Chapitre III

Le théorème de Thalès

Tous le reste

Plan du cours :

a

Programme (*BO nº 30 du 26-7-2018*) **:**

- a

Compétences :

- a

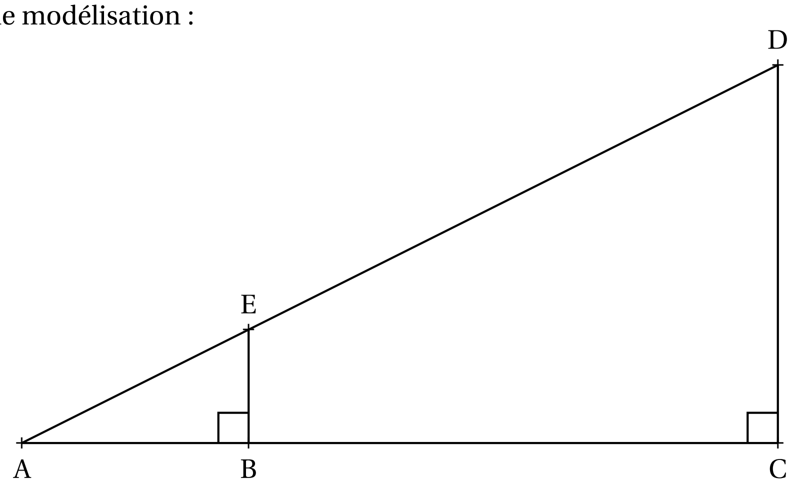
SITUATION INITIALE : La tour Eiffel

À quelle distance de la Tour Eiffel cette photo a-t-elle été prise ?

1. On estime les grandeurs de cette situation :

- La Tour Eiffel mesure 324 m ;
- l'ouverture entre les doigts mesure 18 cm ;
- le téléphone prenant la photo se situe à 80 cm de la main.

Voici une proposition de modélisation :



Compléter cette figure avec les grandeurs estimées.

On cherche à évaluer la grandeur BC. On pose BC = x

2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles ABE, ACD et du quadrilatère BCDE.

3. Montrer que x est la solution de l'équation :

$$162(0,8+x) = 0,072 + 162,09x$$

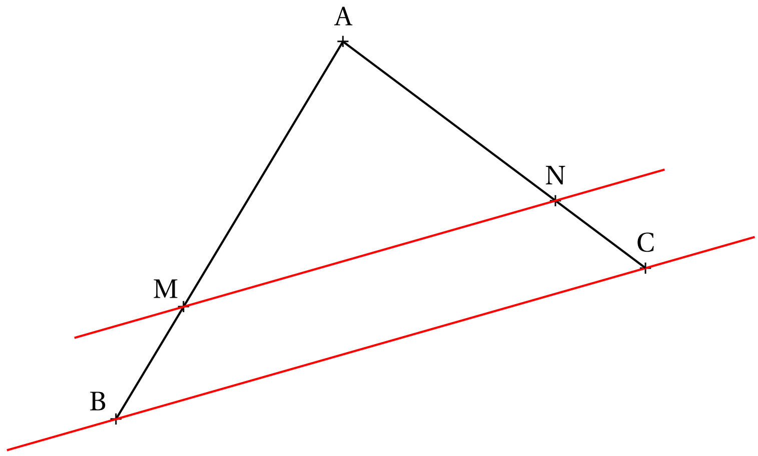
4. Résoudre cette équation et en déduire AC

5. Calculer AE et AD.

6. Montrer que les mesures du triangle ABE sont proportionnelles à celles du triangle ACD.

II — Le théorème de Thalès – Version triangle

THÉORÈME 3.1 : Théorème de Thalès

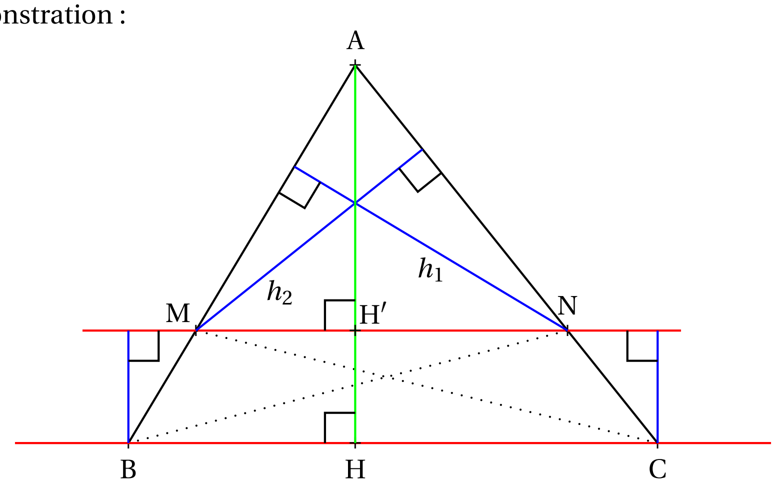


Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

DÉMONSTRATION :

Voici un première démonstration :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.

$\mathit{Aire}(\mathrm{MNB}) = \mathit{Aire}(\mathrm{MNC})$

$\mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) = \mathrm{AM} \times h_1$ et $\mathit{Aire}(\mathrm{ABN}) = \mathrm{AB} \times h_1$ ainsi $\dfrac{\mathit{Aire}(\mathrm{AMN})}{\mathit{Aire}(\mathrm{ABN})} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

$\mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) = \mathrm{AN} \times h_2$ et $\mathit{Aire}(\mathrm{ACM}) = \mathrm{AC} \times h_2$ ainsi $\dfrac{\mathit{Aire}(\mathrm{AMN})}{\mathit{Aire}(\mathrm{ACM})} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

On constate que $\mathit{Aire}(\mathrm{ABN}) = \mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) + \mathit{Aire}(\mathrm{MNB})$ et que $\mathit{Aire}(\mathrm{ACM}) = \mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) + \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNC})$

Comme *Aire*(MNB) = *Aire*(MNC) on prouve ainsi que *Aire*(ABN) = *Aire*(ACM)

Finalement $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.

On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$

De même dans le triangle AHC, on obtient $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc *Aire*(NH′C) = *Aire*(NH′H)

Ainsi *Aire*(AH′C) = *Aire*(AHN) c'est-à-dire $\dfrac{AH' \times HC}{2} = \dfrac{AH \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$\begin{gathered} H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC \\ (H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC) \\ MN \times HC = H'N \times BC \end{gathered}$$

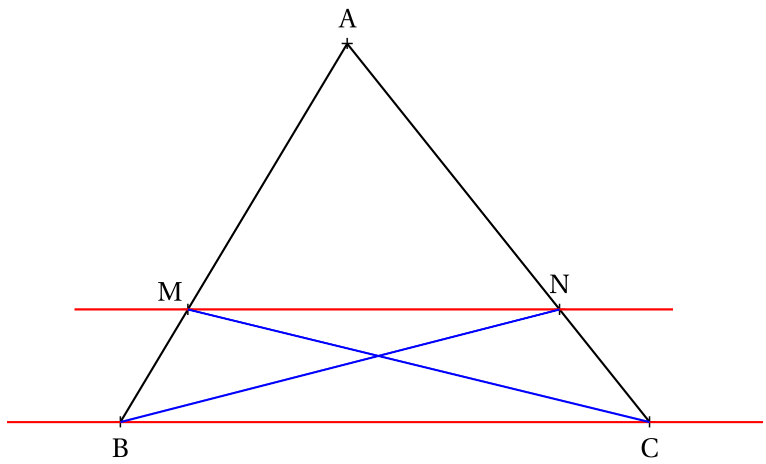
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC} = \dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$

CQFD

DÉMONSTRATION :

Une deuxième version qui utilise les céviennes comme dans les exercices 3.1 à 3.7 :



Dans le triangle ABC, [MC] est une cévienne.
Les triangles ABC et AMC ont la même hauteur dont on peut noter h la mesure.

Ainsi $Aire(\text{AMC}) = \dfrac{1}{2} \times \text{AM} \times h$ et $Aire(\text{ABC}) = \dfrac{1}{2} \times \text{AB} \times h$.

On en déduit que $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \text{AM} \times h}{\frac{1}{2} \times \text{AB} \times h} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AB}}$

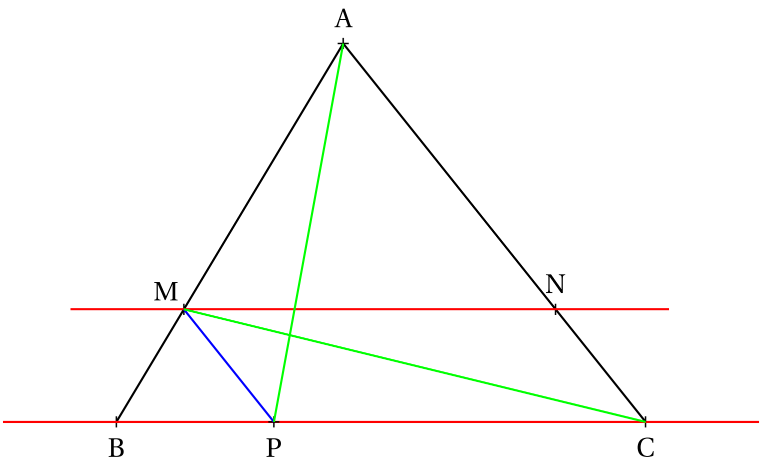
De même dans le triangle ABC, [NB] est une cévienne.

On en déduit que $\dfrac{Aire(\text{ANB})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}}$

On constate aussi que $Aire(\text{AMC}) = Aire(\text{AMN}) + Aire(\text{MNB})$ et que $Aire(\text{ANB}) = Aire(\text{AMN}) + Aire(\text{MNC})$.

Comme les droites (MN) et (BC) sont paralllèles, les triangles MNB et MNC ont la même hauteur et la même base. Leurs aires sont donc égales.

On en déduit que $Aire(\text{AMC}) = Aire(\text{ANB})$ et finalement que $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}}$.



On trace la parallèle à (AC) passant par M, elle coupe [BC] en P.

Les triangles AMC et APC ont la même base et la même hauteur puisque les droites (AC) et (MP) sont parallèles. Ces deux triangles ont donc la même aire.

Dans le triangle ABC, [MC] est une cévienne. On a donc $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AB}}$.

Dans le triangle ABC, [PA] est une cévienne. On a donc $\dfrac{Aire(\text{APC})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\text{PC}}{\text{BC}}$.

Le quadrilatère MNPC a ses côtés parallèles deux à deux, il s'agit donc d'un parallèlogramme.
Ainsi MN = PC.

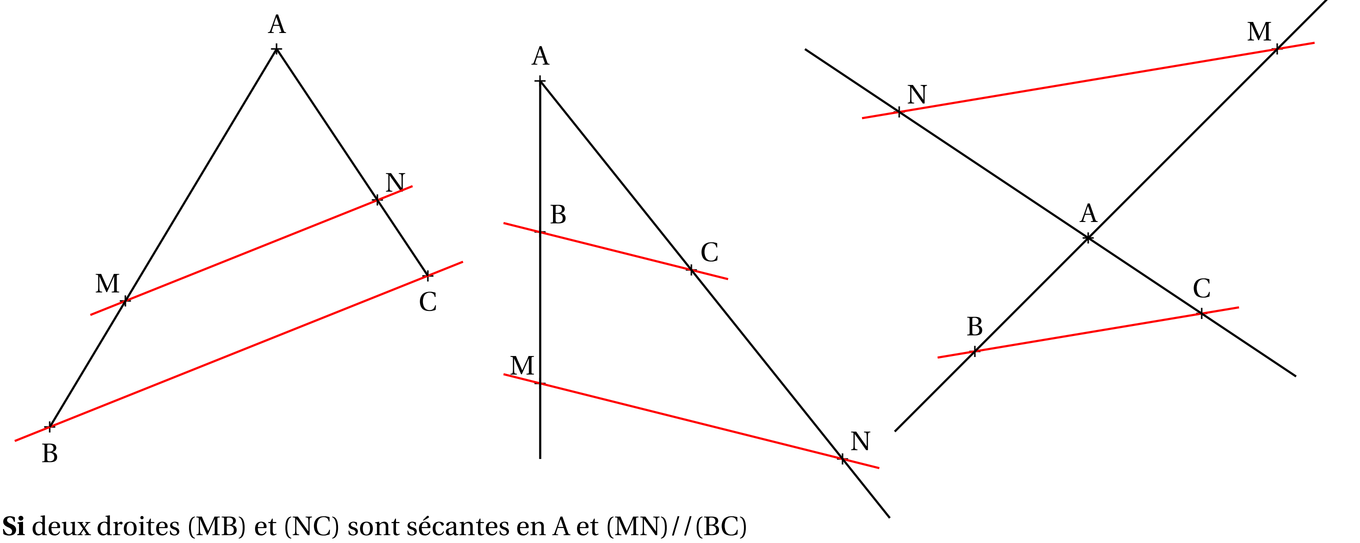
On arrive ainsi à $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{PC}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{MN}}{\text{PC}}$.

Finalement, $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{MN}}{\text{BC}}$.

CQFD

III — Le théorème de Thalès – Version générale

THÉORÈME 3.2 : Théorème de Thalès



Si deux droites (MB) et (NC) sont sécantes en A et (MN)//(BC)
alors les mesures des triangles AMN et ABC sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

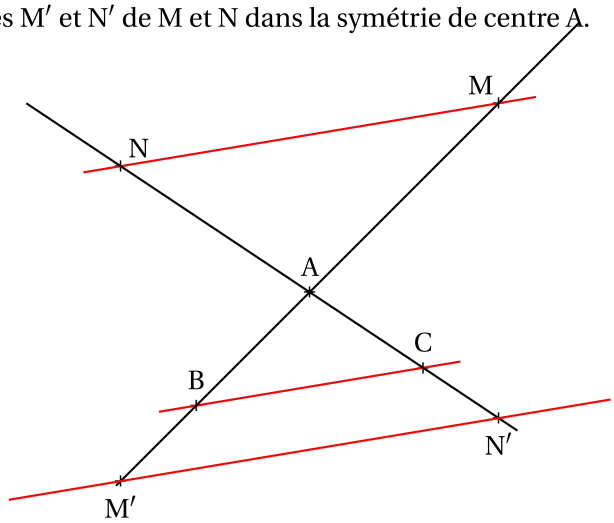
DÉMONSTRATION :

Il y a trois possibilités liées à l'ordre des points :

Premier cas : $\mathrm{M} \in [\mathrm{AB}]$ et $\mathrm{N} \in [\mathrm{AC}]$
Il s'agit de la situation étudiée en première partie, on applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

Second cas : $\mathrm{M} \in [\mathrm{AB})$ et $\mathrm{N} \in [\mathrm{AC})$ mais $\mathrm{M} \notin [\mathrm{AB}]$ et $\mathrm{N} \notin [\mathrm{AC}]$
Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AMN. Comme (BC)//(MN) on a $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AM}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AN}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{MN}}$
Comme ces trois quotients sont égaux, leurs inverses le sont aussi. D'où le résultat.

Troisième cas : $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$ et $\mathrm{N} \in [\mathrm{AC})$ mais $\mathrm{M} \notin [\mathrm{AB})$ et $\mathrm{N} \notin [\mathrm{AC})$
Considérons les symétriques M' et N' de M et N dans la symétrie de centre A.



MNN′M′ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu par construction, il s'agit donc d'un parallélogramme.
Nous avons donc $MN = M'N'$ et $(MN)//(M'N')$.
Or $(MN)//(BC)$. On sait que si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Ainsi $(M'N')//(BC)$.
Comme dorénavant $M' \in [AB]$ et $N' \in [AC]$ on peut appliquer le théorème de Thalès et on a $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$
Et comme $M'N' = MN$, $AM' = AM$ et $AN' = AN$ on obtient le résultat attendu.

CQFD

IV — La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

V — Application aux triangles semblables

Définition 3.1 :

Triangles semblables

On dit que deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels.

Propriété 3.1 : Agrandissement ou réduction *(Admise)*

Deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables si et seulement si il existe un nombre positif non nul k tel que $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $B'C' = kBC$

k est un coefficient d'agrandissement/réduction.
Si $0 < k < 1$ alors A′B′C′ est une réduction du triangle ABC.
Si $k > 1$ alors A′B′C′ est un agrandissement du triangle ABC.
Si $k = 1$ alors ABC et A′B′C′ sont des triangles égaux.

Démonstration :

À rédiger !

CQFD

Propriété 3.2 : Triangles semblables et angles *(Admise)*

Deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles égaux.

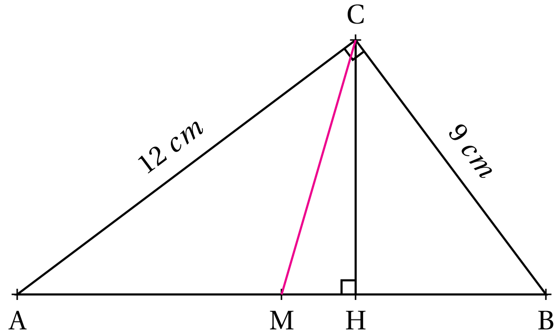
Démonstration :

À rédiger !

Exercices

Exercice n° 3.1 : Une histoire de cévienne — Épisode 1

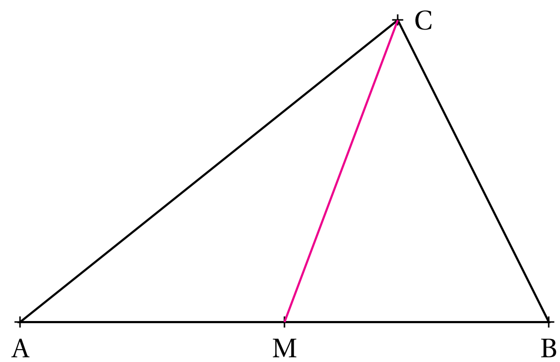
Dans un triangle, une cévienne est un segment joignant un sommet et un côté opposé. Les hauteurs, médianes et bissectrices d'un triangle sont des céviennes particulières. Le mot cévienne vient de Giovanni Céva (1647-1734) un mathématicien italien.



Le triangle ABC est rectangle en C.
H est le pied de la hauteur [HC].
M est le milieu du segment [AB].

1. Calculer *Aire*(ABC), l'aire du triangle ABC.
2. Calculer la longueur AB.
3. En déduire la longueur de la hauteur [HC].
4. Calculer *Aire*(AMC) l'aire du triangle AMC.
5. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 3.2 : Une histoire de cévienne — Épisode 2



ABC est un triangle quelconque.
M est le milieu du segment [AB]

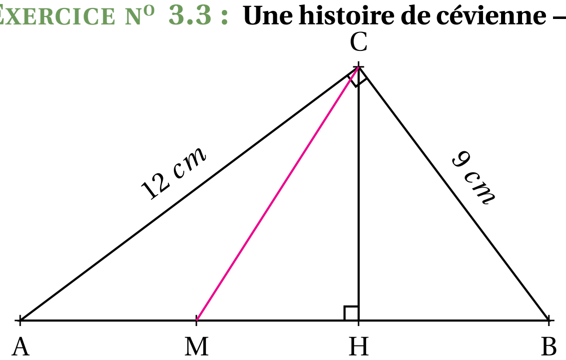
1. Tracer la hauteur issue du sommet C. On note h la longueur de ce segment.

2. Déterminer la fraction $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}}$.

3. Exprimer en fonction de h les aires *Aire*(AMC) et *Aire*(ABC).

4. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 3.3 : Une histoire de cévienne — Épisode 3

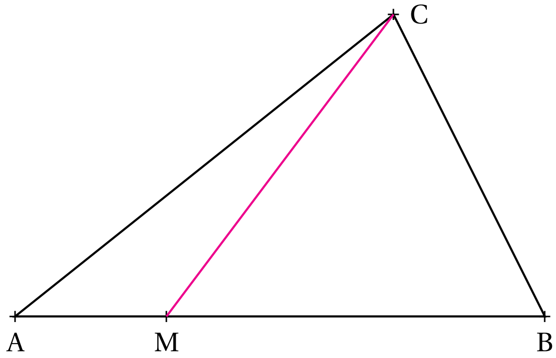


Le triangle ABC est rectangle en C.
H est le pied de la hauteur [HC].
M ∈ [AB] et AM = 5 cm.

1. En utilisant l'**Exercice 3.1**, calculer *Aire*(AMC) l'aire du triangle AMC.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 3.4 : Une histoire de cévienne — Épisode 4



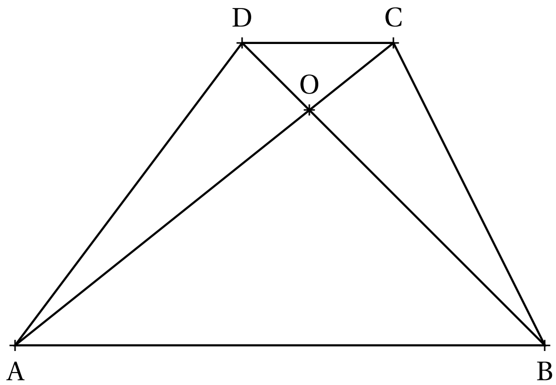
ABC est un triangle quelconque.
M est le milieu du segment [AB]

1. Tracer la hauteur issue du sommet C. On note h la longueur de ce segment.

2. Exprimer en fonction de h les aires *Aire*(AMC) et *Aire*(ABC).

3. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\mathrm{AMC})}{Aire(\mathrm{ABC})}$

Exercice n° 3.5 : Thalès et les aires — Épisode 1



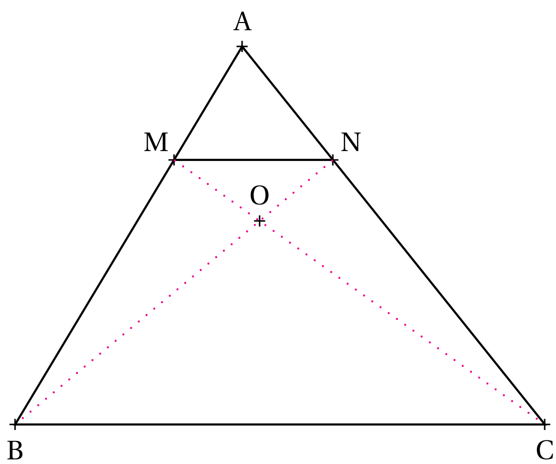
ABCD est un trapèze

1. Tracer la hauteur issue du sommet A du triangle ADC puis tracer la hauteur issue du sommet B du triangle BDC.

2. Démontrer que les aires *Aire*(ADC) et *Aire*(BDC) sont égales.

3. En déduire que les aires *Aire*(ODA) et *Aire*(BOC) sont égales.

Exercice n° 3.6 : Thalès et les aires — Épisode 2



ABC est un triangle
M ∈ [AB] et N ∈ [AC]
(MN)//(BC)

1. En utilisant l'**Exercice 3.5** indiquer deux triangles dont les aires sont égales.

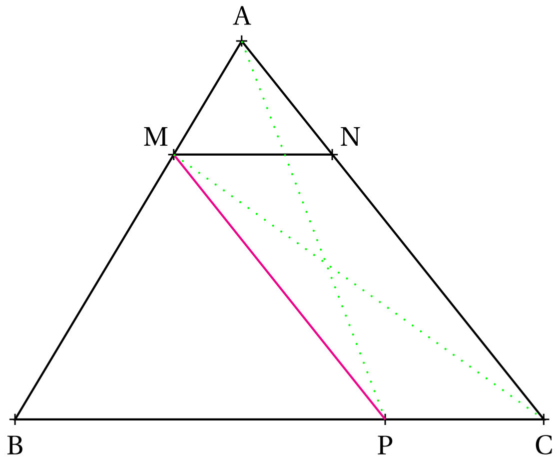
2. Démontrer que les aires *Aire*(AMC) et *Aire*(ANB) sont égales.

3. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{Aire(\mathrm{AMN})}{Aire(\mathrm{ANB})}$.

4. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{Aire(\mathrm{AMN})}{Aire(\mathrm{AMC})}$.

5. Conclure en montrant que $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

EXERCICE N° 3.7 : Thalès et les aires — Épisode 3



ABC est un triangle
M ∈ [AB] et N ∈ [AC]
(MN)//(BC)
P ∈ [BC] et (MP)//(AC)

1. En utilisant l'**Exercice 3.5**, comparer les aires *Aire*(APC) et *Aire*(AMC)

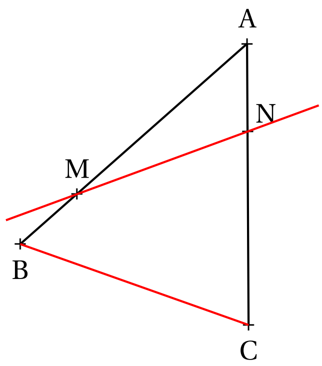
2. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{Aire(AMC)}{Aire(ABC)}$.

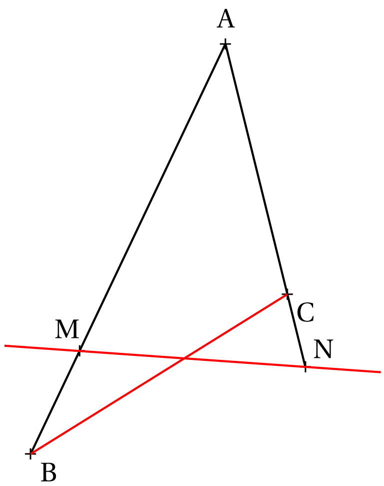
3. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{Aire(APC)}{Aire(ABC)}$.

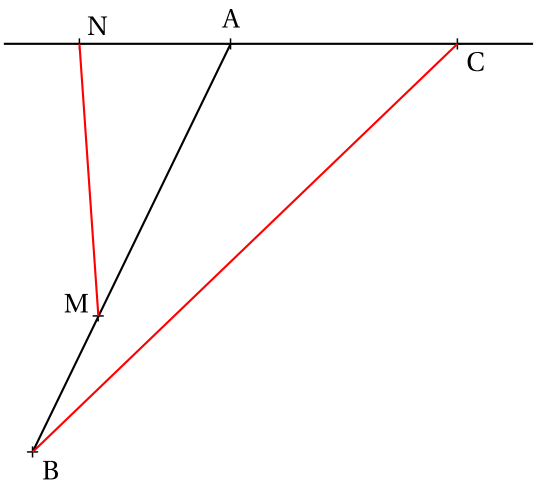
4. Montrer que PC = MN.

5. Conclure en montrant que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$

EXERCICE N° 3.8 : Collection de cas pathologiques







1. Pour chacune des figures suivantes :

— mesurer les longueurs AB, AC, BC, AM, AN et MN;

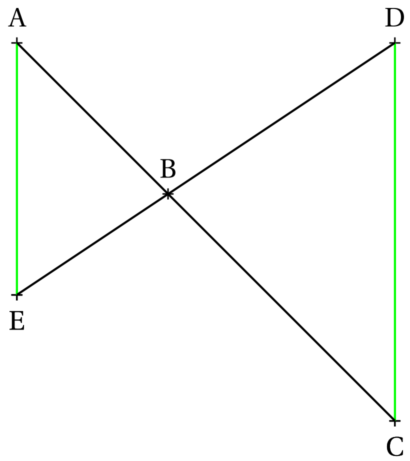
— calculer les quotients $\dfrac{AM}{AB}$, $\dfrac{AN}{AC}$ et $\dfrac{MN}{BC}$

2. Que constatez-vous pour chaque figure? Quelles explications pouvez-vous donner?

3. Corriger chacune des figures en déterminant une nouvelle position pour le point N.

EXERCICE N° 3.9 : Un cas singulier

Sur la figure ci-après, les droites (AC) et (DE) sont sécantes en B.



On sait que :

— BA = 55 m

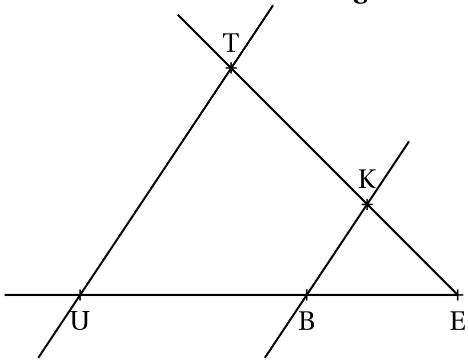
— BC = 89 m

— BE = 34 m

— BD = 55 m

Les droites (AE) et (DC) sont-elles parallèles ?

EXERCICE N° 3.10 : Thalès triangle



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

— (TK) et (UB) sont sécantes en E ;

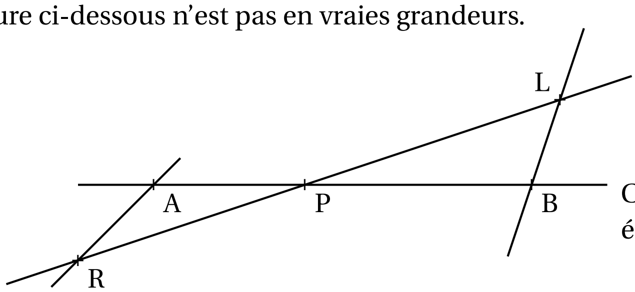
— BE = 5 m, UE = 12 m, BK = 4 m et TE = 10 m ;

— (UT)//(BK)

Calculer les valeurs exactes de UT et KE et,le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

EXERCICE N° 3.11 : Thalès papillon

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;

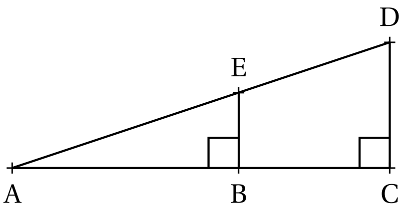
— LB = 2 cm, AR = 3 cm, PB = 1 cm et PR = 5 cm ;

— (AR)//(LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AP et,le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

EXERCICE N° 3.12 : Thalès ou Pythagore ?

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— ABE est rectangle en B ;

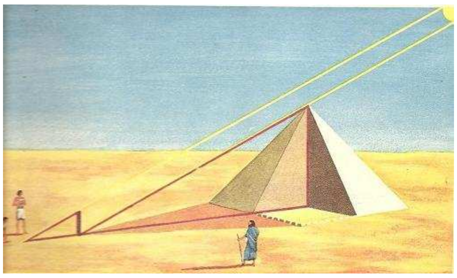
— ACD est rectangle en C ;

— AB = 36 m, AE = 60 m, DC = 72 m.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

EXERCICE N° 3.13 : **La légende de Thalès**

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.
Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :
« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».

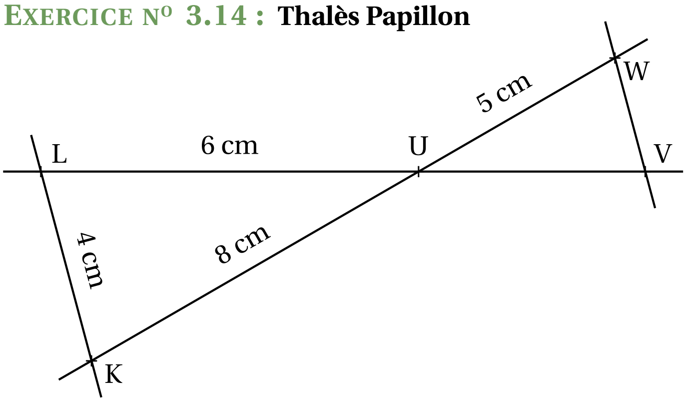


Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

— la canne de Thalès mesurait 3 coudées ;
— l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées ;
— la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide ;
— une coudée à cette époque mesurait environ 52 *cm*.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer ?

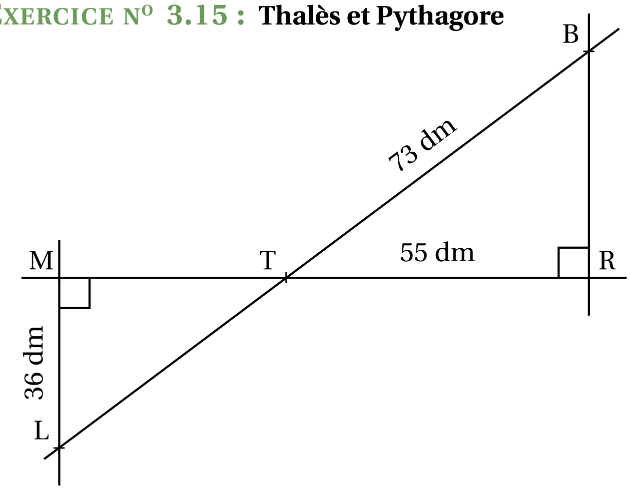
EXERCICE N° 3.14 : **Thalès Papillon**



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que (VW)//(LK) et que les droites (LV) et (KW) sont sécantes en U.

Donner les valeurs exactes des longueurs UV et WV puis une valeur approchée au dixième près.

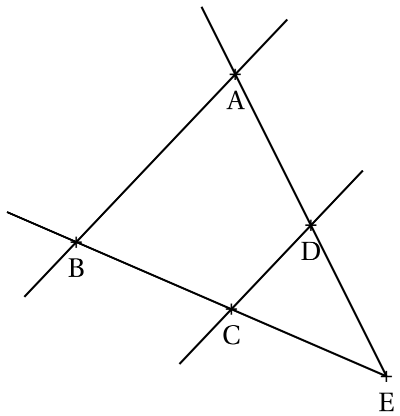
EXERCICE N° 3.15 : **Thalès et Pythagore**



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeurs, on sait que (BL) et (MR) sont sécantes en T et que les droites (BR) et (ML) sont perpendiculaires à la droite (MR).

Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au centième près des longueurs : BR puis TM et TL.

Exercice n° 3.16 : Parallèle ou pas ?

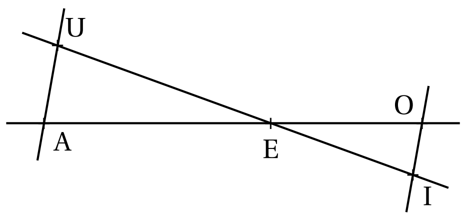


Sur la figure ci-contre on sait que les droites (BC) et (AD) sont sécantes en E de plus on a :

- EC = 55 m
- EB = 89 m
- ED = 34 m
- EA = 55 m
- DC = 48 m
- AB = 77 m

Les droites DC) et (AB) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 3.17 : Parallèle ou pas ? — Épisode 2



Sur la figure ci-après on sait que les droites (UI) et (AO) sont sécantes en E. De plus :

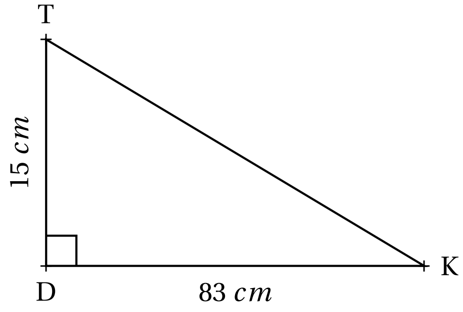
- EO = 6 mm
- EA = 12 mm
- EI = 8 mm
- EU = 12 mm

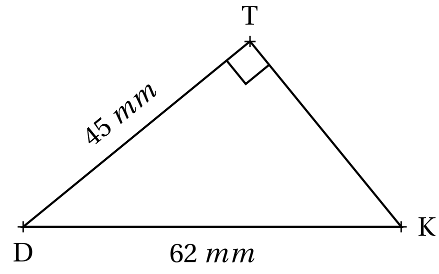
Les droites (OI) et (AU) sont-elles parallèles ?

Réactivation — L'égalité de Pythagore

Exercice n° 1 : Calculer

Pour chacune des figures suivantes, (qui ne sont pas reproduites en vraies grandeurs), calculer la valeur exacte de la mesure du côté TK puis donner une valeur approchée au millième près.

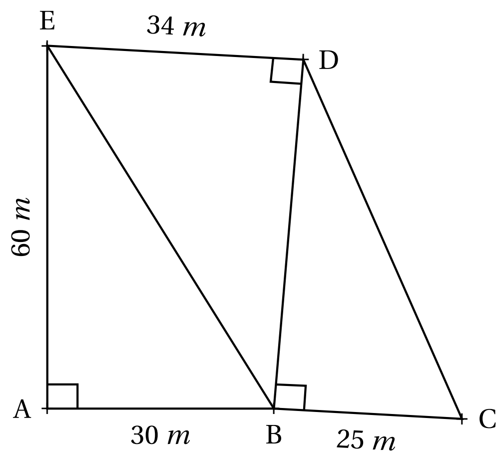




Exercice n° 2 : Trois à la suite !

La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs !

Calculer la mesure du segment [CD].



Exercice n° 3 : Rectangle ou pas ?

Tracer le triangle ZOE tel que ZO = 48 mm, ZE = 55 mm et OE = 73 mm. ZOE est-il rectangle ?

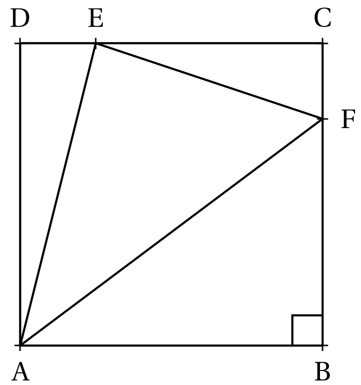
Exercice n° 4 : Rectangle ou pas ? – Épisode 2

Tracer le triangle KAE tel que KE = 36 mm, KA = 77 mm et AE = 84 mm. KAE est-il rectangle ?

Exercice n° 5 : Rectangle ou pas ? – Épisode 3

Le carré ABCD a des côtés de 4 cm.
E ∈ [CD] tel que CE = 3 cm
F ∈ [BC] tel que BF = 3 cm

Le triangle AEF est-il rectangle ?



RÉACTIVATION — **L'égalité de Pythagore — Correction**

Exercice nº 1 :

1. Le triangle DTK est rectangle en D.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DT^2 + DK^2 = TK^2$$
$$15^2 + 83^2 = TK^2$$
$$225 + 6\,889 = TK^2$$
$$TK^2 = 7\,114$$
$$TK = \sqrt{7\,114}$$
$$TK \approx 84,345$$

$\boxed{\text{Au millième près, TK} \approx 34,345\ mm}$

2. Le triangle DTK est rectangle en T.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$TD^2 + TK^2 = DK^2$$
$$45^2 + TK^2 = 62^2$$
$$2\,025 + TK^2 = 3\,844$$
$$TK^2 = 3\,844 - 2\,025$$
$$TK^2 = 1\,819$$
$$TK = \sqrt{1\,819}$$
$$TK \approx 42,65$$

$\boxed{\text{Au millième près, TK} \approx 42,64\ mm}$

Exercice nº 2 :

Dans le triangle ABE rectangle en A.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AE^2 = BE^2$$
$$30^2 + 60^2 = BE^2$$
$$900 + 3\,600 = BE^2$$
$$BE^2 = 4\,500$$
$$BE = \sqrt{4\,500}$$
$$BE \approx 67$$

Dans le triangle EDB rectangle en D.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DE^2 + DB^2 = EB^2$$
$$34^2 + DB^2 = 4\,500$$
$$1\,156 + DB^2 = 4\,500$$
$$DB^2 = 4\,500 - 1\,156$$

$$DB^2 = 3\,344$$
$$DB \approx 58$$

Il est conseillé d'utiliser la valeur exacte de EB^2 obtenue précédemment. Sinon on obtient :

$$DB^2 = 67^2 - 1\,156 \approx 3\,333$$
$$DB = \sqrt{3\,333} \approx 58$$

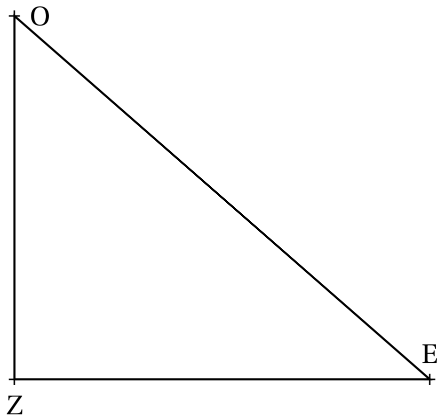
Dans le triangle DBC rectangle en B
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$BD^2 + BC^2 = DC^2$$
$$3\,344 + 25^2 = DC^2$$
$$DC^2 = 3\,969$$
$$DC = \sqrt{3\,969}$$
$$DC = 63$$

En valeur approchée on arrive à :

$$DC^2 = 58^2 + 25^2 \approx 3\,989$$
$$DC \approx 63$$

Exercice n° 3



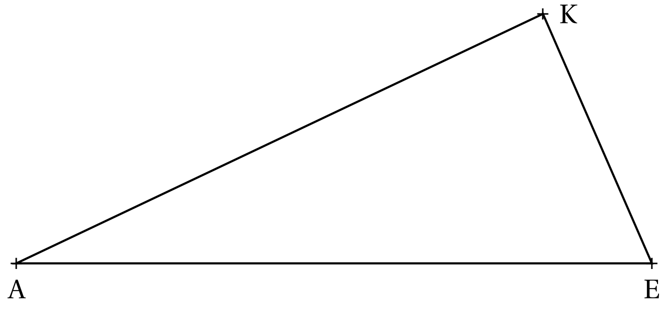
Comparons OE^2 et $ZO^2 + ZE^2$

$OE^2 = 73^2$ donc $OE^2 = 5\,329$
$ZO^2 + ZE^2 = 48^2 + 55^2$ donc $ZO^2 + ZE^2 = 5\,329$

Ainsi $ZO^2 + ZE^2 = OE^2$,

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ZOE est rectangle en Z.

Exercice n° 4



Comparons AE^2 et $KA^2 + KE^2$

$AE^2 = 84^2$ donc $AE^2 = 7\,056$
$KA^2 + KE^2 = 77^2 + 36^2$ donc $KA^2 + KE^2 = 7\,225$

Ainsi $KA^2 + KE^2 \neq AE^2$,

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle KAE n'est pas rectangle.

Exercice n° 5

Calculons AE.
Dans le triangle ADE rectangle en D.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DE^2 = AE^2$$
$$4^2 + 1^2 = AE^2$$
$$16 + 1 = AE^2$$
$$AE^2 = 17$$
$$AE = \sqrt{17}$$

Calculons EF.
Dans le triangle ECF rectangle en C.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CE^2 + CF^2 = EF^2$$
$$3^2 + 1^2 = EF^2$$
$$9 + 1 = EF^2$$
$$EF^2 = 10$$
$$EF = \sqrt{10}$$

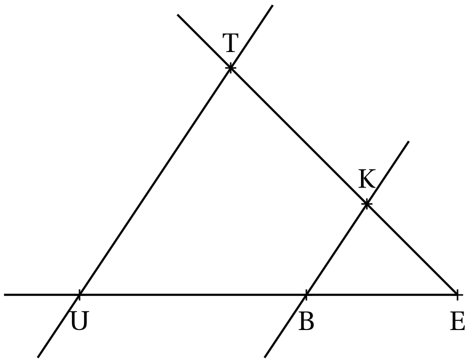
Calculons AF
Dans le triangle ABF rectangle en B.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$
$$4^2 + 3^2 = AF^2$$
$$16 + 9 = AF^2$$
$$AF^2 = 25$$
$$AF = 5$$

Comparons AF^2 et $EA^2 + EF^2$
$AF^2 = 5^2 = 25$
$EA^2 + EF^2 = 17 + 10 = 27$
Comme $EA^2 + EF^2 \neq AF^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle AEF n'est pas rectangle.

RÉACTIVATION — Thalès dans un triangle

EXERCICE Nº 1 : Thalès triangle



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

— (TK) et (UB) sont sécantes en E ;

— BE = 5 m, UE = 12 m, BK = 4 m et TE = 10 m ;

— (UT)//(BK)

Calculer les valeurs exactes de UT et KE et,le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

EXERCICE Nº 2 : Thalès triangle — Épisode 2

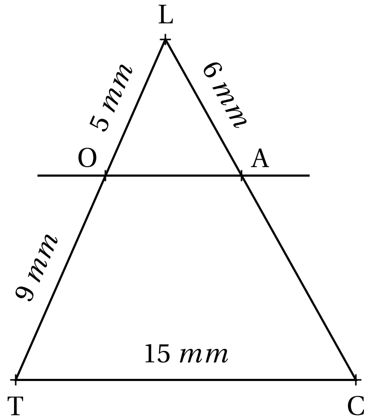
Sur la figure ci-après qui n'est pas en vraies grandeurs nous avons :

— les points L, O et T sont alignés ;

— les points L, A et C sont alignés ;

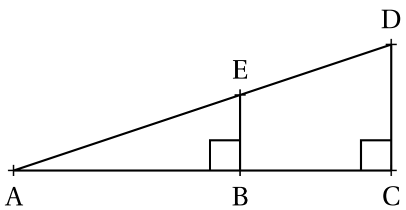
— les droites (OA) et (TC) sont parallèles.

Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millième près des longueurs OA et AC.



EXERCICE Nº 3 : Thalès ou Pythagore ?

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— ABE est rectangle en B ;

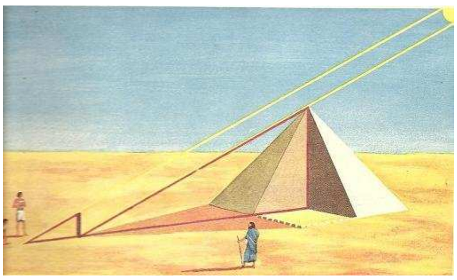
— ACD est rectangle en C ;

— AB = 36 m, AE = 60 m, DC = 72 m.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

EXERCICE Nº 4 : La légende de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.
Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :
« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».



Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)…

— la canne de Thalès mesurait 3 coudées ;

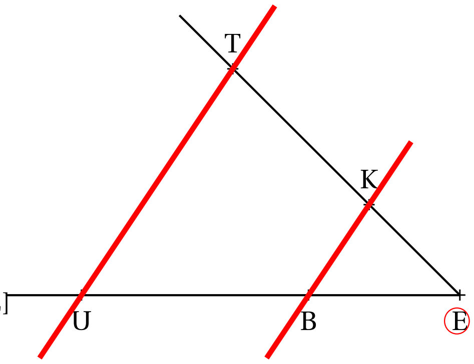
— l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées ;

— la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide ;

— une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer ?

Exercice n° 1 :



Dans le triangle EUT, B ∈ [UE] et K ∈ [TE]
Les droites (KB) et (TU) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

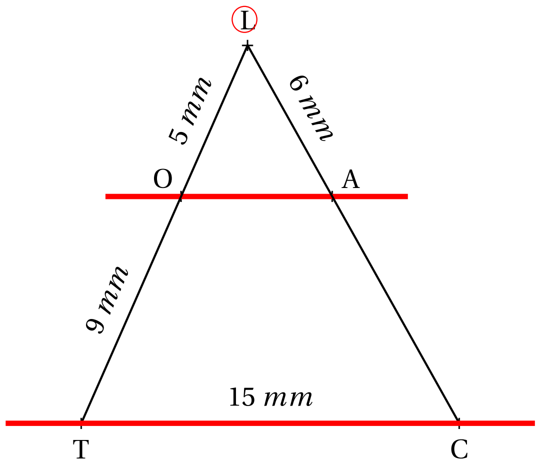
$$\frac{EB}{EU} = \frac{EK}{ET} = \frac{BK}{UT}$$

$$\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{EK}{10\ m} = \frac{4\ m}{UT}$$

Comme $\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{EK}{10\ m}$ donc $EK = \frac{10\ m \times 5\ m}{12\ m} = \frac{50}{12}\ m \approx 4,17\ m$ à 1 cm près.

Comme $\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{4\ m}{UT}$ donc $UT = \frac{4\ m \times 12\ m}{5\ m} = \frac{48}{5}\ m = 9,6\ m$

Exercice n° 2 :



Les droites (OT) et (AC) sont sécantes en L, les droites (OA) et (TC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LO}{LT} = \frac{LA}{LC} = \frac{OA}{TC}$$

$$\frac{5\ mm}{5\ mm + 9\ mm} = \frac{6\ mm}{LC} = \frac{OA}{15\ mm}$$

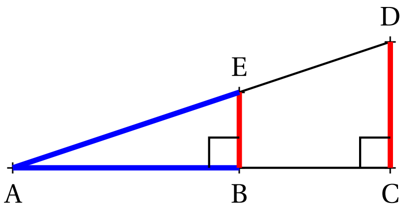
$$\frac{5\ mm}{14\ mm} = \frac{6\ mm}{LC} = \frac{OA}{15\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$LC = \frac{6\ mm \times 14\ mm}{5\ mm}$ d'où $LC = \frac{84\ mm^2}{5\ mm}$ et $LC = 16,8\ mm$

$OA = \frac{15\ mm \times 5\ mm}{14\ mm}$ d'où $OA = \frac{75\ mm^2}{14\ mm}$ et $OA \approx 5,357\ mm$

Exercice n° 3



Dans le triangle rectangle ABE *on connait deux mesures sur trois : on peut donc utiliser le théorème de Pythagore.*

Dans le triangle ABE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{AE}^2$$

$$36^2 + \mathrm{BE}^2 = 60^2$$

$$1\,296 + \mathrm{BE}^2 = 3\,600$$

$$\mathrm{BE}^2 = 3\,600 - 1\,296$$

$$\mathrm{BE}^2 = 2\,304$$

$$\mathrm{BE} = \sqrt{2\,304}$$

$$\mathrm{BE} = 48$$

Pour calculer BC *il faut calculer* AC *car* BC = AC − AB. *Pareil pour* ED *il faut d'abord calculer* AD.

(EB) ⊥ (AC) et (DC) ⊥ (AC)
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (EB)//(DC)

Dans le triangle ADC, B ∈ [AC] et E ∈ [AD],
Les droites (EB) et (DC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CD}}$$

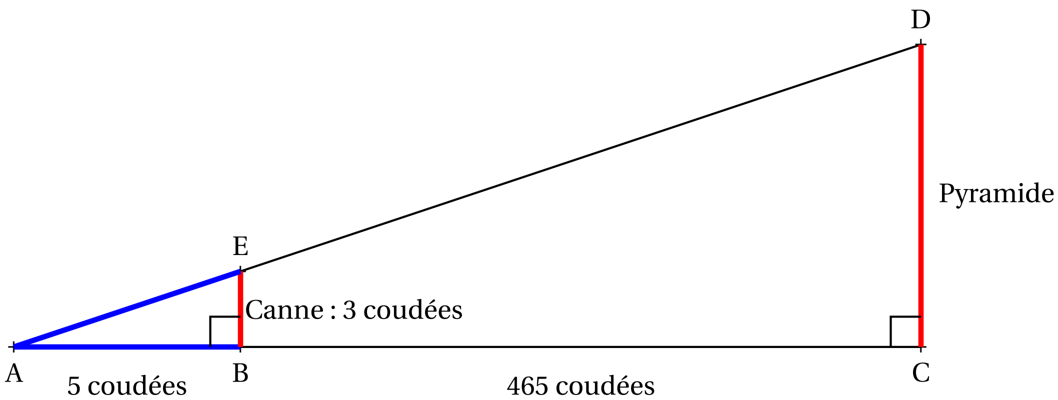
$$\frac{36\ m}{\mathrm{AC}} = \frac{60\ m}{\mathrm{AD}} = \frac{48\ m}{72\ m}$$

Comme $\frac{36\ m}{\mathrm{AC}} = \frac{48\ m}{72\ m}$ on a $\mathrm{AC} = \frac{36\ m \times 72\ m}{48\ m} = \frac{2\,592}{48}\ m = 54\ m$.

Comme $\frac{60\ m}{\mathrm{AD}} = \frac{48\ m}{72\ m}$ on a $\mathrm{AD} = \frac{60\ m \times 72\ m}{48\ m} = \frac{4\,320}{48}\ m = 90\ m$.

Donc $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB} = 54\ m - 36\ m = \boxed{18\ m}$ et $\mathrm{ED} = \mathrm{AD} - \mathrm{AE} = 90\ m - 60\ m = \boxed{30\ m}$.

Exercice n° 4
Il faut modéliser la situation en faisant un schéma!



Comme la canne et la pyramide sont perpendiculaires au sol, on peut dire que la canne et la pyramide sont parallèles.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD] et (EB)//(DC),
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{CD}$$

$$\frac{5}{5+465} = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{CD}$$

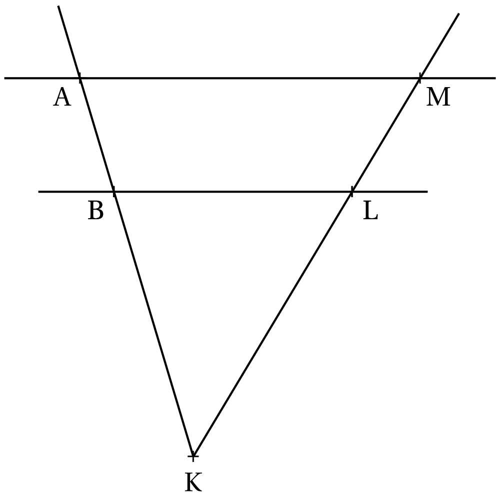
Donc $\frac{3}{CD} = \frac{5}{470}$ donc $CD = \frac{3 \times 470}{5} = \frac{1\,410}{5} = 282$

Or une coudée mesure 52 cm. La pyramide mesure donc $282 \times 52\ cm = 14\,664\ cm = \boxed{146,64\ m}$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



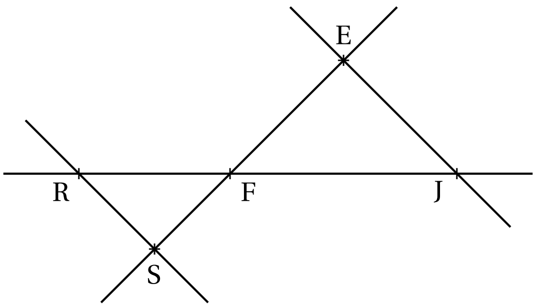
Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

— (AM)//(BL);
— (AB) et (ML) sont sécantes en K;
— BL = 5 cm, AM = 9 cm, KL = 3 cm et KA = 8 cm.

Calculer les valeurs exactes des longueurs KB et KM puis en donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 2



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

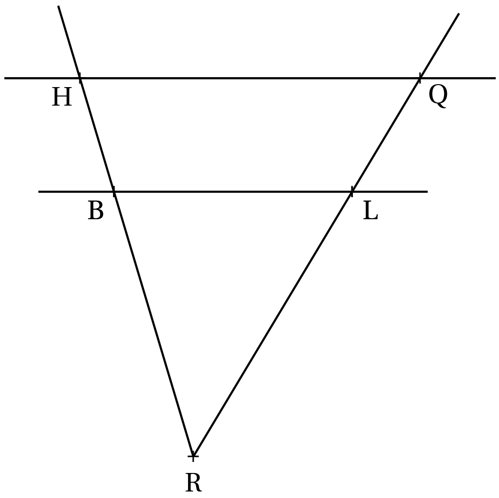
— (RS)//(EJ);
— (RJ) et (SE) sont sécantes en F;
— FJ = 10 m, RF = 7 m, EJ = 12 m et FS = 5 m.

Calculer les valeurs exactes des longueurs FE et RS puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



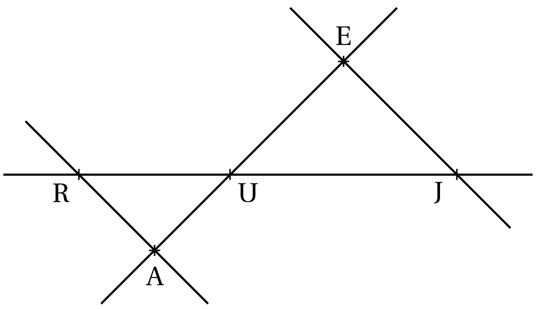
Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- (HQ)//(BL) ;
- (HB) et (QL) sont sécantes en R ;
- BL = 7 cm, HQ = 9 cm, RL = 3 cm et RH = 10 cm.

Calculer les valeurs exactes des longueurs RB et RQ puis en donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 2



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

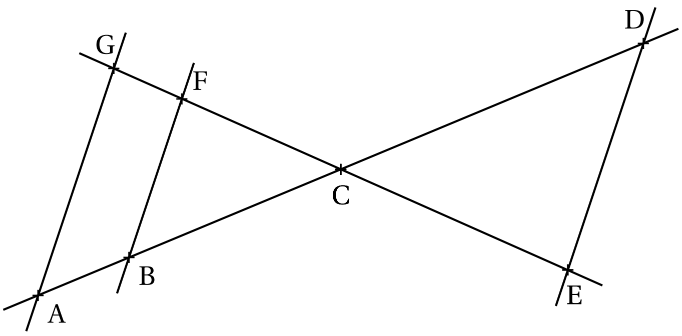
Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- (RA)//(EJ) ;
- (RJ) et (AE) sont sécantes en U ;
- UJ = 10 m, RU = 7 m, EJ = 12 m et UA = 5 m.

Calculer les valeurs exactes des longueurs UE et RA puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs nous savons que :

— Les droites (AD) et (GE) sont sécantes en C ;

— B ∈ (AD) et F ∈ (GE) ;

— (BF)//(ED)

— FC = 51 mm, GF = 18 mm, BF = 68 mm ;

— BC = 85 mm, AB = 30 mm, CD = 135 mm.

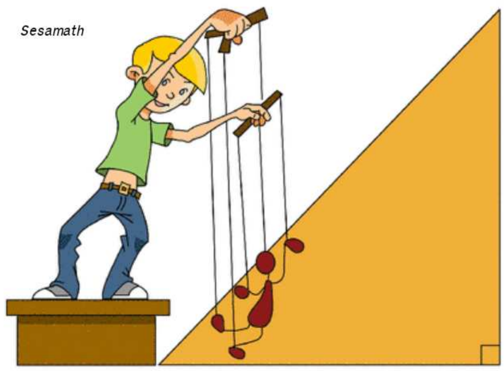
1. Calculer DE et CE.
2. Démontrer que les droites (FB) et (GA) sont parallèles.
3. En utilisant la question **3.**, calculer GA.
4. Les droites (FC) et (FB) sont-elles perpendiculaires ?
5. Démontrer en utilisant la question **4.** que le triangle CDE est rectangle.

Exercice 2

Julien prépare un spectacle de marionnettes et d'ombres chinoises.

Son écran mesure 2 m et sa marionnette 24 cm. Debout sur son estrade, il positionne sa marionnette à 30 cm de la lumière.

À quelle distance de la source de lumière doit-il placer l'écran pour que agrandir la marionnette au maximum ?



Toutes les traces de recherches seront valorisées.

Exercice 3

Voici trois fonctions :

$$f\ :\ x \rightarrow 6x-8 \qquad g\ :\ x \rightarrow 10-3x \qquad h\ :\ x \rightarrow x^2+3x-28$$

1. Calculer $f(4)$, $g(-2)$ et $h(-1)$.
2. Calculer l'antécédent de 5 par f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

D3 =10-3*D1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	$f(x)$	-38	-32	-26	-20	-14	-8	-2	4	10	16	22
3	$g(x)$	25	22	19	16	13	10	7	4	1	-2	-5
4	$h(x)$	-18	-24	-28	-30	-30	-28	-24	-18	-10	0	12

4. Déterminer sans justification les antécédents de −28 par h.
5. Déterminer sans justification l'image de 4 par h.
6. Quelle formule a été écrite dans la cellule B4 puis recopiée vers la droite.

Correction

Exercice 1

1. Les droites (FE) et (BD) sont sécantes en C. Les droites (BF) et (ED) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{FB}{DE}$$

$$\frac{51\ mm}{CE} = \frac{85\ mm}{135\ mm} = \frac{68\ mm}{DE}$$

$CE = \dfrac{51\ mm \times 135\ mm}{85\ mm} = \dfrac{6\,885}{85}\ mm = 81\ mm$ et $DE = \dfrac{68\ mm \times 135\ mm}{85\ mm} = \dfrac{9\,180}{85}\ mm = 108\ mm$

2. Comparons $\dfrac{CF}{CG}$ et $\dfrac{CB}{CA}$

$\dfrac{CF}{CG} = \dfrac{51\ mm}{51\ mm + 18\ mm} = \dfrac{51}{69}$ et $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{85\ mm}{85\ mm + 30\ mm} = \dfrac{85}{115}$

Il y a trois méthodes pour vérifier si ces fractions sont égales :

Valeurs approchées	**Simplification**	**Les produits en croix**
$\dfrac{51}{69} \approx 0,739$ à $0,001$ près.	$\dfrac{51}{69} = \dfrac{3 \times 17}{3 \times 23} = \dfrac{17}{23}$	$51 \times 115 = 5\,865$
$\dfrac{85}{115} \approx 0,739$ à $0,001$ près.	$\dfrac{85}{115} = \dfrac{5 \times 17}{5 \times 23} = \dfrac{17}{23}$	$69 \times 85 = 5\,865$

Ainsi $\dfrac{CF}{CG} = \dfrac{CB}{CA}$. Comme les points C, F et G sont alignés et dans le même ordre que les points alignésC, B et A.
D'après **la réciproque du théorème de Thalès** les droites (FB) et (GA) sont parallèles.

3. Les droites (FG) et (BA) sont sécantes en C. Les droites (FB) et (GA) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CF}{CG} = \frac{CB}{CA} = \frac{BF}{GA}$$

$$\frac{51}{69} = \frac{85}{115} = \frac{68\ mm}{GA}$$

Donc $GA = \dfrac{68\ mm \times 69}{51} = \dfrac{4\,692}{51} = 92\ mm$

4. Nous allons démontrer que le triangle BFC est rectangle.

$FC^2 + FB^2 = 51^2 + 68^2$
$FC^2 + FB^2 = 2\,601 + 4\,624$
$FC^2 + FB^2 = 7\,225$

$BC^2 = 85^2$
$BC^2 = 7\,225$

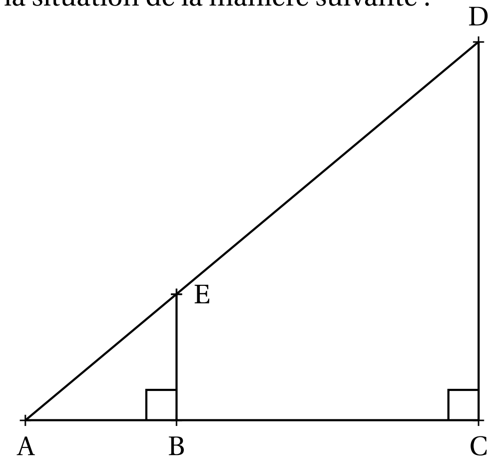
Comme $FC^2 + FB^2 = BC^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle FBC est rectangle en F.
Les droites (FC) et (FB) sont donc perpendiculaires.

5. On sait que (DE)//(FB) et aussi que (FB) $\perp$ (FE)
Or **si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**

Ainsi (DE) $\perp$ (CE) et le triangle CED est rectangle en E.

Exercice 2

On peut modéliser la situation de la manière suivante :



Comme la marionnette et l'écran sont en position verticale, on peut raisonnablement dire que (CD)//(BE)
Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{AE}}{\text{AD}} = \frac{\text{BE}}{\text{CD}}$$

$$\frac{30\ cm}{\text{AC}} = \frac{\text{AE}}{\text{AD}} = \frac{24\ cm}{2\ m}$$

Donc AC $= \dfrac{30\ cm \times 2\ m}{24\ cm} = \dfrac{30\ cm \times 200\ cm}{24\ cm} = \dfrac{6\,000\ cm}{24\ cm} = 250\ cm = 2,5\ m$

Il doit placer l'écran à $2,50\ m$ de la lumière.

Exercice 3

1. $f(4) = 6 \times 4 - 8 = 24 - 8 = 16$
$g(-2) = 10 - 3 \times (-2) = 10 + 6 = 16$
$h(-1) = (-1)^2 + 3 \times (-1) - 28 = 1 - 3 - 28 = -30$

2. Il faut résoudre $f(x) = 5$

$$6x - 8 = 5$$

$$6x - 8 + 8 = 5 + 8$$

$$6x = 13$$

$$x = \frac{13}{6}$$

3.

$$f(x) = g(x)$$

$$6x - 8 = 10 - 3x$$

$$6x - 8 + 8 = 10 - 3x + 8$$

$$6x = 18 - 3x$$

$$6x + 3x = 10 - 3x + 3x$$

$$9x = 10$$

$$x = \frac{10}{9}$$

4. Dans le tableau on lit que -3 et 0 sont des antécédents de -28 par h.

5. Dans le tableau on lit que l'image de 4 par h est 0.

6. Dans la cellule B4 il faut écrire $=$ B4 $*$ B4 $+ 3 *$ B4 $- 28$ ou $=$ B4^2 $+ 3 *$ B4 $- 28$ ou $=$ B4$^2 + 3 *$ B4 $- 28$

Évaluation de mathématiques

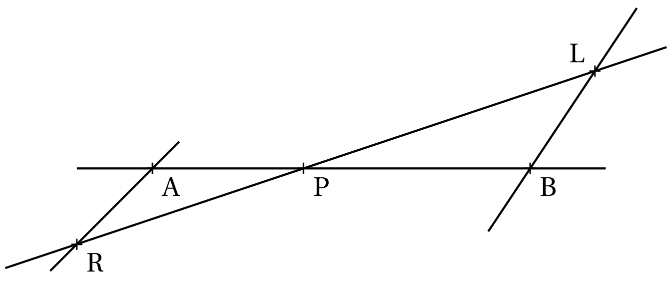
Exercice 1 *(6 points)*

On pose :

— $f(x) = (x-4)(-6x-2)$;
— $g(x) = 8 + 2x(7-3x) + 8x$;
— $h(x) = (x-4)(x+3) + (x-4)(-5-7x)$

Montrer en développant que $f(x) = g(x) = h(x)$

Exercice 2 *(4 points)*



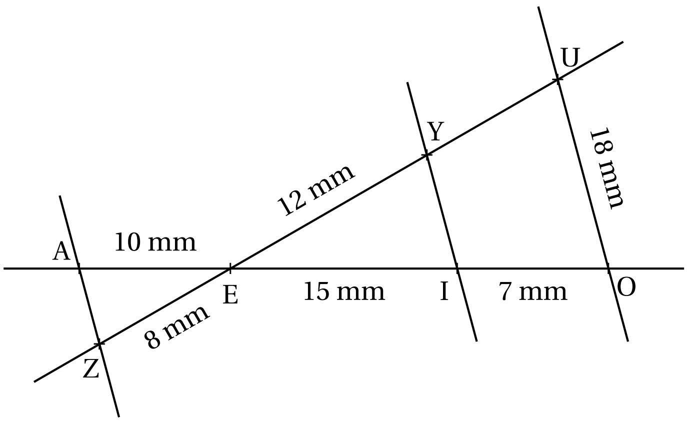
La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs.
On sait que :

— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;
— LB = 4 m, PR = 5 m, PB = 5 m et PA = 3 m ;
— (AR)//(LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AR, et le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 3 *(6 points)*

La figure ci-après n'est pas en vraie grandeur.

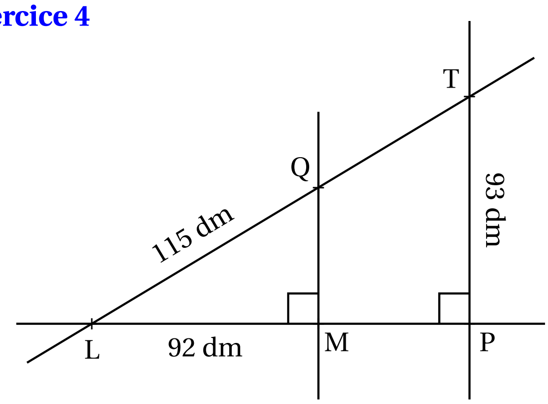


1. On sait que les droites (UY) et (IO) sont sécantes en E et que les droites (YI) et (UO) sont parallèles.

Calculer la valeur exacte de EU et YI puis une valeur approchée au dixième près.

2. Les droites (AZ) et (YI) sont-elles parallèles ?

Exercice 4 *(4 points)*



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— Le triangle LMQ est rectangle en M ;
— Le triangle LPT est rectangle en P ;
— Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L.

1. Calculer QM

2. En admettant que QM = 69 dm, calculer LT et LP.

Évaluation de mathématiques — Correction

Exercice 1

$f(x) = (x-4)(-6x-2)$
$f(x) = -6x^2 - 2x + 24x + 8$

$\boxed{f(x) = -6x^2 + 22x + 8}$

$g(x) = 8 + 2x(7-3x) + 8x$
$g(x) = 8 + 14x - 6x^2 + 8x$

$\boxed{g(x) = -6x^2 + 22x + 8}$

$h(x) = (x-4)(x+3) + (x-4)(-5-7x)$
$h(x) = x^2 + 3x - 4x - 12 - 5x - 7x^2 + 20 + 28x$

$\boxed{h(x) = -6x^2 + 22x + 8}$

Exercice 2

Les droites (LR) et (AB) sont sécantes en P, les droites (AR) et (LB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{PR}} = \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{AR}}$$

$$\frac{5\ m}{3\ m} = \frac{\mathrm{PL}}{5\ m} = \frac{4\ m}{\mathrm{AR}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{PL} = \dfrac{5\ m \times 5\ m}{3\ m}$ d'où $\mathrm{PL} = \dfrac{25\ m^2}{3\ m}$ et $\mathrm{PL} \approx 8,333\ m$

$\mathrm{AR} = \dfrac{4\ m \times 3\ m}{5\ m}$ d'où $\mathrm{AR} = \dfrac{12\ m^2}{5\ m}$ et $\mathrm{AR} = 2,4\ m$

$\boxed{\mathrm{PL} \approx 8,333\ m \text{ et } \mathrm{AR} = 2,4\ m}$

Exercice 3

1. Les droites (YU) et (IO) sont sécantes en E, les droites (YI) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{EY}}{\mathrm{EU}} = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EO}} = \frac{\mathrm{YI}}{\mathrm{UO}}$$

$$\frac{12\ mm}{\mathrm{EU}} = \frac{15\ mm}{15\ mm + 7\ mm} = \frac{\mathrm{YI}}{18\ mm}$$

$$\frac{12\ mm}{\mathrm{EU}} = \frac{15\ mm}{22\ mm} = \frac{\mathrm{YI}}{18\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{EU} = \dfrac{12\ mm \times 22\ mm}{15\ mm}$ d'où $\mathrm{EU} = \dfrac{264\ mm^2}{15\ mm}$ et $\mathrm{EU} = 17,6\ mm$

$\mathrm{YI} = \dfrac{15\ mm \times 18\ mm}{22\ mm}$ d'où $\mathrm{YI} = \dfrac{270\ mm^2}{22\ mm}$ et $\mathrm{YI} \approx 12,3\ mm$

$\boxed{\mathrm{EU} = 17,6\ mm \text{ et } \mathrm{YI} \approx 12,3\ mm}$

2. Comparons $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EA}}$ et $\dfrac{\mathrm{EY}}{\mathrm{EZ}}$

$$\frac{EI}{EA} = \frac{15\ mm}{10\ mm} \qquad \frac{EY}{EZ} = \frac{12\ mm}{8\ mm}$$

$$\frac{EI}{EA} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad \frac{EY}{EZ} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Comme $\frac{EY}{EZ} = \frac{EI}{EA}$ et comme les points E, I et A sont alignés et dans le même ordre que les points E, Y et Z, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (YI) et (AZ) sont parallèles.

$\boxed{(YI)//(AZ)}$

Exercice 4

1. Dans le triangle LMQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$ML^2 + MQ^2 = LQ^2$$
$$92^2 + MQ^2 = 115^2$$
$$8\,464 + MQ^2 = 13\,225$$
$$MQ^2 = 13\,225 - 8\,464$$
$$MQ^2 = 4\,761$$
$$MQ = \sqrt{4\,761}$$
$$MQ = 69$$

$\boxed{MQ = 69\ mm}$

2. Les droites (QM) et (TP) sont perpendiculaires à la droite (LP).
Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Ainsi (QM)//(TP)
Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L, les droites (QM) et (TP) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LQ}{LT} = \frac{LM}{LP} = \frac{QM}{TP}$$

$$\frac{115\ dm}{LT} = \frac{92\ dm}{LP} = \frac{69\ dm}{93\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$LT = \frac{115\ dm \times 93\ dm}{69\ dm}$ d'où $LT = \frac{10\,695\ dm^2}{69\ dm}$ et $LT = 155\ dm$

$LP = \frac{93\ dm \times 92\ dm}{69\ dm}$ d'où $LP = \frac{8\,556\ dm}{69\ dm}$ et $LP = 124\ dm$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *(5 points)*

Un chocolatier vient de préparer 630 poissons et 1 155 cloches de Pâques. Il souhaite préparer des sachets mélangés **tous identiques**, chaque sachet contenant la même quantité de poissons et la même quantité de cloches en chocolat. Après la répartition dans des sachets, **il ne doit rester aucun chocolat!**

1.a. Peut-il constituer des sachets contenant 7 poissons et 11 cloches de Pâques?
1.b. Peut-il constituer 35 sachets?
2. Décomposer 630 et 1 155 en produit de facteurs premiers.
3. Déterminer la liste des diviseurs communs à 630 et 1 155.
4. Combien de sachets au maximum ce chocolatier pourra-t-il préparer?
Combien chacun de ces sachets contiendra de cloches et de poissons de Pâques?

Exercice n° 2 : *(5 points)*

On note $f(x) = (3x-1)(2x+3)+(5x-1)(3x-1)$ et $g(x) = 5x(2x-1)-10x^2+3$

1. Développer et réduire $f(x)$.

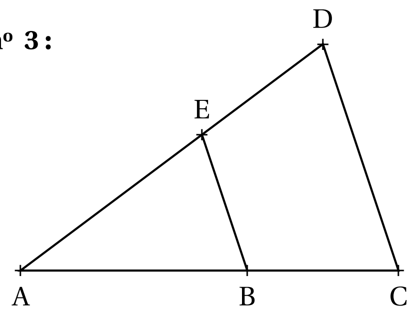
2. Développer et réduire $g(x)$.

3. Démontrer que $f(x) = (3x-1)(7x+2)$.

4. En utilisant l'expression de la question **3.** calculer les images de -1 et 5 par la fonction f.

5. On peut prouver que $g(x) = -5x+3$. Calculer l'antécédent de 11 par la fonction g.

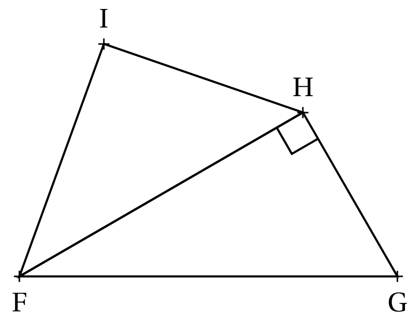
Exercice n° 3 : *(6 points)*



Sur la figure ci-dessus on sait que :

- B ∈ [AC] et E ∈ [AD] et (BE)//(CD);
- CD = 125 mm, EB = 75 mm;
- AD = 165 mm, AB = 87 mm.

1. Calculer la valeur exacte des longueurs AE et AC.

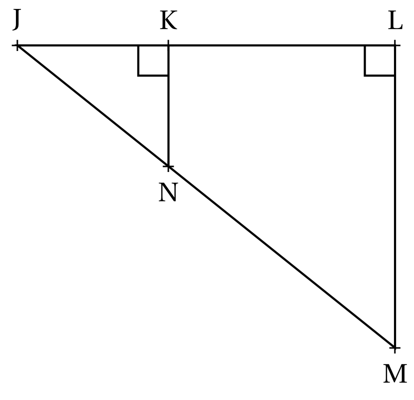


Sur la figure ci-dessus on sait que :

- FHG est rectangle en H;
- FG = 97 m, HG = 72 m, IH = 36 m, IF = 54 m.

2. Le triangle FIH est-il rectangle?

Exercice n° 4 : *(4 points)*



Sur la figure ci-contre on sait que :

- JKN est rectangle en K et JLM est rectangle en L;
- K ∈ [JL] et N ∈ [JM];
- JN = 70 cm, KN = 56 cm et LM = 136 cm.

1. Calculer la valeur exacte de JK.

2. Démontrer que (KN)//(LM).

3. Calculer JL et JM puis KL et NM.

Contrôle de mathématiques — CORRECTION

Exercice n° 1 : Les chocolats CORRECTION

Arithmétique

1.a. On effectue les divisions euclidiennes de 630 et 1 155 par 7 et 11.
$630 = 7 \times 90$ et $1\,155 = 11 \times 105$

$\boxed{\text{Ce n'est pas possible car les quotients ne sont pas égaux (90 et 105).}}$

1.b. On effectue les divisions euclidiennes de 630 et 1 155 par 35.
$630 = 35 \times 18$ et $1\,155 = 35 \times 33$.

$\boxed{\text{Il peut préparer 35 sachets contenant chacun 18 poissons et 33 cloches de Pâques.}}$

2. Décomposer 630 et 1 155 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1\,155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \text{ donc } 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7}$ $\boxed{1\,155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11}$

3. Déterminer la liste des diviseurs communs à 630 et 1 155.
On constate en examinant les produits de facteurs premiers que les facteurs 3, 5 et 7 sont communs aux deux nombres. Les diviseurs communs à ces deux nombres sont donc tous les produits que l'on peut construire à partir des ces nombres :

$1 = 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$3 = 3^1 \times 5^0 \times 7^0$
$5 = 3^0 \times 5^1 \times 7^0$
$7 = 3^0 \times 5^0 \times 7^1$
$15 = 3^1 \times 5^1 \times 7^0$
$21 = 3^1 \times 5^0 \times 7^1$
$35 = 3^0 \times 5^1 \times 7^1$
$105 = 3^1 \times 5^1 \times 7^1$.

$\boxed{\text{La liste des diviseurs communs à 630 et 1 155 sont : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 et 105.}}$

4. Combien de sachets au maximum ce chocolatier pourra-t-il préparer ?
Combien chacun de ces sachets contiendra de cloches et de poissons de Pâques ?

Il pourra faire au maximum 105 sachets et comme $630 = 105 \times 6$ et $1\,155 = 105 \times 11$,

$\boxed{\text{Il pourra faire 105 sachets au maximum contenant chacun 6 poissons et 11 cloches de Pâques.}}$

Exercice n° 2 : Fonctions et calcul littéral CORRECTION

Fonction et calcul littéral

On note $f(x) = (3x-1)(2x+3)+(5x-1)(3x-1)$ et $g(x) = 5x(2x-1)-10x^2+3$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x)=(3x-1)(2x+3)+(5x-1)(3x-1)$
$f(x)=(6x^2+9x-2x-3)+(15x^2-5x-3x+1)$

$\boxed{f(x)=21x^2-x-2}$

2. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x)=5x(2x-1)-10x^2+3$
$g(x)=10x^2-5x-10x^2+3$

$\boxed{g(x)=-5x+3}$

3. Démontrer que $f(x)=(3x-1)(7x+2)$.

$(3x-1)(7x+2)=21x^2+6x-7x-2$
$(3x-1)(7x+2)=21x^2-x-2.$

$\boxed{\text{On constate bien que } f(x)=(3x-1)(7x+2)}$.

4. En utilisant l'expression de la question **3.** calculer les images de -1 et 5 par la fonction f.

$f(-1)=(3\times(-1)-1)(7\times(-1)+2)=(-3-1)(-7+2)=(-4)\times 5=\boxed{-20}$

$f(5)=(3\times 5-1)(7\times 5+2)=(15-1)(35+2)=14\times 37=\boxed{518}$

5. On peut prouver que $g(x)=-5x+3$. Calculer l'antécédent de 11 par la fonction g.

Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}-5x+3&=11\\ -5x+3-3&=11-3\\ -5x&=14\\ x&=-\frac{14}{5}\\ x&=-2,8\end{aligned}$$

$\boxed{-2,8 \text{ est l'antécédent de 11 par la fonction } g.}$

Exercice n° 3 : Thales et Pythagore CORRECTION

Pythagore et Thalès

1. Dans le triangle ADC, les droites (BE) et (DC) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{CD}$$

$$\frac{87\,\text{mm}}{AC}=\frac{AE}{165\,\text{mm}}=\frac{75\,\text{mm}}{125\,\text{mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AC=\dfrac{87\,\text{mm}\times 125\,\text{mm}}{75\,\text{mm}}$ d'où $AC=\dfrac{10875\,\text{mm}^2}{75\,\text{mm}}$ et $AC=145\,\text{mm}$

$AE=\dfrac{165\,\text{mm}\times 75\,\text{mm}}{125\,\text{mm}}$ d'où $AE=\dfrac{12375\,\text{mm}^2}{125\,\text{mm}}$ et $AE=99\,\text{mm}$

$\boxed{AC = 145\,\text{mm et } AE = 99\,\text{mm.}}$

2.

Dans le triangle FHG rectangle en H,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HF^2 + HG^2 = FG^2$$

$$HF^2 + 72^2 = 97^2$$

$$HF^2 + 5\,184 = 9\,409$$

$$HF^2 = 9\,409 - 5\,184$$

$$HF^2 = 4\,225$$

$$HF = \sqrt{4\,225}$$

$$HF = 65$$

Comparons $IF^2 + IH^2$ et HF^2 :

$IF^2 + IH^2$	HF^2
$54^2 + 36^2$	65^2
$2\,916 + 1\,296$	
$4\,212$	$4\,225$

Comme

$$IF^2 + IH^2 \neq HF^2$$

, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle ABC n'est pas rectangle}}$.

Exercice n° 4 : *(4 points)*

1. Calculer la valeur exacte de JK.

Dans le triangle JKN rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{KJ}^2 + \mathrm{KN}^2 = \mathrm{JN}^2$$

$$\mathrm{KJ}^2 + 56^2 = 70^2$$

$$\mathrm{KJ}^2 + 3\,136 = 4\,900$$

$$\mathrm{KJ}^2 = 4\,900 - 3\,136$$

$$\mathrm{KJ}^2 = 1\,764$$

$$\mathrm{KJ} = \sqrt{1\,764}$$

$$\mathrm{KJ} = 42$$

$\boxed{\mathrm{KJ} = 42\,\mathrm{cm}}$

2. Démontrer que (KN)//(LM).

Les droites (KN) et (LM) sont perpendiculaires à la droite (JL) puisque les deux triangles sont rectangles.
Or on sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (KN) et (LM) sont donc parallèles.}}$

3. Calculer JL et JM puis KL et NM.

Dans le triangle JLM, les droites (KN) et (LM) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{JL}} = \frac{\mathrm{JN}}{\mathrm{JM}} = \frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{LM}}$$

$$\frac{42\,\mathrm{cm}}{\mathrm{JL}} = \frac{70\,\mathrm{cm}}{\mathrm{JM}} = \frac{56\,\mathrm{cm}}{136\,\mathrm{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{JL} = \dfrac{42\,\mathrm{cm} \times 136\,\mathrm{cm}}{56\,\mathrm{cm}}$ d'où $\mathrm{JL} = \dfrac{5\,712\,\mathrm{cm}^2}{56\,\mathrm{cm}}$ et $\mathrm{JL} = 102\,\mathrm{cm}$

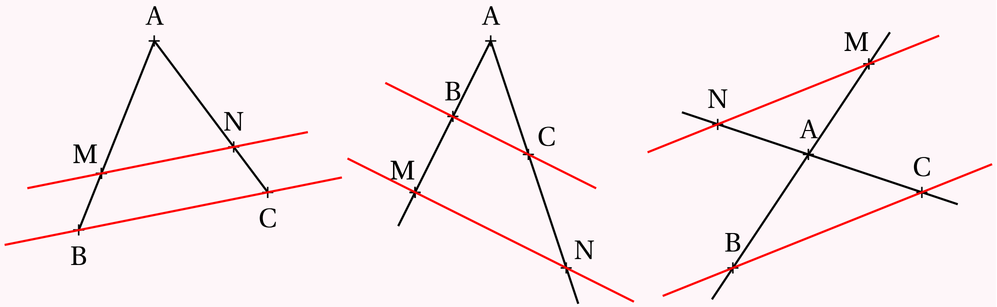
$\mathrm{JM} = \dfrac{70\,\mathrm{cm} \times 136\,\mathrm{cm}}{56\,\mathrm{cm}}$ d'où $\mathrm{JM} = \dfrac{9\,520\,\mathrm{cm}^2}{56\,\mathrm{cm}}$ et $\mathrm{JM} = 170\,\mathrm{cm}$

Comme $\mathrm{KL} = \mathrm{JL} - \mathrm{JK} = 102\,\mathrm{cm} - 42\,\mathrm{cm} = 60\,\mathrm{cm}$ et $\mathrm{NM} = \mathrm{JM} - \mathrm{JN} = 170\,\mathrm{cm} - 70\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{cm}$.

$\boxed{\mathrm{JL} = 102\,\mathrm{cm},\ \mathrm{JM} = 170\,\mathrm{cm},\ \mathrm{KL} = 100\,\mathrm{cm}\ \text{et}\ \mathrm{NM} = 100\,\mathrm{cm}.}$

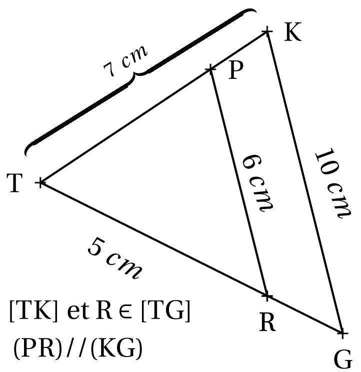
Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès



Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si (MN)//(BC)
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



P ∈ [TK] et R ∈ [TG]
(PR)//(KG)

Calculer TG **et** TP**.**

Les droites (PK) et (RG) sont sécantes en T.
Les droites (PR) et (KG) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

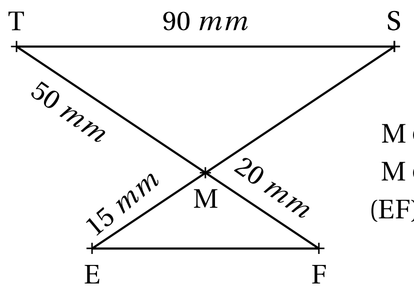
$$\frac{TP}{TK} = \frac{TR}{TG} = \frac{PR}{KG}$$

$$\frac{TP}{7\ cm} = \frac{5\ cm}{TG} = \frac{6\ cm}{10\ cm}$$

On utilise la règle de trois :

$$TP = \frac{7\ cm \times 6\ cm}{10\ cm} = 4{,}2\ cm$$

$$TG = \frac{5\ cm \times 10\ cm}{6\ cm} \approx 8{,}3\ cm$$



M ∈ (ES)
M ∈ (TF)
(EF)//(TS)

Calculer MS **et** EF**.**

Les droites (ES) et (TF) sont sécantes en M.
Les droites (EF) et (TS) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{ME}{MS} = \frac{MF}{MT} = \frac{EF}{ST}$$

$$\frac{15\ mm}{MS} = \frac{20\ mm}{50\ mm} = \frac{EF}{90\ mm}$$

On utilise la règle de trois :

$$MS = \frac{50\ mm \times 15\ mm}{20\ mm} = 37{,}5\ mm$$

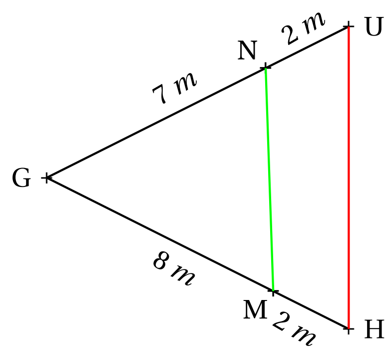
$$EF = \frac{90\ mm \times 20\ mm}{50\ mm} = 36\ mm$$

Contraposée du théorème de Thalès

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$
Alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Réciproque du théorème de Thalès

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A avec A, B et M dans le même ordre que A, C et N et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



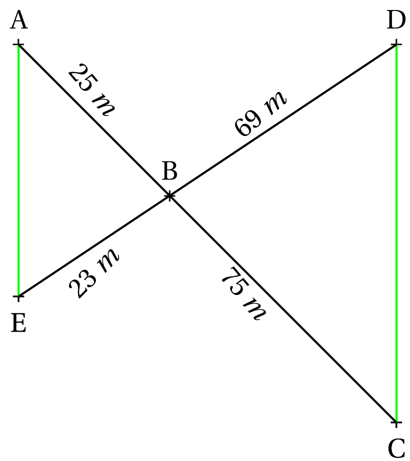
(NM) **et** (HU) **sont-elles parallèles ?**

Comparons $\frac{GN}{GU}$ et $\frac{GM}{GH}$

$$\frac{GN}{GU} = \frac{7\ m}{9\ m} \approx 0{,}78$$

$$\frac{GM}{GH} = \frac{8\ m}{10\ m} = 0{,}8$$

Comme $\frac{GN}{GU} \neq \frac{GM}{GH}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès**, les droites (NM) et (HU) sont sécantes.



(AE) **et** (DC) **sont-elles parallèles ?**

Comparons $\frac{BA}{BC}$ et $\frac{BE}{BD}$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{25\ m}{75\ m} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{23\ m}{69\ m} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

Comme $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD}$ et comme les points B, A et C sont alignés et dans le même ordre que les points alignés B, E et D.
D'après **la réciproque du théorème de Thalès** les droites (AE) et (DC) sont parallèles.