Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *(5 points)*

Un chocolatier vient de préparer 630 poissons et 1 155 cloches de Pâques. Il souhaite préparer des sachets mélangés **tous identiques**, chaque sachet contenant la même quantité de poissons et la même quantité de cloches en chocolat. Après la répartition dans des sachets, **il ne doit rester aucun chocolat!**

1.a. Peut-il constituer des sachets contenant 7 poissons et 11 cloches de Pâques?
1.b. Peut-il constituer 35 sachets?
2. Décomposer 630 et 1 155 en produit de facteurs premiers.
3. Déterminer la liste des diviseurs communs à 630 et 1 155.
4. Combien de sachets au maximum ce chocolatier pourra-t-il préparer?
Combien chacun de ces sachets contiendra de cloches et de poissons de Pâques?

Exercice n° 2 : *(5 points)*

On note $f(x) = (3x-1)(2x+3)+(5x-1)(3x-1)$ et $g(x) = 5x(2x-1)-10x^2+3$

1. Développer et réduire $f(x)$.

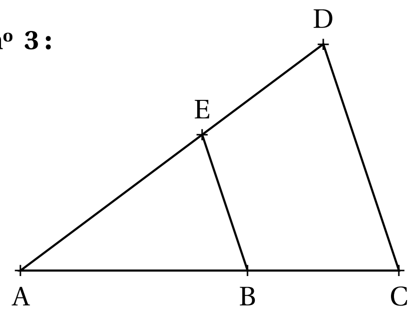
2. Développer et réduire $g(x)$.

3. Démontrer que $f(x) = (3x-1)(7x+2)$.

4. En utilisant l'expression de la question **3.** calculer les images de -1 et 5 par la fonction f.

5. On peut prouver que $g(x) = -5x+3$. Calculer l'antécédent de 11 par la fonction g.

Exercice n° 3 : *(6 points)*



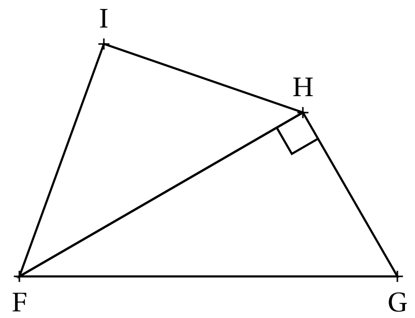
Sur la figure ci-dessus on sait que :

— B ∈ [AC] et E ∈ [AD] et (BE)//(CD);

— CD = 125 mm, EB = 75 mm;

— AD = 165 mm, AB = 87 mm.

1. Calculer la valeur exacte des longueurs AE et AC.



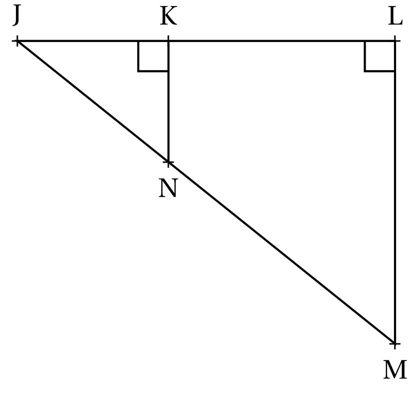
Sur la figure ci-dessus on sait que :

— FHG est rectangle en H;

— FG = 97 m, HG = 72 m, IH = 36 m, IF = 54 m.

2. Le triangle FIH est-il rectangle?

Exercice n° 4 : *(4 points)*



Sur la figure ci-contre on sait que :

— JKN est rectangle en K et JLM est rectangle en L;

— K ∈ [JL] et N ∈ [JM];

— JN = 70 cm, KN = 56 cm et LM = 136 cm.

1. Calculer la valeur exacte de JK.

2. Démontrer que (KN)//(LM).

3. Calculer JL et JM puis KL et NM.

Contrôle de mathématiques — CORRECTION

Exercice n° 1 : Les chocolats CORRECTION

Arithmétique

1.a. On effectue les divisions euclidiennes de 630 et 1 155 par 7 et 11.
$630 = 7 \times 90$ et $1\,155 = 11 \times 105$

$\boxed{\text{Ce n'est pas possible car les quotients ne sont pas égaux (90 et 105).}}$

1.b. On effectue les divisions euclidiennes de 630 et 1 155 par 35.
$630 = 35 \times 18$ et $1\,155 = 35 \times 33$.

$\boxed{\text{Il peut préparer 35 sachets contenant chacun 18 poissons et 33 cloches de Pâques.}}$

2. Décomposer 630 et 1 155 en produit de facteurs premiers.

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

1 155	3
385	5
77	7
11	11
1	

$\boxed{630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \text{ donc } 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7}$ $\boxed{1\,155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11}$

3. Déterminer la liste des diviseurs communs à 630 et 1 155.
On constate en examinant les produits de facteurs premiers que les facteurs 3, 5 et 7 sont communs aux deux nombres. Les diviseurs communs à ces deux nombres sont donc tous les produits que l'on peut construire à partir des ces nombres :

$1 = 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$3 = 3^1 \times 5^0 \times 7^0$
$5 = 3^0 \times 5^1 \times 7^0$
$7 = 3^0 \times 5^0 \times 7^1$
$15 = 3^1 \times 5^1 \times 7^0$
$21 = 3^1 \times 5^0 \times 7^1$
$35 = 3^0 \times 5^1 \times 7^1$
$105 = 3^1 \times 5^1 \times 7^1$.

$\boxed{\text{La liste des diviseurs communs à 630 et 1 155 sont : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 et 105.}}$

4. Combien de sachets au maximum ce chocolatier pourra-t-il préparer ?
Combien chacun de ces sachets contiendra de cloches et de poissons de Pâques ?

Il pourra faire au maximum 105 sachets et comme $630 = 105 \times 6$ et $1\,155 = 105 \times 11$,

$\boxed{\text{Il pourra faire 105 sachets au maximum contenant chacun 6 poissons et 11 cloches de Pâques.}}$

Exercice n° 2 : Fonctions et calcul littéral CORRECTION

Fonction et calcul littéral

On note $f(x) = (3x-1)(2x+3) + (5x-1)(3x-1)$ et $g(x) = 5x(2x-1) - 10x^2 + 3$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (3x-1)(2x+3)+(5x-1)(3x-1)$
$f(x) = (6x^2+9x-2x-3)+(15x^2-5x-3x+1)$

$\boxed{f(x) = 21x^2-x-2}$

2. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = 5x(2x-1)-10x^2+3$
$g(x) = 10x^2-5x-10x^2+3$

$\boxed{g(x) = -5x+3}$

3. Démontrer que $f(x) = (3x-1)(7x+2)$.

$(3x-1)(7x+2) = 21x^2+6x-7x-2$
$(3x-1)(7x+2) = 21x^2-x-2.$

$\boxed{\text{On constate bien que } f(x) = (3x-1)(7x+2)}$.

4. En utilisant l'expression de la question **3.** calculer les images de -1 et 5 par la fonction f.

$f(-1) = (3\times(-1)-1)(7\times(-1)+2) = (-3-1)(-7+2) = (-4)\times 5 = \boxed{-20}$

$f(5) = (3\times 5-1)(7\times 5+2) = (15-1)(35+2) = 14\times 37 = \boxed{518}$

5. On peut prouver que $g(x) = -5x+3$. Calculer l'antécédent de 11 par la fonction g.

Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
-5x+3 &= 11\\
-5x+3-3 &= 11-3\\
-5x &= 14\\
x &= -\frac{14}{5}\\
x &= -2,8
\end{aligned}$$

$\boxed{-2,8 \text{ est l'antécédent de 11 par la fonction } g.}$

Exercice n° 3 : Thales et Pythagore CORRECTION

Pythagore et Thalès

1. Dans le triangle ADC, les droites (BE) et (DC) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{87\,\text{mm}}{AC} = \frac{AE}{165\,\text{mm}} = \frac{75\,\text{mm}}{125\,\text{mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AC = \dfrac{87\,\text{mm}\times 125\,\text{mm}}{75\,\text{mm}}$ d'où $AC = \dfrac{10875\,\text{mm}^2}{75\,\text{mm}}$ et $AC = 145\,\text{mm}$

$AE = \dfrac{165\,\text{mm}\times 75\,\text{mm}}{125\,\text{mm}}$ d'où $AE = \dfrac{12375\,\text{mm}^2}{125\,\text{mm}}$ et $AE = 99\,\text{mm}$

$\boxed{AC = 145\,\text{mm et } AE = 99\,\text{mm.}}$

2.

Dans le triangle FHG rectangle en H,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HF^2 + HG^2 = FG^2$$

$$HF^2 + 72^2 = 97^2$$

$$HF^2 + 5\,184 = 9\,409$$

$$HF^2 = 9\,409 - 5\,184$$

$$HF^2 = 4\,225$$

$$HF = \sqrt{4\,225}$$

$$HF = 65$$

Comparons $IF^2 + IH^2$ et HF^2 :

$IF^2 + IH^2$	HF^2
$54^2 + 36^2$	65^2
$2\,916 + 1\,296$	
$4\,212$	$4\,225$

Comme

$$IF^2 + IH^2 \neq HF^2$$

, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle ABC n'est pas rectangle}}$.

Exercice n° 4 : *(4 points)*

1. Calculer la valeur exacte de JK.

Dans le triangle JKN rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{KJ}^2 + \mathrm{KN}^2 = \mathrm{JN}^2$$
$$\mathrm{KJ}^2 + 56^2 = 70^2$$
$$\mathrm{KJ}^2 + 3\,136 = 4\,900$$
$$\mathrm{KJ}^2 = 4\,900 - 3\,136$$
$$\mathrm{KJ}^2 = 1\,764$$
$$\mathrm{KJ} = \sqrt{1\,764}$$
$$\mathrm{KJ} = 42$$

$\boxed{\mathrm{KJ} = 42\,\mathrm{cm}}$

2. Démontrer que (KN)//(LM).

Les droites (KN) et (LM) sont perpendiculaires à la droite (JL) puisque les deux triangles sont rectangles.
Or on sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (KN) et (LM) sont donc parallèles.}}$

3. Calculer JL et JM puis KL et NM.

Dans le triangle JLM, les droites (KN) et (LM) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{JL}} = \frac{\mathrm{JN}}{\mathrm{JM}} = \frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{LM}}$$

$$\frac{42\,\mathrm{cm}}{\mathrm{JL}} = \frac{70\,\mathrm{cm}}{\mathrm{JM}} = \frac{56\,\mathrm{cm}}{136\,\mathrm{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{JL} = \dfrac{42\,\mathrm{cm} \times 136\,\mathrm{cm}}{56\,\mathrm{cm}}$ d'où $\mathrm{JL} = \dfrac{5\,712\,\mathrm{cm}^2}{56\,\mathrm{cm}}$ et $\mathrm{JL} = 102\,\mathrm{cm}$

$\mathrm{JM} = \dfrac{70\,\mathrm{cm} \times 136\,\mathrm{cm}}{56\,\mathrm{cm}}$ d'où $\mathrm{JM} = \dfrac{9\,520\,\mathrm{cm}^2}{56\,\mathrm{cm}}$ et $\mathrm{JM} = 170\,\mathrm{cm}$

Comme $\mathrm{KL} = \mathrm{JL} - \mathrm{JK} = 102\,\mathrm{cm} - 42\,\mathrm{cm} = 60\,\mathrm{cm}$ et $\mathrm{NM} = \mathrm{JM} - \mathrm{JN} = 170\,\mathrm{cm} - 70\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{cm}$.

$\boxed{\mathrm{JL} = 102\,\mathrm{cm},\ \mathrm{JM} = 170\,\mathrm{cm},\ \mathrm{KL} = 100\,\mathrm{cm} \text{ et } \mathrm{NM} = 100\,\mathrm{cm}.}$