'angle 180°.

d. On passe du **Motif 2** au **Motif 3** par la rotation de centre H d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Partie 3

1. On multiplie les mesures du motif par $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Comme $5\ cm \times 1{,}5 = 7{,}5\ cm$ il faut tracer un carré de $7{,}5\ cm$ de côté surmonté par un triangle rectangle isocèle.



2. On peut répondre en reprenant tous les calculs.
La figure agrandie est constituée d'un carré dont l'aire mesure $7,5\ cm \times 7,5\ cm = 56,25\ cm^2$ et d'un triangle rectangle dont l'aire correspond au quart de ce carré soit $56,25\ cm^2 \div 4 = 14,0625\ cm^2$.
La figure agrandie a donc une aire totale de $70,3125\ cm^2$.
La figure initiale a une aire de $31,25\ cm^2$.
Le coefficient multiplicateur est donc k tel que : $31,25\ cm^2 \times k = 70,3125\ cm^2$ soit $k = \dfrac{70,3125\ cm^2}{31,25\ cm^2} = 2,25$

On peut aussi utiliser le cours qui affirme que :
Si le longueur d'une figure sont multipliée par k alors sont aire est multipliée par k^2 et son volume par k^3.

Si les longueurs de la figure sont multipliées par $\dfrac{3}{2} = 1,5$ alors son aire est multipliée par $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} = 2,25$

$\boxed{\text{Le coefficient cherché est } 2,25.}$