Exercice n° XXIGENGEI — Cinq questions indépendantes

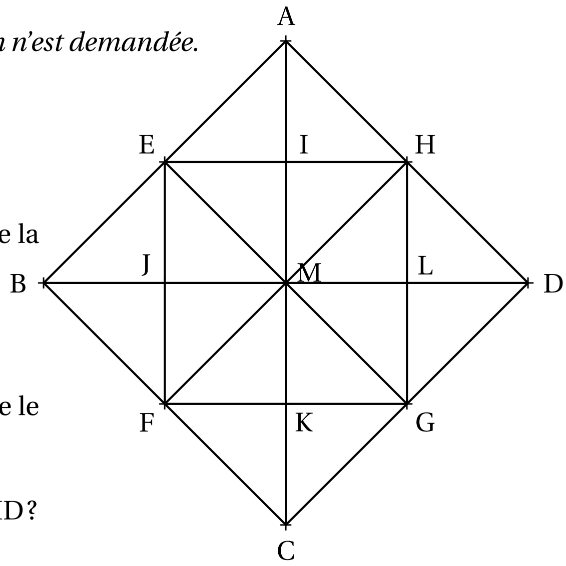
Centres étrangers 2021 — Série générale

Nombres premiers — Symétrie axiale — Homothétie — Translation — Fractions — Volume de la boule — Écriture scientifique — Trigonométrie

Dans cet exercice, chaque question est indépendante. Aucune justification n'est demandée.

1. Décomposer 360 en produit de facteurs premiers.

2. À partir du triangle BEJ, rectangle isocèle en J, on a obtenu par pavage la figure ci-contre.



2.a. Quelle est l'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) ?

2.b. Quelle est l'image du triangle AMH par la translation qui transforme le point E en B ?

2.c. Par quelle transformation passe-t-on du triangle AIH au triangle AMD ?

3. Calculer en détaillant les étapes : $\frac{7}{2}+\frac{15}{6}\times\frac{7}{25}$

On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

4. Pour cette question, on indiquera sur la copie l'unique bonne réponse.
Sachant que le diamètre de la Lune est d'environ 3 474 km, la valeur qui approche le mieux son volume est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$12{,}3\times10^{17}$ km^3	1 456 610 km^3	$1{,}8\times10^{11}$ km^3	$2{,}2\times10^{10}$ km^3

5. On considère un triangle RST rectangle en S. Compléter le tableau donné en ANNEXE à rendre avec la copie.
On arrondira la valeur des angles à l'unité.

Correction

Aucune justification est demandée. J'ajouterai cependant quelques commentaires pour rendre la lecture de cette correction plus intéressante.

1.

$$\begin{array}{c|c} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \text{ donc } 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5}$

2.a L'image du point B par la symétrie d'axe (BD) est le point B.
Comme le point J est sur la droite (BD) sont image est lui-même aussi J.
L'image du point E par rapport à la droite (BD) est le point F.

$\boxed{\text{L'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) est donc le triangle BJF.}}$

2.b. La translation considérée transforme le point A en le point E.
Elle transforme le point M en le point F et le point H en le point M.
Dans chacun des cas précédent on a bien le parallélisme, l'égalité des longueurs et le sens de la translation.

$\boxed{\text{L'image du triangle AMH par la translation qui transforme E en B est le triangle EFM.}}$

2.c. On remarque que le triangle AMD est un agrandissement du triangle AIH. Il est précisement deux fois plus grands. De plus le point A est commun au deux triangles.

$\boxed{\text{Le triangle AMD est l'image du triangle AIH par l'homothétie de centre A et de coefficient 2.}}$

3. $\mathrm{A} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{15}{6} \times \dfrac{7}{25}$ donc $\mathrm{A} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{15 \times 7}{6 \times 25}$ d'où $\mathrm{A} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{5 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 5}$ et $\mathrm{A} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{10}$ puis $\mathrm{A} = \dfrac{7 \times 5}{2 \times 5} + \dfrac{7}{10}$

$\mathrm{A} = \dfrac{35}{10} + \dfrac{7}{10}$ et $\mathrm{A} = \dfrac{42}{10}$ enfin $\mathrm{A} = \dfrac{2 \times 21}{2 \times 5}$ ainsi $\boxed{\mathrm{A} = \dfrac{21}{5}}$

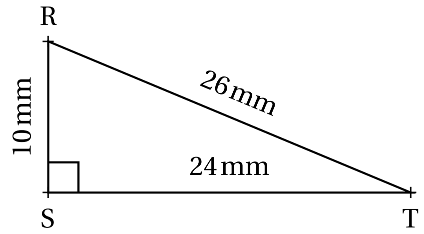
4. On modélise la Lune comme une boule de diamètre 3 474 km soit un rayon de 1 737 km.
On sait que le volume d'une boule de rayon R est donnée par la formule :

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3$$

Dans ce cas on obtient $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times (1\,737\,\mathrm{km})^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 5\,240\,822\,553\,\mathrm{km}^3 = 6\,987\,763\,404\pi\ km^3$

Une valeur approchée de ce résultat en écriture scientifique est $\boxed{\mathrm{V} \approx 2{,}195 \times 10^{10}\,\mathrm{km}^3 \approx 2{,}2 \times 10^{10}\,\mathrm{km}^3}$

5. Voici ce triangle :



Juste par acquis de conscience on peut vérifier que ce triangle est bien rectangle puisque $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$ *et que* $26^2 = 676$.

Dans ce triangle rectangle on peut calculer le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle $\widehat{STR}$, au choix :

$\cos\widehat{STR} = \dfrac{ST}{RT} = \dfrac{24\,\text{mm}}{26\,\text{mm}} = \dfrac{12}{13}$ $\qquad \sin\widehat{STR} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{10\,\text{mm}}{26\,\text{mm}} = \dfrac{5}{13}$ $\qquad \tan\widehat{STR} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{10\,\text{mm}}{24\,\text{mm}} = \dfrac{5}{12}$

Dans les trois cas à la calculatrice on arrive à $\boxed{\widehat{STR} \approx 23°}$

Comme les angles $\widehat{STR}$ et $\widehat{SRT}$ sont complémentaires (leur somme vaut 90°) on a $\boxed{\widehat{SRT} \approx 90° - 23° \approx 67°.}$

Le périmètre du triangle $\boxed{\mathscr{P} = RS + ST + TR = 10\,\text{mm} + 24\,\text{mm} + 26\,\text{mm} = 60\,\text{mm}}$

L'aire du triangle $\boxed{\mathscr{A} = \dfrac{RS \times ST}{2} = \dfrac{24\,\text{mm} \times 10\,\text{mm}}{2} = \dfrac{240\,\text{mm}^2}{2} = 120\,\text{mm}^2}$

Longueurs	**Angles**	**Périmètre du triangle** RST	**Aire du triangle** RST
$RS = 10\,\text{mm}$	$\widehat{RST} = 90°$		
$ST = 24\,\text{mm}$	$\widehat{STR} \approx 23°$	$\mathscr{P} = 60\,\text{mm}$	$\mathscr{A} = 120\,\text{mm}^2$
$RT = 26\,\text{mm}$	$\widehat{SRT} \approx 67°$		