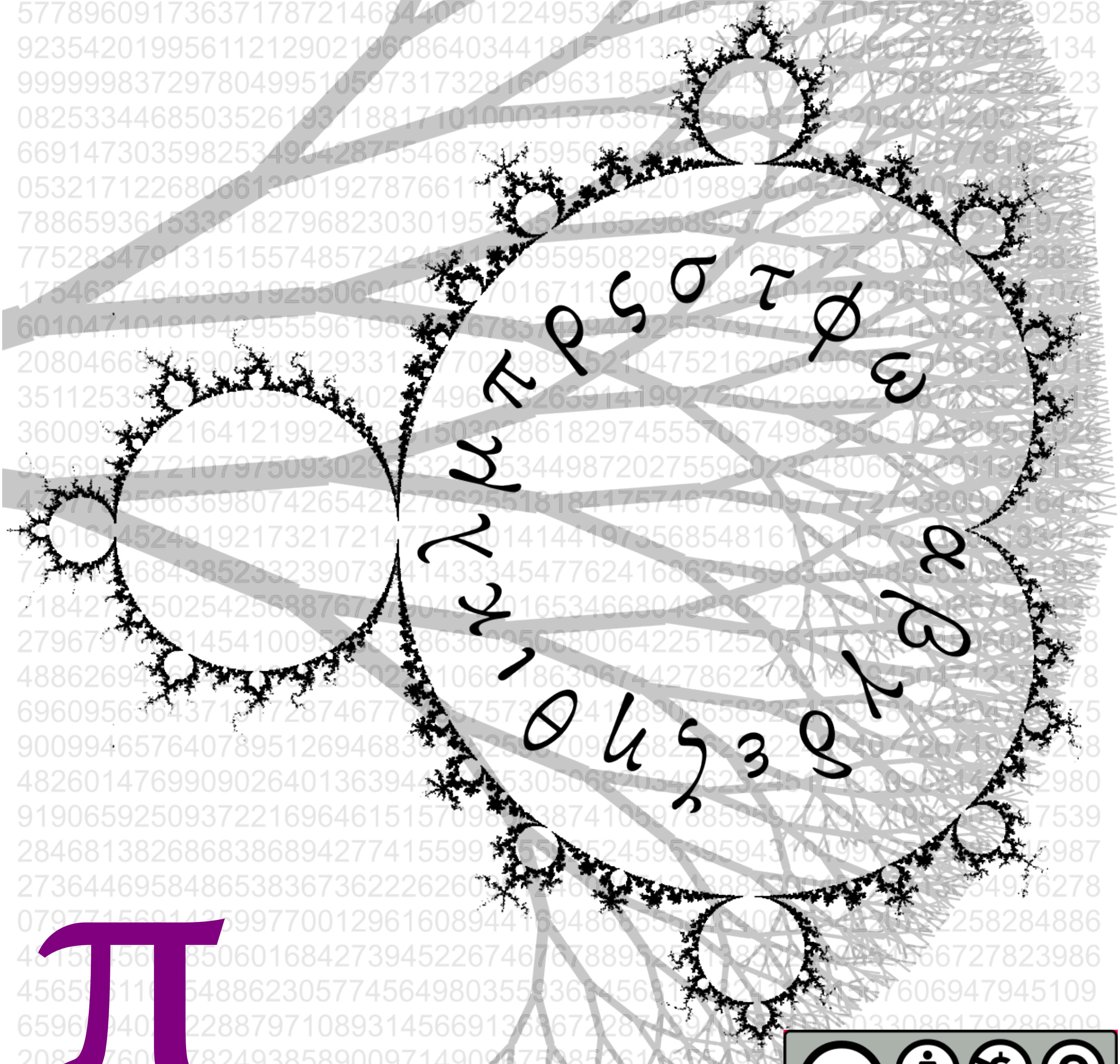
Brevet des collèges

100 exercices corrigés

Mathématiques



Fabrice ARNAUD

PI.AC3J.FR

Version du 11 juin 2024

Table des matières

- ☐ **CALCUL NUMÉRIQUE**
  - ☐ **Nombres entiers, arithmétique**
    - ☐ Division euclidienne — **Exercice nº 1**
    - ☐ Diviseurs et multiples — **Exercice nº 2**
    - ☐ Décomposition en produit de facteurs premiers — **Exercice nº 3**
    - ☐ Fractions irréductibles — **Exercice nº 4**
    - ☐ Raisonner avec des nombres entiers — **Exercice nº 5**
  - ☐ **Nombres décimaux**
    - ☐ Unités simples usuelles — **Exercice nº 6**
  - ☐ **Nombres relatifs**
    - ☐ Somme algébrique — **Exercice nº 7**
    - ☐ Priorités opératoires — **Exercice nº 8**
  - ☐ **Fractions**
    - ☐ Calculer une somme algébrique de fractions — **Exercice nº 9**
    - ☐ Calculer un produit de fractions — **Exercice nº 10**
    - ☐ Calculer un quotient de fractions — **Exercice nº 11**
    - ☐ Utiliser les priorités opératoires avec les fractions — **Exercice nº 12**
  - ☐ **Puissances**
    - ☐ Calculer avec les puissances de 10 — **Exercice nº 13**
    - ☐ Déterminer l'écriture scientifique d'un nombre décimal — **Exercice nº 14**
    - ☐ Utiliser les préfixes usuels — **Exercice nº 15**
    - ☐ Calculer avec les puissances quelconques — **Exercice nº 16**
- ☐ **CALCUL LITTÉRAL**
  - ☐ **Substitution**
    - ☐ Substituer dans une expression littérale — **Exercice nº 17**
    - ☐ Comprendre un programme de calcul — **Exercice nº 18**
  - ☐ **Développer et réduire**
    - ☐ Réduire une expression littérale — **Exercice nº 19**
    - ☐ Développer en utilisant la distributivité simple — **Exercice nº 20**
    - ☐ Développer en utilisant la distributivité double — **Exercice nº 21**
    - ☐ Développer en utilisant les identités remarquables — **Exercice nº 22**
  - ☐ **Factoriser**
    - ☐ Factoriser une expression en utilisant la distributivité — **Exercice nº 23**
    - ☐ Factoriser une expression en utilisant une différence de deux carrés — **Exercice nº 24**
    - ☐ Factoriser une expression en utilisant les identités remarquables — **Exercice nº 25**
  - ☐ **Équations**
    - ☐ Résoudre une équation du premier degré — **Exercice nº 26**
    - ☐ Résoudre une équation produit — **Exercice nº 27**
    - ☐ Résoudre une équation carré — **Exercice nº 28**
- ☐ **FONCTIONS**
  - ☐ **Généralités sur les fonctions**
    - ☐ Calculer l'image d'un nombre par une fonction — **Exercice nº 29**
    - ☐ Déterminer le ou les antécédents d'un nombre par une fonction — **Exercice nº 30**
    - ☐ Lire la représentation graphique d'une fonction — **Exercice nº 31**
    - ☐ Lire le tableau de valeurs d'une fonction — **Exercice nº 32**
    - ☐ Usage d'un tableur — **Exercice nº 33**
  - ☐ **Les fonctions linéaires**

- ☐ Déterminer l'expression d'une fonction linéaire — **Exercice n° 34**
- ☐ Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire — **Exercice n° 35**
- ☐ Analyser la représentation graphique d'une fonction linéaire — **Exercice n° 36**

☐ **Les fonctions affines**

- ☐ Déterminer l'expression d'une fonction affine — **Exercice n° 37**
- ☐ Tracer la représentation graphique d'une fonction affine — **Exercice n° 38**
- ☐ Analyser la représentation graphique d'une fonction affine — **Exercice n° 39**

☐ Géométrie plane

☐ **Bases de la géométrie**

- ☐ Droites parallèles et perpendiculaires — **Exercice n° 40**
- ☐ Angles alternes-internes, correspondants, opposés par le sommet — **Exercice n° 41**
- ☐ Angles et triangles — **Exercice n° 42**
- ☐ Les parallélogrammes — **Exercice n° 43**
- ☐ Cas d'égalité des triangles — **Exercice n° 44**
- ☐ Triangles semblables — **Exercice n° 45**

☐ **Transformations géométriques**

- ☐ La symétrie axiale — **Exercice n° 46**
- ☐ La symétrie centrale — **Exercice n° 47**
- ☐ La translation — **Exercice n° 48**
- ☐ La rotation — **Exercice n° 49**
- ☐ L'homothétie — **Exercice n° 50**

☐ **Théorème de Pythagore**

- ☐ Calculer la mesure de l'hypoténuse — **Exercice n° 51**
- ☐ Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit — **Exercice n° 52**
- ☐ Démontrer qu'un triangle est rectangle — **Exercice n° 53**
- ☐ Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle — **Exercice n° 54**

☐ **Théorème de Thalès**

- ☐ Calculer une longueur dans une situation de Thalès triangle — **Exercice n° 55**
- ☐ Calculer une longueur dans une situation de Thalès papillon — **Exercice n° 56**
- ☐ Démontrer que deux droites sont parallèles — **Exercice n° 57**
- ☐ Démontrer que deux droites sont sécantes — **Exercice n° 58**

☐ **Trigonométrie**

- ☐ Calculer la longueur d'un côté — **Exercice n° 59**
- ☐ Calculer la mesure d'un angle — **Exercice n° 60**

☐ Géométrie de l'espace

☐ **Géométrie des solides**

- ☐ Le cube — **Exercice n° 61**
- ☐ Le pavé droit — **Exercice n° 62**
- ☐ Le prisme droit — **Exercice n° 63**
- ☐ Le cylindre de révolution — **Exercice n° 64**
- ☐ La pyramide — **Exercice n° 65**
- ☐ Le cône — **Exercice n° 66**
- ☐ La sphère et la boule — **Exercice n° 67**

☐ Géométrie cartésienne

☐ **Dans le plan**

- ☐ Utiliser les coordonnées dans le plan — **Exercice n° 68**

☐ **Dans l'espace**

- ☐ Utiliser les coordonnées sur un pavé droit — **Exercice n° 69**

Chapitre I

Les exercices et leurs corrections

Exercice n° 1 : Division euclidienne — **Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique**

1.a. Effectuer la division euclidienne de 3451 par 51. Écrire l'égalité euclidienne.
1.b. Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 3451 par 67.
2.a. Effectuer le division euclidienne de 3481 par 67. Écrire l'égalité euclidiene.
2.b. Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 3481 par 51.
3. Quand on divise ce nombre par 37, le quotient est 43 et le reste est 12. Quel est ce nombre ?
4. Quand on divise ce nombre par 17, il reste 8. Quand on divise ce nombre par 13, il reste 6.
Déterminer le plus petit nombre entier qui correspond à ces deux affirmations.

Exercice n° 1 — Correction

*Il faut utiliser la touche **Division euclidienne** de la calculatrice.*

1.a. À la calculatrice on trouve 67 pour le quotient et 34 pour le reste.

L'égalité euclidienne de la division de 3441 par 51 est $3451 = 51 \times 67 + 34$

1.b. Comme $3451 = 51 \times 67 + 34$ et que $34 < 67$ on en déduit que :

Dans la division euclidienne de 3451 par 67, le quotient est 51 et le reste est 34.

2.a. À la calculatrice on trouve 51 pour le quotient et 64 pour le reste.

L'égalité euclidienne de la division de 3481 par 67 est $3481 = 67 \times 51 + 64$

2.b. *Attention, le reste doit être inférieur strictement au diviseur !*

L'égalité $3481 = 67 \times 51 + 64$, comme $64 > 51$, n'est pas l'égalité euclidienne de la division de 3481 par 51 !
À la calculatrice on trouve 68 pour le quotient et 13 pour le reste et on a : $3481 = 51 \times 68 + 13$.

Dans la division euclidienne de 3481 par 51, le quotient est 68 et le reste est 13.

3. Il suffit d'utiliser l'égalité euclidienne !
$37 \times 43 + 12 = 1603$

Le nombre cherché est 1603

4. Nous allons chercher de manière exhaustive les solutions possibles à ce problème.
Ce nombre entier doit s'écrire sous la forme $17 \times X + 8$ et sous la forme $13 \times Y + 6$. Ce sont les deux égalités euclidiennes qui correspondent aux indices.

Multiples de 17	On ajoute 8	Multiples de 13	On ajoute 6
17	$17 + 8 = 23$	13	$13 + 6 = 18$
34	$34 + 8 = 42$	26	$26 + 6 = 32$
51	$51 + 8 = 59$	39	$39 + 6 = 45$
68	$68 + 8 = 76$	52	$52 + 6 = 58$
85	$85 + 8 = 93$	65	$65 + 6 = 71$
102	$102 + 8 = 110$	78	$78 + 6 = 84$
119	$119 + 8 = 127$	91	$91 + 6 = 97$
136	$136 + 8 = 144$	104	$104 + 6 = 110$
153	$153 + 8 = 161$	117	$117 + 6 = 123$
170	$170 + 8 = 178$	130	$130 + 6 = 136$

Le nombre cherché est 110

Exercice n° 2 : **Diviseurs et multiples** — **Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique**

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 60 min.
Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 45 min.
Le bus n° 67 met 54 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt ?

Exercice n° 2 — Correction

Nous allons chercher les multiples communs des nombres cherchés.

Observons les multiples des nombres proposés :

Multiples de 60 : 60 — 120 — 180 — 240 — 300 — 360 — 420 — 480 — 540 — 600
Multiples de 45 : 45 — 90 — 135 — 180 — 225 — 270 — 315 — 360 — 405 — 450 — 505 — 540 — 585
Multiples de 54 : 54 — 108 — 162 — 216 — 270 — 324 — 378 — 432 — 486 — 540

540 est le plus petit multiple commun des nombres 60, 45 et 54.

Les trois bus se retrouveront dans 540 $min = 9 \times 60\ min = 9\ h$.

$\boxed{\text{Les bus se retrouveront à 17 h.}}$

On peut utiliser un méthode plus experte qui consiste à décomposer les trois nombres en produit de facteurs premiers.
On sait que : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, *que* $45 = 3 \times 3 \times 5$ *et que* $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$.

Le plus petit multiple commun de ces trois nombres est donc $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 540$.
Nous avons choisi de multiplier les nombres premiers 2, 3 *et* 5 *en prenant le nombre de facteurs maximal par décomposition.*

Exercice n° 3 : Décomposition en produit de facteurs premiers — **Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique**

1. Décomposer les nombres 6 120 et 5 712 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire la liste des diviseurs communs à ces deux nombres entiers.
3. Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.
4. Simplifier la fraction $\dfrac{5712}{6120}$.
5. Un confiseur vient de recevoir 6120 dragées à la violette et 5712 galets de la Garonne. Il souhaite répartir tous les bonbons en sachets comprenant la même répartition de bonbons de deux sortes.
Quel est le nombre maximal de sachets qu'il peut composer et quelle est la répartition de chaque sachet ?

Exercice n° 3 — Correction

1.

$$\begin{array}{r|r} 6\,120 & 2 \\ 3\,060 & 2 \\ 1\,530 & 2 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 5\,712 & 2 \\ 2\,856 & 2 \\ 1\,428 & 2 \\ 714 & 2 \\ 357 & 3 \\ 119 & 7 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{6\,120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17}$ $\boxed{5\,712 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 17}$

$\boxed{6\,120 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17}$ $\boxed{5\,712 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 17}$

2. *Il faut faire toutes les combinaisons des facteurs premiers.*

Diviseurs de 6 120 : 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 8 — 9 — 10 — 12 — 15 — 17 — 18 — 20 — 24 — 30 — 34 — 36 — 40 — 45 — 51 — 60 — 68 — 72 — 85 — 90 — 102 — 120 — 136 — 153 — 170 — 180 —204 — 255 — 306 — 360 — 340 — 408 — 510 — 612 — 680 — 765 — 1 020 — 1 224 — 1 530 — 2 040 — 3 060 — 6 120

Diviseurs de 5 712 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 7 — 8 — 12 — 14 — 16 — 17 — 21 — 24 — 28 — 34 — 42 — 48 — 51 — 56 — 68 — 84 — 102 — 112 — 119 — 136 — 168 — 204 — 238 — 272 — 336 — 357 — 408 — 476 — 714 — 816 —952 — 1 428 — 1 904 — 2 856 — 5 712

On peut calculer à l'avance le nombre de diviseurs d'un nombre en observant la décomposition en facteurs premiers.
Par exemple pour 6 120 *le nombre premier* 2 *apparaît trois fois, le nombre* 3 *deux fois, le nombre* 5 *une fois et le nombre* 17 *une fois.*
Un diviseur est une combinaison multiplicative de ces nombres.
On peut donc choisir de prendre 2*, zéro fois, une fois, deux fois ou trois fois, soit quatre possibilités. Le* 3 *peut être choisi zéro fois, une fois ou deux fois soit trois possibilités. Le* 5 *zéro fois ou une fois comme pour le* 17.
Il y a donc $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ *manières de les combiner.*

De même pour 5 712*, il y a cinq possibilités pour le* 2*, deux pour le* 3*, deux pour le* 7 *et deux pour le* 17 *soit* $5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$ *manière de les combiner.*

Ce résultat n'est pas au programme du brevet !

3. $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun est } 408}$

La méthode la plus rapide pour obtenir ce nombre est l'algorithme d'Euclide, mais il n'est pas au programme du brevet.
On aurait en effet par division euclidienne successive :

$$6\,120 = 5\,712 \times 1 + 408$$

$$5\,712 = 408 \times 14 + 0$$

Et on obtient ainsi le plus grand diviseur commun.

4. $\boxed{\dfrac{5712}{6120} = \dfrac{408 \times 14}{408 \times 15} = \dfrac{14}{15}}$

5. Cela revient à utiliser le plus grand diviseur commun au deux nombres : 408.
Comme $6\,120 = 408 \times 15$ et que $5\,712 = 408 \times 14$ on en déduit que :

$\boxed{\text{Il y aura 408 sachets contenant 15 dragées à la violette et 14 galets de la Garonne chacun.}}$

Exercice n° 4 : Fractions irréductibles — Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique

Simplifier au maximum les trois fractions suivantes : $\dfrac{6\,525}{10\,440}$; $\dfrac{11\,515}{6\,909}$; $\dfrac{3\,186}{7\,965}$

Calculer et simplifier la somme suivante : $Z = \dfrac{6\,525}{10\,440} + \dfrac{11\,515}{6\,909} + \dfrac{3\,186}{7\,965}$

Exercice n° 4 — Correction

$$\begin{array}{r|l} 6\,525 & 3 \\ 2\,175 & 3 \\ 725 & 5 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10\,440 & 2 \\ 5\,220 & 2 \\ 2\,610 & 2 \\ 1\,305 & 3 \\ 435 & 3 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11\,515 & 5 \\ 2\,303 & 7 \\ 329 & 7 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{6\,525 = 3\times 3\times 5\times 5\times 29}$ $\boxed{10\,440 = 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5\times 29}$ $\boxed{11\,515 = 5\times 7\times 7\times 47}$

$$\begin{array}{r|l} 6\,909 & 3 \\ 2\,303 & 7 \\ 329 & 7 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3\,186 & 2 \\ 1\,593 & 3 \\ 531 & 3 \\ 177 & 3 \\ 59 & 59 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7\,965 & 3 \\ 2\,655 & 3 \\ 885 & 3 \\ 295 & 5 \\ 59 & 59 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{6\,909 = 3\times 7\times 7\times 47}$ $\boxed{3\,186 = 2\times 3\times 3\times 3\times 59}$ $\boxed{7\,965 = 3\times 3\times 3\times 5\times 59}$

Ainsi :

$$\frac{6\,525}{10\,440} = \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 29}{2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5\times 29} = \frac{5}{2\times 2\times 2} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{11\,515}{6\,909} = \frac{5\times 7\times 7\times 47}{3\times 7\times 7\times 47} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{3\,186}{7\,965} = \frac{2\times 3\times 3\times 3\times 59}{3\times 3\times 3\times 5\times 59} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{6\,525}{10\,440} + \frac{11\,515}{6\,909} + \frac{3\,186}{7\,965} = \frac{5}{8} + \frac{5}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5\times 15}{8\times 15} + \frac{5\times 40}{3\times 40} + \frac{2\times 24}{5\times 24} = \frac{75}{120} + \frac{200}{120} + \frac{48}{120} = \frac{75+200+48}{120} = \frac{323}{120}$$

EXERCICE N° 5 : Raisonner avec des nombres entiers **CALCUL NUMÉRIQUE - NOMBRES ENTIERS, ARITHMÉTIQUE**

Indiquez si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

— **Affirmation n° 1 :** La somme de deux nombres entiers pairs est paire.
— **Affirmation n° 2 :** La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.
— **Affirmation n° 3 :** La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.
— **Affirmation n° 4 :** Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.
— **Affirmation n° 5 :** Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.
— **Affirmation n° 6 :** Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.
— **Affirmation n° 7 :** Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.
— **Affirmation n° 8 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
— **Affirmation n° 9 :** Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.
— **Affirmation n° 10 :** Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

EXERCICE N° 5 **CORRECTION**

Pour démontrer qu'une affirmation est vraie, il faut prouver qu'elle est vraie pour tous les nombres ! Il faut donc faire un raisonnement à partir d'une nombre générique souvent modélisé par une lettre.
Pour démontrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple !

— **Affirmation n° 1 :** La somme de deux nombres entiers pairs est paire.

On remarque que $2+8=10$, $34+100=134$... Cette affirmation semble vraie.

Un nombre pair est un multiple de 2, il peut s'écrire $2\times n$ où n est un nombre entier.
Par exemple $34=2\times 17$, $100=2\times 50$.

Choisissons deux nombres entiers pairs génériques : $2\times n$ et $2\times k$ où n et k sont des entiers.
La somme $2\times n+2\times k=2\times(n+k)$.
Cela signifie que $2\times n+2\times k$ est le double de $n+k$. Ce nombre est pair.

Par exemple, $34=2\times 17$ et $100=2\times 50$.
Ainsi $34+100=2\times 17+2\times 50=2\times(17+50)=2\times 67$

Affirmation n° 1 : Vraie

— **Affirmation n° 2 :** La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.

Comme $3+5=8$, 3 est impair, 5 est impair, la somme est paire.

Resultat**Affirmation n° 2 :** Fausse

— **Affirmation n° 3 :** La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.

$3+8=11$, $12+9=21$: cela semble vrai !

On a vu qu'un nombre pair pouvait s'écrire sous la forme $2\times n$ où n est un nombre entier.
Un nombre impair est un nombre dont le reste dans la division par 2 vaut 1. Un nombre impair peut donc toujours s'écrire sous la forme $2\times k+1$ avec n entier. Cela signifie aussi qu'un nombre impair est le successeur d'un nombre pair.
Ainsi :
$2\times n+2\times k+1=2\times(n+k)+1$, comme $n+k$ est un nombre entier, $2\times(n+k)+1$ est impair.

Sur un exemple générique :
$12=2\times 6$ et $9=2\times 4+1$. Ainsi $12+9=2\times 6+2\times 4+1=2\times(6+4)+1=2\times 10+1$.

Affirmation n° 3 : Vraie

— **Affirmation n° 4 :** Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.

Voici les premiers multiples de 7 : 7 — 14 — 21 ...
7 est un multiple de 7 car $7 = 7 \times 1$ et 7 est premier.

Affirmation n° 4 : Fausse

— **Affirmation n° 5 :** Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.

Voici quelques multiples de 10 : 10 — 20 — 30 ...
Comme $10 = 2 \times 5$, un multiple de 10 peut s'écrire $10 \times n = 2 \times 5 \times n$ où n est un nombre entier.

On constate ainsi qu'un multiple de 10 est divisible par 2 et par 5. Il ne peut donc pas être premier !

Affirmation n° 5 : Vraie

— **Affirmation n° 6 :** Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.

Un multiple de 18 peut s'écrire sous la forme $18 \times n = 3 \times 6 \times n$ où n est un nombre entier.

Par exemple $90 = 18 \times 5 = 3 \times 6 \times 5 = 3 \times 30 = 6 \times 15$.

Affirmation n° 6 : Vraie

— **Affirmation n° 7 :** Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.

$6 = 2 \times 3 = 6 \times 1$, $12 = 3 \times 4 = 6 \times 2$. 6 et 12 sont divisibles par 3 et par 6 mais pas par 18.

Affirmation n° 7 : Fausse

— **Affirmation n° 8 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

$5+6+7 = 18 = 3 \times 6$, $27+28+29 = 84 = 3 \times 28$, $301+302+303 = 906 = 3 \times 202$: cela semble vrai.

Notons n le premier nombre entier. Le deuxième est égal à $n+1$ et le troisième à $n+1+1 = n+2$.

Quand on les ajoute on obtient : $n+n+1+n+2 = 3n+3$.
Or $3n+3 = 3(n+1)$, il s'agit d'un multiple de 3.

Sur un exemple générique : $301+302+303 = 300+300+1+300+2 = 3 \times 300+3$.

Affirmation n° 8 : Vraie

— **Affirmation n° 9 :** Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.

$6^2 = 36$, $10^2 = 100$, $12^2 = 144$: cela semble vrai.

Un nombre entier pair est un multiple de 2, il peut s'écrire sous la forme $2n$ où n est un nombre entier.

$(2n)^2 = 4n^2$. Et $4n^2 = 2 \times 2n^2$, il s'agit donc d'un multiple de 2.

Sur un exemple générique : $12^2 = (2 \times 6)^2 = 4 \times 36 = 2 \times 2 \times 36$.

Affirmation n° 9 : Vraie

— **Affirmation n° 10 :** Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

$5^2 = 25$, $11^2 = 121$, $13^2 = 139$: cela semble vrai.

Un nombre entier impari est un successeur d'un nombre pair, il peut s'écrire $2n+1$ avec n un nombre entier.

$(2n+1)^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.
On peut donc écrire ce carré sous la forme $2k+1$ avec $k = 2n^2 + 2n$ un nombre entier. Ce carré est donc impair.

Sur un exemple générique : $13^2 = (12+1)^2 = (12+1)(12+1) = 12^2 + 12 + 12 + 1 = 12^2 + 2 \times 12 + 1$

Affirmation n° 10 : Vraie

EXERCICE N° 6 : Unités simples usuelles — CALCUL NUMÉRIQUE - NOMBRES DÉCIMAUX

1. Un camion rigide à quatre essieux peut transporter 32 t de marchandise dans un volume maximal de 60 m^3.
On souhaite le remplir avec des cartons en forme de pavé droit mesurant 80 cm de long, 50 cm de large et 45 cm de haut.
Chaque carton peut contenir 75 boites de conserve pesant chacune 786 g.

Combien de boites de conserve ce camion peut-il transporter en une seule fois ?

2. Une fourmi pèse environ 2 mg et mesure 5 mm de long. Une fourmilière géante au Japon a été découverte, elle hébergeait 307 000 000 de fourmis.
Quelle est la masse totale des fourmis de cette fourmilière ?
Quelle est la longueur totale obtenue en mettant toutes ces fourmis sur une même ligne, les unes derrière les autres ?

3. Un flacon de sérum vaccinal contient 5 mL et permet de d'obtenir 12 doses. Pour vacciner 67 millions de français il faut deux doses : une première injection puis un rappel.
Quel est le volume total en mètre cube de sérum vaccinal nécessaire à la vaccination de tous les français ?

EXERCICE N° 6 — **CORRECTION**

1. Calculons le volume d'un carton.

80 cm × 50 cm × 45 cm = 180 000 cm^3.
On sait que 1 m^3 = 1 000 dm^3 = 1 000 000 cm^3 donc un carton a un volume de $\dfrac{180\,000}{1\,000\,000}\ m^3 = 0{,}18\,\text{m}^3$.

Le camion peut transporter 60 m^3 soit $\dfrac{60}{0,18} \approx 333$ cartons.

Calculons la masse d'un carton.

75 × 786 g = 58 950 g, or 1 kg = 1 000 g donc un carton a une masse de 58,95 kg.

Le camion peut transporter 32 t = 32 000 kg. $\dfrac{32\,000\,\text{kg}}{58{,}95\,\text{kg}} \approx 542$.

Le camion peut donc bien transporter 333 cartons.
333 × 75 = 24 975.

$\boxed{\text{Ce camion pourra transporter 24 975 boites de conserve.}}$

2. Calculons la masse totale des fourmis.
2 mg × 307 000 000 = 614 000 000 mg. On sait que 1 g = 1 000 mg et que 1 kg = 1 000 g
Donc la masse des foummis est 614 000 000 mg = 614 000 g = 614 kg.

$\boxed{\text{La masse totale des fourmis est 614 kg.}}$

La longueur de la file de fourmis.
5 mm × 307 000 000 = 1 535 000 000 mm. On sait que 1 km = 1 000 m = 1 000 000 mm.
La longueur de la file de fourmis est 1 535 000 000 mm = 1 535 000 m = 1 535 km.

$\boxed{\text{La longueur de la file de fourmis mesure 1 535 km.}}$

3. Pour vacciner 67 millions de français il faut 2 × 67 000 000 = 134 000 000 de doses.
Le nombre de flacon : $\dfrac{134000000}{12} \approx 11\,166\,667$.
Volume de vaccin : 5 mL × 11 166 667 = 55 833 335 mL.
On sait que 1 m^3 = 1 000 L = 1 000 000 mL.
Le volume de vaccin : 55 833 335 mL ≈ 55 833 L ≈ 55,8 m^3

$\boxed{\text{Le volume de vaccin est d'environ 56 m}^3.}$

Exercice n° 7 : Somme algébrique

On pose $A = (x - y + z) - (-z + y - x)$

1. Calculer A pour $x = -1$, $y = -3$ et $z = 2$

2. Calculer A pour $x = -5$, $y = 3$ et $z = -5$

Exercice n° 7

Correction

On pose $A = (x - y + z) - (-z + y - x)$

1. Calculer A pour $x = -1$, $y = -3$ et $z = 2$

$A = (-1 - (-3) + 2) - (-2 + (-3) - (-1))$
$A = (-1 + 3 + 2) - (-2 - 3 + 1)$
$A = 4 - (-4)$
$A = 4 + 4$

$\boxed{A = 8}$

2. Calculer A pour $x = -5$, $y = 3$ et $z = -5$

$A = (-5 - 3 + (-5)) - (-(-5) + 3 - (-5))$
$A = (-5 - 3 - 5) - (5 + 3 + 5)$
$A = -13 - (13)$
$A = -13 - 13$

$\boxed{A = -26}$

EXERCICE N° 8 : Priorités opératoires — **CALCUL NUMÉRIQUE - NOMBRES RELATIFS**

Calculer :

$A = 5 - 6 \times 3 + (-5) \times 2$ $\qquad$ $B = -3 \times 6 - 6 \times (-4) - (-4) \times 2$ $\qquad$ $C = (1 - 2 \times 3)(-1 - 3 \times (-4))$

EXERCICE N° 8 — CORRECTION

Calculer :

$A = 5 - 6 \times 3 + (-5) \times 2$
$A = 5 - 18 - 10$
$A = 5 - 28$

$\boxed{A = -23}$

$B = -3 \times 6 - 6 \times (-4) - (-4) \times 2$
$B = -18 + 24 - (-8)$
$B = -18 + 24 + 8$

$\boxed{B = 14}$

$C = (1 - 2 \times 3)(-1 - 3 \times (-4))$
$C = (1 - 6) - (-1 + 12)$
$C = -5 - 11$

$\boxed{C = -16.}$

Exercice n° 9 : Calculer une somme algébrique de fractions — Calcul numérique - Fractions

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{9}$

$B = \dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{5}$

$C = 5 - \dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{3}$

$D = \left(1 - \dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{7} + 3\right) + \left(-3 - \dfrac{5}{3}\right)$

$E = \dfrac{5}{12} - \dfrac{7}{15}$

$F = 7 - \dfrac{3}{28} + \dfrac{9}{42}$

Exercice n° 9 — Correction

Pour ajouter ou soustraire des fractions il faut les écrire avec le même dénominateur.
En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre, on obtient une fraction qui lui est égale.
Un nombre entier peut s'écrire comme une fraction en prenant comme dénominateur une unité.

$A = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{9}$

$A = \dfrac{1 \times 3}{3 \times 3} - \dfrac{4}{9}$

$A = \dfrac{3}{9} - \dfrac{4}{9}$

$A = \dfrac{3-4}{9}$

$\boxed{A = -\dfrac{4}{9}}$

$B = \dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{5}$

$B = \dfrac{5 \times 5}{4 \times 5} + \dfrac{7 \times 4}{5 \times 4}$

$B = \dfrac{25}{20} + \dfrac{28}{20}$

$B = \dfrac{25+28}{20}$

$\boxed{B = \dfrac{53}{20}}$

$C = 5 - \dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{3}$

$C = \dfrac{5}{1} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{3}$

$C = \dfrac{5 \times 15}{5 \times 15} - \dfrac{3 \times 3}{5 \times 3} + \dfrac{7 \times 5}{3 \times 5}$

$C = \dfrac{75}{15} - \dfrac{9}{15} + \dfrac{35}{15}$

$C = \dfrac{75 - 9 + 35}{15}$

$\boxed{C = \dfrac{101}{15}}$

$D = \left(1 - \dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{7} + 3\right) + \left(-3 - \dfrac{5}{3}\right)$

$D = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{1}\right) + \left(-\dfrac{3}{1} - \dfrac{5}{3}\right)$

$D = \left(\dfrac{1 \times 2}{1 \times 2} - \dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{3 \times 7}{1 \times 7}\right) + \left(-\dfrac{3 \times 3}{1 \times 3} - \dfrac{5}{3}\right)$

$D = \left(\dfrac{2}{2} - \dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{21}{7}\right) + \left(-\dfrac{9}{3} - \dfrac{5}{3}\right)$

$D = \dfrac{2-3}{2} - \dfrac{3+21}{7} + \dfrac{-9-5}{3}$

$D = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{24}{7} + \dfrac{-14}{3}$

$D = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{24}{7} - \dfrac{14}{3}$

$D = -\dfrac{1 \times 21}{2 \times 21} - \dfrac{24 \times 6}{7 \times 6} - \dfrac{14 \times 14}{3 \times 14}$

$D = -\dfrac{21}{42} - \dfrac{144}{42} - \dfrac{196}{42}$

$D = \dfrac{-21 - 144 - 196}{42}$

$D = \dfrac{-365}{42}$

$\boxed{D = -\dfrac{365}{42}}$

$E = \dfrac{5}{12} - \dfrac{7}{15}$

$60 = 12 \times 5 \ et\ 60 = 15 \times 4$

$E = \dfrac{5 \times 5}{12 \times 5} - \dfrac{7 \times 4}{15 \times 4}$

$E = \dfrac{25}{60} - \dfrac{28}{60}$

$$E = \frac{25-28}{60}$$

$$E = \frac{-3}{60}$$

$$E = \frac{-1 \times 3}{20 \times 3}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{20}}$$

$$F = 7 - \frac{3}{28} + \frac{9}{42}$$

$$F = \frac{7}{1} - \frac{3}{28} + \frac{9}{42}$$

$84 = 28 \times 3$ *et* $84 = 42 \times 2$

$$F = \frac{7 \times 84}{1 \times 84} - \frac{3 \times 3}{28 \times 3} + \frac{9 \times 2}{42 \times 2}$$

$$F = \frac{588}{84} - \frac{9}{84} + \frac{18}{84}$$

$$F = \frac{588-9+18}{84}$$

$$\boxed{F = \frac{597}{84}}$$

Exercice n° 10 : **Calculer un produit de fractions** — **Calcul numérique - Fractions**

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{5}$

$B = \dfrac{-5}{7} \times \dfrac{21}{-25}$

$C = \dfrac{81}{56} \times \dfrac{64}{63}$

$D = \dfrac{12}{-35} \times \dfrac{-21}{36} \times \dfrac{25}{-16}$

Exercice n° 10 — Correction

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

Pour multiplier des fractions entre elles, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Il est recommandé de simplifier le produit avant de l'effectuer.

$A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{5}$

$A = \dfrac{2 \times 7}{3 \times 5}$

$\boxed{A = \dfrac{14}{15}}$

$B = \dfrac{-5}{7} \times \dfrac{21}{-25}$

$B = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{21}{25}$

$B = \dfrac{5 \times 21}{7 \times 25}$

$B = \dfrac{5 \times 3 \times 7}{7 \times 5 \times 5}$

$\boxed{B = \dfrac{3}{5}}$

$C = \dfrac{81}{56} \times \dfrac{64}{63}$

$C = \dfrac{81 \times 64}{56 \times 63}$

$C = \dfrac{9 \times 9 \times 8 \times 8}{8 \times 7 \times 7 \times 9}$

$C = \dfrac{9 \times 8}{7 \times 7}$

$\boxed{C = \dfrac{72}{49}}$

$D = \dfrac{12}{-35} \times \dfrac{-21}{36} \times \dfrac{25}{-16}$

On commence par déterminer le signe du résultat.

$D = -\dfrac{12}{35} \times \dfrac{21}{36} \times \dfrac{25}{16}$

$D = -\dfrac{12 \times 21 \times 25}{35 \times 36 \times 16}$

$D = -\dfrac{6 \times 2 \times 3 \times 7 \times 5 \times 5}{7 \times 5 \times 6 \times 6 \times 2 \times 8}$

$D = -\dfrac{3 \times 5}{6 \times 8}$

$\boxed{D = -\dfrac{15}{48}}$

Exercice n° II : **Calculer un quotient de fractions** — **Calcul numérique - Fractions**

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{3}{5} \div \dfrac{7}{4}$ $\qquad$ $B = 5 \div \dfrac{3}{7}$ $\qquad$ $C = \dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}}$ $\qquad$ $D = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} \div \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$

Exercice n° II — Correction

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

Pour diviser par un nombre on multiplie par son inverse.

L'inverse d'un nombre non nul est l'unique nombre avec lequel le produit vaut une unité.

L'inverse d'une fraction $\dfrac{a}{b}$ *est la fraction* $\dfrac{b}{a}$.

$A = \dfrac{3}{5} \div \dfrac{7}{4}$

$A = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{7}$

$A = \dfrac{3 \times 4}{5 \times 7}$

$\boxed{A = \dfrac{12}{35}}$

$B = 5 \div \dfrac{3}{7}$

$B = 5 \times \dfrac{7}{3}$

$B = \dfrac{5}{1} \times \dfrac{7}{3}$

$B = \dfrac{5 \times 7}{1 \times 3}$

$\boxed{B = \dfrac{35}{3}}$

$C = \dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}}$

$C = \dfrac{8}{9} \div \dfrac{16}{27}$

$C = \dfrac{8}{9} \times \dfrac{27}{16}$

$C = \dfrac{8 \times 27}{9 \times 16}$

$C = \dfrac{8 \times 9 \times 3}{9 \times 8 \times 2}$

$\boxed{C = \dfrac{3}{2}}$

$D = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} \div \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$

$D = \left(\dfrac{1}{3} \div \dfrac{2}{5}\right) \div \left(\dfrac{3}{2} \div \dfrac{4}{3}\right)$

$D = \left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2}\right) \div \left(\dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{4}\right)$

$D = \dfrac{1 \times 5}{3 \times 2} \div \dfrac{3 \times 3}{2 \times 4}$

$D = \dfrac{5}{6} \div \dfrac{9}{8}$

$D = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{8}{9}$

$D = \dfrac{5 \times 8}{6 \times 9}$

$D = \dfrac{5 \times 2 \times 4}{2 \times 3 \times 9}$

$D = \dfrac{5 \times 4}{3 \times 9}$

$\boxed{D = \dfrac{20}{27}}$

Exercice n° 12 : Utiliser les priorités opératoires avec les fractions

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

$B = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \times 5$

$C = \left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(3 + \frac{3}{4}\right)$

$D = \dfrac{2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{2}}$

Exercice n° 12

Correction

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

$A = \frac{2}{3} - \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$

$A = \frac{2}{3} - \frac{8}{15}$

$A = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} - \frac{8}{15}$

$A = \frac{10}{15} - \frac{8}{15}$

$\boxed{A = \frac{2}{15}}$

$B = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \times 5$

$B = 1 - \frac{15}{8} - \frac{25}{2}$

$B = \frac{8}{8} - \frac{15}{8} - \frac{25 \times 4}{2 \times 4}$

$B = \frac{8}{8} - \frac{15}{8} - \frac{100}{8}$

$\boxed{B = -\frac{107}{8}}$

$C = \left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(3 + \frac{3}{4}\right)$

$C = \left(\frac{1}{1} - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{1} + \frac{3}{4}\right)$

$C = \left(\frac{5}{5} - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{4} + \frac{3}{4}\right)$

$C = \frac{2}{5} \times \frac{15}{4}$

$C = \frac{2 \times 15}{5 \times 4}$

$C = \frac{2 \times 3 \times 5}{5 \times 2 \times 2}$

$\boxed{C = \frac{3}{2}}$

$D = \dfrac{2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{2}}$

$D = \left(2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) \div \left(1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{2}\right)$

$D = \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) \div \left(1 - \frac{25}{12}\right)$

$D = \left(\frac{24}{12} - \frac{4}{12} + \frac{9}{12}\right) \div \left(\frac{12}{12} - \frac{25}{12}\right)$

$D = \frac{29}{12} \div -\frac{13}{12}$

$D = -\frac{29}{12} \times \frac{12}{13}$

$D = -\frac{29 \times 12}{12 \times 13}$

$\boxed{D = -\frac{29}{13}}$

Exercice n° 13 : Calculer avec les puissances de 10

1. Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$A = 0{,}000\,001$

$B = 10\,000\,000\,000$

$C = 1\,000\,000 \times 0{,}000\,01$

$D = \dfrac{0{,}000\,000\,000\,1}{10\,000\,000}$

$E = \dfrac{10\,000 \times 0{,}000\,000\,1}{0{,}000\,01 \times 0{,}000\,01}$

2. Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 puis sous forme décimale :

$F = 10^5 \times 10^7 \times 10^{-12}$

$G = 10^{-3} \times 10^0 \times 10^{-8}$

$H = \left(10^{-9}\right)^3 \times \left(10^3\right)^9$

$I = \dfrac{1\,000 \times 10^{-5}}{10^{-3} \times 10^2}$

$J = \dfrac{10^{-5} \times 10^{-3} \times 10^{11}}{0{,}000\,01 \times 10^7}$

Exercice n° 13 — Correction

1. Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$A = 0{,}000\,001$

$\boxed{A = 10^{-6}}$

$B = 10\,000\,000\,000$

$\boxed{B = 10^{10}}$

$C = 1\,000\,000 \times 0{,}000\,01$

$C = 10^6 \times 10^{-5}$

$C = 10^{6+(-5)}$

$\boxed{C = 10^1}$

$D = \dfrac{0{,}000\,000\,000\,1}{10\,000\,000}$

$D = \dfrac{10^{-10}}{10^7}$

$D = 10^{-10-7}$

$\boxed{D = 10^{-17}}$

$E = \dfrac{10\,000 \times 0{,}000\,000\,1}{0{,}000\,01 \times 0{,}000\,01}$

$E = \dfrac{10^4 \times 10^{-7}}{10^{-5} \times 10^{-5}}$

$E = \dfrac{10^{4+(-7)}}{10^{-5+(-5)}}$

$E = \dfrac{10^{-3}}{10^{-10}}$

$E = 10^{-3-(-10)}$

$E = 10^{-3+10}$

$\boxed{E = 10^7}$

2. Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 puis sous forme décimale :

$F = 10^5 \times 10^7 \times 10^{-12}$
$F = 10^{5+7+(-12)}$

$\boxed{F = 10^0 = 1}$

$G = 10^{-3} \times 10^0 \times 10^{-8}$

$G = 10^{-3+0+(-8)}$

$\boxed{G = 10^{-11} = 0{,}000\,000\,000\,01}$

$H = \left(10^{-9}\right)^3 \times \left(10^3\right)^9$

$H = 10^{(-9)\times 3} \times 10^{3\times 9}$

$H = 10^{-27} \times 10^{27}$

$H = 10^{-27+27}$

$\boxed{H = 10^{0} = 1}$

$$I = \frac{1\,000 \times 10^{-5}}{10^{-3} \times 10^{2}}$$

$$I = \frac{10^{3} \times 10^{-5}}{10^{-3+2}}$$

$$I = \frac{10^{3+(-5)}}{10^{-1}}$$

$$I = \frac{10^{-2)}}{10^{-1}}$$

$$I = 10^{-2-(-1)}$$

$$I = 10^{-2+1}$$

$$\boxed{I = 10^{-1} = 0,1}$$

$$J = \frac{10^{-5} \times 10^{-3} \times 10^{11}}{0,000\,01 \times 10^{7}}$$

$$J = \frac{10^{-5+(-3)+11}}{10^{-5} \times 10^{7}}$$

$$J = \frac{10^{3}}{10^{-5+7}}$$

$$J = \frac{10^{3}}{10^{2}}$$

$$J = 10^{3-2}$$

$$\boxed{J = 10^{1} = 10}$$

Exercice n° 14 : **Déterminer l'écriture scientifique d'un nombre décimal** — Calcul numérique - Puissances

1. Écrire les nombres décimaux sous forme scientifique

$A = 2\,021$

$B = 0{,}000\,7$

$C = 3{,}141\,59$

$D = 123\,000\,000$

$E = 0{,}000\,000\,176\,5$

$F = 250\,000 \times 0{,}000\,002$

2. Écrire les nombres suivants sous forme décimale

$G = 3,78 \times 10^{9}$

$H = 6,32 \times 10^{-7}$

$I = 7,345 \times 10^{0}$

$J = 1,125 \times 10^{8} \times 1,6 \times 10^{-11}$

Exercice n° 14 — **Correction**

1. Écrire les nombres décimaux sous forme scientifique

$A = 2\,021$

$\boxed{A = 2,021 \times 10^{3}}$

$B = 0{,}000\,7$

$\boxed{B = 7 \times 10^{-4}}$

$C = 3{,}141\,59$

$\boxed{C = 3,14159 \times 10^{0}}$

$D = 123\,000\,000$

$\boxed{D = 1,23 \times 10^{8}}$

$E = 0{,}000\,000\,176\,5$

$\boxed{E = 1,765 \times 10^{-7}}$

$F = 250\,000 \times 0{,}000\,002$

$F = 2,5 \times 10^{5} \times 2 \times 10^{-6}$

$F = 2,5 \times 2 \times 10^{5+(-6)}$

$\boxed{F = 5 \times 10^{-1}}$

2. Écrire les nombres suivants sous forme décimale

$G = 3,78 \times 10^{9}$

$\boxed{G = 3\,780\,000\,000}$

$H = 6,32 \times 10^{-7}$

$\boxed{H = 0{,}000\,000\,632}$

$I = 7,345 \times 10^{0}$

$\boxed{I = 7{,}345}$

$J = 1,125 \times 10^{8} \times 1,6 \times 10^{-11}$

$J = 1,125 \times 1,6 \times 10^{8+(-11)}$

$J = 1{,}8 \times 10^{-3}$

$\boxed{J = 0{,}001\,8}$

Exercice n° 15 : Utiliser les préfixes usuels — Calcul numérique - Puissances

1. Un fichier audio au format MP3 à une taille de 15 Mo.
Combien de fichier de cette taille peut-on copier sur un disque dur de 2 To ?

2. La société Drapper Fisher Jurveston a réalisé une voiture nanométrique qui fonctionne vraiment et qui mesure 13 nm de long. On estime qu'il y aurait environ 1,4 milliards de véhicules à moteur sur Terre.
Quelle serait la taille d'une file indienne composé de tous ces véhicules si chacun de ces véhicules avait une taille nanomètrique.

3. En 2018 la consommation mondiale d'électricité était d'environ 24 739 TWh. Une centrale nucléaire produit annuellement environ 6 000 000 MWh.
Combien faut-il de centrales nucléaires pour subvenir à la consommation mondiale d'électricité ?
En 2019 on estime qu'il y avait 450 réacteurs nucléaires civils. Quel pourcentage de la demande mondiale d'électricité est produite par ces réacteurs ?

Exercice n° 15 — Correction

1. On sait que 1 To = 1 000 Go = 1 000 000 Mo.
Ainsi 2 To = 2 000 000 Mo.

$\dfrac{2\,\text{To}}{15\,\text{Mo}} = \dfrac{2\,000\,000\,\text{Mo}}{15\,\text{Mo}} \approx 133\,333.$ $\boxed{\text{On peut copier 133 333 fichiers sur ce disque dur.}}$

On pouvait aussi dire que 1 Mo = 0,001 Go = 0,000 001 To

$\dfrac{2\,\text{To}}{15\,\text{Mo}} = \dfrac{2\,\text{To}}{0{,}000\,015\,\text{To}} \approx 133\,333.$

2. $1\,400\,000\,000 \times 13\,\text{nm} = 18\,200\,000\,000\,\text{nm}$
On sait que $1\,\text{m} = 1\,000\,\text{mm} = 1\,000\,000\,\mu\text{m} = 1\,000\,000\,000\,\text{nm}$

$\dfrac{18\,200\,000\,000\,\text{nm}}{1\,000\,000\,000} = 18{,}2\,\text{m}.$ $\boxed{\text{Cette file indienne mesurerait 18,2 m.}}$

3. $\dfrac{24\,739\,\text{TWh}}{6\,000\,000\,\text{MWh}} = \dfrac{24\,739\,\text{TWh}}{6\,000\,\text{GWh}} = \dfrac{24\,739\,\text{TWh}}{6\,\text{TWh}} \approx 4\,123$

$\boxed{\text{Il faudrait 4 123 centrales nucléaires pour subvenir aux besoins mondiaux en électricité.}}$

$\dfrac{450}{4\,123} \approx 0{,}11$ soit $\boxed{\text{11 \% de la demande mondiale d'électricité.}}$

EXERCICE N° 16 : Calculer avec les puissances quelconques

1. Calculer la valeur décimale des expressions suivantes :

$A = 2^7$

$B = 0,02^4$

$C = (-1)^{13}$

$D = (-3)^4$

$E = 2^5 \times 2^{-3}$

$F = 3^0 \times 2^1 \times 5^{-1}$

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances :

$G = 2^3 \times 2^7 \times 2^{-8}$

$H = \dfrac{3^{-9}}{3^8}$

$I = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 7^5}{2^{-1} \times 3^3 \times 7^{-1}}$

$J = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times (3 \times 2)^3$

EXERCICE N° 16 **CORRECTION**

1. Calculer la valeur décimale des expressions suivantes :

$A = 2^7$

$\boxed{A = 128}$

$B = 0,02^4$

$B = \left(\dfrac{2}{100}\right)^4$

$B = \dfrac{16}{1\,000\,000}$

$\boxed{B = 0,000\,016}$

$C = (-1)^{13}$

$\boxed{C = -1}$

$D = (-3)^4$

$\boxed{D = 81}$

$E = 2^5 \times 2^{-3}$

$E = 2^{5+(-3)}$

$E = 2^2$

$\boxed{E = 4}$

$F = 3^0 \times 2^1 \times 5^{-1}$

$F = 1 \times 2 \times \dfrac{1}{5}$

$F = \dfrac{2}{5}$

$\boxed{F = 0,4}$

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances :

$G = 2^3 \times 2^7 \times 2^{-8}$

$G = 2^{3+7+(-8)}$

$\boxed{G = 2^2}$

$H = \dfrac{3^{-9}}{3^8}$

$H = 3^{-9-8}$

$\boxed{H = 3^{-17}}$

$I = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 7^5}{2^{-1} \times 3^3 \times 7^{-1}}$

$I = \dfrac{2^3}{2^{-1}} \times \dfrac{3^2}{3^3} \times \dfrac{7^5}{7^{-1}}$

$I = 2^{3-(-1)} \times 3^{2-3} \times 7^{5-(-1)}$

$\boxed{I = 2^4 \times 3^{-1} \times 7^6}$

$J = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times (3 \times 2)^3$

$J = \dfrac{2^2}{3^2} \times 3^3 \times 2^3$

$J = \dfrac{2^2 \times 2^3 \times 3^3}{3^2}$

$J = 2^{2+3} \times 3^1$

$\boxed{J = 2^5 \times 3^1}$

EXERCICE N° 17 : **Substituer dans une expression littérale** — CALCUL LITTÉRAL - SUBSTITUTION

On pose $A = (7x - 3y + 4z) - (-3x + 4y - 5z)$ et $B = (x + y - z)(z - y - x)$

1. Calculer A et B pour $x = -1$, $y = 1$ et $z = -2$.

2. Calculer A et B pour $x = 2$, $y = -1$ et $z = 1$.

EXERCICE N° 17 — CORRECTION

On pose $A = (7x - 3y + 4z) - (-3x + 4y - 5z)$ et $B = (x + y - z)(z - y - x)$

1. Calculer A et B pour $x = -1$, $y = 1$ et $z = -2$.

$A = (7 \times (-1) - 3 \times 1 + 4 \times (-2)) - (-3 \times (-1) + 4 \times 1 - 5 \times (-2))$
$A = (-7 - 3 - 8) - (3 + 4 + 10)$
$A = (-18) - (17)$

$\boxed{A = -35}$

$B = (-1 + 1 - (-2))\,(-2 - 1 - (-1))$
$B = (-1 + 1 + 2)(-2 - 1 + 1)$
$B = (2)(-2)$

$\boxed{B = -4}$

2. Calculer A et B pour $x = 2$, $y = -1$ et $z = 1$.

$A = (7 \times 2 - 3 \times (-1) + 4 \times 1) - (-3 \times 2 + 4 \times (-1) - 5 \times 1)$
$A = (14 + 3 + 4) - (-6 - 4 - 5)$
$A = 21 - (-15)$

$\boxed{A = 36}$

$B = (2 + (-1) - 1)\,(1 - (-1) - 2)$
$B = (2 - 1 - 1)(1 + 1 - 2)$
$B = 0 \times 0$

$\boxed{B = 0}$

Exercice n° 18 : **Comprendre un programme de calcul** **Calcul littéral - Substitution**

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre;
- Ajouter 2;
- Multiplier ce résultat par lui même;
- Enlever le quadruple du nombre de départ;
- Ajouter -9.

1. Tester ce programme de calcul avec les nombres 5, -1 et -8.

2. Montrer que l'expression de ce programme en fonction du nombre de départ x peut s'écrire :

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - 5$$

3. Quel(s) nombre(s) de départ faut-il choisir pour obtenir 44 à la fin ?

4. Quel(s) nombre(s) de départ faut-il choisir pour obtenir 0 à la fin ?

5. Quel(s) nombre(s) de départ faut-il choisir pour obtenir -9 à la fin ?

Exercice n° 18 Correction

1.

Avec le nombre 5 on obtient successivement :

- 5;
- $5+2=7$;
- $7\times 7=49$;
- $49-4\times 5=49-20=29$;
- $29+(-9)=20$

$\boxed{\text{On obtient } 20}$

Avec le nombre -1 on obtient successivement :

- -1;
- $-1+2=1$;
- $1\times 1=1$;
- $1-4\times(-1)=1+4=5$;
- $5+(-9)=-4$

$\boxed{\text{On obtient } -4}$

Avec le nombre -8 on obtient successivement :

- -8;
- $-8+2=6$;
- $6\times 6=36$;
- $36-4\times(-8)=36+32=68$;
- $68+(-9)=59$

$\boxed{\text{On obtient } 59}$

2. Notons x le nombre de départ.
On a donc successivement : x, $x+2$ puis $x+2)\times(x+2)$.
Or $(x+2)(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4$.
Ensuite on effectue $x^2+4x+4-4x = x^2+4$ et enfin $x^2+4+(-9) = x^2-5$.

$\boxed{\text{En fonction de } x \text{ le nombre de départ le programme donne } \mathrm{P}(x) = x^2-5.}$

3. Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
x^2-5 &= 44\\
x^2-5+5 &= 44+5\\
x^2 &= 49\\
x^2-49 &= 0\\
x^2-7^2 &= 0\\
(x+7)(x-7) &= 0
\end{aligned}$$

$$(x+7)(x-7)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$x+7=0$$
$$x+7-7=0-7$$
$$x-7$$

$$x-7=0$$
$$x-7+7=0+7$$
$$x=7$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{7 \text{ et } -7}$

On peut aussi utiliser directement le résultat du cours sur les solutions de l'équation $x^2 = a$ comme dans le cas ci-dessous.
On sait ainsi que l'équation $x^2 = a$:

- *si $a > 0$, il y a deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;*
- *si $a = 0$, il y a une solution 0;*
- *si $a < 0$), il n'y a pas de solution.*

4. Il faut résoudre :

$$x^2-5=0$$
$$x^2-5+5=0+5$$
$$x^2=5$$

Il y a deux solutions $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$: $\boxed{\text{Deux solutions : } \sqrt{5} \text{ et } -\sqrt{5}}$.

5. Il faut résoudre :

$$x^2-5=-9$$
$$x^2-5+5=-9+5$$
$$x^2=-4$$

On sait qu'un carré est toujours positif : $\boxed{\text{Il n'y a donc pas de solution}}$.

Exercice n° 19 : Réduire une expression littérale

Réduire les expressions littérales suivantes :

$A = 3x^2 + 3x - 2 + 4x^2 - 5x + 1$
$B = -3x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 5x^3 - 2x^2 - 4 + 5x$
$C = (a - b + c) - (a - b + c) - (c - a - b) - a + b - c$

$D = x - y + z - 2y + x - z + 2x - y$
$E = 3(x - y) - 4(y - x) + x - y$
$F = a(a - b) - b(b - a) + ab - (a + b)$

Exercice n° 19

Correction

Réduire les expressions littérales suivantes :

$A = 3x^2 + 3x - 2 + 4x^2 - 5x + 1$

$\boxed{A = 7x^2 - 2x - 1}$

$B = -3x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 5x^3 - 2x^2 - 4 + 5x$

$\boxed{B = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 3}$

$C = (a - b + c) - (a - b + c) - (c - a - b) - a + b - c$

$C = a - b + c - a + b - c - c + a + b - a + b - c$

$\boxed{C = 2b - 2c}$

$D = x - y + z - 2y + x - z + 2x - y$

$\boxed{D = 4x - 4y}$

$E = 3(x - y) - 4(y - x) + x - y$

$E = 3x - 3y - 4y + 4x + x - y$

$\boxed{E = 8x - 8y}$

$F = a(a - b) - b(b - a) + ab - (a + b)$

$F = a^2 - ab - b^2 + ba + ab - a - b$

$\boxed{F = a^2 - b^2 + ab - a - b}$

Exercice n° 20 : **Développer en utilisant la distributivité simple** **Calcul littéral - Développer et réduire**

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 5(x-1)+3(2x+1)$
$B = 3x(1-x)-2(5-3x)$
$C = 1-4(x-1)+x(5-x)+x^2$

$D = -3x(1-x)+5x(2+3x)-x^2$
$E = 2x(-3x-1)-3(-4x+7)-x^2+x-1$
$F = x(2y-1)-y(2x-1)+x(x+y)-y(x-y)$

Exercice n° 20 — Correction

Je conseille à mes élèves de développer directement les expressions sans passer par l'étape écrite qui fait apparaître les multiplications.
Ainsi je ne souhaite pas qu'ils écrivent : $5(x-1) = 5\times x - 5\times 1$ *mais directement* $5x-5$ *en faisant les calculs mentalement.*
D'autre part, même si ce n'est pas une attendu du collège, il convient d'ordonner les expressions en suivant les puissances décroissantes.
Cela ne coûte rien de le faire et permet de simplifier la vie du correcteur... et donc de gagner sa confiance ! :)
Au lieu d'écrire $-3x+7x^2-8$ *il est plus uniforme d'écrire* $7x^2-3x-8$.

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 5(x-1)+3(2x+1)$
$A = 5x-5+6x+3$

$\boxed{A = 11x-2}$

$B = 3x(1-x)-2(5-3x)$
$B = 3x-3x^2-10+6x$

$\boxed{B = -3x^2+9x-10}$

$C = 1-4(x-1)+x(5-x)+x^2$
$C = 1-4x+4+5x-x^2+x^2$

$\boxed{C = x+5}$

$D = -3x(1-x)+5x(2+3x)-x^2$
$D = -3x+3x^2+10x+15x^2-x^2$

$\boxed{D = 17x^2+7x}$

$E = 2x(-3x-1)-3(-4x+7)-x^2+x-1$
$E = -6x^2-2x+12x-21-x^2-1$

$\boxed{E = -7x^2+10x-22}$

$F = x(2y-1)-y(2x-1)+x(x+y)-y(x-y)$
$F = 2xy-x-2xy+y+x^2+xy-yx+y^2$

Comme la multiplication est commutative (l'ordre n'a pas d'importance) on sait que $xy = yx$

$\boxed{F = x^2+y^2-x+y}$

EXERCICE N° 21 : Développer en utilisant la distributivité double **CALCUL LITTÉRAL - DÉVELOPPER ET RÉDUIRE**

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (3x-7)(5x+2)$
$B = (-5x+8)(-3-4x)$
$C = (3x+1)(3-2x)+(5x-3)(-1-3x)$
$D = (6x-3)^2+4(3x-2)(4x+7)$
$E = (1-3x)(3x-2)-(5x-1)(1-x)$
$F = 3(3x-2)(-3-3x)-5(4x-1)^2$

EXERCICE N° 21 — CORRECTION

Développer et réduire les expressions suivantes :

Je déconseille d'écrire tous les produits quand on utilise la distributivité. Ainsi pour développer $(2x+1)(3x-4)$ écrire les produits sous la forme $2x \times 3x + 2x \times (-4) + 1 \times 3x + 1 \times (-4)$ me semble une démarche fondamentale pour l'apprentissage en particulier à l'oral. À l'écrit cependant, je recommande de faire ces calculs mentalement et d'écrire directement les résultats c'est à dire $6x^2-8x+3x-4$. Cela évite les confusions par exemple celle entre le symbole de multiplication $\times$ et la lettre x

Dans la phase de réduction il est d'usage de commencer par les termes de plus haut degré. En général au collège il s'agit des termes en x^2 puis ceux en x et enfin les nombres. C'est l'ordre habituel pour un polynome.

Pour les expressions complexes il est souvent utile de « protéger » les calculs intermédiaires par des parenthèses. Cela simplifie la vérification des calculs et permet d'éviter les erreurs quand une expression est précédée d'un signe moins ou d'un coefficient multiplicateur.

Une expression du type $(x-3)^2$ peut se développer sous la forme $(x-3)(x-3)$ ou à l'aide d'une identité remarquable.

Pour réduire une expression complexe du type $36x^2-18x^2+63x^2-76x^2$ l'usage de la calculatrice est recommandé. Il suffit de calculer $36-18+63-76=5$ puis d'écrire le résultat $5x^2$

Le signe moins devant une parenthèse signifie qu'il faut calculer l'opposé de l'expression entre parenthèse. Pour cela il suffit de calculer l'opposé de chacun de ses termes.

$A = (3x-7)(5x+2)$
$A = 15x^2+6x-35x-14$

$\boxed{A = 15x^2-29x-14}$

$B = (-5x+8)(-3-4x)$
$B = 15x+20x^2-24-32x$

$\boxed{B = 20x^2-17x-24}$

$C = (3x+1)(3-2x)+(5x-3)(-1-3x)$
$C = \left(9x-6x^2+3-2x\right)+\left(-5x-15x^2+3+9x\right)$
$C = 9x-6x^2+3-2x-5x-15x^2+3+9x$

$\boxed{C = -21x^2+11x+6}$

$D = (6x-3)^2+4(3x-2)(4x+7)$
$D = (6x-3)(6x-3)+4(3x-2)(4x+7)$
$D = \left(36x^2-18x-18x+9\right)+4\left(12x^2+21x-8x-14\right)$
$D = 36x^2-18x-18x+9+48x^2+84x-32x-56$

$\boxed{D = 84x^2+16x-47}$

$E = (1-3x)(3x-2)-(5x-1)(1-x)$
$E = \left(3x-2-9x^2+6x\right)-\left(5x-5x^2-1+x\right)$
$E = 3x-2-9x^2+6x-5x+5x^2+1-x$

$\boxed{E = -4x^2+3x-1}$

$F = 3(3x-2)(-3-3x)-5(4x-1)^2$
$F = 3(3x-2)(-3-3x)-5(4x-1)(4x-1)$
$F = 3\left(-9x-9x^2+6+6x\right)-5\left(16x^2-4x-4x+1\right)$
$F = -27x-27x^2+18+18x-80x^2+20x+20x-5$

$\boxed{F = -107x^2+31x+13}$

EXERCICE N° 22 : **Développer en utilisant les identités remarquables**

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (x+6)^2$
$B = (3x-4)^2$
$C = (7x-1)(7x+1)$

$D = (5x-1)^2 + (3x+2)^2$
$E = (7x+3)(7x-3) - (5-6x)(5+6x)$
$F = 4(5x-1)^2 - 3(4x+1)(1-4x)$

EXERCICE N° 22 — CORRECTION

Développer et réduire les expressions suivantes :

Attention : les identités remarquables ne font pas partie des attendus de fin de troisième. Elles ne sont pas nécessaire pour effectuer les développement ci-dessous puisque la distributivité peut suffire. Seule la factorisation de la différence de deux carrés est exigée.
Je pense cependant qu'initier ce travail en fin de troisième devrait permettre aux futurs élèves de seconde générale et technologique un apprentissage plus rapide de cette notion l'année prochaine.
On peut développer directement certaines expressions en utilisant les égalités remarquables suivantes :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b)^2 = a^2 - b^2$

Il est recommandé de faire les calculs mentalement et de ne pas écrire $(3x)^2$ mais directement $9x^2$, (car $(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2$). Pour caculer le terme en $2ab$ je conseille de calculer d'abord $a \times b$ puis de multiplier par 2. Ainsi pour calculer $2 \times 7x \times 8$ il est plus rapide d'effectuer mentalement $7x \times 8) = 56x$ puis d'en calculer le double $112x$.

Attention à l'ordre dans une expression du type $(1+4x)(4x-1)$. C'est en l'écrivant $(4x+1)(4x-1)$ que l'on peut l'identifier à $(a+b)(a-b)$. On obtient alors $16x^2 - 1$ et non pas $1 - 16x^2$. L'addition est commutative, pas la soustraction.

$A = (x+6)^2$

$\boxed{A = x^2 + 12x + 36}$

$B = (3x-4)^2$

$\boxed{B = 9x^2 - 24x + 16}$

$C = (7x-1)(7x+1)$

$\boxed{C = 49x^2 - 1}$

$D = (5x-1)^2 + (3x+2)^2$
$D = \left(25x^2 - 10x + 1\right) + \left(9x^2 + 12x + 4\right)$
$D = 25x^2 - 10x + 1 + 9x^2 + 12x + 4$

$\boxed{D = +34x^2 + 2x + 5}$

$E = (7x+3)(7x-3) - (5-6x)(5+6x)$
$E = \left(49x^2 - 9\right) - \left(25 - 36x^2\right)$
$E = 49x^2 - 9 - 25 + 36x^2$

$\boxed{E = 85x^2 - 34}$

$F = 4(5x-1)^2 - 3(4x+1)(1-4x)$
$F = 4\left(25x^2 - 10x + 1\right) - 3\left(1 - 16x^2\right)$
$F = 100x^2 - 40x + 4 - 3 + 48x^2$

$\boxed{F = 148x^2 - 40x + 1}$

Exercice n° 23 : Factoriser une expression en utilisant la distributivité

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = 21x - 49x^2$

$B = 5x(3x-1) + 10x$

$C = (4x-1)(3x+2) + (4x-1)(5x+7)$

$D = (1-7x)(2x+5) - (1-7x)(3x+8)$

$E = (3x-4)^2 - (3x-4)(2x-1)$

$F = 5x(4x-1) + (4x-1)^2 + (4x-1)$

Exercice n° 23

Correction

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = 21x - 49x^2$

$A = 3 \times 7x - 7x \times 7x$

$\boxed{A = 7x(3-7x)}$

$B = 5x(3x-1) + 10x$

$B = 5x \times (3x-1) + 5x \times 2$

$B = 5x\,[(3x-1)+2]$

$B = 5x(3x-1+2)$

$\boxed{B = 5x(3x+1)}$

$C = (4x-1)(3x+2) + (4x-1)(5x+7)$

$C = (4x-1) \times (3x+2) + (4x-1) \times (5x+7)$

$C = (4x-1)\,[(3x+2)+(5x+7)]$

$C = (4x-1)(3x+2+5x+7)$

$\boxed{C = (4x-1)(8x+9)}$

$D = (1-7x)(2x+5) - (1-7x)(3x+8)$

$D = (1-7x) \times (2x+5) - (1-7x) \times (3x+8)$

$D = (1-7x)\,[(2x+5)-(3x+8)]$

$D = (1-7x)(2x+5-3x-8)$

$\boxed{D = (1-7x)(-x-3)}$

$E = (3x-4)^2 - (3x-4)(2x-1)$

$E = (3x-4) \times (3x-4) - (3x-4)(2x-1)$

$E = (3x-4)\,[(3x-4)-(2x-1)]$

$E = (3x-4)(3x-4-2x+1)$

$\boxed{E = (3x-4)(x-3)}$

$F = 5x(4x-1) + (4x-1)^2 + (4x-1)$

$F = 5x \times (4x-1) + (4x-1) \times (4x-1) + 1 \times (4x-1)$

$F = (4x-1)\,[5x+(4x-1)+1]$

$F = (4x-1)(5x+4x-1+1)$

$F = (4x-1)(9x)$

$\boxed{F = 9x(4x-1)}$

Exercice n° 24 : Factoriser une expression en utilisant une différence de deux carrés

Calcul littéral - Factoriser

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = x^2 - 36$
$B = 16x^2 - 25$
$C = x^2 - 7$

$D = (5x-1)^2 - 49$
$E = (4x-1)^2 - 25x^2$
$F = (6x+2)^2 - (3x-1)^2$

$G = (5x-1)^2 - (3x+1)^2$
$H = 16x^2 - 23$
$I = 5x^2 - 17$

Exercice n° 24

Correction

La factorisation $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ est la seule identité remarquable au programme du cycle 4 de collège.

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = x^2 - 36$
$A = x^2 - 6^2$

$\boxed{A = (x+6)(x-6)}$

$B = 16x^2 - 25$
$B = (4x)^2 - 5^2$

$\boxed{B = (4x+5)(4x-5)}$

$C = x^2 - 7$
$C = x^2 - (\sqrt{7})^2$

$\boxed{C = (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})}$

$D = (5x-1)^2 - 49$
$D = (5x-1)^2 - 7^2$
$D = ((5x-1)+7)((5x-1)-7)$
$D = (5x-1+7)(5x-1-7)$

$\boxed{D = (5x+6)(5x-8)}$

$E = (4x-1)^2 - 25x^2$
$E = (4x-1)^2 - (5x)^2$
$E = ((4x-1)+5x)((4x-1)-5x)$
$E = (4x-1+5x)(4x-1-5x)$

$\boxed{E = (9x-1)(-x-1)}$

$F = (6x+2)^2 - (3x-1)^2$
$F = ((6x+2)+(3x-1))((6x+2)-(3x-1))$
$F = (6x+2+3x-1)(6x+2-3x+1)$

$\boxed{F = (9x+1)(3x+3)}$

$G = (5x-1)^2 - (3x+1)^2$
$G = ((5x-1)+(3x+1))((5x-1)-(3x+1))$
$G = (5x-1+3x+1)(5x-1-3x-1)$

$\boxed{G = 8x(2x-2)}$

$H = 16x^2 - 23$
$H = (4x)^2 - (\sqrt{23})^2$

$\boxed{H = (4x+\sqrt{23})(4x-\sqrt{23})}$

$I = 5x^2 - 17$
$I = (\sqrt{5}x)^2 - (\sqrt{17})^2$

$\boxed{I = (5x+\sqrt{17})(5x-\sqrt{17})}$

Exercice n° 25 : Factoriser une expression en utilisant les identités remarquables

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = 25x^2 - 16$

$B = 36x^2 - 15$

$C = x^2 + 6x + 9$

$D = 4x^2 + 20x + 25$

$E = 25x^2 - 80x + 64$

$F = 49x^2 - 126x + 81$

Exercice n° 25

Correction

Cette compétence ne fait pas partie des attendus de fin de troisième. Seule la factorisation en $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ est au programme.

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = 25x^2 - 16$

$A = (5x)^2 - 4^2$

$\boxed{A = (5x+4)(5x-4)}$

$B = 36x^2 - 15$

$B = (6x)^2 - (\sqrt{15})^2$

$\boxed{B = (6x+\sqrt{15})(6x-\sqrt{15})}$

$C = x^2 + 6x + 9$

$C = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$

$\boxed{C = (x+3)^2}$

$D = 4x^2 + 20x + 25$

$(2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2$

$\boxed{D = (2x+5)^2}$

$E = 25x^2 - 80x + 64$

$E = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 8 + 8^2$

$\boxed{E = (5x-8)^2}$

$F = 49x^2 - 126x + 81$

$F = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 9 + 9^2$

$\boxed{F = (7x-9)^2}$

Exercice n° 26 : **Résoudre une équation du premier degré** **Calcul littéral - Équations**

Résoudre chacune des équations suivantes :

$3x+5=2x+3$

$4x-1=2x-5$

$1-7x=5-4x$

$3x-2+7=1-8x+9$

$5(3x-2)=4(1-5x)$

$(4x-1)(2x+3)=(x-3)(8x+3)$

Exercice n° 26 **Correction**

$$\begin{aligned}3x+5&=2x+3\\3x+5-5&=2x+3-5\\3x&=2x-2\\3x-2x&=2x-2-2x\\x&=-2\end{aligned}$$

$\boxed{x=-2}$

$$\begin{aligned}1-7x&=5-4x\\1-7x-1&=5-4x-1\\-7x&=4-4x\\-7x+4x&=4-4x+4x\\-3x&=4\\x&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{x=-\frac{4}{3}}$

$$\begin{aligned}5(3x-2)&=4(1-5x)\\15x-10&=4-20x\\15x-10+10&=4-20x+10\\15x&=14-20x\\15x+20x&=14-20x+20x\\35x&=14\\x&=\frac{14}{35}\\x&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

$\boxed{x=\frac{2}{5}}$

$$\begin{aligned}4x-1&=2x-5\\4x-1+1&=2x-5+1\\4x&=2x-4\\4x-2x&=2x-4-2x\\2x&=-4\\x&=-\frac{4}{2}\\x&=-2\end{aligned}$$

$\boxed{x=-2}$

$$\begin{aligned}3x-2+7&=1-8x+9\\3x+5&=10-8x\\3x+5-5&=10-8x-5\\3x&=5-8x\\3x+8x&=5-8x+8x\\11x&=5\\x&=\frac{5}{11}\end{aligned}$$

$\boxed{x=-\frac{5}{11}}$

$$\begin{aligned}(4x-1)(2x+3)&=(x-3)(8x+3)\\8x^2+12x-2x-3&=8x^2+3x-24x-9\\8x^2+10x-3&=8x^2-21x-9\\8x^2+10x-3-8x^2&=8x^2-21x-9-8x^2\\10x-3&=-21x-9\\10x-3+3&=-21x-9+3\\10x&=-21x-6\\10x+21x&=-21x-6+21x\\31x&=-6\\x&=-\frac{6}{31}\end{aligned}$$

$\boxed{x=-\frac{6}{31}}$

Exercice n° 27 : **Résoudre une équation produit** — **Calcul littéral - Équations**

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$(3x-1)(5x-3)=0$$

$$(1-7x)(5x-7)=0$$

$$(4x+3)(5x-1)+(3x-9)(5x-1)=0$$

$$(1-5x)^2-(1-5x)(2x+1)=0$$

Exercice n° 27 — Correction

$$(3x-1)(5x-3)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=0+1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}$$

$$5x-3=0$$
$$5x-3+3=03$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5}$$
$$x=0,6$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{3} \text{ et } 0,6}$

$$(1-7x)(5x-7)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$1-7x=0$$
$$1-7x-1=0-1$$
$$-7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}$$

$$5x-7=0$$
$$5x-7+7=0+7$$
$$5x=7$$
$$x=\frac{7}{5}$$
$$x=1,4$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{7} \text{ et } 1,4}$

$$(4x+3)(5x-1)+(3x-9)(5x-1)=0$$

Il faut d'abord factoriser cette expression :
$A=(4x+3)(5x-1)+(3x-9)(5x-1)$
$A=(4x+3)\times(5x-1)+(3x-9)\times(5x-1)$
$A=(5x-1)\,[(4x+3)+(3x-9)]$
$A=(5x-1)(4x+3+3x-9)$
$A=(5x-1)(7x-6)$

$$(5x-1)(7x-6)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x-1&=0\\ 5x-1+1&=0+1\\ 5x&=1\\ x&=\frac{1}{5}\\ x&=0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x-6&=0\\ 7x-6+6&=0+6\\ 7x&=6\\ x&=\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0,2 \text{ et } \frac{6}{7}}$

$$(1-5x)^2-(1-5x)(2x+1)=0$$

Il faut d'abord factoriser l'expression :
$B=(1-5x)^2-(1-5x)(2x+1)$
$B=(1-5x)(1-5x)-(1-5x)(2x+1)$
$B=(1-5x)\,[(1-5x)-(2x+1)]$
$B=(1-5x)(1-5x-2x-1)$
$B=(1-5x)(-7x)$

$$-7x(1-5x)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} -7x&=0\\ x&=\frac{0}{-7}\\ x&0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-5x&=0\\ 1-5x-1&=0-1\\ -5x&=-1\\ x&=\frac{-1}{-5}\\ x&=0,2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } 0,2}$

Exercice n° 28 : **Résoudre une équation carré**

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$x^2 = 121$$
$$3x^2 = 7$$
$$(4x+3)^2 = 81$$
$$(7x-1)^2 + 25 = 0$$
$$(3x-1)^2 - (5x-1)^2 = 0$$
$$(6x-3)^2 = (3-2x)^2$$

Exercice n° 28 **Correction**

Résoudre chacune des équations suivantes :

Le principe consiste à se ramener à une équation produit en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
Seule la première équation est un attendu pour le brevet. Les autres vont au delà des exigences du collège.

$$\begin{aligned} x^2 &= 121 \\ x^2 {\color{red}-121} &= 121 {\color{red}-121} \\ x^2 - 121 &= 0 \\ x^2 - 11^2 &= 0 \\ (x+11)(x-11) &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+11)(x-11) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} x+11 &= 0 \\ x+11{\color{red}-11} &= 0{\color{red}-11} \\ x &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-11 &= 0 \\ x-11{\color{red}+11} &= 0{\color{red}+11} \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-11 \text{ et } 11}$

On peut aussi utiliser la leçon qui nous dit que l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions quand $a > 0$. Ces deux solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Dans notre cas ce sont $\sqrt{121} = 11$ et $-\sqrt{121} = -11$.
Ici il faut se souvenir que $(\sqrt{3})^2 = 3$ ou que $\sqrt{7})^2 = 7$.

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 \\ 3x^2{\color{red}-7} &= 7{\color{red}-7} \\ 3x^2 - 7 &= 0 \\ (\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{7})^2 &= 0 \\ \left(\sqrt{3}x + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{7}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\sqrt{3}x+\sqrt{7}=0$$
$$\sqrt{3}x+\sqrt{7}-\sqrt{7}=0-\sqrt{7}$$
$$\sqrt{3}x=-\sqrt{7}$$
$$x=-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}x-\sqrt{7}=0$$
$$\sqrt{3}x-\sqrt{7}+\sqrt{7}=0+\sqrt{7}$$
$$\sqrt{3}x=\sqrt{7}$$
$$x=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \text{ et } \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}$

Cet exercice est clairement du niveau seconde...

$$(4x+3)^2=81$$
$$(4x+3)^2-81=81-81$$
$$(4x+3)^2-81=0$$
$$(4x+3)^2-9^2=0$$
$$[(4x+3)+3]\,[(4x+3)-3]=0$$
$$(4x+3+3)(4x+3-3)=0$$
$$(4x+6)(4x)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$4x+6=0$$
$$4x+6-6=0-6$$
$$4x=-6$$
$$x=-\frac{6}{4}$$
$$x=-1,5$$

$$4x=0$$
$$x=\frac{0}{4}$$
$$x=0$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-1,5 \text{ et } 0}$

$$(7x-1)^2=25$$
$$(7x-1)^2-25=25-25$$
$$(7x-1)^2-25=0$$
$$(7x-1)^2-5^2=0$$
$$[(7x-1)+5]\,[(7x-1)-5]=0$$
$$(7x-1+5)(7x-1-5)=0$$
$$(7x+4)(7x-6)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$7x+4=0$$
$$7x+4-4=0-4$$
$$7x=-4$$
$$x=-\frac{4}{7}$$

$$7x-6=0$$
$$7x-6+6=0+6$$
$$7x=6$$
$$x=\frac{6}{7}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{4}{7} \text{ et } \frac{6}{7}}$

$$(3x-1)^2-(5x-1)^2=0$$

$$\begin{aligned}
(3x-1)^2-(5x-1)^2&=0\\
[(3x-1)+(5x-1)]\,[(3x-1)-(5x-1)]&=0\\
(3x-1+5x-1)(3x-1-5x+1)&=0\\
(8x-2)(-2x)&=0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned}
8x-2&=0\\
8x-2+2&=0+2\\
8x&=2\\
x&=\frac{2}{8}\\
x&=\frac{1}{4}\\
x&=0,25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2x&=0\\
x&=\frac{0}{-2}\\
x&=0
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0,25 \text{ et } 0}$

$$\begin{aligned}
(6x-3)^2&=(3-2x)^2\\
(6x-3)^2-(3-2x)^2&=(3-2x)^2-(3-2x)^2\\
(6x-3)^2-(3-2x)^2&=0\\
[(6x-3)+(3-2x)]\,[(6x-3)-(3-2x)]&=0\\
(6x-3+3-2x)(6x-3-3+2x)&=0\\
(4x)(8x-6)&=0
\end{aligned}$$

$$4x(8x-6)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned}
4x&=0\\
x&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8x-6&=0\\
8x-6+6&=0+6\\
8x&=6\\
x&=\frac{6}{8}\\
x&=\frac{3}{4}\\
x&=0,75
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } 0,75}$

Exercice n° 29 : Calculer l'image d'un nombre par une fonction — Fonctions - Généralités sur les fonctions

On pose : $f : x \rightarrow 3x-7$, $g : x \rightarrow 7x^2-8x+2$ et $h : x \rightarrow (3x-1)(2x+3)-7x^2+8$

1. Calculer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$.

2. Calculer l'image de $\dfrac{2}{3}$ par f.

3. Développer et réduire h puis calculer $h(-2)$.

4. Calculer l'image de $\dfrac{-4}{5}$ par g.

Exercice n° 29 — Correction

1. $\boxed{f(0)=3\times 0-7=-7}$

$\boxed{g(0)=7\times 0^2-8\times 0+2=2}$

$\boxed{h(0)=(3\times 0-1)(2\times 0+3)-7\times 0^2+8=-1\times 3+8=-3+8=5}$

2. $\boxed{f\left(\dfrac{2}{3}\right)=3\times\dfrac{2}{3}-7=2-7=-5}$

3. $h(x)=(3x-1)(2x+3)-7x^2+8$

$h(x)=6x^2+9x-2x-3-7x^2+8$

$\boxed{h(x)=-x^2+7x+5}$

$\boxed{h(-2)=-(-2)^2+7\times(-2)+5=-4-14+5=-13}$

4. $g\left(-\dfrac{4}{5}\right)=7\times\left(\dfrac{-4}{5}\right)^2-8\times\dfrac{-4}{5}+2$

$g\left(-\dfrac{4}{5}\right)=7\times\dfrac{16}{25}+\dfrac{32}{5}+2$

$g\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{112}{25}+\dfrac{32\times 5}{5\times 5}+\dfrac{2\times 25}{25}=\dfrac{112}{25}+\dfrac{160}{25}+\dfrac{50}{25}$

$\boxed{g\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{322}{25}}$

EXERCICE N° 30 : **Déterminer le ou les antécédents d'un nombre par une fonction**

On note $f(x) = 7x + 8$ et $g(x) = (5x - 1)(2x + 3) - (5x - 1)(6x + 7)$

1. Quel est l'antécédent de -6 par f ?
2.a. Développer et réduire $g(x)$.
2.b. Calculer $g(0)$ et $g(-1)$.
2.c. Factoriser $g(x)$.
2.d. Résoudre $g(x) = 0$.

EXERCICE N° 30 — CORRECTION

1. Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) &= -6 \\ 7x + 8 &= -6 \\ 7x + 8 - 8 &= -6 - 8 \\ 7x &= -14 \\ x &= \frac{-14}{7} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 est l'antécédent de } -6 \text{ par } f.}$

2.a. $g(x) = (5x - 1)(2x + 3) - (5x - 1)(6x + 7)$
$g(x) = (10x^2 + 15x - 2x - 3) - (30x^2 + 35x - 6x - 7)$
$g(x) = 10x^2 + 15x - 2x - 3 - 30x^2 - 35x + 6x + 7$
$\boxed{g(x) = -20x^2 - 16x + 4}$

2.b. $\boxed{g(0) = -20 \times 0^2 - 16 \times 0 + 4 = 4}$

$\boxed{g(-1) = -20 \times (-1)^2 - 16 \times (-1) + 4 = -20 \times 1 + 16 + 4 = 0}$

2.c. $g(x) = (5x - 1)(2x + 3) - (5x - 1)(6x + 7)$
$g(x) = (5x - 1)\left((2x + 3) - (6x + 7)\right)$
$g(x) = (5x - 1)(2x + 3 - 6x - 7)$
$\boxed{g(x) = (5x - 1)(-4x - 4)}$

2.d.

$$(5x - 1)(-4x - 4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

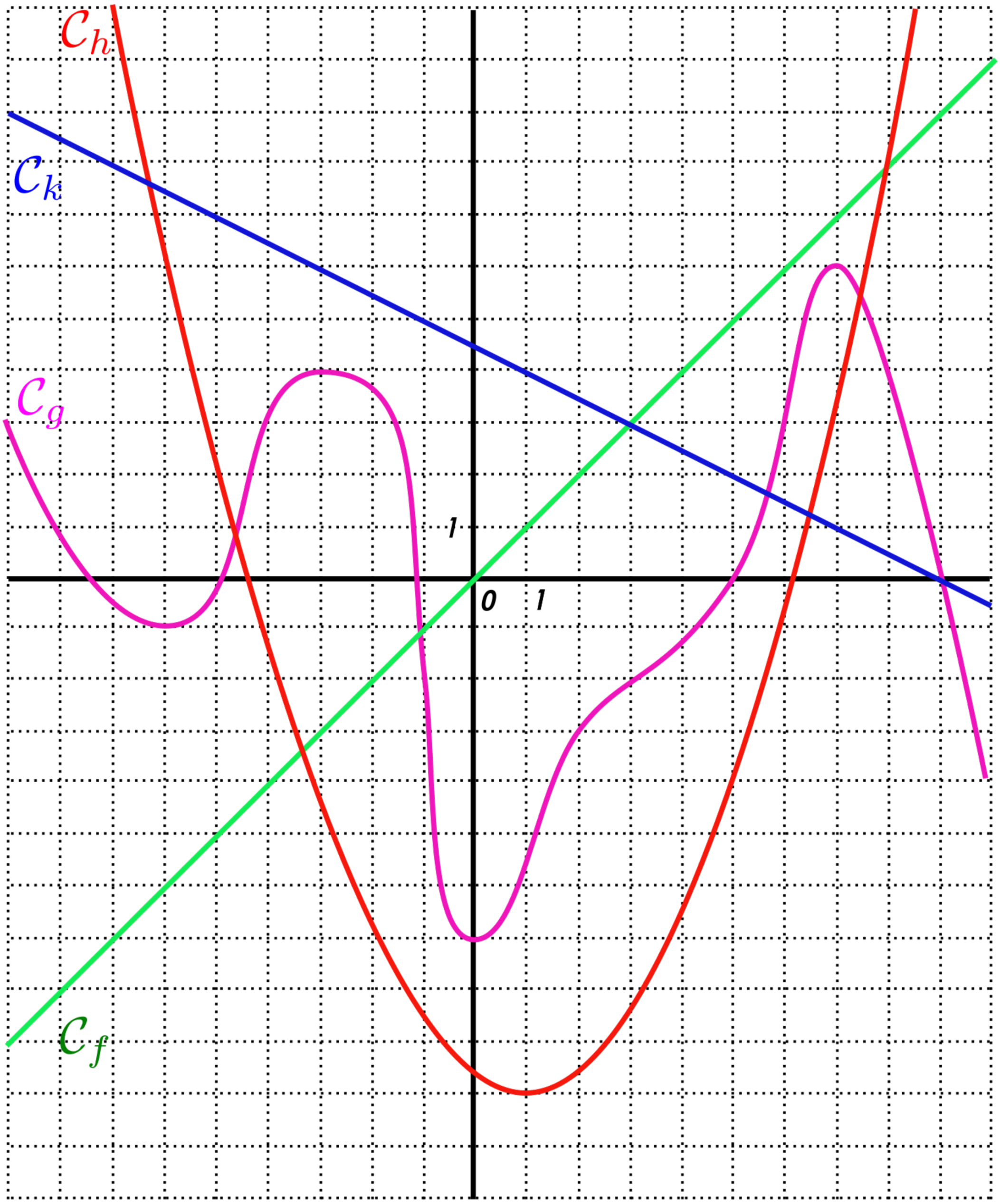
$$\begin{aligned} 5x - 1 &= 0 \\ 5x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \\ x &= 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x - 4 &= 0 \\ -4x - 4 + 4 &= 0 + 4 \\ -4x &= 4 \\ x &= \frac{4}{-4} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0,2 \text{ et } -1}$

EXERCICE N° 31 : **Lire la représentation graphique d'une fonction**

Sur le graphique ci-dessous se trouvent les représentations graphiques de quatre fonctions : f, g, h et k.



1. Lire sur le graphique : $f(-5)$, $f(0)$ et $f(3)$

2. Quelle pourrait être l'expression de f ?

3. Lire sur le graphique : $g(-3)$, $g(0)$ et $g(7)$

4. Quels sont les antécédents de 0 par g.

5. Lire sur la graphique : $h(-6)$, $h(1)$ et $h(8)$

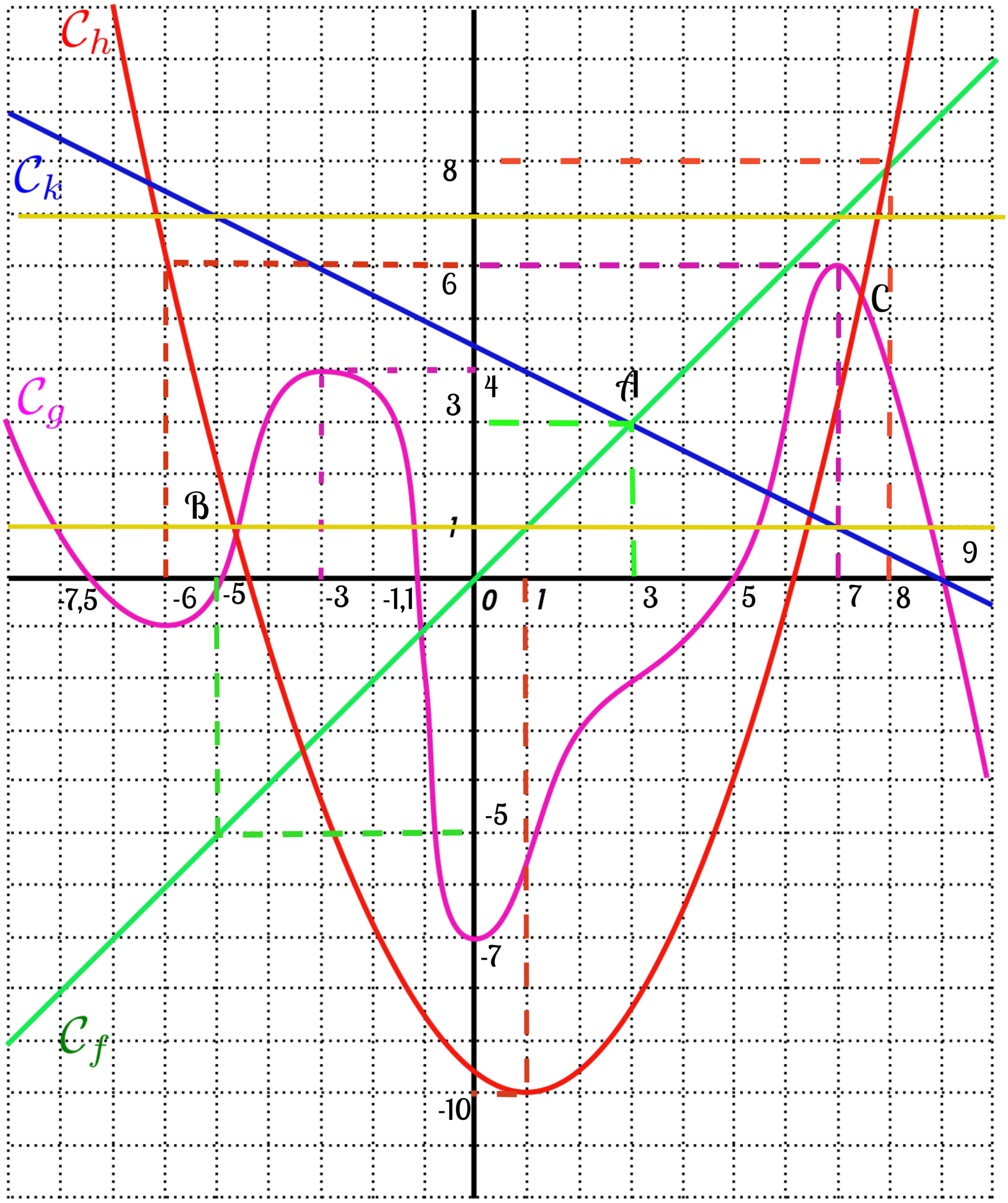
6. Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = k(x)$

7. Quels sont les antécédents de 1 par g ?

8. Quels sont les antécédents de 7 par g ?

9. Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = h(x)$

EXERCICE N° 31 **CORRECTION**



1. $\boxed{f(-5) = -5,\ f(0) = 0 \text{ et } f(3) = 3}$

2. C_f est une droite qui passe par l'origine du repère. f est donc une fonction affine, elle est même linéaire. Elle est de la forme $f(x) = ax$.
Comme $f(3) = 3$ on a $a \times 3 = 3$ et donc $a = 1$.

$\boxed{f(x) = x}$

3. $\boxed{g(-3) = 4,\ g(0) = -7 \text{ et } g(7) = 6}$

4. La courbe représentative de g coupe cinq fois l'axe des abscisses, il y a donc cinq antécédents de 0 sur cet ensemble de définition.

$\boxed{\text{Les antécédents de } 0 \text{ par } g \text{ sont environ : } -7{,}5,\ -5,\ -1{,}1,\ 5 \text{ et } 9}$

5. $\boxed{h(-6) = 6,\ h(1) = -10 \text{ et } h(8) = 8}$

6. Il faut repérer le point d'intersection entre la droite C_f et la droite C_k. Ce point d'intersection a pour coordonnées $A(3;3)$.

L'équation $f(x) = k(x)$ a pour solution 3.

7. Il faut observer l'intersection de la droite horizontale passant par l'ordonnée 1 avec la courbe C_g.
On voit qu'il y a cinq points d'intersection dont les abscisses sont les antécédents cherchés.

Les antécédents de 1 par g sont : -8, $-4,6$, $-1,2$, $5,5$ et $8,8$

8. Il faut observer l'interscetion de la droite horizontale passant par l'ordonnée 7 avec la courbe C_g.
On constate qu'il n'y a aucun point d'intersection sur ce graphique.

7 n'a pas d'antécédent par g dans ce domaine de définition.

9. Il faut déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec C_h.
On constate qu'il y a deux points d'intersection dont les coordonnées sont environ : $B(-4,6,1)$ et $C(7,5;5,5)$.

Les solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ sont donc environ 4,6 et 7,5.

Exercice n° 32 : **Lire le tableau de valeurs d'une fonction** — **Fonctions - Généralités sur les fonctions**

Voici le tableau de valeurs de trois fonctions f, g et h :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	10	8	6	5	5	6	8	10	12
$g(x)$	-11	-8	-4	-5	-4	-8	-4	1	3
$h(x)$	21	18	15	12	9	6	3	0	-3

1.a. Quelle est l'image de -3 par la fonction f ?
1.b. Quelle est l'image de 4 par la fonction g ?
1.c. Quelle est l'image de 0 par la fonction h ?

2.a. Quels sont les antécédents de 6 par la fonction f ?
2.b. Quels sont les antécédents de -4 par la fonction g ?
2.c. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction h ?

3. Déterminer $f(0)$, $g(-3)$ et $h(4)$.

4. Déterminer les solutions de l'équation $g(x) = -8$.

5. On sait que la fonction h est affine. Déterminer l'expression algébrique de cette fonction.

Exercice n° 32 — **Correction**

1.a. L'image de -3 par le fonction f vaut $f(-3) = 8$.

1.b. L'image de 4 par le fonction g vaut $g(4) = 3$.

1.c. L'image de 0 par le fonction h vaut $h(0) = 9$.

2.a. Les antécédents de 6 par f sont -2 et 1 car $f(-2) = 6$ et $f(1) = 6$.

2.b. Les antécédents de -4 par g sont -2, 0 et 2 car $g(-2) = -4$, $g(0) = -4$ et $g(2) = -4$.

2.c. L'antécédent de 0 par h sont 3 car $h(3) = 0$.

3. $f(0) = 5$, $g(-3) = -8$ et $h(4) = -3$.

4. -3 et 1 sont les solutions de l'équation $g(x) = -8$.

5. *On constate en regardant le tableau que quand on avance d'une unité la fonction diminue de trois unités. Le coefficient a est donc égal à 3. Comme l'image de 0 vaut 9, il s'agit certainement de la fonction $h(x) = -3x + 9$*

On sait que $h(x)$ est de la forme $h(x) = ax + b$. On cherche a et b.
$h(0) = 9$, or $h(0) = a \times 0 + b = b$ donc $b = 9$.
Ainsi $h(x) = ax + 9$ et on cherche encore a.

On remarque par exemple que $h(2) = 3$. Nous avons donc $2 \times a + 9 = 3$.
Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
2a+9 &= 3 \\
2a+9-9 &= 3-9 \\
2a &= -6 \\
a &= \frac{-6}{2} \\
a &= -3
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'expression algébrique de la fonction } h \text{ est donc } h(x) = -3x+9}$

Exercice n° 33 : Usage d'un tableur

On note $f : x \to f(x) = 7x - 3$, $\quad g : x \to g(x) = x^2 - 5x + 8 \quad$ et $\quad h(x) = (1-3x)(2x+5)$

Voici un tableau de valeurs de ces trois fonctions ainsi que celui d'une fonction k.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1 x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
2 $f(x)$	-38	-31	-24	-17	-10	-3	4		18	25	32	
3 $g(x)$	58	44	32	22	14	8	4		2	4	8	
4 $h(x)$	-80	-39	-10	7		5	-14	-45	-88	-143	-210	
5 $k(x)$	34	29	24		14	9	4	-1	-6	-11	-17	

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite.

2. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers la droite.

3. Quelle formule a été saisie dans la cellule B4 puis recopiée vers la droite.

4. Dans la cellule B5 a été saisie la formule $= 9 - 5 * \text{B1}$ puis recopiée vers la droite.
Quelle est l'expression de la fonction k.

5. Compléter les cases vides de ce tableau.

Exercice n° 33 — Correction

1. La cellule B2 correspond à la fonction $f(x) = 7x - 3$.

Dans la cellule B2 la formule saisie est $= 7 * \text{B1} - 3$.

2. La cellule B3 correspond à la fonction $g(x) = x^2 - 5x + 8$.

Dans la cellule B3 la formule saisie est $= \text{B1} * \text{B1} - 5 * \text{B1} + 8$ ou $= \text{B1}^2 - 5 * \text{B1} + 8$.

3. La cellule B4 correspond à la fonction $h(x) = (1-3x)(2x+5)$.

Dans la cellule B4 la formule saisie est $= (1 - 3 * \text{B1}) * (2 * \text{B1} + 5)$.

4. L'expression algébrique de la fonction k est $k(x) = 9 - 5x$.

5. Dans la case I2 il faut écrire $f(2) = 7 \times 2 - 3 = 14 - 3 = 11$.

Dans la case I3 il faut écrire $g(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 8 = 4 - 10 + 8 = 2$.

Dans la case F4 il faut écrire $h(-1) = (1 - 3 \times (-1))\,(2 \times (-1) + 5) = (1+3)(-2+5) = 4 \times 3 = 12$.

Dans la case E5 il faut écrire $k(-2) = 9 - 5 \times (-2) = 9 + 10 = 19$.

Exercice n° 34 : **Déterminer l'expression d'une fonction linéaire**

1. On appelle f la fonction linéaire vérifiant $f(3) = 4$.
Quelle est l'expression algébrique de f ?

2. g la fonction qui à un nombre x associe le nombre x augmenté de 12 %.
Quelle est l'expression algébrique de g ?

Exercice n° 34 — Correction

1. La fonction linéaire f est de la forme $f(x) = ax$. On cherche le nombre a.
Comme $f(3) = 4$ et que $f(3) = 3a$, il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 3a &= 4 \\ a &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = \frac{4}{3}x$ ou $f(x) = \frac{4x}{3}$.

2. On sait que augmenter un nombre de 12 % revient à le multiplier par $1 + \frac{12}{100} = 1 + 0,12 = 1,12$.

L'expression algébrique de la fonction g est $g(x) = 1,12x$.

Exercice n° 35 : **Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire**

On pose :

- $f : x \rightarrow 3x$;
- $g : x \rightarrow -2x$;
- $h : x \rightarrow \dfrac{x}{2}$;
- $k : x \rightarrow -x$.

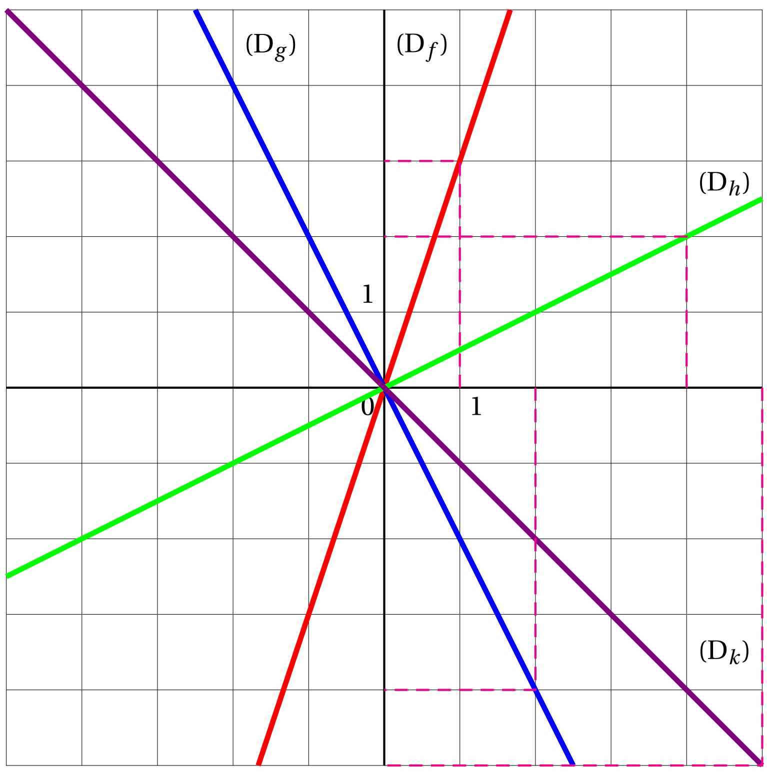
Tracer la représentation graphique de ces fonctions linéaires dans un repère orthonormé.

Exercice n° 35 — Correction

On sait que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.
Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit donc de choisir un nombre, de calculer son image par la fonction puis de placer le point correspondant et enfin de tracer la droite passant par ce point et l'origine.

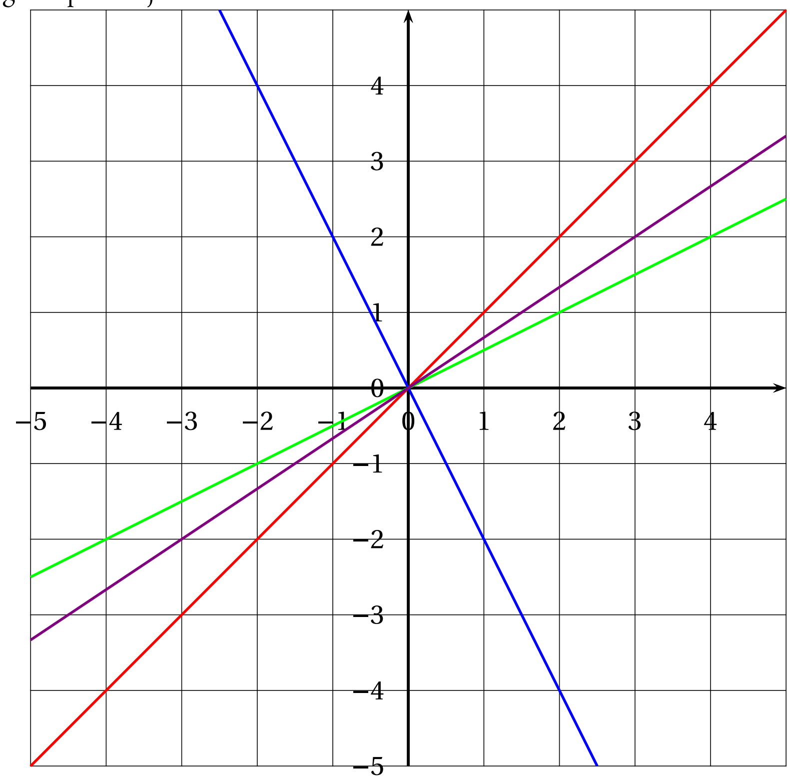
Notons (D_f), (D_g), (D_h) et (D_k) les droites représentatives des fonctions f, g, h et k.

$f(1) = 3$ donc le point de coordonnées $(1;3)$ appartient à la droite (D_f)
$g(2) = -4$ donc le point de coordonnées $(2;-4)$ appartient à la droite (D_g)
$h(4) = 2$ donc le point de coordonnées $(4;2)$ appartient à la droite (D_h)
$k(5) = -5$ donc le point de coordonnées $(5;-5)$ appartient à la droite (D_k)



EXERCICE N° 36 : **Analyser la représentation graphique d'une fonction linéaire**

Voici la représentation graphique de quatre fonctions linéaires.
Indiquer leurs expressions algébriques en justifiant votre raisonnement.



EXERCICE N° 36 **CORRECTION**

Ces trois droites passent par l'origine du repère. Elles représentent donc des fonctions linéaires.

Notons f la fonction représentée par la droite rouge. g la fonction représentée par la droite violette. h la fonction représentée par la droite verte et k la fonction représentée par droite bleue.

La fonction f

La fonction f est de la forme $f(x) = ax$. On cherche la valeur du nombre a
En observant la droite rouge, on constate que $f(3) = 3$ or $f(3) = 3a$.
Il faut résoudre :

$$3a = 3$$
$$a = \frac{3}{3}$$
$$a = 1$$

La droite rouge représente la fonction linéaire $f(x) = x$.

La fonction g

La fonction g est de la forme $g(x) = ax$. On cherche la valeur du nombre a
En observant la droite violette, on constate que $g(3) = 2$ or $g(3) = 3a$.
Il faut résoudre :

$$
\begin{aligned}
3a &= 2\\
a &= \frac{2}{3}\\
a &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{La droite violette représente la fonction linéaire } g(x) = \frac{2}{3}x.}$

La fonction h

La fonction h est de la forme $h(x) = ax$. On cherche la valeur du nombre a
En observant la droite verte, on constate que $h(4) = 2$ or $h(4) = 4a$.
Il faut résoudre :

$$
\begin{aligned}
4a &= 2\\
a &= \frac{2}{4}\\
a &= 0,5
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{La droite verte représente la fonction linéaire } h(x) = 0,5x.}$

La fonction k

La fonction k est de la forme $k(x) = ax$. On cherche la valeur du nombre a
En observant la droite rouge, on constate que $k(-2) = 4$ or $k(-2) = -2a$.
Il faut résoudre :

$$
\begin{aligned}
-2a &= 4\\
a &= \frac{4}{-2}\\
a &= -2
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{La droite bleue représente la fonction linéaire } k(x) = -2x.}$

1. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que $f(0) = -7$ et $f(5) = 13$.

2. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine g telle que $g(0) = 3$ et $g(-4) = -2$.

3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine h telle que $h(-3) = 20$ et $h(5) = -12$.

4. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine k telle que $k(-2) = 5$ et $k(7) = -5$.

EXERCICE N° 37 — CORRECTION

1. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que $f(0) = -7$ et $f(5) = 13$.

f est de la forme $f(x) = ax + b$. Il faut déterminer les nombres a et b.

Comme $f(0) = -7$ et $f(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = -7$.

Ainsi $f(x) = ax - 7$. Or $f(5) = 13$ et $f(5) = 5a - 7$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 5a - 7 &= 13 \\ 5a - 7 + 7 &= 13 + 7 \\ 5a &= 20 \\ a &= \frac{20}{5} \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } f \text{ a pour expression algébrique } f(x) = 4x - 7.}$

Vérifions : $f(0) = -7$ et $f(5) = 4 \times 5 - 7 = 20 - 7 = 13$.

2. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine g telle que $g(0) = 3$ et $g(-4) = -2$.

g est de la forme $g(x) = ax + b$. Il faut déterminer les nombres a et b.

Comme $g(0) = 3$ et $g(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = 3$.

Ainsi $g(x) = ax + 3$. Or $g(-4) = -2$ et $g(-4) = -4a + 3$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} -4a + 3 &= -2 \\ -4a + 3 - 3 &= -2 - 3 \\ -4a &= -5 \\ a &= \frac{-5}{-4} \\ a &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } g \text{ a pour expression algébrique } g(x) = 1{,}25x + 3.}$

Vérifions : $g(0) = 3$ et $g(-4) = 1{,}25 \times (-4) + 3 = -5 + 3 = -2$.

3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine h telle que $h(-3) = 20$ et $h(5) = -12$.

Cet exercice est plus difficile et plus éloigné des exigences du cycle 4.

h est de la forme $h(x) = ax + b$. Il faut déterminer les nombres a et b.

$h(-3) = 20$ et $h(-3) = -3a + b$ ainsi $-3a + b = 20$. En ajoutant $3a$ dans chaque membre on en déduit que $b = 20 + 3a$.

$h(5) = -12$ et $h(5) = 5a + b$ ainsi $5a + b = -12$. En ajoutant $-5a$ dans chaque membre on en déduit que $b = -12 - 5a$.

On arrive ainsi à l'équation :

$$\begin{aligned} 20 + 3a &= -12 - 5a \\ 20 + 3a - 20 &= -12 - 5a - 20 \\ 3a &= -32 - 5a \\ 3a + 5a &= -32 - 5a + 5a \\ 8a &= -32 \\ a &= \frac{-32}{8} \\ a &= -4 \end{aligned}$$

Ainsi $h(x) = -4x + b$. Comme $b = 20 + 3a$ on en déduit que $b = 20 + 3 \times (-4) = 20 - 12 = 8$.

Finalement $\boxed{\text{La fonction } h \text{ a pour expression algébrique } h(x) = -4x + 8.}$

Vérifions : $h(-3) = -4 \times (-3) + 8 = 12 + 8 = 20$ et $h(5) = -4 \times 5 + 8 = -20 + 8 = -12$.

4. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine k telle que $k(-2) = 5$ et $k(7) = -5$.

Cet exercice est plus difficile et plus éloigné des exigences du cycle 4.

k est de la forme $k(x) = ax + b$. Il faut déterminer les nombres a et b.

$k(-2) = 5$ et $k(-2) = -2a + b$ ainsi $-2a + b = 5$. En ajoutant $2a$ dans chaque membre on en déduit que $b = 5 + 2a$.

$k(7) = -5$ et $k(7) = 7a + b$ ainsi $7a + b = -5$. En ajoutant $-7a$ dans chaque membre on en déduit que $b = -5 - 7a$.

On arrive ainsi à l'équation :

$$\begin{aligned} 5 + 2a &= -5 - 7a \\ 5 + 2a - 5 &= -5 - 7a - 5 \\ 2a &= -10 - 7a \\ 2a + 7a &= -10 - 7a + 7a \\ 9a &= -10 \\ a &= \frac{-10}{9} \end{aligned}$$

Ainsi $k(x) = -\frac{10}{9}x + b$. Comme $b = 5 + 2a$ on en déduit que $b = 5 + 2 \times \frac{-10}{9} = 5 - \frac{20}{9} = \frac{45}{9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{9}$.

Finalement $\boxed{\text{La fonction } k \text{ a pour expression algébrique } k(x) = -\frac{10}{9}x + \frac{25}{9}.}$

Vérifions : $k(-2) = -2 \times \frac{-10}{9} + \frac{25}{9} = \frac{20}{9} + \frac{25}{9} = \frac{45}{9} = 5$
$k(7) = 7 \times \frac{-10}{9} + \frac{25}{9} = \frac{-70}{9} + \frac{25}{9} = \frac{-45}{9} = -5$.

EXERCICE N° 38 : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine

FONCTIONS - LES FONCTIONS AFFINES

On pose :

- $f : x \rightarrow 3x - 5$;
- $g : x \rightarrow -2x + 3$;
- $h : x \rightarrow \dfrac{x}{2} - 4$;
- $k : x \rightarrow -x + 4$.
- $l : x \rightarrow -2x - 3$.

Tracer la représentation graphique de ces fonctions affines dans un repère orthonormé.

EXERCICE N° 38

CORRECTION

Les fonctions f, g, h, k et l sont de la forme $x :\rightarrow ax + b$. Elles sont affines et représentées par des droites.
Nous allons calculer l'image de deux points pour chaque fonction et placer les points qui correspondent.

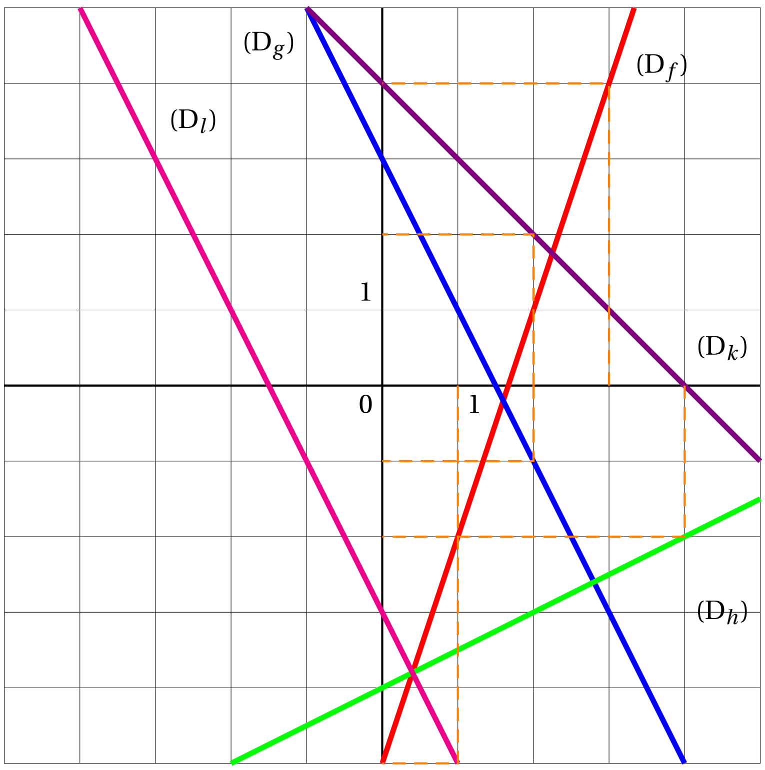
$f(0) = -5$ et $f(3) = 3 \times 3 - 5 = 9 - 5 = 4$. Les points $(0; -5)$ et $(3; 4)$ sont sur la droite qui représente f.

$g(0) = 3$ et $g(2) = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1$. Les points $(0; 3)$ et $(2; -1)$ sont sur la droite qui représente g.

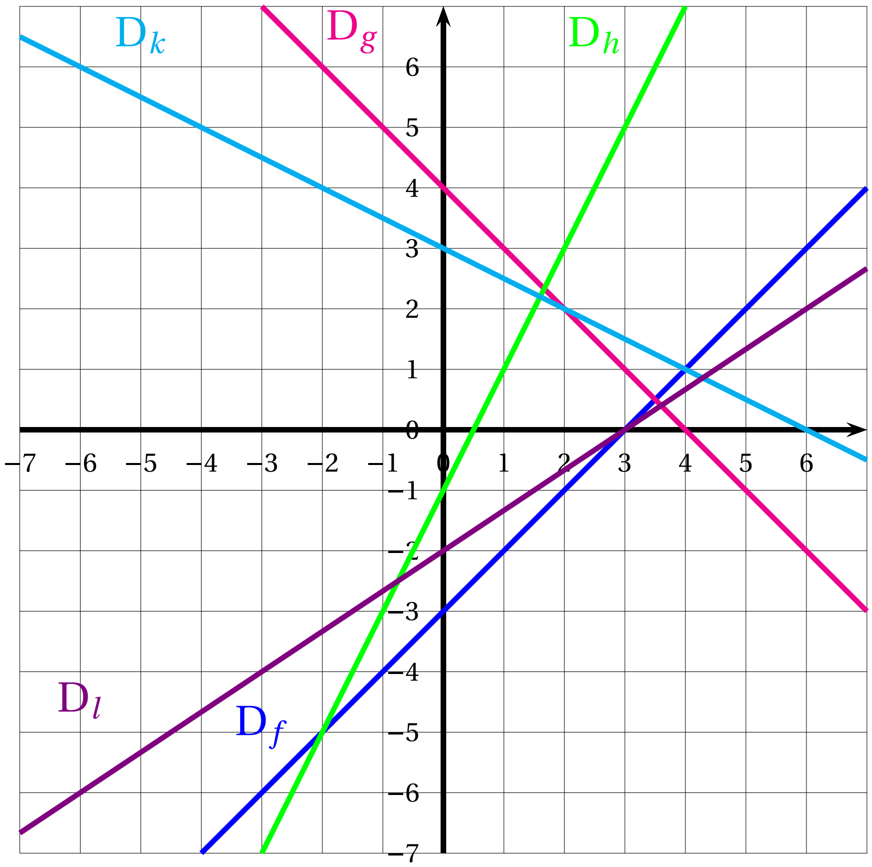
$h(0) = -4$ et $h(4) = \dfrac{4}{2} - 4 = 2 - 4 = -2$. Les points $(0; -4)$ et $(4; -2)$ sont sur la droite qui représente h.

$k(0) = 4$ et $k(2) = -2 + 4 = 2$. Les points $(0; 4)$ et $(2; 2)$ sont sur la droite qui représente k.

$l(0) = -3$ et $l(1) = -2 \times 1 - 3 = -2 - 3 = -5$. Les points $(0; -3)$ et $(1; -5)$ sont sur la droite qui représente l.



EXERCICE N° 39 : **Analyser la représentation graphique d'une fonction affine**



On a représenté graphiquement ci-dessus cinq fonctions affines.

1. Déterminer l'expression algébrique de chacune de ces fonctions affine.

2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la droite D_f et de la droite D_k.

EXERCICE N° 39 **CORRECTION**

On sait que l'expression algébrique d'une fonction affine est de la forme $ax + b$. Il faut donc déterminer le nombre a et le nombre b.

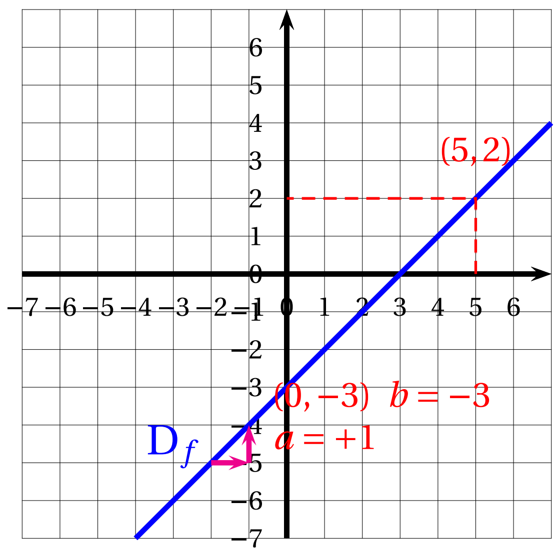
Le nombre a est le coefficient directeur de la droite (cette notion n'est pas exigible en troisième). Il correspond visuelement au déplacement vertical produit par une déplacement horizontal d'une unité positive.

Le nombre b est l'ordonnée à l'origine (vocabulaire non exigible en troisième). Il correspond à l'ordonnée du point d'abscisse zéro sur la droite.

Ce genre d'exercice n'est pas un attendu du cycle 4 et du brevet des collèges. Il me semble cependant utile pour une compréhension plus complète des fonctions affines et est indispensable pour nos futurs élèves de seconde générale.

1. La fonction f

Cette fonction affine a pour expression algébrique $f(x) = ax + b$. On cherche les nombres a et b.



On lit graphiquement que $f(0) = -3$ donc comme $f(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = -3$.

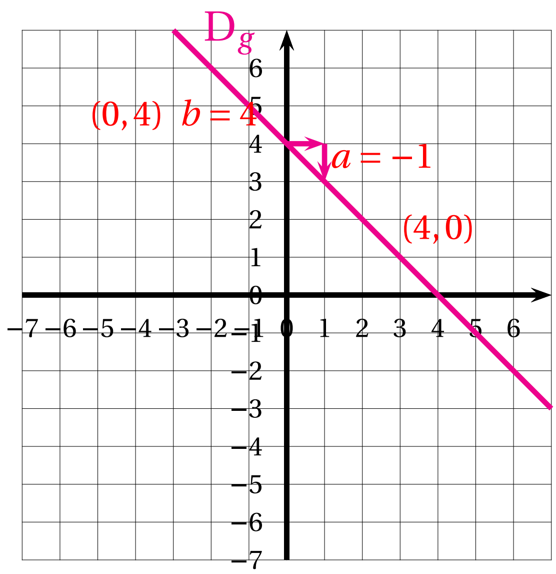
On lit aussi que $f(5) = 2$ (c'est un exemple possible) donc $f(5) = a \times 5 + b = a \times 5 - 3 = 5a - 3$.
Reste à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 5a - 3 &= 2 \\ 5a - 3 + 3 &= 2 + 3 \\ 5a &= 5 \\ a &= \frac{5}{5} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction représentée par } D_f \text{ s'écrit algébriquement } f(x) = x - 3}$

On pouvait lire graphiquement cette expression.
Le point d'abscisse 0 *a bien pour ordonnée* -3.
En se plaçant sur la droite, par exemple au point de coordonnée $(-2, -5)$, *on constate qu'un déplacement horizontal d'une unité positive produit un déplacement d'une unité positive verticale. Le coefficient directeur* a *est donc égal à* 1.

1. La fonction g
Cette fonction affine a pour expression algébrique $g(x) = ax + b$. On cherche les nombres a et b.



On lit graphiquement que $g(0) = 4$ donc comme $g(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = 4$.

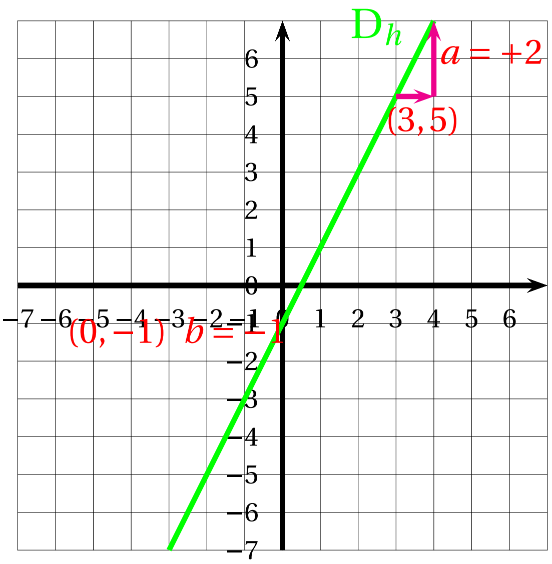
On lit aussi que $g(4) = 0$ (c'est un exemple possible) donc $g(4) = a \times 4 + b = a \times 4 + 4 = 4a + 4$.
Reste à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 4a + 4 &= 0 \\ 4a + 4 - 4 &= 0 - 4 \\ 4a &= -4 \\ a &= \frac{-4}{4} \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction représentée par } \mathrm{D}_g \text{ s'écrit algébriquement } g(x) = -x + 4}$

On pouvait lire graphiquement cette expression.
Le point d'abscisse 0 a bien pour ordonnée 4.
En se plaçant sur la droite, par exemple au point de coordonnée $(0, 4)$, on constate qu'un déplacement horizontal d'une unité positive produit un déplacement d'une unité négative verticale. Le coefficient directeur a est donc égal à -1.

1. La fonction h
Cette fonction affine a pour expression algébrique $h(x) = ax + b$. On cherche les nombres a et b.



On lit graphiquement que $h(0) = -1$ donc comme $h(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = -1$.

On lit aussi que $h(3) = 5$ (c'est un exemple possible) donc $h(3) = a \times 3 + b = a \times 3 - 1 = 3a - 1$.
Reste à résoudre l'équation :

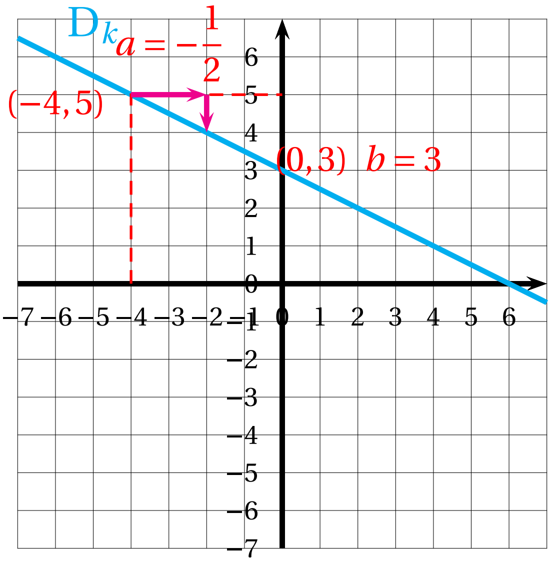
$$\begin{aligned} 3a - 1 &= 5 \\ 3a - 1 + 1 &= 5 + 1 \\ 3a &= 6 \\ a &= \frac{6}{3} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction représentée par } \mathrm{D}_h \text{ s'écrit algébriquement } h(x) = 2x - 1}$

On pouvait lire graphiquement cette expression.
Le point d'abscisse 0 *a bien pour ordonnée* -1.
En se plaçant sur la droite, par exemple au point de coordonnée $(3,5)$, *on constate qu'un déplacement horizontal d'une unité positive produit un déplacement de deux unités positives verticales. Le coefficient directeur* a *est donc égal à* 2.

1. La fonction k

Cette fonction affine a pour expression algébrique $k(x) = ax + b$. On cherche les nombres a et b.



On lit graphiquement que $k(0) = 3$ donc comme $k(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = 3$.

On lit aussi que $k(-4) = 5$ (c'est un exemple possible) donc $k(-4) = a \times (-4) + b = a \times (-4) + 3 = -4a + 3$.
Reste à résoudre l'équation :

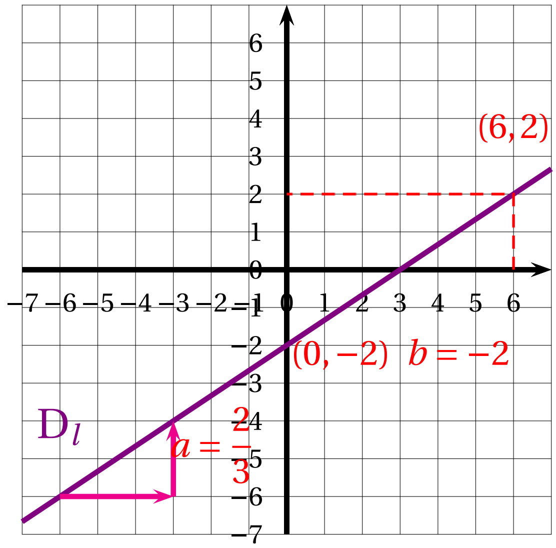
$$\begin{aligned} -4a + 3 &= 5 \\ -4a + 3 {\color{red}-3} &= 5 {\color{red}-3} \\ -4a &= 2 \\ a &= \frac{2}{-4} \\ a &= -0,5 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction représentée par } D_k \text{ s'écrit algébriquement } k(x) = -0,5x + 3}$

On pouvait lire graphiquement cette expression.
Le point d'abscisse 0 *a bien pour ordonnée* 3.
En se plaçant sur la droite, par exemple au point de coordonnée $(-4,5)$, *on constate qu'un déplacement horizontal de unité positive produit un déplacement d'une demi unité négative ou encore qu'un déplacement de deux unités horizontales positives produit un déplacement d'une unité négative verticale. Le coefficient directeur* a *est donc égal à* $-0,5$.

1. La fonction l

Cette fonction affine a pour expression algébrique $l(x) = ax + b$. On cherche les nombres a et b.



On lit graphiquement que $l(0) = -2$ donc comme $l(0) = a \times 0 + b = b$ on en déduit que $b = -2$.

On lit aussi que $l(6) = 2$ (c'est un exemple possible) donc $l(6) = a \times 6 + b = a \times 6 - 2 = 6a - 2$.
Reste à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 6a - 2 &= 2 \\ 6a - 2 {\color{red}+2} &= 2 {\color{red}+2} \\ 6a &= 4 \\ a &= \frac{4}{6} \\ a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction représentée par } D_l \text{ s'écrit algébriquement } l(x) = \frac{2}{3}x - 2}$

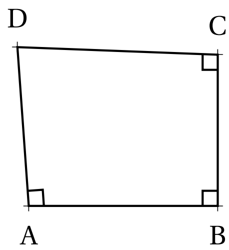
On pouvait lire graphiquement cette expression.
Le point d'abscisse 0 a bien pour ordonnée -2.
En se plaçant sur la droite, par exemple au point de coordonnée $(-6, -6)$, on constate qu'un déplacement horizontal de trois unités positives produit un déplacement de deux unités positives verticales. Le coefficient directeur a est donc égal à $\frac{2}{3}$.

EXERCICE N° 40 : Droites parallèles et perpendiculaires **GÉOMÉTRIE PLANE - BASES DE LA GÉOMÉTRIE**

ABCD un quadrilatère ayant trois angles droits.

Démontrer que ABCD est un rectangle.

EXERCICE N° 40 CORRECTION



On sait qu'un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.
Pour l'instant nous savons qu'il y en a trois. Nous supposerons qu'il s'agit des sommets A, B et C.

On sait aussi que :

- **Propriété 1 :** Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles ;
- **Propriété 2 :** Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une des droites est perpendiculaire à l'autre.

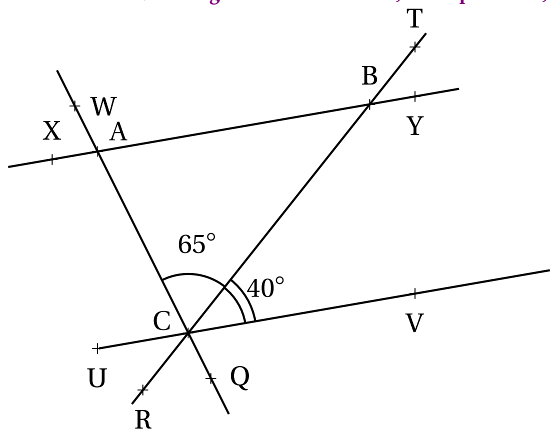
Comme (AB) $\perp$ (BC) et que (DC) $\perp$ (BC) les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires à une même droite. D'après la **Propriété 1** alors ces deux droites sont parallèles, c'est à dire (AB)//(DC).

On sait aussi que (AD) $\perp$ (AB) et que (AB)//(DC), d'après la **Propriété 2** comme (AD) est perpendiculaire à deux droites parallèles elle est perpendiculaire à chacune d'entre elle. Ainsi (AD) $\perp$ (DC).

Il y a donc un quatrième angle droit au sommet D, on en déduit que $\boxed{\text{ABCD est un rectangle.}}$

Exercice n° 41 : Angles alternes-internes, correspondants, opposés par le sommet

Géométrie plane - Bases de la géométrie



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— (AB)//(CV) ;

— $\widehat{ACB} = 65°$;

— $\widehat{BCV} = 40°$.

En justifiant votre réponse calculez la mesure des angles suivants :
$\widehat{ABC}$ — $\widehat{TBY}$ — $\widehat{ABT}$ — $\widehat{YBC}$ — $\widehat{ACU}$ — $\widehat{UCR}$ — $\widehat{RCQ}$ — $\widehat{QCV}$

Exercice n° 41 — Correction

— Comme les droites (AB) et (CV) sont parallèles, les **angles alterne-interne** $\widehat{BCV}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux. Ainsi $\boxed{\widehat{ABC} = 40°}$;

— On peut dire que l'angle $\widehat{TBY}$ et l'angle $\widehat{ABC}$ sont **opposés par le sommet**, ils sont donc égaux. Ainsi $\boxed{\widehat{TBY} = 65°}$. On peut aussi utiliser le fait que les angles $\widehat{BCV}$ et l'angle $\widehat{TBY}$ sont **correspondants**. Comme les droites sont parallèles, ils sont égaux ;

— Les angles $\widehat{ABT}$ et $\widehat{TBY}$ sont **supplémentaires** (cela signifie que leur somme vaut 180°. Ainsi $\boxed{\widehat{ABT} = 180° - 65° = 115°}$;

— $\widehat{YBC}$ et $\widehat{ABT}$ sont **opposés par le sommet**, ils sont donc égaux. $\boxed{\widehat{YBC} = 115°}$;

— Les angles $\widehat{ACU}$ et $\widehat{ACV}$ sont **supplémentaires**. Or $\widehat{ACV} = 65° + 40° = 105°$ donc $\boxed{\widehat{ACU} = 180° - 105° = 75°}$;

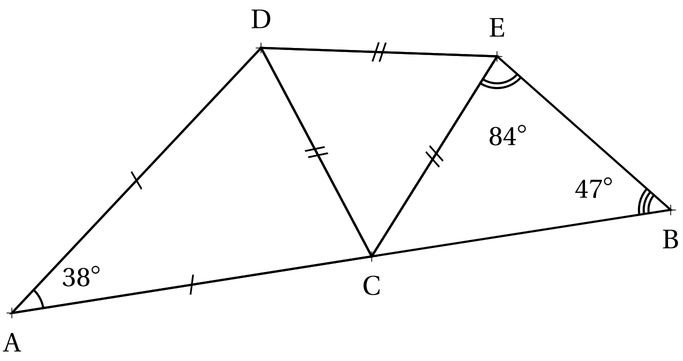
— $\widehat{UCR}$ et $\widehat{ABC}$ sont **correspondants** et les droites (AB) et (CV) sont parallèles donc $\boxed{\widehat{UCR} = 40°}$;

— $\widehat{RCQ}$ et $\widehat{ACB}$ sont **opposés par le sommet**, ils sont donc égaux. $\boxed{\widehat{RCQ} = 65°}$;

— $\widehat{QCV}$ et $\widehat{ACU}$ sont **opposés par le sommet**, ils sont donc égaux. $\boxed{\widehat{QCV} = 75°}$.

EXERCICE N° 42 : Angles et triangles

GÉOMÉTRIE PLANE - BASES DE LA GÉOMÉTRIE



Sur la figure ci-dessus, qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— ACD est isocèle en A et CDE est équilatéral ;

— $\widehat{DAC} = 38°$, $\widehat{CBE} = 49°$, $\widehat{BEC} = 84°$;

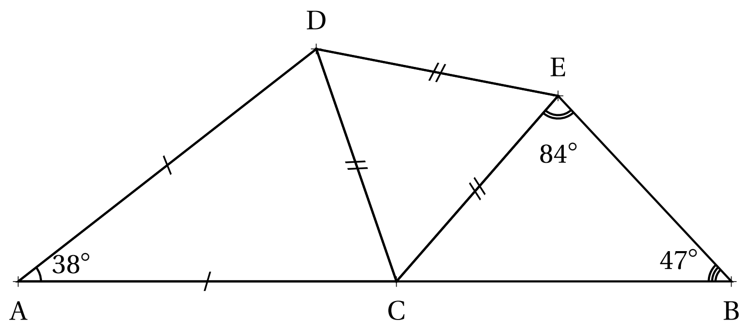
— $AC = 10\ cm$.

1. Tracer la figure ci-dessus en vraie grandeur.

2. Les points A, C et B sont-ils alignés ?

EXERCICE N° 42 — CORRECTION

1.



2. Pour démontrer que les points A, C et B sont alignés, il faut vérifier la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Dans le triangle BCE on sait que $\widehat{ECB} + \widehat{CEB} + \widehat{CBE} = 180°$ donc $\widehat{ECB} + 47° + 84° = 180°$.
$\widehat{ECB} + 131° = 180°$ d'où $\widehat{ECB} = 180° - 131° = 49°$.

Le triangle CDE est équilatéral. Les trois angles sont donc égaux. Comme la somme des trois angles vaut 180°, chacun mesure $\dfrac{180°}{3} = 60°$.

Le triangle CAD est isocèle en A donc les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux.
Dans ce triangle, la somme des trois angles mesure 180°, il reste donc $180° - 38° = 142°$.
Ainsi $\widehat{ACD} = \dfrac{142°}{2} = 71°$.

Finalement, les angles $\widehat{ACD}$, $\widehat{DCE}$ et $\widehat{ECB}$ sont adjacents (ils sont un côté commun) donc $\widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} + \widehat{ECB} = 71° + 60° + 49° = 180°$.

$\boxed{\text{L'angle } \widehat{ACB} \text{ est plat, les points A, C et B sont alignés !}}$

Exercice n° 43 : **Les parallélogrammes**

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

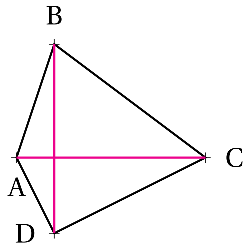
Affirmation n° 1 : Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.
Affirmation n° 2 : Si un parallèlogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.
Affirmation n° 3 : Si un quadrilatère a des côtés opposés deux à deux de même longueur alors c'est un parallélogramme.
Affirmation n° 4 : Si un losange a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.
Affirmation n° 5 : Si un quadrilatère est un carré alors c'est un losange.
Affirmation n° 6 : Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un carré.
Affirmation n° 7 : Si un quadrilatère a un axe de symétrie alors c'est un parallélogramme.
Affirmation n° 8 : Si un quadrilatère a deux axes de symétries alors c'est un losange.

Exercice n° 43 — Correction

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Affirmation n° 1 : Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

On sait qu'un rectangle a des diagonales de même longueur. On sait aussi qu'un parallélogramme ayant des diagonales de même longueur est un rectangle.
Si les diagonales sont de même longueur, elles ne se coupent pas forcément en leur milieu. Par exemple :

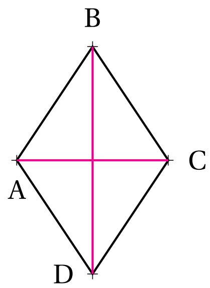


ABCD a des diagonales de même longueur et pourtant ce n'est pas un rectangle !

Affirmation n° 1 : Fausse

Affirmation n° 2 : Si un parallèlogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.

On sait que si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.
Un losange n'est pas forcément un carré.
Par exemple :



Affirmation n° 2 : Fausse

Affirmation n° 3 : Si un quadrilatère a des côtés opposés deux à deux de même longueur alors c'est un parallélogramme.

C'est une propriété caractéristique des parallélogrammes.

Affirmation n° 3 : Vraie

Affirmation n° 4 : Si un losange a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

Un losange est un parallélogramme. On sait qu'un parallélogramme ayant des diagonales de même longueur est un rectangle.

$\boxed{\textbf{Affirmation n° 4 :} \text{ Vraie}}$

Ajoutons que ce losange est un rectangle, il s'agit donc d'un carré ! Un carré est un losange et un rectangle.

Affirmation n° 5 : Si un quadrilatère est un carré alors c'est un losange.

Oui, un carré a des côtés de même longueur donc c'est un losange.

$\boxed{\textbf{Affirmation n° 5 :} \text{ Vraie}}$

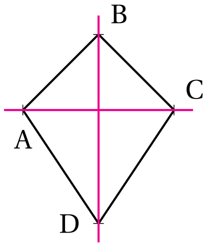
Affirmation n° 6 : Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un carré.

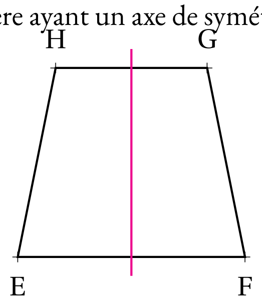
Un rectangle n'est pas forcément un carré.

$\boxed{\textbf{Affirmation n° 6 :} \text{ Fausse}}$

Affirmation n° 7 : Si un quadrilatère a un axe de symétrie alors c'est un parallélogramme.

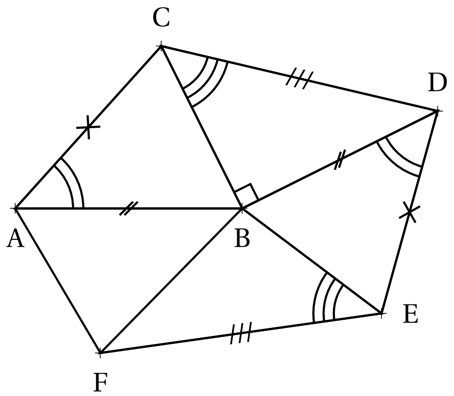
Le parallélogramme a un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie.
Le trapèze isocèle et le cerf-volant sont un exemple de quadrilatère ayant un axe de symétrie sans être un parallélogramme.





$\boxed{\textbf{Affirmation n° 7 :} \text{ Fausse}}$

Exercice n° 44 : Cas d'égalité des triangles



En utilisant les codages de la figure ci-contre, démontrer que le triangle ABF est isocèle et que le triangle FBE est rectangle.

Exercice n° 44 — Correction

On remarque que le triangle ABC et le triangle BDE ont deux paires de côtés égaux et l'angle adjacent à ces deux côtés qui sont de même mesure.
On en déduit que les triangles ABC et BDE sont égaux, c'est à dire parfaitement superposable.

Conséquence de ce résultat, nous avons BC = BE.

Le triangle BCD et le triangle BFE ont deux paires de côtés égaux et l'angle adjaccent à ces deux côtés qui sont de même mesure.
On en déduit que les triangles BCD et BDE sont égaux.

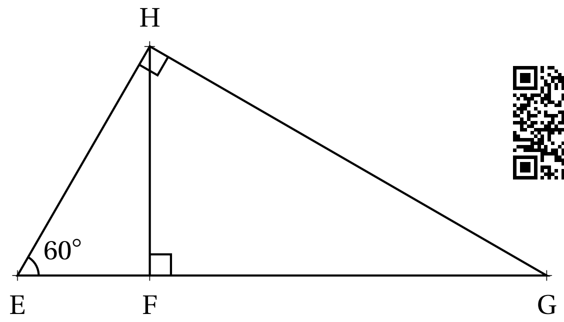
Ainsi $\boxed{\text{le triangle BFE est rectangle en B.}}$

De plus, les côtés [BF] et [BD] sont égaux.

Comme AB = BD et BD = BF on arrive à AB = BF. $\boxed{\text{Le triangle ABF est isocèle en B.}}$

Exercice n° 45 : Triangles semblables

La figure ci-contre n'est pas dessinées en vraie grandeur.



- EHG est rectangle en H ;
- F ∈ [EG] ;
- EG = 10 cm.

1. Calculer la mesure des angles : $\widehat{EFH}$, $\widehat{EHF}$, $\widehat{HGF}$ et $\widehat{FHG}$.

2. En déduire que les triangles EHG, EHF et HFG sont semblables.

3. Calculer les longueurs : EH, HG, EF, FG et FH.

4. Déterminer le coefficient d'agrandissement réduction qui permet de passer du triangle EHG au triangle HFG, puis celui qui permet de passer du triangle EHG au triangle HEF.

5. Déterminer les aires des triangles EHG, HFG et HEF. Que remarquez-vous ?

Exercice n° 45 — Correction

1. Comme F ∈ [EG], on sait que l'angle $\widehat{EFG}$ est plat. On sait aussi que le triangle HFG est rectangle en F donc $\boxed{\text{l'angle } \widehat{EFH} = 90°}$

Dans le triangle EHF, on sait que la somme des angles vaut 180° ou plus simplement que deux angles aigus dans un triangle rectangle sont complémentaires (cela signifie que leur somme vaut 90°.).

Ainsi $\boxed{\widehat{AHF} = 90° - 60° = 30°}$

Dans le triangle EHG rectangle en H, les angles $\widehat{HEG}$ et $\widehat{HGF}$ sont complémentaires.

Donc $\boxed{\widehat{HGF} = 90° - 60° = 30°}$

Dans le triangle FHG rectangle en F, les angles $\widehat{FHG}$ et $\widehat{FGH}$ sont complémentaires.

Donc $\boxed{\widehat{FHG} = 90° - 30° = 60°}$

2. Les angles du triangle EHG mesurent respectivement 90°, 60° et 30°.
Les angles du triangle EHF mesurent respectivement 90°, 60° et 30°.
Les angles du triangle HFG mesurent respectivement 90°, 60° et 30°.

$\boxed{\text{Ces triangles ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont semblables !}}$

3. Calcul de EH.
Dans le triangle EHG rectangle en H,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EG] qui mesure 10 cm et on cherche la mesure du côté adjacent à l'angle $\widehat{HEG}$, le côté [EH].

$\cos 60° = \dfrac{EH}{10\,\text{cm}}$ donc $\boxed{EH = 10\,\text{cm} \times \cos 60° = 5\,\text{cm}}$

Calcul de HG
Dans le triangle EHG rectangle en H,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EG] qui mesure 10 cm et on cherche la mesure du côté opposé à l'angle $\widehat{HEG}$, le côté [HG].

Il vaut mieux repartir des mesures données dans l'exercices plutôt que de celle trouvée précédemmen. Cela évite le cumul d'erreur !

$\sin 60° = \dfrac{HG}{10\,\text{cm}}$ donc $\boxed{HG = 10\,\text{cm} \times \sin 60° \approx 8{,}66\,\text{cm}}$

Calcul de EF

Dans le triangle HEF rectangle en F,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EH] qui mesure 5 cm et on cherche la mesure du côté adjacent à l'angle $\widehat{HEF}$, le côté [EF].

$\cos 60° = \dfrac{EF}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{EF = 5\,\text{cm} \times \cos 60° = 2{,}5\,\text{cm}}$

Calcul de FG

Comme les points E, F et G sont alignés, $\boxed{\text{FG} = \text{EG} - \text{EF} = 10\,\text{cm} - 2{,}5\,\text{cm} = 7{,}5\,\text{cm}}$.

Calcul de FH

Dans le triangle HEF rectangle en F,
On connaît la mesure de l'hypoténuse du triangle, le côté [EH] qui mesure 5 cm et on cherche la mesure du côté opposé à l'angle $\widehat{\text{HEF}}$, le côté [FH].

$\sin 60° = \dfrac{\text{FH}}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{\text{FH} = 5\,\text{cm} \times \sin 60° \approx 4{,}33\,\text{cm}}$.

4. Comme les triangles EHG et HFG sont semblables, HFG est un réduction du triangle EHG. Il existe donc un coefficient multiplicateur de réduction qui permet de passer des longueurs de EHG à celles de HFG.

En observant les plus grands côtés de ces triangles, on en déduit que le côté [EG] du triangle EHG correspond au côté de [HG] du triangle HFG.

Comme $\dfrac{\text{HG}}{\text{EG}} = \dfrac{8{,}66\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} \approx 0{,}866$, $\boxed{\text{le coefficient de réduction vaut environ } 0{,}866.}$

En passant par les valeurs exactes on arrive à : $\dfrac{\text{HG}}{\text{EG}} = \dfrac{10\,\text{cm} \times \sin 60°}{10\,\text{cm}} = \sin 60°$.

Le coefficient de réduction vaut exactement $\sin 60°$.

Comme les triangles EHG et HEF sont semblables, HEF est un réduction du triangle EHG. Il existe donc un coefficient multiplicateur de réduction qui permet de passer des longueurs de EHG à celles de HEF.

En observant les plus grands côtés de ces triangles, on en déduit que le côté [EG] du triangle EHG correspond au côté de [EF] du triangle HEF.

Comme $\dfrac{\text{HF}}{\text{EG}} = \dfrac{5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 0{,}5$, $\boxed{\text{le coefficient de réduction vaut } 0{,}5.}$

En passant par les valeurs exactes on arrive à : $\dfrac{\text{HF}}{\text{EG}} = \dfrac{10\,\text{cm} \times \cos 60°}{10\,\text{cm}} = \cos 60°$.

Le coefficient de réduction vaut exactement $\cos 60°$.

5. Ces trois triangles sont rectangles. Les côtés de l'angle droit sont donc respectivement une base et une hauteur de ces triangle.

$Aire(\text{EHG}) = \dfrac{\text{HE} \times \text{HG}}{2} = \dfrac{5\,\text{cm} \times 8{,}66\,\text{cm}}{2} = \dfrac{43{,}3\,\text{cm}^2}{2} \approx 21{,}65\,\text{cm}^2$

$Aire(\text{HFG}) = \dfrac{\text{FH} \times \text{FG}}{2} = \dfrac{4{,}33\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}}{2} = \dfrac{32{,}475\,\text{cm}^2}{2} \approx 16{,}24\,\text{cm}^2$

$Aire(\text{EHF}) = \dfrac{\text{FH} \times \text{FE}}{2} = \dfrac{4{,}33\,\text{cm} \times 2{,}5\,\text{cm}}{2} = \dfrac{10{,}825\,\text{cm}^2}{2} \approx 5{,}41\,\text{cm}^2$

On remarque que $Aire(\text{EHG}) = 4 \times Aire(\text{EHF})$.

C'est une conséquence du résultat sur le coefficient de réductions des aires.

On sait que **Si les longueurs d'une figure sont multipliées par un coefficient positif d'agrandissement/réduction k alors les aires de cette figures sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.**

Comme l'un des coefficients est ici $0{,}5$ soit $\dfrac{1}{2}$, le carré vaut $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Exercice n° 46 : **La symétrie axiale**

1. Tracer un triangle équilatéral ABC tel que AB = 5 cm.

2.a. Construire le point D symétrique du point A par rapport à la droite (BC).
2.b. Construire le point E symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
2.c. Construire le point F symétrique du point C par rapport à la droite (AB).

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la position des points A, B et C dans le triangle DEF.

4.a. Démontrer que AC = CD et que AB = BD.
4.b. Que dire du quadrilatère ACDB ?

5. Démontrer de même que ABCE et que CAFB sont des losanges.

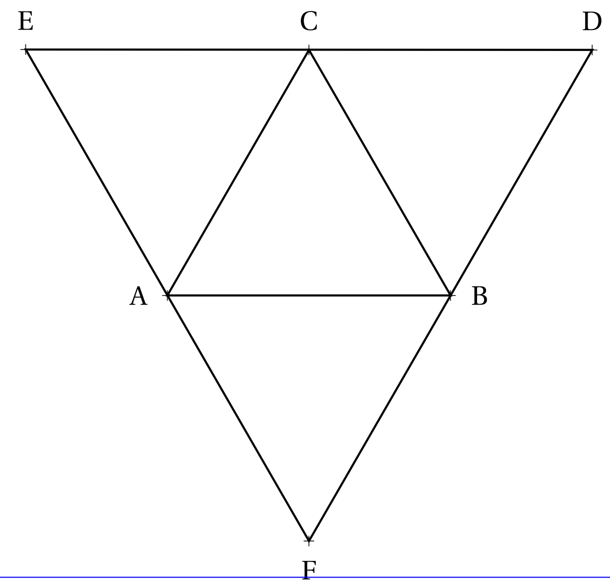
6. Démontrer la conjecture observée à la question **3.**.

7.a. Que dire du triangle DEF ?
7.b. Exprimer l'aire du triangle DEF en fonction de celle du triangle ABC.

8.a. Quelle transformation géométrique transforme le triangle ACE en le triangle BCD ?
8.b. Quelle transformation géométrique transforme le triangle ACE en le triangle ABF ?
8.c. Quelle transformation géométrique transforme le triangle BCD en le triangle ABF ?

Exercice n° 46 **Correction**

1. 2.a.b.c.



3. Il semble que les points A, B et C soient les milieux respectifs des segments [EF], [DF] et [ED].

4.a. Considérons la symétrie axiale d'axe (CB).
D est l'image de A, C est l'image de C et B est l'image de B.
Ainsi le segment [AC] a pour image le segment [DC] et le segment [AB] a pour image le segment [DB].

On sait que **la symétrie axiale conserve la mesure des longueurs** *c'est une isométrie... hors programme...* .

On en déduit que les segments et leurs images ont la même longueur, AC = DC et AB = DB .

4.b. Dans le quadrilatère ACDB on sait que AC = CD et que AB = BD.
Comme ABC est un triangle équilatéral on sait aussi que AB = BC = CA.
Finalement AC = CD = AB = BD, le quadrilatère ACDB a quatre côtés égaux, ACDB est un losange.

5. Nous allons reproduire le raisonnement précédent deux fois de suite !

Considérons la symétrie axiale d'axe (CA).
E est l'image de B, C est l'image de C et A est l'image de A.
Ainsi le segment [BC] a pour image le segment [EC] et le segment [BA] a pour image le segment [EA].

On sait que **la symétrie axiale conserve la mesure des longueurs** *c'est une isométrie... hors programme...* .

On en déduit que les segments et leurs images ont la même longueur, $\boxed{BC = EC \text{ et } BA = EA}$.

Dans le quadrilatère ECBA on sait que BC = EC et que BA = EA.
Comme ABC est un triangle équilatéral on sait aussi que AB = BC = CA.
Finalement BC = EC = BA = EA, le quadrilatère ECBA a quatre côtés égaux, $\boxed{\text{ECBA est un losange.}}$

Considérons la symétrie axiale d'axe (AB).
F est l'image de C, A est l'image de A et B est l'image de B.
Ainsi le segment [CB] a pour image le segment [FB] et le segment [CA] a pour image le segment [FA].

On sait que **la symétrie axiale conserve la mesure des longueurs** *c'est une isométrie... hors programme...* .

On en déduit que les segments et leurs images ont la même longueur, $\boxed{CB = FB \text{ et } CA = FA}$.

Dans le quadrilatère ACBF on sait que CB = FB et que CA = FA.
Comme ABC est un triangle équilatéral on sait aussi que AB = BC = CA.
Finalement CB = FB = CA = FA, le quadrilatère ACBF a quatre côtés égaux, $\boxed{\text{ACBF est un losange.}}$

6. Nous venons de démontrer que ABCE et ABDC sont des losanges.
On en déduit d'abord que la droite (AB) est parallèle aux droites (EC) et (CD).
On sait que **si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**, les droites (EC) et (CD) sont donc parallèles.
Comme ces deux droites ont un point commun, le point C, on en déduit que les points D, C et E sont alignés.

On en déduit aussi que AB = EC = CD. Cela prouve que $\boxed{\text{C est le milieu du segment [ED].}}$

Nous allons recommencer deux fois cette démonstration...

Nous venons de démontrer que ACDB et ACBF sont des losanges.
On en déduit d'abord que la droite (AC) est parallèle aux droites (BD) et (BF).
On sait que **si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**, les droites (BD) et (BF) sont donc parallèles.
Comme ces deux droites ont un point commun, le point B, on en déduit que les points B, D et F sont alignés.

On en déduit aussi que AC = BD = BF. Cela prouve que $\boxed{\text{B est le milieu du segment [DF].}}$

Nous venons de démontrer que ABCE et ACBF sont des losanges.
On en déduit d'abord que la droite (CB) est parallèle aux droites (EA) et (AF).
On sait que **si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**, les droites (EA) et (AF) sont donc parallèles.
Comme ces deux droites ont un point commun, le point A, on en déduit que les points A, E et F sont alignés.

On en déduit aussi que CB = EA = AF. Cela prouve que $\boxed{\text{A est le milieu du segment [EF].}}$

7. Nous venons de prouver que AE = AF = BC, que BD = BF = AC et que CD = CE = AB.
Comme le triangle ABC est équilatéral on sait que AB = BC = CA.
Ainsi AE = AF = BD = BF = CD = CE

Comme DE = 2 × CD, EF = 2 × AE et DF = 2 × BD on arrive à DE = EF = FD.

$\boxed{\text{Le triangle DEF est équilatéral !}}$

8.a. Comme ABCE et ABDC sont des parallélogrammes on en déduit que

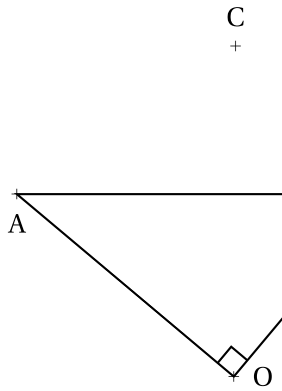
$\boxed{\text{BCD est l'image de ACE par la translation qui transforme A en B.}}$

8.b. Comme ABCE et ACBF sont des parallélogrammes on en déduit que

$\boxed{\text{ABF est l'image de ACE par la translation qui transforme C en B.}}$

8.c. Comme ACDB et ACBF sont des parallélogrammes on en déduit que

$\boxed{\text{ABF est l'image de BCD par la translation qui transforme C en A.}}$



Sur la figure ci-contre qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

— $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 3\,\text{cm}$ et $BC = 2\,\text{cm}$;

— ABO est rectangle en O;

— $\widehat{ABO} = 50°$;

1. Tracer cette figure.

2. Tracer le symétrique du triangle ABC par la symétrie d'axe (OB). Nommer $A_1B_1C_1$ le triangle résultat.

3. Tracer le symétrique du triangle $A_1B_1C_1$ par la symétrie d'axe (OA). Nommer $A_2B_2C_2$ le triangle résultat.

4.a. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle $A_2B_2C_2$?

4.b. Démontrer que le triangle CC_1C_2 est rectangle.

4.c. On note I l'intersection des droites (OA) et C_1C_2. Démontrer que les triangles C_2IO et C_2C_1C sont semblables.

4.d. Quelle transformations géométrique permet de passer du triangle OC_2I au triangle CC_1C_2. Justifier votre réponse

4.e. Démontrer la conjecture de la question **4.a.**.

Exercice n° 47 — Correction

4.a. $\boxed{\text{Il semble que le triangle } A_2B_2C_2 \text{ soit le symétrique de ABC par rapport à O.}}$

4.b. Par définition de la symétrie axiale, comme C_1 est le symétrique de C par rapport à (OB), on en déduit que (OB) est la médiatrice de $[CC_1]$. En particulier $(OB) \perp (CC_1)$.

De même, comme C_2 est le symétrique de C_1 par rapport à (OA), (OA) est la médiatrice de $[C_1C_2]$. En particulier $(OA) \perp (C_1C_2)$.

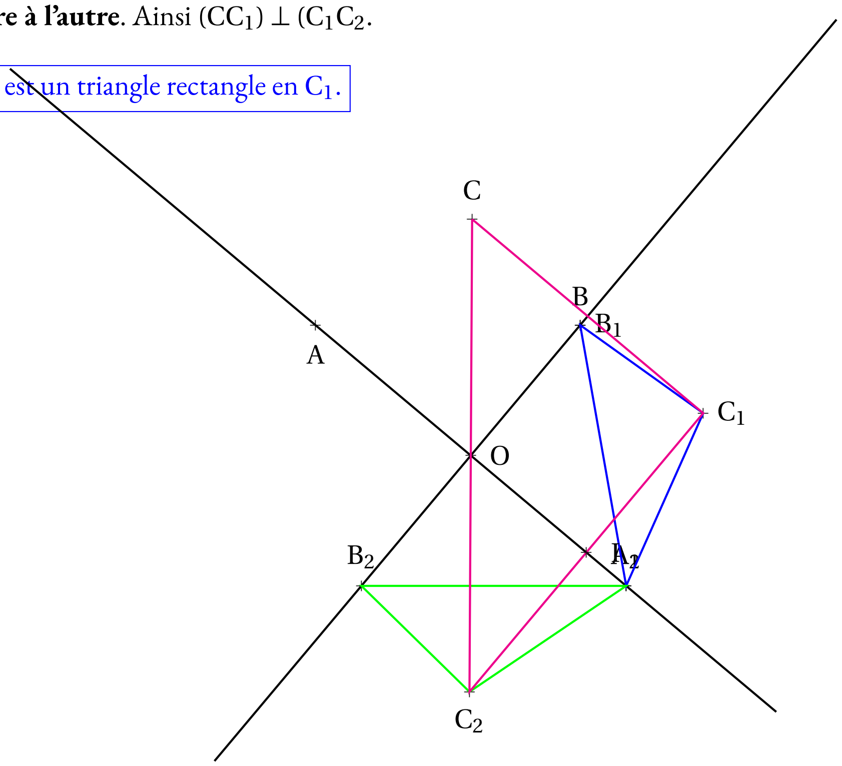
Or on sait que $(OA) \perp (OB)$.

Comme $(OB) \perp (OA)$ et que $(OB) \perp (CC_1)$, on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles**. Ainsi $(OA)//(CC_1)$.

Donc $(OA)//(CC_1)$ et (OA)ă $\perp (C_1C_2)$, on sait que **si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre**. Ainsi $(CC_1) \perp (C_1C_2$.

$\boxed{\text{Le triangle } CC_1C_2 \text{ est un triangle rectangle en } C_1.}$

1. 2. 3.



4.c. On sait que (OA)ă $\perp$ (C_1C_2), le triangle OIC_2 est donc rectangle en I.
On remarque que le triangle CC_1C_2 et OIC_2 sont rectangles et ont l'angle $\widehat{OC_2I}$ en commun. Leur troisièmes angle est donc égal puisqu'il est égal à l'écart entre 180° et la somme des deux autres.

Les triangles CC_1C_2 et OIC_2 ont donc leurs trois angles égaux. Les triangles CC_1C_2) et OIC_2 sont semblables.

4.d. Comme CC_1C_2 et OIC_2 sont semblables, le triangle CC_1C_2 est un agrandissement du triangle OIC_2.
De plus on remarque que le sommet C_2 est commun au deux triangles.

Ainsi CC_1C_2 est l'image de OIC_2 par une homothétie de centre C_2 dont il reste à déterminer le coefficient.

Comme C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à (OA), (OA) est la médiatrice de $[C_1C_2]$ et I est le milieu de $[C_1C_2]$.

Donc $\dfrac{C_2C_1}{C_2I} = 2$.

Il s'agit de l'homothétie de centre C_2 et de coefficient 2.

4.e. Nous arrivons enfin au fait que l'image du point O par l'homothétie de centre C_2 et de coefficient 2 est le point C.
Cela a deux conséquences :

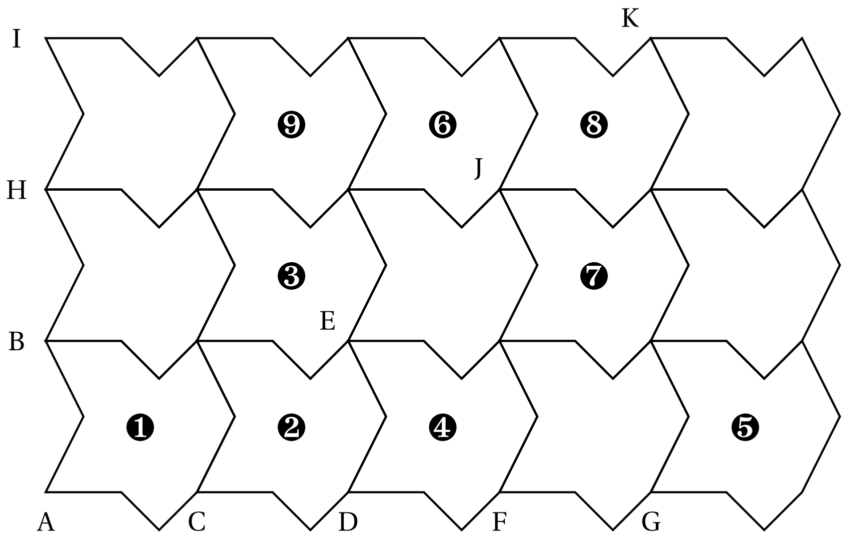
- Les points C_2, O et C sont alignés;
- $C_2C = 2C_2I$, ce qui signifie que O est le milieu de $[CC_2]$.

Le point C_2 est le symétrique de C par rapport à O.

Nous venons de démontrer que la succession (la composée) de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale. Plus généralement, la composée de deux symétrie axiales d'axes sécants est une rotation dont le centre est l'intersection et l'angle le double de l'angle des deux droites.

EXERCICE N° 48 : **La translation** — **GÉOMÉTRIE PLANE - TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES**

Voici un pavage réalisé à partir d'un motif noté ❶ :



1. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❶** au **Motif ❷** ?
2. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❶** au **Motif ❸** ?
3. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❶** au **Motif ❹** ?
4. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❺** au **Motif ❸** ?
5. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❻** au **Motif ❹** ?
6. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❻** au **Motif ❺** ?
7. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❸** au **Motif ❺** ?
8. Quelle est l'image du **Motif ❷** par la translation qui transforme D en J ?
9. Quelle est l'image du **Motif ❸** par la translation qui transforme A en D ?
10. Quelle est l'image du **Motif ❻** par la translation qui transforme H en A ?
11. Quelle est l'image du **Motif ❶** par la translation qui transforme A en G ?
12. Quelle est l'image du **Motif ❺** par la translation qui transforme F en H ?
13. Quelle est l'image du **Motif ❼** par la translation qui transforme E en H ?
14. Quelle est l'image du **Motif ❷** par la translation qui transforme K en J ?

EXERCICE N° 48 — CORRECTION

Il y a de nombreuses manières de définir un translation dans cette situation. Par exemple la translation qui transforme A en C est la même que celle qui transforme C en D ou F en G... On ne donnera qu'une seule possibilité dans la correction.

1. La translation qui transforme A en C . **2.** La translation qui transforme C en E

3. La translation qui transforme A en D . **4.** La translation qui transforme D en B

5. La translation qui transforme J en F . **6.** La translation qui transforme H en D

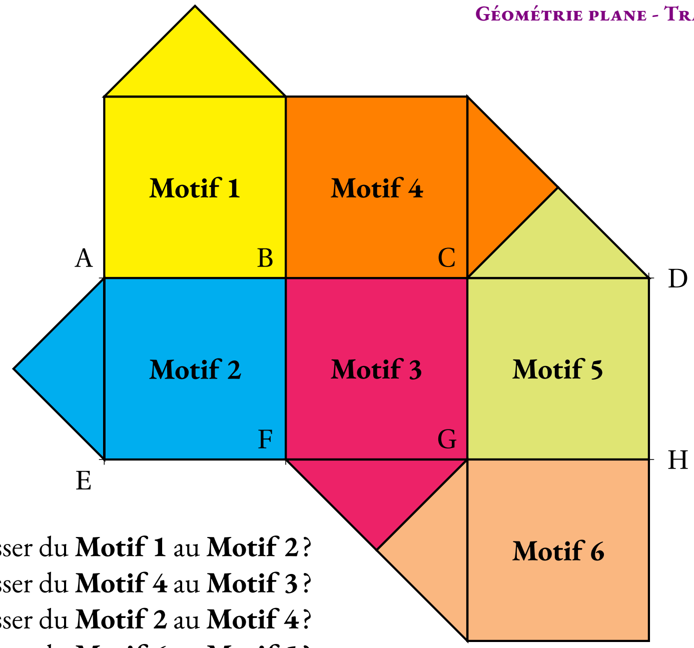
7. La translation qui transforme B en F .

8. Le **Motif ❼** .**9.** Le **Motif ❽** . **10.** Le **Motif ❺** . **11.** Le **Motif ❻** .**12.** Le **Motif ❾** . **13.** Le **Motif ❾** .

14. Ce motif n'est pas dessiné sur ce pavage.

EXERCICE N° 49 : La rotation

GÉOMÉTRIE PLANE - TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES



1. Quelle transformation permet de passer du **Motif 1** au **Motif 2** ?
2. Quelle transformation permet de passer du **Motif 4** au **Motif 3** ?
3. Quelle transformation permet de passer du **Motif 2** au **Motif 4** ?
4. Quelle transformation permet de passer du **Motif 6** au **Motif 5** ?
5. Quelle transformation permet de passer du **Motif 1** au **Motif 5** ?
6. Quelle transformation permet de passer du **Motif 2** au **Motif 6** ?
7. Quelle transformation permet de passer du **Motif 3** au **Motif 2** ?

EXERCICE N° 49 — CORRECTION

1. La rotation de centre B d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre transforme le **Motif 1** en le **Motif 2**

2. La rotation de centre B d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre transforme le **Motif 4** en le **Motif 3**

3. La rotation de centre B d'angle 180° dans le sens des aiguilles d'une montre transforme le **Motif 2** en le **Motif 4**
On pouvait aussi penser à la symétrie centrale de centre B.

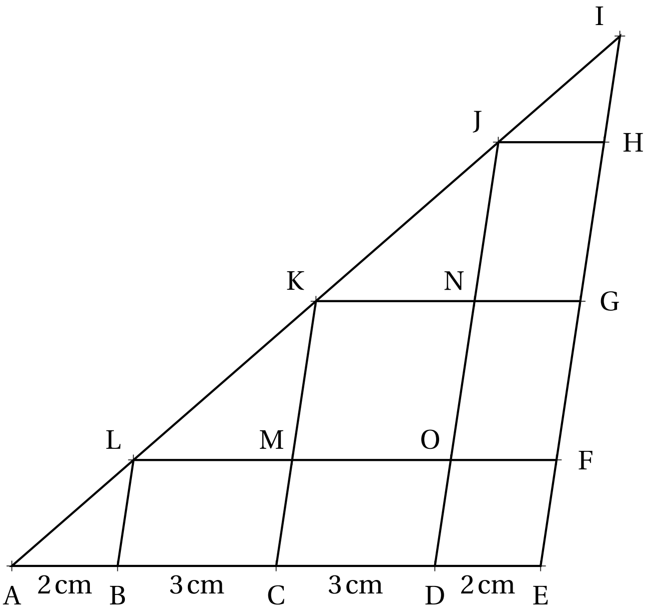
4. La rotation de centre H d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre transforme le **Motif 6** en le **Motif 5**

5. La translation qui transforme B en H transforme le **Motif 1** en le **Motif 5**

6. La translation qui transforme B en H transforme le **Motif 2** en le **Motif 6**

7. La rotation de centre B d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre transforme le **Motif 3** en le **Motif 2**

Exercice n° 50 : L'homothétie



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- les points A, B, C, D et E sont alignés ;
- les points A, L, K, J et I sont alignés ;
- les points L, M, O et F sont alignés ;
- les points K, N et G sont alignés ;
- les points L, M, O et F sont alignés ;
- les points J, N, O et D sont alignés ;
- les points K, N et G sont alignés ;
- les points K, M et C sont alignés ;
- les droites (AE), (LF), (KG) et (JH) sont parallèles ;
- les droites (EI), (DJ), (CK) et (BL) sont parallèles ;

Dans cet exercice on ne demande aucune justification

1. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du triangle ABL au triangle ACK.
2. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du triangle ABL au triangle ADJ.
3. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du triangle AEI au triangle ABL.
4. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du parallélogramme DEFO au parallélogramme CEGK.
5. Sachant que AL = 3 cm en déduire les longueurs LK, KJ et JI.
6. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du parallélogramme DEFO au parallélogramme OMKN.

Exercice n° 50 **Correction**

Le parallélisme des droites dans cette figure permettrait de démontrer rigoureuseument le calcul des longueurs manquantes en utilisant le théorème de Thalès. Ce n'est pas l'objet de l'exercice qui consiste simplement à reconnaître les homothéties.

1. $\boxed{\text{L'homothétie de centre A et de rapport } \frac{5\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = 2,5}$

2. $\boxed{\text{L'homothétie de centre A et de rapport } \frac{8\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = 4}$

3. $\boxed{\text{L'homothétie de centre A et de rapport } \frac{2\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{1}{5} = 0,2}$

4. $\boxed{\text{L'homothétie de centre E et de rapport } \frac{5\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = 2,5}$

5. $AK = 2,5 \times AL = 2,5 \times 3\,\text{cm} = 7,5\,\text{cm}$ donc $\boxed{LK = AK - AL = 7,5\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 4\,\text{cm}}$
$AJ = 4 \times AL = 4 \times 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ donc $\boxed{KJ = AJ - AK = 12\,\text{cm} - 7,5\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm}}$
$AI = 5 \times AL = 5 \times 3\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$ donc $\boxed{IJ = AI - AJ = 15\,\text{cm} - 12\,\text{cm} = 3\,\text{cm}}$

6. $\boxed{\text{L'homothétie de centre O et de rapport } -\frac{3\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = -1,5}$

Exercice n° 51 : Calculer la mesure de l'hypoténuse — **Géométrie plane - Théorème de Pythagore**

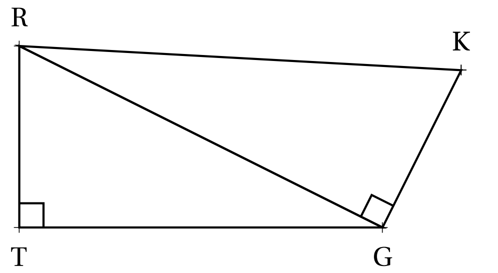
La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Le triangle GTR est rectangle en T.

On sait que GT = 68 cm, RT = 51 cm et GK = 57 cm.

1. Calculer la valeur exacte de RT.

2. Calculer une valeur approchée de RK au millimètre près.



Exercice n° 51 — Correction

1.

Dans le triangle RTG rectangle en T,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TR^2 + TG^2 = RG^2$$
$$51^2 + 68^2 = RG^2$$
$$2\,601 + 4\,624 = RG^2$$
$$RG^2 = 7\,225$$
$$RG = \sqrt{7\,225}$$
$$RG = 85$$

Le côté [RG] mesure exactement 85 cm.

2.

Dans le triangle RGK rectangle en G,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$GK^2 + GR^2 = KR^2$$
$$57^2 + 85^2 = KR^2$$
$$3\,249 + 7\,225 = KR^2$$
$$KR^2 = 10\,474$$
$$KR = \sqrt{10\,474}$$
$$KR \approx 102,3$$

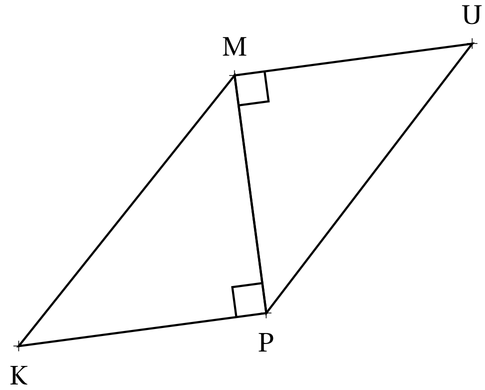
Le côté [KR] mesure environ 102,3 cm au millimètre près.

EXERCICE N° 52 : Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit GÉOMÉTRIE PLANE - THÉORÈME DE PYTHAGORE

La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Le triangle PKM est rectangle en P.
Le triangle PMU est rectangle en M

On sait que KM = 19 m, KP = 15,2 m et PU = 25 m.
Calculer la valeur exacte de PM puis
une valeur approchée au centimètre près de MU.



EXERCICE N° 52 — CORRECTION

Dans le triangle MPK rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PM^2 + PK^2 = MK^2$$
$$PM^2 + 15,2^2 = 19^2$$
$$PM^2 + 231,04 = 361$$
$$PM^2 = 361 - 231,04$$
$$PM^2 = 129,96$$
$$PM = \sqrt{129,96}$$
$$PM = 11,4$$

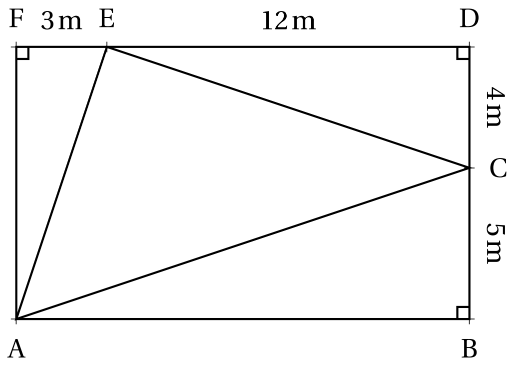
Le côté [PM] mesure exactement 11,4 m

Dans le triangle PMU rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$MP^2 + MU^2 = PU^2$$
$$11,4^2 + MU^2 = 25^2$$
$$129,96 + MU^2 = 625$$
$$MU^2 = 625 - 129,96$$
$$MU^2 = 495,04$$
$$MU = \sqrt{495,04}$$
$$MU \approx 22,25$$

Le côté [MU] mesure approximativement 22,25 m au centimètre près.

Exercice n° 53 : Démontrer qu'un triangle est rectangle — Géométrie plane - Théorème de Pythagore



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— ABDF est un rectangle;

— C ∈ [BD] et E ∈ [FD].

Démontrer que le triangle EAC est rectangle.

Exercice n° 53 — Correction

Nous allons calculer la mesure de chacun des côtés du triangle ECA.
Dans le triangle ABC rectangle en ,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$15^2 + 5^2 = AC^2$$
$$225 + 25 = AC^2$$
$$AC^2 = 250$$
$$AC = \sqrt{250}$$

Dans le triangle EDC rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DE^2 + DC^2 = EC^2$$
$$12^2 + 4^2 = EC^2$$
$$144 + 16 = EC^2$$
$$EC^2 = 160$$
$$EC = \sqrt{160}$$

Dans le triangle FEA rectangle en F,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$FE^2 + FA^2 = EA^2$$
$$3^2 + 9^2 = EA^2$$
$$9 + 81 = EA^2$$
$$EA^2 = 90$$
$$EA = \sqrt{90}$$

Comparons $EC^2 + EA^2$ et AC^2 :

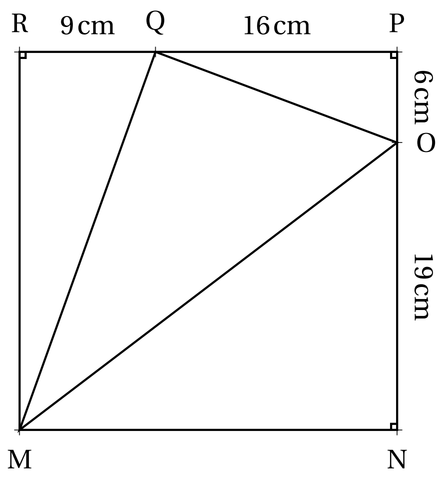
$$EC^2 + EA^2$$
$$(\sqrt{160})^2 + (\sqrt{90})^2$$
$$160 + 90$$
$$250$$

$$CA^2$$
$$(\sqrt{250})^2$$
$$250$$

Comme $EC^2 + EA^2 = AC^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAC est rectangle en E}}$.

On a intérêt dans ce genre d'exercice à travailler avec des valeurs exactes comme $\sqrt{250}$. Les valeurs approchées sont inutiles puisque le raisonnement final ne demande que des carrés.

Exercice n° 54 : **Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle** **Géométrie plane - Théorème de Pythagore**



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— MNPR est un carré;

— O ∈ [PN] et Q ∈ [RP].

Le triangle MOQ est-il rectangle ?

Exercice n° 54 Correction

Nous allons calculer les mesures du triangle QOM.

Dans le triangle MNO rectangle en N,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$NM^2 + NO^2 = MO^2$$
$$25^2 + 19^2 = MO^2$$
$$625 + 361 = MO^2$$
$$MO^2 = 986$$
$$MO = \sqrt{986}$$

Dans le triangle QPO rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PQ^2 + PO^2 = QO^2$$
$$16^2 + 6^2 = QO^2$$
$$256 + 36 = QO^2$$
$$QO^2 = 292$$
$$QO = \sqrt{292}$$

Dans le triangle RQM rectangle en R,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$RQ^2 + RM^2 = QM^2$$
$$9^2 + 25^2 = QM^2$$
$$81 + 625 = QM^2$$
$$QM^2 = 706$$
$$QM = \sqrt{706}$$

Comparons $AB^2 + AC^2$ et BC^2 :

$$QO^2 + QM^2 \qquad\qquad OM^2$$
$$(\sqrt{292})^2 + (\sqrt{706})^2 \qquad\qquad (\sqrt{986})^2$$
$$292 + 706$$
$$998 \qquad\qquad 986$$

Comme
$$QO^2 + QM^2 \neq OM^2$$
, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle QMO n'est pas rectangle.}}$

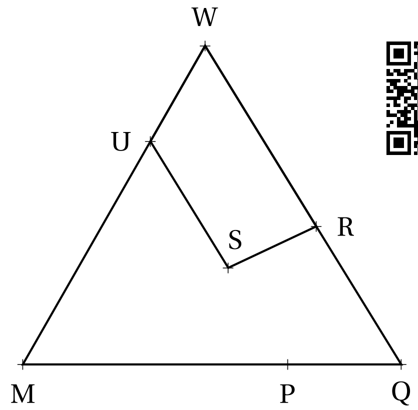
EXERCICE N° 55 : Calculer une longueur dans une situation de Thalès triangle

GÉOMÉTRIE PLANE - THÉORÈME DE THALÈS

La figure ci-contre n'est pas réalisée en vraie grandeur.
On sait que :

- (UP)//(WQ);
- M, P et Q sont alignés ainsi que M, U et W;
- M, S et R sont alignés ainsi que U, S et P;
- W, R et Q sont alignés;
- MP = 7 cm, MQ = 10 cm, SP = 5 cm, MS = 6 cm;
- WR = 7 cm, UW = 4 cm

Donner la valeur exacte puis la valeurs approchée au millimètre près de RQ, SR, US et MU.



EXERCICE N° 55

CORRECTION

Dans le triangle MRQ :

Les droites (SR) et (PQ) sont sécantes en M, les droites (SP) et (RQ) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{MS}{MR} = \frac{PS}{QR}$$

$$\frac{7\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{6\,\text{cm}}{MR} = \frac{5\,\text{cm}}{RQ}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$MR = \frac{6\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} \text{ d'où } MR = \frac{60\,\text{cm}^2}{7\,\text{cm}} \text{ et } MR = \frac{60}{7}\,\text{cm} \approx 8{,}6\,\text{cm}$$

$$RQ = \frac{5\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} \text{ d'où } RQ = \frac{50\,\text{cm}^2}{7\,\text{cm}} \text{ et } \boxed{RQ = \frac{50}{7}\,\text{cm} \approx 7{,}1\,\text{cm}}$$

$$\text{Ainsi } SR = MR - MS = \frac{60}{7}\,\text{cm} - 6\,\text{cm} = \frac{60}{7}\,\text{cm} - \frac{42}{7}\,\text{cm} = \boxed{\frac{18}{7}\,\text{cm} \approx 2{,}6\,\text{cm}}$$

Dans le triangle MRW :

Les droites (UW) et (SR) sont sécantes en M, les droites (US) et (WR) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{MS}{MR} = \frac{MU}{MW} = \frac{SU}{RW}$$

$$\frac{MS}{MR} = \frac{MU}{MU + 4\,\text{cm}} = \frac{SU}{7\,\text{cm}}$$

On peut reprendre la valeur approchée de MR mais il est plus malin de constater que $\frac{MS}{MR} = \frac{7}{10}$ d'après la première partie.

Ainsi

$$\frac{7}{10} = \frac{MU}{MU + 4\,\text{cm}} = \frac{SU}{7\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$SU = \frac{7 \times 7\,\text{cm}}{10} \text{ d'où } SU = \frac{49\,\text{cm}}{10} \text{ et } \boxed{SU = 4{,}9\,\text{cm}}$$

La suite de cet exercice dépasse largement les attendus de fin de cycle 4 et les objectifs du brevet. C'est cependant un exemple intéressant pour de futurs élèves de seconde !

Comme $\dfrac{7}{10} = \dfrac{\text{MU}}{\text{MU}+4}$ on arrive à l'égalité des produits en croix : $7 \times (\text{MU}+4) = 10\text{MU}$.
Reste à résoudre :

$$\begin{aligned}
7(\text{MU}+4) &= 10\text{MU}\\
7\text{MU}+28 &= 10\text{MU}\\
7\text{MU}+28-7\text{MU} &= 10\text{MU}-7\text{MU}\\
28 &= 3\text{MU}\\
3\text{MU} &= 28\\
\text{MU} &= \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{MU} = \dfrac{28}{3}\text{ cm} \approx 9{,}3\text{ cm}}$

EXERCICE N° 56 : Calculer une longueur dans une situation de Thalès papillon — GÉOMÉTRIE PLANE - THÉORÈME DE THALÈS

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on a :

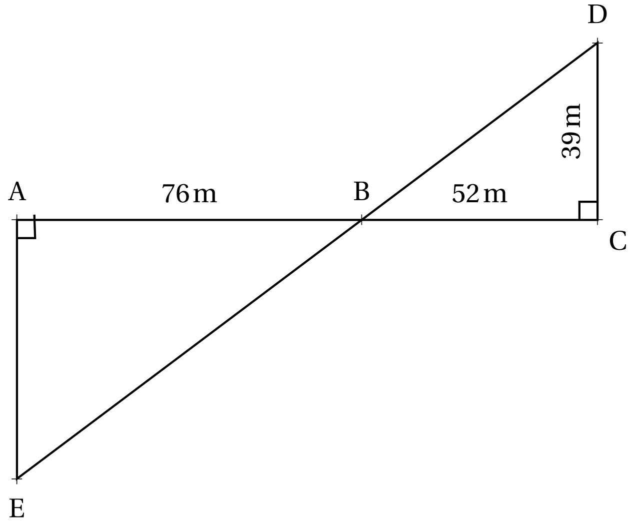
— A, B et C sont alignés;

— E, B et D sont alignés;

— ABE est rectangle en A;

— BCD est rectangle en C.

Calculer la valeur exacte puis la valeur approchée au centimètre près de BD, AE et BE.



EXERCICE N° 56 — CORRECTION

Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{CB}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BD}^2$$

$$52^2 + 39^2 = \mathrm{BD}^2$$

$$2\,704 + 1\,521 = \mathrm{BD}^2$$

$$\mathrm{BD}^2 = 4\,225$$

$$\mathrm{BD} = \sqrt{4\,225}$$

$$\mathrm{BD} = 65$$

$\boxed{\mathrm{BD} = 65\,\mathrm{m}}$

Le triangle BCD est rectangle en C et le triangle BAE est rectangle en A. Ainsi les droites (AE) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AC). Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.** Ainsi (AE)//(CD).

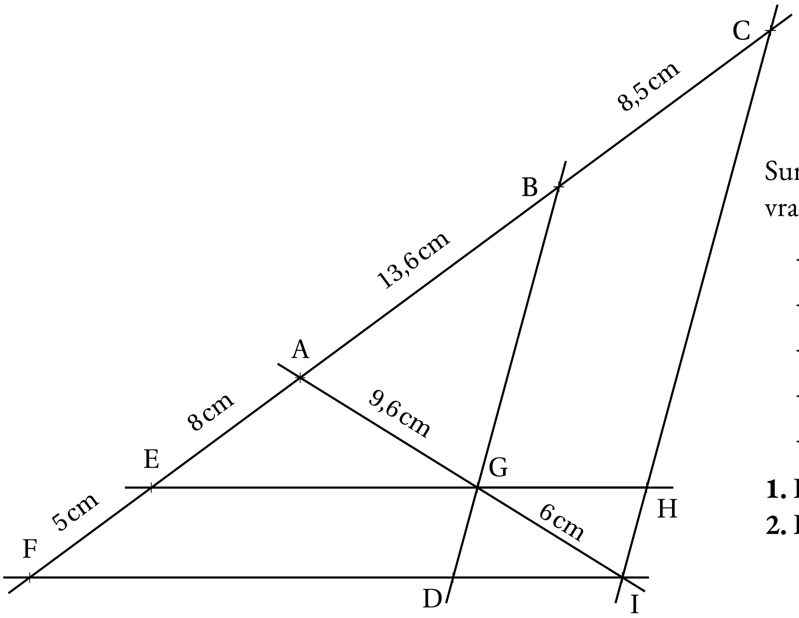
Les droites (AC) et (ED) sont sécantes en B, les droites (AE) et (CD) sont parallèles, d'après **le théorème de Thalès** :

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CD}}$$

$$\frac{76\,\mathrm{m}}{52\,\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{BE}}{65\,\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{AE}}{39\,\mathrm{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{BE} = \dfrac{65\,\mathrm{m} \times 76\,\mathrm{m}}{52\,\mathrm{m}}$ d'où $\mathrm{BE} = \dfrac{4\,940\,\mathrm{m}^2}{52\,\mathrm{m}}$ et $\boxed{\mathrm{BE} = 95\,\mathrm{m}}$ et $\mathrm{AE} = \dfrac{39\,\mathrm{m} \times 76\,\mathrm{m}}{52\,\mathrm{m}}$ d'où $\mathrm{AE} = \dfrac{2\,964\,\mathrm{m}^2}{52\,\mathrm{m}}$ et $\boxed{\mathrm{AE} = 57\,\mathrm{m}}$



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— F, E, A, B et C sont alignés;

— E, G et H sont alignés;

— F, D et I sont alignés;

— (EH)//(FI);

— (BG)//(CH).

1. Les droites (BG) et (CI) sont-elles parallèles ?

2. Les droites (EG) et (FI) sont-elles parallèles ?

EXERCICE N° 57 — CORRECTION

1. Dans le triangle AIC, comparons les quotients $\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{AG}{AI}$

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{13{,}6\,\text{cm}}{13{,}6\,\text{cm} + 8{,}5\,\text{cm}} = \dfrac{13{,}6}{22{,}1}$ $\qquad$ $\dfrac{AG}{AI} = \dfrac{9{,}6\,\text{cm}}{9{,}6\,\text{cm} + 6\,\text{cm}} = \dfrac{9{,}6}{15{,}6}$

Plutôt que d'observer une approximation décimale il est plus expert de passer par les produits en croix.

On a $13,6 \times 15,6 = 212,16$ et $22,1 \times 9,6 = 212,16$ donc $\dfrac{13,6}{22,1} = \dfrac{9,6}{15,6}$.

Finalement, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AG}{AI}$.

Comme les points A, B et C sont alignés et dans le même ordre que les points A, G et I, d'après **la réciproque du théorème de Thalès** on peut affirmer que :

$\boxed{\text{Les droites (BG) et (CI) sont parallèles.}}$

2. Dans le triangle AFI, comparons les quotients $\dfrac{AG}{AI}$ et $\dfrac{AE}{AF}$

$\dfrac{AG}{AI} = \dfrac{9{,}6\,\text{cm}}{9{,}6\,\text{cm} + 6\,\text{cm}} = \dfrac{9{,}6}{15{,}6}$ $\qquad$ $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{8\,\text{cm}}{8\,\text{cm} + 5\,\text{cm}} = \dfrac{8}{13}$

Plutôt que d'observer une approximation décimale il est plus expert de passer par les produits en croix.

On a $13 \times 9,6 = 124,8$ et $8 \times 15,6 = 124,8$ donc $\dfrac{9,6}{15,6} = \dfrac{8}{13}$.

Finalement, $\dfrac{AG}{AI} = \dfrac{AE}{AF}$.

Comme les points A, E et F sont alignés et dans le même ordre que les points A, G et I, d'après **la réciproque du théorème de Thalès** on peut affirmer que :

$\boxed{\text{Les droites (EG) et (FI) sont parallèles.}}$

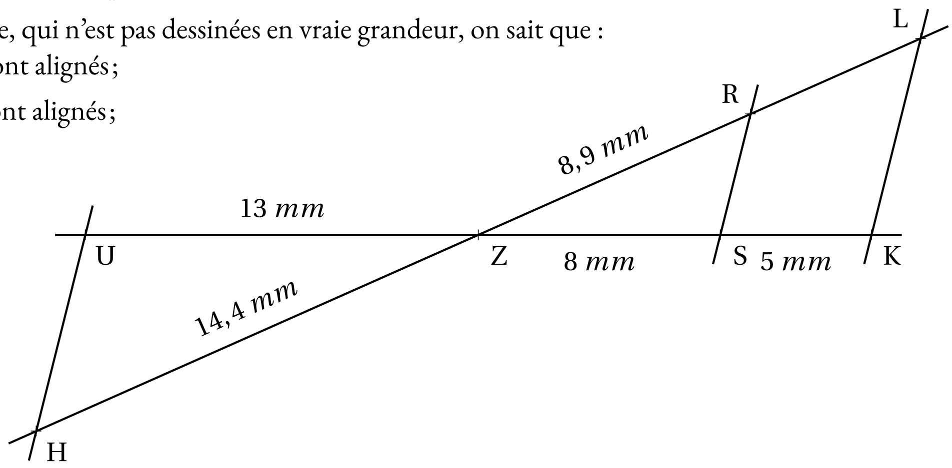
Exercice n° 58 : **Démontrer que deux droites sont sécantes**

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinées en vraie grandeur, on sait que :

— U, Z, S et K sont alignés ;

— H, Z, R et L sont alignés ;

— (RS)//(LK).



1. Calculer RL et donner une valeur approchée au dixième près.

2. Les droites (RS) et (UH) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 58 — Correction

1.

Les droites (RL) et (SK) sont sécantes en Z, les droites (RS) et (LK) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{ZS}{ZK} = \frac{ZR}{ZL} = \frac{SR}{KL}$$

$$\frac{8\,\text{mm}}{8\,\text{mm} + 5\,\text{mm}} = \frac{8{,}9\,\text{mm}}{ZL} = \frac{SR}{KL}$$

$$\frac{8\,\text{mm}}{13\,\text{mm}} = \frac{8{,}9\,\text{mm}}{ZL} = \frac{SR}{KL}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$ZL = \dfrac{8{,}9\,\text{mm} \times 13\,\text{mm}}{8\,\text{mm}}$ d'où $ZL = \dfrac{115{,}7\,\text{mm}^2}{8\,\text{mm}}$ et $ZL \approx 14{,}5\,\text{mm}$

Finalement $\boxed{RL = ZL - ZR = 14{,}6\,\text{mm} - 8{,}9\,\text{mm} = 5{,}7\,\text{mm}}$

2. Comparons $\dfrac{ZU}{ZS}$ et $\dfrac{ZH}{ZR}$.

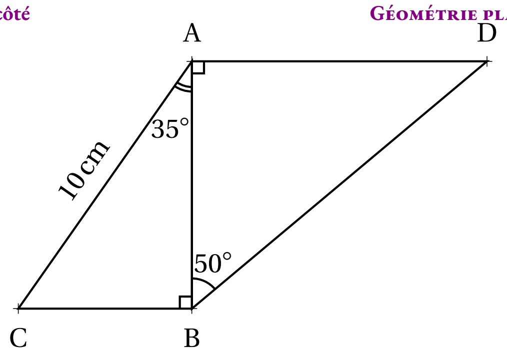
$$\frac{ZU}{ZS} = \frac{13\,\text{mm}}{8\,\text{mm}} = \frac{13}{8} = 1{,}625 \qquad\qquad \frac{ZH}{ZH} = \frac{14{,}4\,\text{mm}}{8{,}9\,\text{mm}} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617$$

Les valeurs approchées sont relativement proches. Une méthode plus experte consiste à vérifier les produits en croix !

$13 \times 89 = 1\,157$ et $8 \times 144 = 1\,152$ donc $\dfrac{13}{8} \neq \dfrac{144}{89}$.

Comme $\dfrac{ZU}{ZS} \neq \dfrac{ZH}{ZR}$, d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (RS) et (UH) sont sécantes.}}$

EXERCICE N° 59 : Calculer la longueur d'un côté GÉOMÉTRIE PLANE - TRIGONOMÉTRIE— BASES DE LA GÉOMÉTRIE



La figure ci-dessus n'est pas tracée en vraie grandeur.
ABC est un triangle rectangle en B et ADB est un triangle rectangle en A.

Calculer les valeurs exactes puis approchées au millimètre près des longueurs BC, BA, AD et BD.

Les droites (BC et (AD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE N° 59 **CORRECTION**

Pour déterminer quelle grandeur trigonométrique utiliser, il faut se demander quels est le côté connu et quel est le côté cherché. En identifiant ces deux côtés par le vocabulaire du cours (côté adjacent, côté opposé et hypoténuse) on obtient la fonction à utiliser.
Mémoriser les trois définitions des grandeurs trigonométriques est parfois difficile. Le moyen mnémotechnique suivant est pratique :

C A H S O H T O A

Cosinus Adjacent Hypoténuse Sinus Opposé Hypoténuse Tangente Opposé Adjacent

Quand on a une équation du type $5 = \dfrac{x}{8}$ *ou du type* $5 = \dfrac{8}{x}$ *on peut utiliser la règle de trois.*

On peut écrire ces équations sous la forme $\dfrac{5}{1} = \dfrac{x}{8}$ *ou sous la forme* $\dfrac{5}{1} = \dfrac{8}{x}$

Ainsi dans un cas la solution est $x = 8 \times 5 \div 1 = 8 \times 5$ *et dans l'autre* $x = \dfrac{8 \times 1}{5} = \dfrac{8}{5}$.

Calcul de CB

Dans le triangle ABC rectangle en B.

On connait la mesure de l'hypoténuse, AC = 10 cm et on cherche la mesure de [BC] le côté opposé à l'angle $\widehat{\text{CAB}}$. Nous allons donc utiliser le sinus de l'angle.

$\sin 35° = \dfrac{\text{CB}}{10\ cm}$ ainsi $\boxed{\text{CB} = 10\,\text{cm} \times \sin 35° \approx 5{,}7\,\text{cm au milimètre près.}}$

Calcul de BA

On connait la mesure de l'hypoténuse, AC = 10 cm et on cherche la mesure de [BA] le côté adjacent à l'ange $\widehat{\text{CAB}}$. Nous allons donc utiliser le cosinus de l'angle.

$\cos 35° = \dfrac{\text{AB}}{10\ cm}$ ainsi $\boxed{\text{AB} = 10\ cm \times \cos 35° \approx 8{,}2\ cm \text{ au millimètre près.}}$

Il est déconseillé d'utiliser le théorème de Pythagore dans ce cas. Il vaut mieux passer par des valeurs exactes trigonométriques.

Calcul de AD

Dans le triangle BAD rectangle en A.

On connait la mesure de AB = 10 $cm \times \cos 35°$ le côté adjacent de l'angle $\widehat{\text{ABD}}$ et on cherche AD le côté opposé. Nous allons donc utiliser la tangente de l'angle.

$\tan 50° = \dfrac{\text{AD}}{10\ cm \times \cos 35°}$ ainsi $\boxed{\text{AD} = 10\ cm \times \cos 35° \times \tan 50° \approx 9,8\ cm \text{ au millimètre près}}$.

Calcul de BD

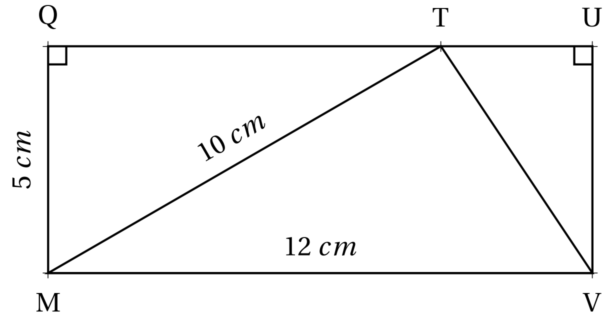
On connait la mesure de $\text{AB} = 10\ cm \times \cos 35°$ le côté adjacent de l'angle $\widehat{\text{ABD}}$ et on cherche BD l'hypoténuse. Nous allons donc utiliser le cosinus de l'angle.

$\cos 50° = \dfrac{10\ cm \times \cos 35°}{\text{BD}}$ ainsi $\boxed{\text{BD} = \dfrac{10\ cm \times \cos 35°}{\cos 50°} \approx 12,7\ cm \text{ au millimètre près.}}$

On constate que les droites (CB) et (AD) sont perpendiculaires à la droite (AB).
On sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (CB) et (AD) sont parallèles.}}$

Exercice n° 60 : **Calculer la mesure d'un angle** **Géométrie plane - Trigonométrie— Bases de la géométrie**



La figure ci-dessus n'est pas tracée en vraie grandeur.
QUVM est un rectangle, T ∈ [QU].

Calculer une valeur approchée au dixième de degré près la mesure des angles $\widehat{\text{QMT}}$, $\widehat{\text{UVT}}$, $\widehat{\text{TMV}}$ et $\widehat{\text{TVM}}$.

Le triangle MTV est-il rectangle ?

Exercice n° 60 **Correction**

Calcul de l'angle $\widehat{\text{QMT}}$

Quand on connait le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle, on peut à la calculatrice retrouver l'angle qui lui correspond. On utiliser pour cela touche *Seconde* *puis* *cosinus* *(sinus ou tangente). La calculatrice affiche alors* $\cos^{-1}$ *ou* Acos *ou* Arccos*.*

Dans le triangle QMT rectangle en Q.
On connait le côté adjacentMQ = 5 cm de l'angle $\widehat{\text{QMT}}$ et l'hypoténuse MT = 10 cm. On peut donc calculer le cosinus de l'angle.

$\cos\widehat{\text{QMT}} = \dfrac{5\ cm}{10\ cm} = 0,5.$

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{\text{QMT}} = 60°}$

L'angle à $60°$ *est un des rares angles dont le cosinus est un nombre décimal !*

Calcul de l'angle $\widehat{\text{UVT}}$

Dans le triangle TUV rectangle en U.
On connait le côté adjacent UV = 5 cm de l'angle $\widehat{\text{UVT}}$ mais rien d'autre !!!

On peut calculer QT *dans le triangle* QMT*. On pourra ensuite calculer* TU*.*

Dans le triangle QMT rectangle en Q,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{QM}^2 + \text{QT}^2 = \text{MT}^2$$
$$5^2 + \text{QT}^2 = 10^2$$
$$25 + \text{QT}^2 = 100$$
$$\text{QT}^2 = 100 - 25$$
$$\text{QT}^2 = 75$$
$$\text{QT} = \sqrt{75}$$
$$\text{QT} \approx 8,7\ cm$$

Ainsi $\text{TU} = \text{QU} - \text{QT} = 12\ cm - \sqrt{75}\ cm \approx 3,4\ cm$

On connait maintenant le côté opposé $\text{TU} = 12\ cm - \sqrt{75}\ cm$ à l'angle $\widehat{\text{UVT}}$. On peut donc calculer sa tangente.

$\tan\widehat{\mathrm{UVT}} = \dfrac{12\ cm - \sqrt{75}\ cm}{5\ cm} \approx 0,668.$

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{\mathrm{UVT}} \approx 33,7°}$

Comme QUVM est un rectangle, les angles $\widehat{\mathrm{QMV}}$ et $\widehat{\mathrm{UVM}}$ sont droits.
Ainsi $\widehat{\mathrm{TMV}} = 90° - \widehat{\mathrm{QMT}} = 90° - 60° = 30°$ donc $\boxed{\widehat{\mathrm{TMV}} = 60°}$

De même $\boxed{\widehat{\mathrm{TVM}} = 90° - \widehat{\mathrm{UVT}} = 90° - 33,7° \approx 56,3°}$

On sait que **Dans un triangle la somme des angles vaut** 180°.

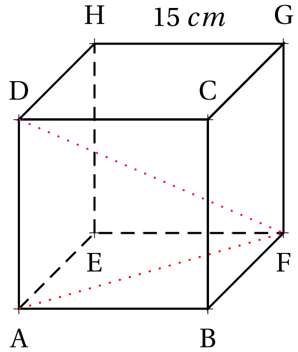
On arrive ainsi à $\widehat{\mathrm{MTV}} = 180° - 30° - 56,3° \approx 93,7°$.

$\boxed{\text{Le triangle MTV n'est pas rectangle !}}$

EXERCICE N° 61 : Le cube GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE - GÉOMÉTRIE DES SOLIDES— THÉORÈME DE PYTHAGORE

ABCDEFGH est un cube de 15 cm de côté.

1. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de la diagonale AF
2. Quelle est la nature du triangle AFD ?
3. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de la grande diagonale FD
4. Quel est le volume en litre de ce cube ?



EXERCICE N° 61 — CORRECTION

1. Comme ABCDEFGH est un cube, la face ABFE est un carré. *Il ne faut pas se laisser tromper par la déformation conséquence de la représentation en perspective cavalièe.*

Dans le triangle ABF rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$
$$15^2 + 15^2 = AF^2$$
$$225 + 225 = AF^2$$
$$AF^2 = 450$$
$$AF = \sqrt{450}$$
$$AF \approx 21,2$$

La diagonale [AF] mesure exactement $\sqrt{450}$ cm $\approx 21,2$ cm.

On peut démontrer que la diagonale d'un carré de côté 15 cm mesure exactement $15 \times \sqrt{2}$ cm.

2. Comme la droite (DA) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AE), comme ces deux droites sont sur la face ABFE, la droite (DA) est orthogonale à cette face, c'est à dire perpendiculaire à toutes les droites qui se trouvent sur cette face.

Ainsi (DA) $\perp$ (AF). Le triangle DAF est rectangle en A.

3.
Dans le triangle DAF rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AD^2 + AF^2 = DF^2$$
$$15^2 + (\sqrt{450})^2 = DF^2$$
$$225 + 450 = DF^2$$
$$DF^2 = 675$$
$$DF = \sqrt{675}$$
$$DF \approx 26$$

La grande diagonale [DF] mesure exactement $\sqrt{675}$ cm ≈ 26 cm.

On peut démontrer que la grande diagonale d'un cube de côté 15 cm mesure exactement $15 \times \sqrt{3}$ cm.

4. Le volume de ce cube mesure $(15\,\text{cm})^3 = 3\,375\,\text{cm}^3$.
On sait que $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{cm}^3$.

Le volume de ce cube vaut exactement $3\,375\,\text{cm}^3 = 3,375\,\text{L}$.

EXERCICE N° 62 : Le pavé droit GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE - GÉOMÉTRIE DES SOLIDES— THÉORÈME DE PYTHAGORE

FGHIJKLM est un pavé droit dont les arêtes mesurent 25 m, 10 m et 15 m.

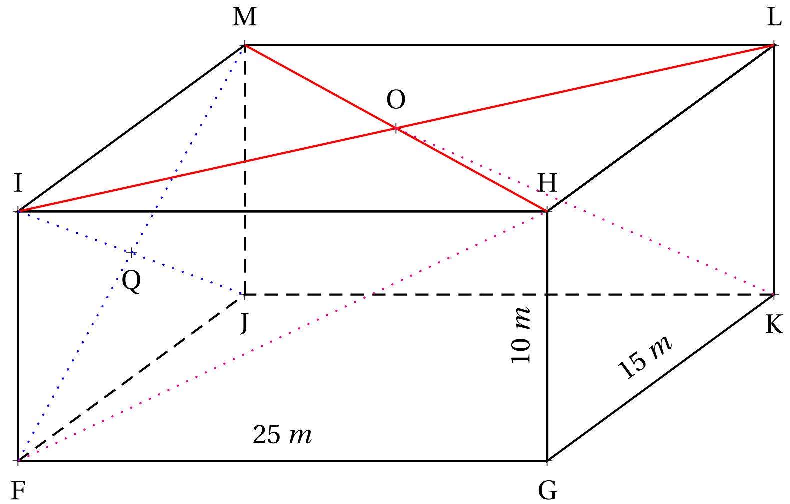
1. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de la diagonale IL

2. Quelle est la nature du triangle LOK ?

3. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de OK.

4. Le triangle FMH est-il rectangle ?

5. Calculer le volume en litre de ce pavé.



EXERCICE N° 62 **CORRECTION**

1. FGHIJKLM est un pavé droit. La face IHLM est donc un rectangle. *Attention à ne pas se laisser influencer par la déformation cons conséquence de la perspective cavalière.*

Dans le triangle IHL rectangle en H,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HI^2 + HL^2 = IL^2$$
$$25^2 + 15^2 = IL^2$$
$$625 + 225 = IL^2$$
$$IL^2 = 850$$
$$IL = \sqrt{850}$$
$$IL \approx 29,2$$

La diagonale [IL] mesure exactement $\sqrt{850}$ cm $\approx 29{,}2$ cm.

2. La droite (LK) est perpendiculaire à la droite (LM) et à la droite (LH) qui sont deux droites de la face IHLM. Ainsi le droite (LK) est orthogonale à la face (IHLM) ce qui signifie qu'elle est perpendiculaire à toutes les droites tracées sur cette face. Ainsi (LK) $\perp$ (LO).

Le triangle LOK est rectangle en L.

3.
Dans le triangle LOK rectangle en L,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$LO^2 + LK^2 = OK^2$$
$$\left(\frac{\sqrt{850}}{2}\right)^2 + 10^2 = OK^2$$
$$\frac{(\sqrt{850})^2}{2^2} + 100 = OK^2$$

$$\frac{850}{4} + 100 = OK^2$$

$$212,5 + 100 = OK^2$$

$$OK^2 = 321,5$$

$$OK = \sqrt{312,5}$$

$$OK \approx 17,7$$

$\boxed{\text{Le segment [OK] mesure exactement } \sqrt{312,5} \text{ cm} \approx 17,7\,\text{cm.}}$

4. La face HIML est un rectangle, les diagonales [MH] et [IL] ont donc la même longueur. Ainsi $MH = \sqrt{850}$.

Dans le triangle MJF rectangle en J,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$JM^2 + JF^2 = MF^2$$

$$10^2 + 15^2 = MF^2$$

$$100 + 225 = MF^2$$

$$MF^2 = 325$$

$$MF = \sqrt{325}$$

Dans le triangle FIH rectangle en I,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$IF^2 + IH^2 = FH^2$$

$$10^2 + 25^2 = FH^2$$

$$100 + 625 = FH^2$$

$$FH^2 = 725$$

$$FH = \sqrt{725}$$

Comparons $FH^2 + FM^2$ et MH^2 :

$FH^2 + FM^2$	MH^2
$(\sqrt{725}^2 + \sqrt{325}^2$	$(\sqrt{850}^2$
$725 + 325$	
1050	850

Comme

$$FH^2 + FM^2 \neq MH^2$$

, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle FHM n'est pas rectangle}}$.

5. On sait que IHLM est un rectangle, les diagonales sont donc de même longueur : IL = MH. Elles se coupent en leur milieu.

$MO = \dfrac{\sqrt{850}}{2}$.

Calculons la longueur de la diagonale [MF] du rectangle IMJF.

Dans le triangle MJF rectangle en J,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$JM^2 + JF^2 = MF^2$$
$$10^2 + 15^2 = MF^2$$
$$100 + 225 = MF^2$$
$$MF^2 = 325$$
$$MF = \sqrt{325}$$
$$MF \approx 18$$

Ainsi $MQ = \dfrac{\sqrt{325}}{2}$.

Dans le triangle MOQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$MO^2 + MQ^2 = OQ^2$$
$$\left(\frac{\sqrt{850}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{325}}{2}\right)^2 = OQ^2$$
$$\frac{(\sqrt{850})^2}{2^2} + \frac{(\sqrt{325})^2}{2^2} = OQ^2$$
$$\frac{850}{4} + \frac{325}{4} = OQ^2$$
$$212,5 + 81,25 = OQ^2$$
$$OQ^2 = 293,75$$
$$OQ = \sqrt{293,75}$$
$$OQ \approx 17,1$$

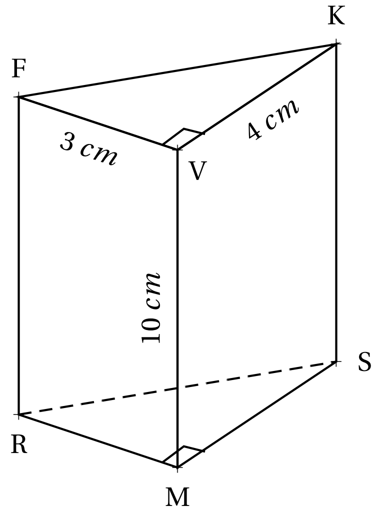
Le segment [OQ] mesure exactement $\sqrt{293,75}$ cm $\approx 17,1$ cm.

6. Le volume de ce pavé mesure $25\,\text{m} \times 10\,\text{m} \times 15\,\text{m} = 3\,750\,\text{m}^3$.
On sait que $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$ et que $1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{dm}^3$.

Le volume de ce pavé vaut $3\,750\,\text{m}^3 = 3\,750\,000\,\text{L}$.

Exercice n° 63 : Le prisme droit — Géométrie de l'espace - Géométrie des solides— Théorème de Thalès— Théorème de Pythagore

Une fourmi se déplace sur les faces du prisme droit RMSFVK dont les bases sont deux triangles rectangles.
La fourmi se situe au sommet F et elle veut se rendre près d'un grain de sucre qui se trouve au sommet S.



1. Calculer la valeur exacte et approchée au millimètre près de FS.

Finalement la fourmi se dirige vers le grain de sucre en passant par les faces (FVMR) puis (MSKV).

2. Tracer le patron de ce prisme droit en vraie grandeur.

3. Tracer sur ce patron le plus court chemin pour atteindre le grain de sucre en passant par les faces (FVMR) et (MSKV).

4. Calculer la valeur exacte et approchée au millimètre près de ce plus court chemin.

5. Où se situe l'intersection de ce chemin avec l'arête [MV] ?

Exercice n° 63 — Correction

1. RMSFVK est un prisme droit. La face latérale FKSR est donc un rectangle. Le segment [FS] est une diagonale du rectangle FKSR. Il nous manque la mesure du segment [FK].

Dans le triangle FKV rectangle en V,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$VF^2 + VK^2 = FK^2$$

$$3^2 + 4^2 = FK^2$$

$$9 + 16 = FK^2$$

$$FK^2 = 25$$

$$FK = \sqrt{25}$$

$$FK = 5$$

Ainsi FK = 5 cm.

Dans le triangle FKS rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KF^2 + KS^2 = FS^2$$

$$5^2 + 10^2 = FS^2$$

$$25 + 100 = FS^2$$

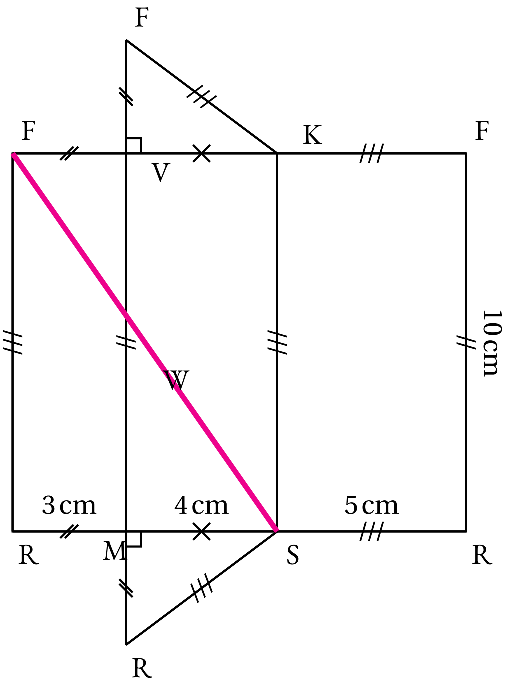
$$FS^2 = 125$$

$$FS = \sqrt{125}$$

$$FS \approx 11,2$$

Le segment [FS] mesure exactement $\sqrt{125}$ cm ≈ 11,2 cm.

2.



3. Voir ci-dessus.

4.

Dans le triangle FKS rectangle en K,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned} KS^2 + KF^2 &= SF^2 \\ 10^2 + (3+4)^2 &= SF^2 \\ 100 + 7^2 &= SF^2 \\ 100 + 49 &= SF^2 \\ SF^2 &= 149 \\ SF &= \sqrt{149} \\ SF &\approx 12{,}21 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ce plus court chemin mesure environ 12,2 cm}}$

5.

Les droites (FS) et (VM) sont sécantes en W, les droites (FV) et (MS) sont parallèles,

i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{WF}{WS} = \frac{WV}{WM} = \frac{FV}{MS}$$

$$\frac{WF}{WS} = \frac{WV}{10\,\text{cm} - WV} = \frac{3\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}$$

Comme $\frac{3}{4} = \frac{WV}{10 - WV}$ donc $3 \times (10 - WV) = 4WV$.

Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 3(10 - WV) &= 4WV \\ 30 - 3WV &= 4WV \\ 30 - 3WV + 3WV &= 4WV + 3WV \\ 30 &= 7WV \\ 7WV &= 30 \\ WV &= \frac{30}{7} \end{aligned}$$

$\boxed{WV = \frac{30}{7}\,\text{cm} \approx 4{,}3\,\text{cm}}$

EXERCICE N° 64 : Le cylindre de révolution — **GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE - GÉOMÉTRIE DES SOLIDES**

Un transporteur souhaite ranger des boites de conserve cylindriques dans des cartons parallélépipèdiques.

1. Un carton parallélépipèdique mesure 60 cm de long, 48 cm de large et 45 cm de haut.
Tracer le patron de ce carton à l'échelle 1 : 10.

2. Une boite cylindrique a un diamètre de 12 cm et une hauteur de 15 cm.
Tracer le parton de ce cylindre à l'échelle 1 : 5.

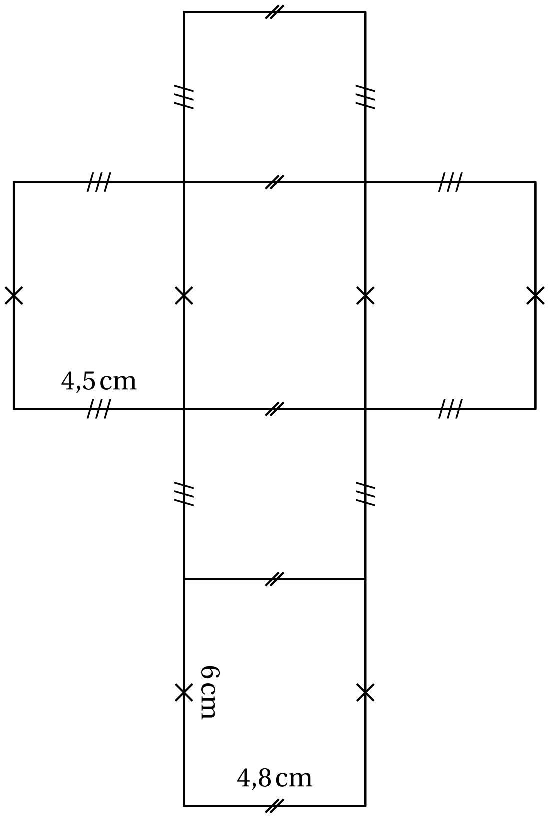
3. Combien de boites de conserve peut-on ranger dans chaque carton ?

4. Déterminer le volume non utilisé dans chaque carton, on donnera la réponse au centième de cm^3 près.

5. Quel est la proportion de vide exprimée en pourcentage dans chaque carton ?

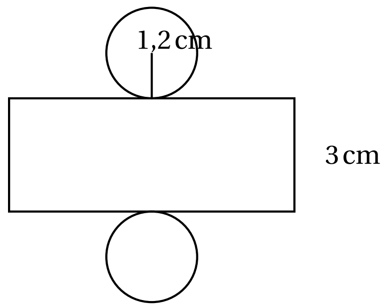
EXERCICE N° 64 — CORRECTION

1. Il faut passer à l'échelle 1 : 10. Cela signifie que 1 unités sur le patron représente 10 unités dans la réalité ou encore que les grandeurs sur le patron et dans la réalité sont dans un ration 1 : 10. Il suffit donc de diviser par 10 les dimensions.
Le pavé à l'échelle va mesurer 6 cm sur 4,8 cm et 4,5 cm.



2. À l'échelle 1 : 5 il faut diviser les grandeurs par 5. Le cylindre à l'échelle a un diamètre de 2,4 cm et une hauteur de 3 cm.

On sait que la face latérale d'un cylindre est un rectangle dont la longueur est égale au périmètre du cercle de base.
Ce cercle a un rayon de 1,2 cm sur le patron. Son périmètre mesure $2\pi \times 1{,}2\,\text{cm} \approx 7{,}54\,\text{cm}$.



3. Ce sont des boites de diamètre 12 cm et de hauteur 15 cm.
Sur la longueur de 60 cm, comme 60 cm = 5 × 12 cm on peut ranger 5 boites.
Sur la largeur de 48 cm, comme 48 cm = 4 × 12 cm on peut ranger 4 boites.
On peut donc faire une première couche de 5 × 4 = 20 boites qui fait 15 cm de haut.

Comme 45 cm = 3 × 15 cm on peut faire trois couches de vingt boites.

On peut ranger 60 boites dans un carton.

4. Calculons le volume du carton :

$V_1 = 60\,\text{cm} \times 48\,\text{cm} \times 45\,\text{cm} = 129\,600\,\text{cm}^3$

Calculons le volume d'une boite :

$V_2 = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur} = \pi \times (6\,\text{cm})^2 \times 15\,\text{cm} = 540\pi\ \text{cm}^3$

Les 60 boites représentent un volume de $60 \times 540\pi\ \text{cm}^3 = 32\,400\pi\ \text{cm}^3 \approx 101\,788\,\text{cm}^3$.

La partie vide a un volume d'environ $129\,600\,\text{cm}^3 - 101\,788\,\text{cm}^3 = 27\,812\,\text{cm}^3$.

5. La proportion de vide représente $\dfrac{27\,812\,\text{cm}^3}{129\,600\,\text{cm}^3} \approx 0,21$.

Il y a 21 % de vide dans ce carton.

Exercice n° 65 : La pyramide

La pyramide du Louvre à Paris a été construite entre 1985 et 1989 par l'architecte Leoh Minh Pei durant le premier mandat de François Mitterand.
Il s'agit d'une pyramide régulière à base carré dont le côté mesure 35,42 m.
Elle s'élève à 21,64 m de hauteur.

1. Calculer la mesure du côté des quatre triangles isocèles identiques qui forment ses faces latérales.

2. Calculer l'angle que forme une face latérale avec la base carrée.
Donner une valeur approchée au dixième de degré près.

3. Calculer le volume de cette pyramide en mètre cube. Donner un arrondi au centième près.

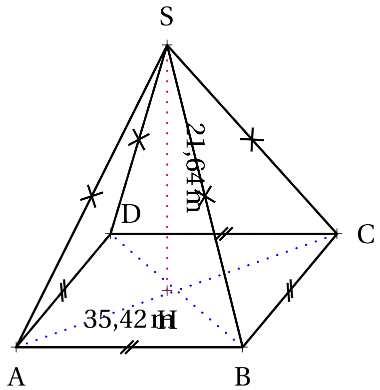
4. La pyramide du Louvre est une réplique de la pyramide de Khéops près de Giseh en Égypte. À sa construction il y a 4 500 ans, elle mesurait 146,58 m.

4.a. Déterminer une valeur approchée au dixième près du coefficient d'agrandissement qui permet de passer des longueurs de la pyramide du Louvre à celles de la pyramide de Khéops.

4.b. Quelles sont les mesures des longueurs de la pyramide de Khéops ?

4.c. Calculer une valeur approchée au décamètre cube près du volume de la pyramide de Khéops.

Exercice n° 65 **Correction**



1.
Le triangle SHA est rectangle en H. Comme la pyramide est régulière, SA = SB = SC = SD et H est le centre du carré ABCD.

Calculons la longueur de la diagonale [AC] du carré.

Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$35,42^2 + 35,42^2 = AC^2$$
$$1\,254,5764 + 1\,254,5764 = AC^2$$
$$AC^2 = 2\,509,1528$$
$$AC = \sqrt{2\,509,1528}$$
$$AC \approx 50,09$$

Ainsi comme H est le centre du carré, il s'agit du milieu du segment [AC]. AH ≈ 50,09 m ÷ 2 ≈ 25,05 m.

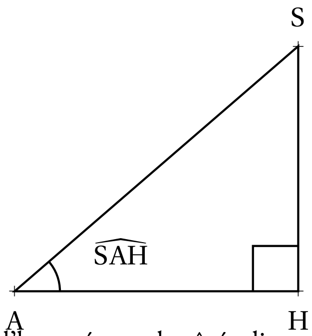
Calculons AS.

Dans le triangle AHS rectangle en H,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{HA}^2 + \mathrm{HS}^2 = \mathrm{AS}^2$$
$$25,05^2 + 21,64^2 = \mathrm{AS}^2$$
$$625,502\,5 + 468,289\,6 = \mathrm{AS}^2$$
$$\mathrm{AS}^2 = 1\,095,792\,1$$
$$\mathrm{AS} = \sqrt{1\,095,792\,1}$$
$$\mathrm{AS} \approx 33,1$$

La longueur du segment [AS] vaut environ 33,10 m.

2. Il s'agit d'obtenir l'angle suivant :



Dans le triangle SAH rectangle en H, on connaît l'hypoténuse, le côté adjacente et le côté opposé à l'angle $\widehat{\mathrm{SAH}}$.
Il y a donc trois méthodes pour calculer cet angle :

$$\cos\widehat{\mathrm{SAH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AS}} = \frac{25,05\,\mathrm{m}}{33,10\,\mathrm{m}} = \frac{25,05}{33,10} \qquad \sin\widehat{\mathrm{SAH}} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{AS}} = \frac{21,64\,\mathrm{m}}{33,10\,\mathrm{m}} = \frac{21,64}{33,10} \qquad \tan\widehat{\mathrm{SAH}} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{AH}} = \frac{21,64\,\mathrm{m}}{25,05\,\mathrm{m}} = \frac{21,64}{25,05}$$

Dans ces trois cas, à la calculatrice on obtient $\widehat{\mathrm{SAH}} \approx 40,8°$.

3. Le volume d'une pyramide est donné par Volume $= \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$

Ici la base est un carré donc $\mathrm{V} = \dfrac{(35,32\,\mathrm{m})^2 \times 21,64\,\mathrm{m}}{3} = \dfrac{26\,995,95\,\mathrm{m}^3}{3} = 8\,998,651\,\mathrm{m}^3$

4.a. La pyramide du Louvre a une hauteur de 21,64 m et celle de Khéops de 146,58 m.
Le coefficient d'agrandissement est le nombre k tel que $k \times 21,64\,\mathrm{m} = 146,48\,\mathrm{m}$.

Le coefficient d'agrandissement est égal à $\dfrac{146,48\,\mathrm{m}}{21,64\,\mathrm{m}} \approx 6,8$.

4.b. Les mesures de la Pyramide de Khéops sont 6,8 fois plus grande que celles du Louvre.

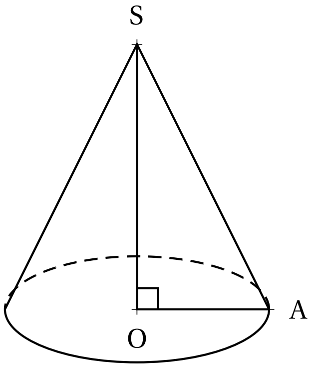
La base carré de la pyramide de Khéops mesure $6,8 \times 35,42\,\mathrm{m} \approx 240,86\,\mathrm{m}$ et un côté latérale de $6,8 \times 33,10\,\mathrm{m} \approx 225,08\,\mathrm{m}$.

4.c. On sait que **si les longueurs d'un solide sont multipliées par k alors les aires latérales sont multipliées par k^2 et le volume par k^3.**

La pyramide de Khéops a donc un volume $6,8^3 = 314,432$ fois plus grand que celui de la pyramide du Louvre.

Le volume de la pyramide de Khéops vaut $314,432 \times 8\,998,651\,\mathrm{m}^3 = 2\,829\,463,831\,\mathrm{m}^3 \approx 2\,829\,\mathrm{dam}^3$

Exercice n° 66 : Le cône **Géométrie de l'espace - Géométrie des solides**



Le cône de révolution ci-contre a une génératrice [SA] qui mesure 6,5 cm et un rayon [OA] de 3,9 cm.

1. Calculer la valeur exacte de la hauteur de ce cône.

2. Tracer en vraie grandeur le patron de ce cône.

3. Calculer le volume en centilitre de ce cône.
Donner une valeur approchée au dixième près.

Exercice n° 66 Correction

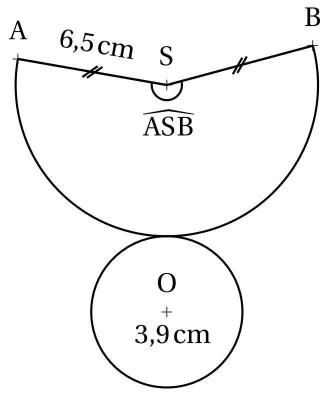
1. Le triangle SOA est rectangle en O.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{OS}^2 + \mathrm{OA}^2 = \mathrm{SA}^2$$
$$\mathrm{OS}^2 + 3,9^2 = 6,5^2$$
$$\mathrm{OS}^2 + 15,21 = 42,25$$
$$\mathrm{OS}^2 = 42,25 - 15,21$$
$$\mathrm{OS}^2 = 27,04$$
$$\mathrm{OS} = \sqrt{27,04}$$
$$\mathrm{OS} = 5,2$$

Ce cône a une hauteur de 5,2 cm.

2. *C'est une question difficile qui dépasse largement les compétences attendues au Brevet !*

On sait que le patron de ce cône peut-être modélisé ainsi :



Il faut trouver la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ASB}}$.

On sait que dans ce patron, l'arc de cercle entre le point A et le point B mesure exactement la même longueur que le cercle de rayon 3,9 cm.

Le périmètre du cercle de rayon 3,9 cm vaut $2\pi \times 3,9\,\mathrm{cm} = 7,8\pi$ cm.

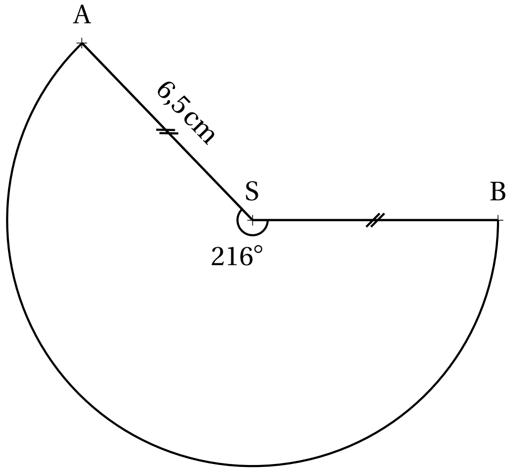
Il faut admettre que l'angle d'un arc de cercle est proportionnel à son périmètre.

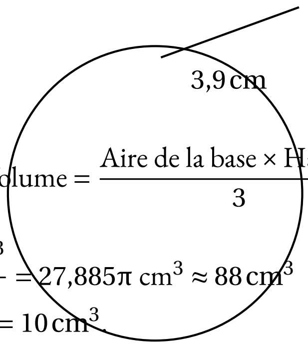
Le périmètre d'un cercle de rayon 6,5 cm vaut $2\pi \times 6,5\,\mathrm{cm} = 13\pi$ cm.
Un cercle complet correspond à un angle de 360°.

Nous avons donc des grandeurs proportionnelles :

Angles	$360°$	$\dfrac{7,8\pi\ \text{cm} \times 360°}{13\pi\ \text{cm}} = \dfrac{7,8}{13} \times 360° = 216°$
Longueur de l'arc	13π cm	$7,8\pi$ cm

Voici le patron en vraie grandeur :





3. La volume d'un cône est donné par la formule $\text{Volume} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$.

Ainsi $V = \dfrac{2\pi \times (3,9\,\text{cm})^2 \times 5,2\,\text{cm}}{3} = \dfrac{83,655\pi\ \text{cm}^3}{3} = 27,885\pi\ \text{cm}^3 \approx 88\,\text{cm}^3$

Or on sait que $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{cm}^3$ donc $1\,\text{cL} = 10\,\text{cm}^3$.

$\boxed{\text{Le volume de ce cône mesure environ 8,8 cL.}}$

EXERCICE N° 67 : La sphère et la boule **GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE - GÉOMÉTRIE DES SOLIDES**

La planète Terre peut être modélisée sous la forme d'une boule de rayon 6 371 km.

1. Calculer la longueur de l'Équateur, arrondi le résultat au kilomètre près.

2. Calculer l'aire de la surface de la planète Terre, arrondir le résultat au kilomètre carré près.
Donner ce résultat en hectare.

3. On sait que seulement 29 % de la surface terrestre est émergée.
Calculer cette surface au kilomètre carrée près.

4. 134 000 000 km^2 de la surface terrestre est habitable.
Quel pourcentage de la surface terrestre émergée représente la surface habitable.

5. En 2021 il y a environ 7 868 000 000 habitants sur Terre. Quelle est la densité théorique d'habitant par hectare ?

6. Calculer le volume de la Terre arrondir le résultat au kilomètre cube près.

7. On estime que la masse de la Terre est environ $5,9722 \times 10^{24}\ kg$.
Calculer la masse volumique de la Terre au kilogramme par mètre cube près.

EXERCICE N° 67 **CORRECTION**

1. L'Équateur est un grand cercle de la Terre assimilée à une sphère de centre O et de rayon 6 371 km. Il s'agit donc d'un cercle de centre O et de rayon 6 371 cm.

$\boxed{\text{La longueur de l'Équateur est } 2\pi \times 6\,371\,\text{km} = 12\,742\pi\ km \approx 40\,030\,\text{km}}$

En prenant πă $\approx 3,14$ *on obtient une longueur de l'Équateur d'environ* 40 010 km. *La valeur ci-dessus est obtenue en utilisant la touche* π *de la calculatrice qui donne* $\pi \approx 3,141\,592\,654$. *Les deux valeurs sont acceptées au brevet même si la deuxième est plus précise. On prendre la valeur calculatrice dorénavant.*

2. La surface de la planète Terre est celle d'une sphère de rayon 6 371 km.

$\boxed{\text{L'aire de cette surface vaut } 4\pi \times (6\,371\,\text{km})^2 = 162\,358\,564\pi\ km^2 \approx 510\,064\,472\,\text{km}^2}$

On sait qu'un hectare est l'aire d'un carré de 100 m de côté soit $100\,\text{m} \times 100\,\text{m} = 10\,000\,\text{m}^2$
ou encore $0,1\,\text{km} \times 0,1\,\text{km} = 0,01\,\text{km}^2$. On en déduit que $1\,\text{km}^2 = 100\,\text{ha}$.

$\boxed{\text{L'aire de la surface terrestre vaut environ } 51\,006\,447\,200\,\text{ha.}}$

3. Il faut calculer 29 % de 510 064 472 km^2 soit $\boxed{\dfrac{29}{100} \times 510\,064\,472\,\text{km}^2 \approx 147\,918\,697\,\text{km}^2}$

4. Calculons la proportion de Terre habitable : $\dfrac{134\,000\,000\,\text{km}^2}{147\,918\,697\,\text{km}^2} \approx 0,906.$

$\boxed{90,6\ \%\ \text{de la Terre emergée est habitable.}}$

5. Il y a 7 868 000 000 d'habitants sur Terre pour une surface habitable de $134\,000\,000\,\text{km}^2 = 13\,400\,000\,000\,\text{ha}$.

$\boxed{\text{La densité de population est d'environ } \dfrac{7\,868\,000\,000}{134\,000\,000\,\text{ha}} \approx 59 \text{ habitants par hectare.}}$

6. La Terre est assimilée à une boule de 6 371 km de rayon.

$\boxed{\text{Le volume de la Terre vaut } \dfrac{4}{3}\pi(6\,371\,\text{km})^3 = \dfrac{1\,034\,386\,411\,244\pi}{3}\ km^3 \approx 1\,083\,200\,000\,000\,\text{km}^3}$.

7. La masse de la Terre vaut environ $5,972\,2 \times 10^{24}$ kg pour un volume de $1\,083\,200\,000\,000\,\text{km}^3 = 1,083\,2 \times 10^{12}\,\text{km}^3$.

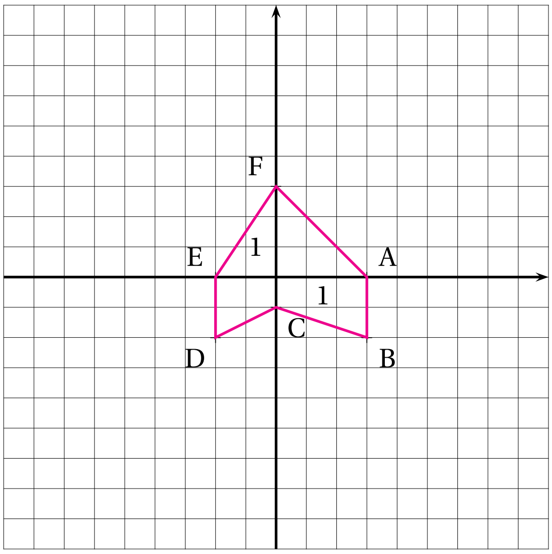
On sait que $1\,\text{km}^3 = 1\,000\,\text{hm}^3 = 1\,000\,000\,\text{dam}^3 = 1\,000\,000\,000\,\text{m}^3 = 1 \times 10^9\,\text{m}^3$

Ainsi le volume de la Terre est $1{,}083\,2 \times 10^{12}\,\text{km}^3 = 1{,}083\,2 \times 10^{12} \times 1 \times 10^9\ m^3 = 1{,}032 \times 10^{21}\,\text{m}^3$.

$$\boxed{\text{La densité de la Terre vaut } \frac{5{,}972\,2 \times 10^{24}\,\text{kg}}{1{,}032 \times 10^{21}\,\text{m}^3} = \frac{5\,972{,}2 \times 10^{21}\,\text{kg}}{1{,}032 \times 10^{21}\,\text{m}^3} \approx 5\,787\,\text{kg/m}^3}$$

Pour comparaison, l'acier a une masse volumique d'environ $7\,500\,\text{kg/m}^3$ *et l'eau* $998\,\text{kg/m}^3$

Exercice n° 68 : Utiliser les coordonnées dans le plan



1. Lire les coordonnées des points du polygone ABCDEF.

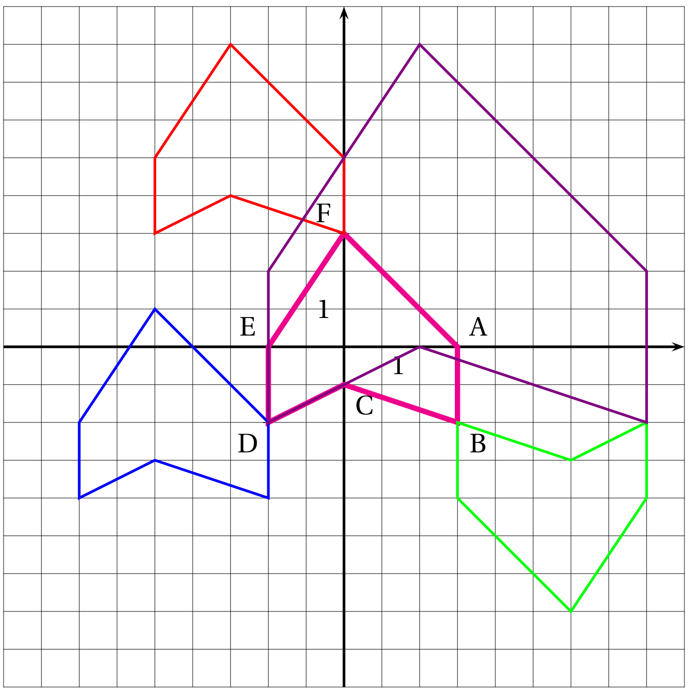
2. Tracer l'image $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ du polygone ABCDEF par la symétrie de centre B.
Lire les coordonnées des images de chaque point.

3. Tracer l'image $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ du polygone ABCDEF par la translation qui tranforme A en D.
Lire les coordonnées des images de chaque point.

4. On définit la transformation qui à un point $M(x; y)$ associe le point $M_3(x-3; y+5)$.
Déterminer les coordonnées des images des sommets du polygone $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$. Tracer ce polygone.
Quelle transformation géométrique permet de passer du polygone ABCDEF au polygone $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$?

5. On définit la transformation qui a un point $M(x; y)$ associe le point $M_4(2x+2; 2y+2)$.
Déterminer les coordonnées des images des sommets du polygone$A_4B_4C_4D_4E_4F_4$. Tracer ce polygone.
Quelle transformation géométrique permet de passer du polygone ABCDEF au polygone $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$?

Exercice n° 68 — Correction



1. $\boxed{A(3;0) — B(3;-2) — C(0;-1) — D(-2;-2) — E(-2;0) — F(0;3)}$

2. Il s'agit de la figure tracée en vert.
$\boxed{\text{Les coordonnées des points sont } A_1(3;-4) — B_1(3;-2) — C_1(6;-3) — D_1(8;-2) — E_1(8;-4) — F_1(6;-7)}$

3. Il s'agit de la figure tracée en bleu.
$\boxed{\text{Les coordonnées des points sont } A_2(-2;-2) — B_2(-2;-4) — C_2(-5;-3) — D_2(-7;-4) — E_2(-7;-2) — F_2(-5;1)}$

4. $\boxed{A_3(0,5) — B_3(0;3) — C_3(-3;4) — D_3(-5;3) — E_3(-5;5) — F_3(-3;8)}$

Il s'agit de la figure tracée en rouge.

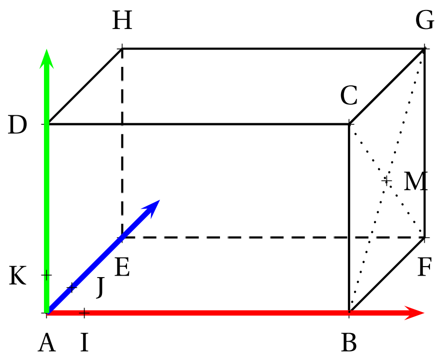
$\boxed{\text{La transformation obtenue est la translation qui transforme C en D.}}$

5. $\boxed{A_4(8;2) \text{ — } B_4(8;-2) \text{ — } C_4(2;0) \text{ — } D_4(-2;-2) \text{ — } E_4(-2;2) \text{ — } F_4(2;8)}$

Il s'agit de la figure tracée en violet.

$\boxed{\text{La transformation obtenue est l'homothétie de centre D et de coefficient 2.}}$

Exercice n° 69 : Utiliser les coordonnées sur un pavé droit



On se place dans le repère orthonormé $(A; AI, AJ, AK)$ dont l'unité sur chaque axe est 1 cm.
On sait que $AB = 8\,\text{cm}$, $AE = 3\,\text{cm}$ et $AD = 5\,\text{cm}$.

1. Indiquer les coordonnées de chacun des huit sommets du pavé droit.

2. Indiquer les coordonnées des chacuns des douze millieux des arêtes du pavé droit.

3. M est le centre de la face (BCGF).
Indiquer les coordonnées de chacun des six centres des six faces du pavé droit.

Exercice n° 69 — **Correction**

On se place dans le repère orthonormé $(A; AI; AJ; AK)$.

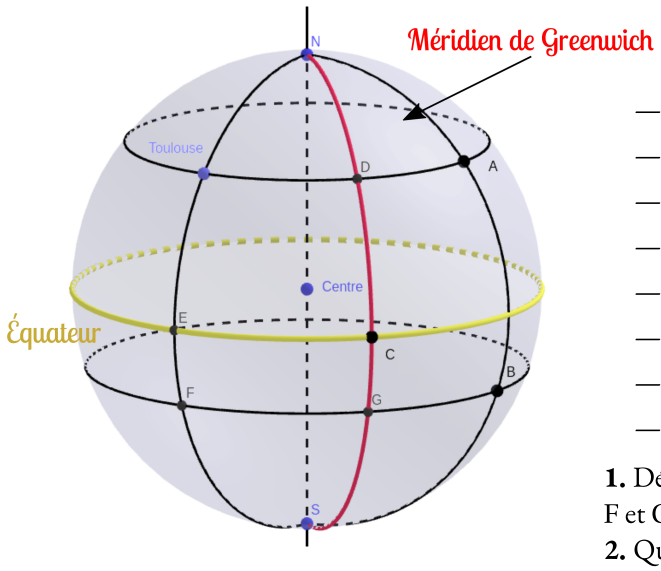
1. $A(0;0;0)$, $B(8;0;0)$, $C(8;0;5$, $D(0;0;5)$
$E(0;3;0)$, $F(8;3;0)$, $G(8;3;5)$, $H(0;3;5$.

2. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $(4;0;0)$.
Le milieu de [BC] a pour coordonnées $(8;0;2,5)$.
Le milieu de [CD] a pour coordonnées $(4;0;5)$.
Le milieu de [DA] a pour coordonnées $(0;0;2,5)$.
Le milieu de [DH] a pour coordonnées $(0;1,5;5)$.
Le milieu de [HG] a pour coordonnées $(4;3;5)$.
Le milieu de [GC] a pour coordonnées $(8;1,5;5)$.
Le milieu de [BF] a pour coordonnées $(8;1,5;0)$.
Le milieu de [FG] a pour coordonnées $(8;3;2,5)$.
Le milieu de [EF] a pour coordonnées $(4;3;0)$.
Le milieu de [EH] a pour coordonnées $(0;3;2,5)$.
Le milieu de [AE] a pour coordonnées $(0;1,5;0)$.

3. Le centre de la face (ABCD) a pour coordonnées $(4;0;2,5)$
Le centre de la face (CDHG) a pour coordonnées $4;1,5;5)$
Le centre de la face (BCGF) a pour coordonnées $8;1,5;2,5)$
Le centre de la face (AEHD) a pour coordonnées $0;1,5;2,5)$
Le centre de la face (AEFB) a pour coordonnées $4;1,5;0)$
Le centre de la face (EFGH) a pour coordonnées $4;3;2,5)$

Exercice n° 70 : **Utiliser les coordonnées géographiques** — **Géométrie cartésienne - Dans l'espace**

Sur la représentation en perspective de la sphère terrestre ci-dessus, nous avons les informations ci-après :



— les points D et A sont sur le même parallèle que Toulouse ;
— les points E et C sont sur l'équateur ;
— les points F, G et B sont sur le même parallèle ;
— les points A et B sont sur le même méridien ;
— les points D, C et G sont sur le même méridien ;
— les points E et F sont sur le même méridien que Toulouse ;
— les coordonnées géographiques de Toulouse sont (44°N; 1°O) ;
— les coordonnées géographiques du point B sonr (23°S; 45°E).

1. Déterminer les coordonnées géographiques des points A, C, D, E, F et G.
2. Quelles sont les coordonnées géographiques du point diamétralement opposé à Toulouse sur la Terre.

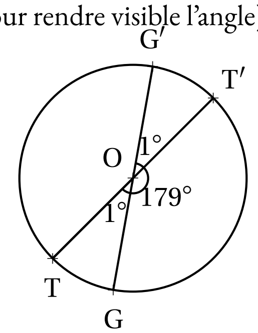
Exercice n° 70 — Correction

1. Les points D et A sont sur le même parallèle que Toulouse. Ils ont donc la même latitude : 44°N.
Les points C et E sont sur l'Équateur, ils ont la même latitude : 0° (inutile de préciser Nord ou Sud).
Les points F et G sont sur le même parallèle que le point B. Ils ont donc la même latitude : 23°S.

Les points E et F sont sur le même méridien que Toulouse. Ils ont donc la même longitude : 1°O.
Les points D, C et G sont sur le méridien de Greenwich. Ils ont donc la même longitude : 0°.
Le point A est sur le même méridien que le point B. Ils ont donc la même longitude : 45°E.

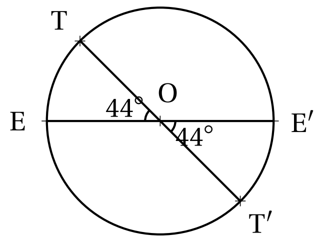
A(44°N; 45°E) — C(0°; 0°) — D(44°N; 0°) — E(0°; 1°O) — F(23°S; 1°O) — G(23°S; 0°)

2. Considérons le cercle de centre O le centre de la Terre, passant par Toulouse et contenant le rayon reliant le centre et Toulouse Nommons T le point qui correspond à Toulouse et T′ le point diamètralement opposé. On note G l'intersection de ce cercle avec le méridien de Greenwich (grossièrement positionné pour rendre visible l'angle).



Le point T′ a pour longitude 179°E.

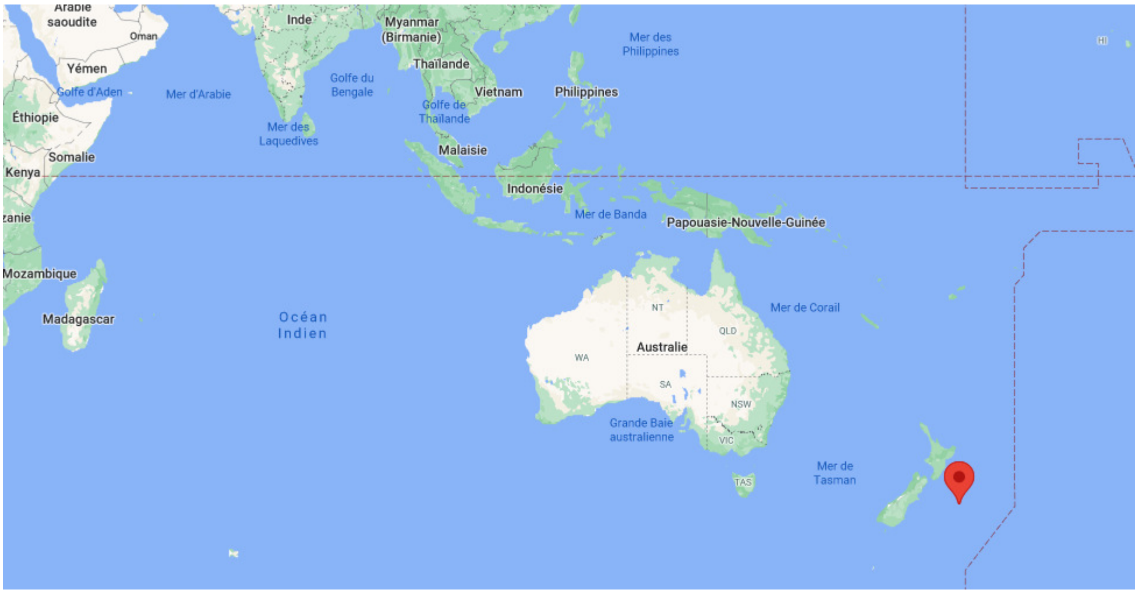
Si on se place maintenant sur le plan défini par les points O, T et E, le plan, OTE, on peut tracer le grand cercle contenant le méridien passant par Toulouse.



Le point T' a pour latitude 44°S.

$\boxed{\text{Le point diamètralement à Toulouse sur la Terre est le point de coordonnées } (44°S; 179°E).}$

Il s'agit d'un point en plein pacifique au large de la Nouvelle-Zelande.

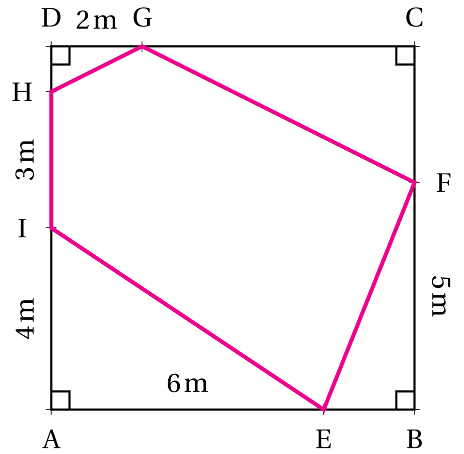


Exercice n° 71 : **Périmètres des polygones** — **Grandeurs et mesures - Les longueurs**

ABCD est un carré dont le côté mesure 8 m.

1. Calculer la valeur exacte puis approchée au millième de mètre prés du périmètre du polygone EFGHI.

2. Calculer la valeur exacte de l'aire de ce polygone en mètre carré.



Exercice n° 71 — Correction

1.

Dans le triangle AIE rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AI^2 + AE^2 = IE^2$$
$$4^2 + 6^2 = IE^2$$
$$16 + 36 = IE^2$$
$$IE^2 = 52$$
$$IE = \sqrt{52}$$

Dans le triangle EFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BF^2 + BE^2 = FE^2$$
$$5^2 + 2^2 = FE^2$$
$$25 + 4 = FE^2$$
$$FE^2 = 29$$
$$FE = \sqrt{29}$$

Dans le triangle GCF rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CG^2 + CF^2 = GF^2$$
$$6^2 + 3^2 = GF^2$$
$$36 + 9 = GF^2$$
$$GF^2 = 45$$
$$GF = \sqrt{45}$$

Dans le triangle GDH rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DG^2 + DH^2 = GH^2$$

$$2^2 + 1^2 = \text{GH}^2$$

$$4 + 1 = \text{GH}^2$$

$$\text{GH}^2 = 5$$

$$\text{GH} = \sqrt{5}$$

$\boxed{\text{Le périmètre du polygone vaut exactement } \sqrt{52} + \sqrt{29} + \sqrt{45} + \sqrt{5} + 3 \text{ soit environ } 24{,}541\,\text{m}}$

2. Il suffit de soustraire l'aire des quatre triangles rectangles à l'aire du carré.

L'aire du polygone est égale à $(8\,\text{m})^2 - \dfrac{6\,\text{m} \times 4\,\text{m}}{2} - \dfrac{2\,\text{m} \times 5\,\text{m}}{2} - \dfrac{3\,\text{m} \times 6\,\text{m}}{2} - \dfrac{[}{m}]2\,\text{m} \times 1\,\text{m}2$

$\boxed{\text{L'aire du polygone est donc égale à } 64\,\text{m}^2 - 12\,\text{m}^2 - 5\,\text{m}^2 - 9\,\text{m}^2 - 1\,\text{m}^2 = 37\,\text{m}^2}$

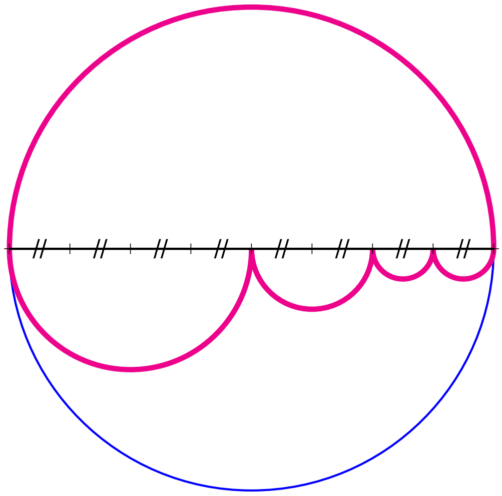
EXERCICE N° 72 : **Périmètre du cercle** **GRANDEURS ET MESURES - LES LONGUEURS**

On sait que le diamètre du grand demi-cercle mesure 32 cm.

1. Calculer le périmètre d'un cercle de diamètre 32 cm.
Donner la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée au millimètre près.

2. Calculer le périmètre de la figure constituée du grand demi-cercle et des quatre petits demi-cercles.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au millimètre près.

3. Calculer l'aire de la surface comprise à l'intérieur de ces demi-cercles.
Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au millimètre carré près.



EXERCICE N° 72 **CORRECTION**

On sait que le périmètre d'un cercle de rayon R *vaut* $2\pi R$ *où* $pi \approx 3,14$.
On peut aussi utiliser le diamètre D *dans cette expression qui devient* πD.

1. Le périmètre d'un cercle de diamètre 32 cm mesure $\boxed{32\,\text{cm} \times \pi = 32\pi\ cm \approx 100{,}5\,\text{cm au millimètre près.}}$

2. Le grand demi-cercle a un diamètre de 32 cm, il mesure donc $\dfrac{32\pi\ cm}{2} = 16\pi\ cm$.

Un deuxième demi-cercle a un diamètre de 16 cm, il mesure donc $\dfrac{16\pi\ cm}{2} = 8\pi\ cm$
Le troisième demi-cercle a un diamètre de 8 cm, il mesure donc $\dfrac{8\pi\ cm}{2} = 4\pi\ cm$
Le quatrième et cinquième demi-cercle ont le même diamètre 4 cm, ils forment un cercle entier et mesurent donc $4\pi\ cm$.

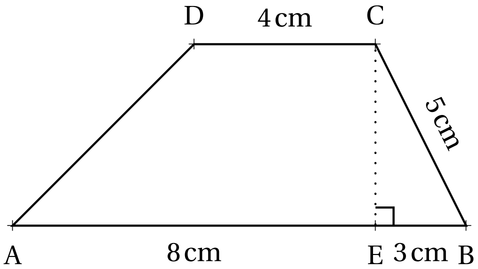
La somme des périmètres est donc égale à : $16\pi\ cm + 8\pi\ cm + 4\pi\ cm + 4\pi\ cm = 32\pi\ cm$

$\boxed{\text{Le périmètre du cercle est donc égal au périmètre de l'ensemble des demi-cercles : } 32\pi\ cm}$

EXERCICE N° 73 : Aire des polygones — GRANDEURS ET MESURES - LES AIRES

1. Calculer l'aire d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 3 dm.

2. Calculer l'aire du trapèze ABCD.



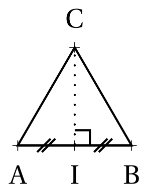
EXERCICE N° 73 — CORRECTION

1.
Calculons la mesure de la hauteur [IC].

On sait que dans un triangle équilatéral la hauteur coupe le côté opposé en son milieu.

Dans le triangle AIC rectangle en I,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

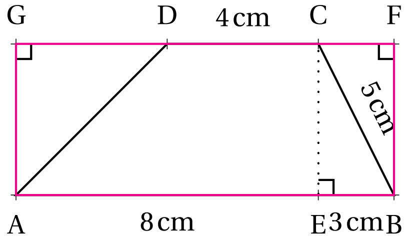
$$IA^2 + IC^2 = AC^2$$
$$1,5^2 + IC^2 = 3^2$$
$$2,25 + IC^2 = 9$$
$$IC^2 = 9 - 2,25$$
$$IC^2 = 6,75$$
$$IC = \sqrt{6,75}$$
$$IC \approx 2,6$$



L'aire du triangle vaut donc $\boxed{\dfrac{3\,\text{dm} \times 2{,}6\,\text{dm}}{2} \approx 3{,}9\,\text{dm}^2}$

En travaillant en valeur exacte, on peut démontrer que la hauteur mesure exactement $1,5\sqrt{3}$ *et l'aire* $2,25\sqrt{3}$.

2. On peut calculer cette aire en partant d'un rectangle.



Calculons la longueur FB
Dans le triangle CBF rectangle en F,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$FC^2 + FB^2 = CB^2$$
$$3^2 + FB^2 = 5^2$$
$$9 + FB^2 = 25^2$$
$$FB^2 = 25 - 9$$
$$FB^2 = 16$$
$$FB = \sqrt{16}$$

$$FB = 4$$

Le triangle CFE rectangle en F a une aire de $\dfrac{3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}}{2} = 6\,\text{cm}^2$

Le triangle AGD rectangle en G a une aire de $\dfrac{4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}}{2} = 8\,\text{cm}^2$

(On a bien $GD = FG - FC - CD = 11\,\text{cm} - 3\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$)

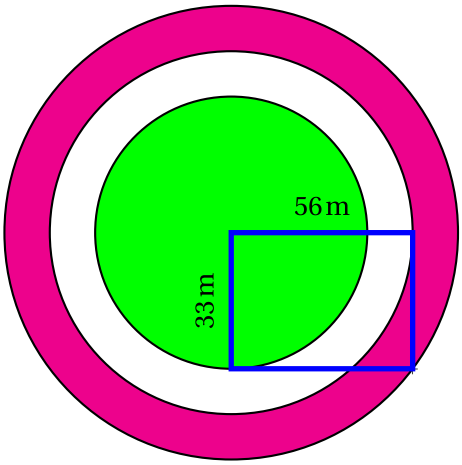
Le rectangle ABFG a une aire de $11\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} = 44\,\text{cm}^2$.

Finalement $\boxed{\text{l'aire du trapèze mesure } 44\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 8\,\text{cm}^2 = 30\,\text{cm}^2}$

On pouvait aussi utilise la formule (non exigible au collège) :

$$\textit{Aire du trapèze} = \frac{(\textit{Petite base} + \textit{Grande base}) \times \textit{Hauteur}}{2}$$

On aurait obtenu $\dfrac{(4\,\text{cm} + 11\,\text{cm}) \times 4\,\text{cm}}{2} = \dfrac{15\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}}{2} = \dfrac{60\,\text{cm}^2}{2} = 30\,\text{cm}^2$



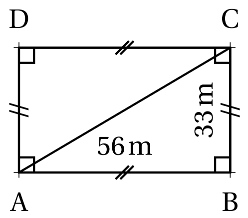
Sur cette figure qui n'est pas dessinée en vraie grandeur on sait que :

- les trois cercles sont concentriques ;
- le centre de ces cercles est un des sommets d'un rectangle mesurant 56 m de long sur 33 m de large ;
- le premier cercle a pour rayon la largeur du rectangle ;
- le deuxième cercle a pour rayon la longueur du rectangle ;
- le troisième cercle a pour rayon la diagonale du rectangle.

Comparer l'aire de la surface constituée par la couronne extérieure (en magenta) et le disque intérieure (en vert).

Exercice n° 74 — Correction

On peut modéliser le rectangle ainsi :



Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$$
$$56^2 + 33^2 = \mathrm{AC}^2$$
$$3\,136 + 1\,089 = \mathrm{AC}^2$$
$$\mathrm{AC}^2 = 4\,225$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{4\,225}$$
$$\mathrm{AC} = 65$$

Le cercle le plus petit a un rayon de 33 m, le cercle moyen un rayon de 56 m et le grand cercle un rayon de 65 m.

Calculons les aires de chacun de ces disques.

$A_1 = \pi \times (33\,\mathrm{m})^2 = 1\,089\pi\ \mathrm{cm}^2$
$A_2 = \pi \times (56\,\mathrm{m})^2 = 3\,136\pi\ \mathrm{cm}^2$
$A_3 = \pi \times (65\,\mathrm{m})^2 = 4\,225\pi\ \mathrm{cm}^2$

La disque vert a une aire de $A_2 - A_1 = 3\,136\pi\ \mathrm{cm}^2 - 1\,089\pi$

La courronne magenta a une aire de $A_3 - A_2 = 4\,225\pi\ \mathrm{cm}^2 - 3\,136\pi\ \mathrm{cm}^2 = 1\,089\pi\ \mathrm{cm}^2$.

Le disque vert et la courronne magenta ont exactement la même aire !

Remarquez l'usage de valeurs exactes plutôt que de valeurs approchée !
On peut aussi généraliser ce résultat.
Le théorème de Pythagore nous donne que $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2$ *donc* $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2$
Les trois disques ont une aire de :
$A_1 = \mathrm{BC}^2\pi\ cm^2$, $A_2 = \mathrm{AB}^2\pi\ cm^2$ *et* $A_3 = \mathrm{AC}^2\pi\ cm^2$.

La courronne magenta a une aire de $A_3 - A_2 = \mathrm{AC}^2\pi\ cm^2 - \mathrm{AB}^2\pi\ cm^2 = (\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2)\pi\ cm^2 = \mathrm{BC}^2\pi\ cm^2$.

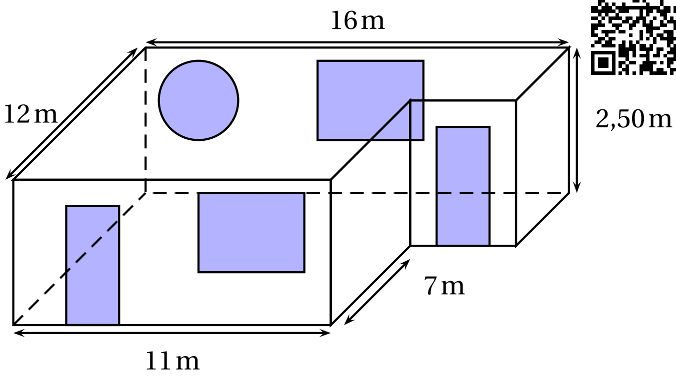
Cela prouve la généralité du résultat !

Exercice n° 75 : Aire latérale

Grandeurs et mesures - Les aires

Alice souhaite peindre la pièce principale au rez-de-jardin de sa maison.
Voici une représentation en perspective de cete pièce :
Alice estime raisonnablement que les murs sont parfaitement verticaux et orthogonaux entre eux et que le sol et le plafond sont parallèles. Cette pièce contient cinq ouvertures :

- Deux portes : 0,90 m × 2,10 m ;
- Deux fenêtres : 1,40 m × 1,10 m ;
- Un hublot : Rayon = 0,65 m.



1. Quelle est la nature du solide qui modélise cette pièce de la maison ?

2. Alice souhaite peindre en bleu azur les murs de cette pièce. Le pot de 2,5 L de peinture coûte 39,90 € et son rendement est de 28 m^2. Il faut prévoir deux couches de peinture et attendre 6 h entre les deux couches.
Combien va lui coûter la peinture pour les murs ?

3. Alice veut également repeindre le plafond en blanc. Le pot de 10 L de peinture coûte 45,90 € et a un rendement de 75 m^2. Alice n'envisage de poser qu'une seule couche de peinture au plafond.
Combien va lui coûter la peinture pour le plafond ?

Exercice n° 75 — Correction

1. Cette pièce est modélisée par un prisme droit à base hexagonale.

2. Calculons l'aire latérale de ce prisme droit sans tenir compte des ouvertures.

Chaque face de ce prisme (chaque mur de la pièce) est un rectangle.
Il manque deux longueurs : sur la largeur on a $12\,\text{m} - 7\,\text{m} = 5\,\text{m}$.
Sur la longueur on a $16\,\text{m} - 11\,\text{m} = 5\,\text{m}$.

Le périmètre de cette pièces est égal à : $11\,\text{m} + 7\,\text{m} + 5\,\text{m} + 5\,\text{m} + 16\,\text{m} + 12\,\text{m} = 56\,\text{m}$

La hauteur vaut 2,50 m. L'aire latérale de ce prisme est donc égale à $51\,\text{m} \times 2{,}50\,\text{m} = 127{,}5\,\text{m}^2$.

Calculons l'aire des ouvertures.

L'aire d'une porte vaut : $0{,}90\,\text{m} \times 2{,}10\,\text{m} = 1{,}89\,\text{m}^2$.
L'aire d'une fenêtre vaut : $1{,}40\,\text{m} \times 1{,}10\,\text{m} = 1{,}54\,\text{m}^2$.
L'aire du hublot vaut : $\pi \times (0{,}65\,\text{m})^2 = 0{,}4225\pi\,\text{m}^2 \approx 1{,}33\,\text{m}^2$.

L'aire des ouvertures est donc égale à : $2 \times 1{,}89\,\text{m}^2 + 2 \times 1{,}54\,\text{m}^2 + 1{,}33\,\text{m}^2 = 8{,}19\,\text{m}^2$.

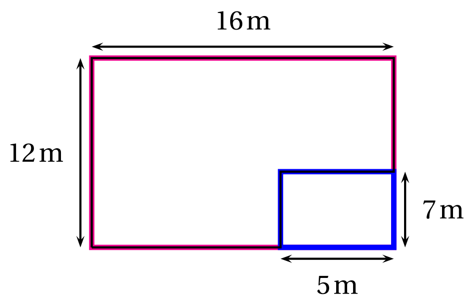
La surface de murs à recouvrir de peinture mesure $127{,}5\,\text{m}^2 - 8{,}19\,\text{m}^2 = 119{,}31\,\text{m}^2$.

Comme il faut deux couches de peinture, Alice va avoir besoin de recouvrir $2 \times 119{,}31\,\text{m}^2 = 238{,}62\,\text{m}^2$.

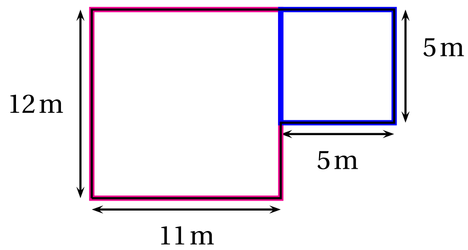
Un pot de peinture peut recouvrir 28 m^2. Comme $\dfrac{238{,}62\,\text{m}^2}{28\,\text{m}^2} \approx 8,5$, il faut 9 pots de peinture.

Or $9 \times 39{,}90\,€ = 359{,}10\,€$. La peinture pour les murs va coûter 359,10 €.

3. Il faut calculer l'aire du plafond. On peut imaginer deux manières de le faire :



Le grand rectangle a une aire de $16\,\text{m} \times 12\,\text{m} = 192\,\text{m}^2$.
Le petit rectangle a un aire de $5\,\text{m} \times 7\,\text{m} = 35\,\text{m}^2$
L'aire du plafond est donc égale à :
$192\,\text{m}^2 - 35\,\text{m}^2 = 157\,\text{m}^2$.



Le grand rectangle a une aire de $11\,\text{m} \times 12\,\text{m} = 132\,\text{m}^2$.
Le petit carré a un aire de $5\,\text{m} \times 5\,\text{m} = 25\,\text{m}^2$
L'aire du plafond est donc égale à :
$132\,\text{m}^2 + 25\,\text{m}^2 = 157\,\text{m}^2$.

Comme un pot peut recouvrir $75\,\text{m}^2$ et que $\dfrac{157\,\text{m}^2}{75\,\text{m}^2} \approx 2{,}09$, il faut trois pots de peinture.

$\boxed{\text{Le prix de la peinture pour le plafond est } 3 \times 45{,}90\,€ = 137{,}70\,€.}$

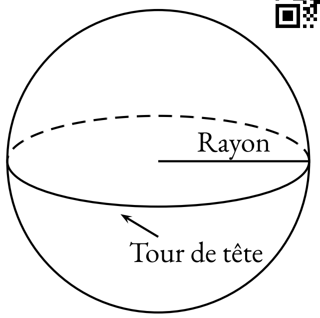
Exercice n° 76 : Aire de la sphère

Mathieu se demande combien il a de cheveux sur la tête.
Pour cela il modélise son crâne sous la forme d'un hémisphère. En mesurant son tour de tête il obtient 56 cm.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de millimètre près du rayon de son crâne.

Mathieu a lu dans un magazine qu'en moyenne la densité de cheveux sur un crâne était de 250 cheveux par centimètre carré.

2. Déterminer le nombre de cheveux sur le crâne de Mathieu.



Exercice n° 76 — Correction

1. On sait que le périmètre d'un cercle de rayon R mesure $2\pi R$.

Comme

$$2\pi R = 56\ cm$$

on a $R = \dfrac{56\ cm}{2\pi} \approx \boxed{8{,}91\ cm \text{ au millimètre près.}}$

2. L'aire d'une sphère de rayon R mesure $4\pi R^2$.

Une sphère de rayon $R \approx 8{,}91\ cm$ a une aire de $4\pi \times (8{,}91\ cm)^2 \approx 998\ cm^2$.

La surface de son crâne correspond à un hémisphère, son aire mesure ainsi environ $998\ cm^2 \div 2 = 499\ cm^2$.

Comme la densité de cheveux sur un crane humain vaut d'après le magazine 250 cheveux par centimètre carré.

$\boxed{\text{Il y a environ } 499 \times 250 = 124\,750 \text{ cheveux sur la tête à Mathieu.}}$ (... il n'y a qu'une dent... :-))

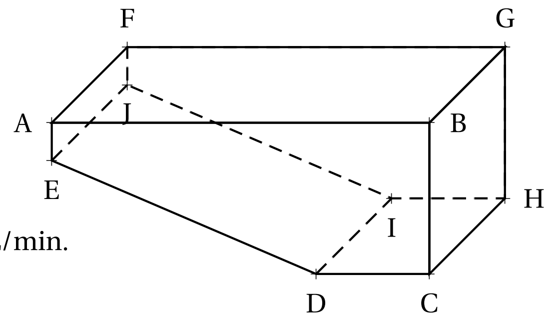
On sait qu'il y a entre 100 000 *et* 150 000 *cheveux sur une tête humaine.* 150 000 *pour les cheveux clairs,* 110 000 *pour les bruns et* 90 000 *pour les chevelures rousses.*

La figure ci-dessus, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, représente en perspective cavalière un piscine municipale, plus précisémment le volume d'eau contenu dans cette piscine. Le segment [AE] mesure 1,20 m, il correspond au « petit bain ». Le segment [BC] mesure 3 m, il correspond au « grand bain ».

On sait que :

— ABCDEFGHIJ est un prisme droit;

— $AE = 1{,}20\,\text{m}$, $BC = 3\,\text{m}$, $AF = 10\,\text{m}$, $AB = 25\,\text{m}$ et $DC = 5\,\text{m}$.

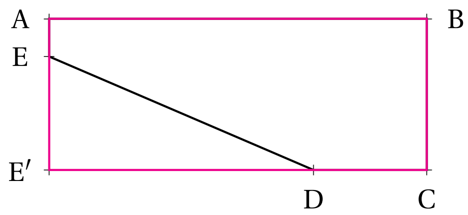


1. Quelle est la nature du polygone ABCDE ? Calculer son aire.
2. Calculer le volume en mètre cube puis en litre de cette piscine.
3. Pour remplir cette piscine on utilise une pompe dont le débit est 80 L/min.
Combien de temps prend le remplissage de cette piscine ?
4. Dans cette ville, le prix de l'eau est facturé $3{,}17\,€/\text{m}^3$.
Combien coûte le remplissage de cette piscine ?

Exercice n° 77 — Correction

1. ABCDE est un pentagone.

Pour calculer son aire, on peut l'inscrire dans un rectangle.



L'aire du rectangle ABCE′ est égale à $25\,\text{m} \times 3\,\text{m} = 75\,\text{m}^2$.
On constate que $E'D = 25\,\text{m} - 5\,\text{m} = 20\,\text{m}$ et $EE' = 3\,\text{m} - 1{,}20\,\text{m} = 1{,}80\,\text{m}$.
L'aire du triangle rectangle EE′D est égale à $\dfrac{20\,\text{m} \times 1{,}80\,\text{m}}{2} = 18\,\text{m}^2$.

L'aire du pentagone est égale à $75\,\text{m}^2 - 18\,\text{m}^2 = 57\,\text{m}^2$

2. Le prisme droit ABCDEFGHIJ est un prisme droite dont la base est ABCDE et de hauteur [AF].

Le volume de ce prisme droit vaut Aire de la base × Hauteur $= 57\,\text{m}^2 \times 10\,\text{m} = 570\,\text{m}^3$.

On sait que $1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{L}$.

Le volume de cette piscine vaut $570\,\text{m}^3 = 570\,000\,\text{L}$

3. Le débit de la pompe vaut 80 L par minute.

$\dfrac{570\,000\,\text{L}}{80\,\text{L}} = 7\,125$.

Or $7\,125 = 60 \times 118 + 45$ et $118 = 24 \times 4 + 22$. Il faut 4 jours 22 heures et 45 minutes pour remplir la piscine.

4. Le prix d'un mètre cube est 3,17 €.

Le prix du remplissage coûte $3{,}17\,€ \times 570 = 1\,806{,}90\,€$

EXERCICE N° 78 : **Volume du cylindre**

On modélise une tasse à café par un cylindre droit de 4 cm de diamètre et de 5 cm de haut. Un morceau de sucre peut être considéré comme un pavé droit de 2,5 cm de long, 1,5 cm de large et 1 cm de haut.

1. Calculer le volume de cette tasse en mL.

2. Calculer le volume d'un morceau de sucre en cm^3.

3. De quelle hauteur monte le café dans ma tasse quand je rajoute deux sucres ?

EXERCICE N° 78 **CORRECTION**

1. Le volume du cylindre est donné par la formule : Aire de la base × Hauteur

Cette tasse a un rayon de 2 cm et une hauteur de 5 cm.

Le volume de la tasse vaut $\pi \times (2\,\text{cm})^2 \times 5\,\text{cm} = 20\pi\ cm^3 \approx 62{,}831\,\text{cm}^3$

On sait que $1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{L}$ donc $1\,\text{mL} = 1\,\text{cm}^3$.

La tasse a une volume d'environ 63 mL.

2. Le volume du sucre vaut $2{,}5\,\text{cm}1{,}5\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} = 3{,}75\,\text{cm}^3$.

3. Le volume des deux sucres vaut $3{,}75\,\text{cm}^3$.

Le café dans la tasse prend la forme d'un cylindre ayant la même base que la tasse et on cherche sa hauteur h. Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \pi \times 2^2 \times h &= 2 \times 3,75 \\ 4\pi \times h &= 7,5 \\ h &= \frac{7,5}{4\pi} \\ h &\approx 0,60 \end{aligned}$$

La hauteur de café monte de 6 mm.

EXERCICE N° 79 : Volume des pyramides

Une boite de chocolat à la forme d'un tronc de pyramide ABCDEFGH.

On sait que :

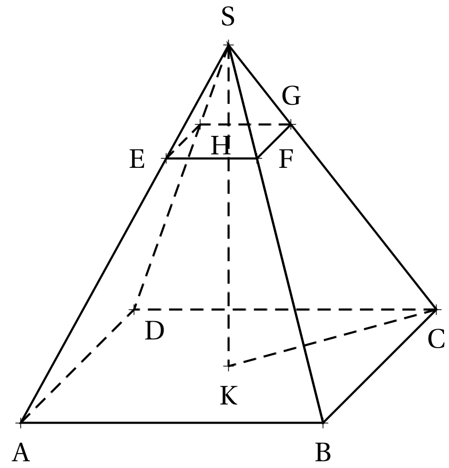
— ABCDS est une pyramide régulière;

— ABCD est un carré de côté 12 cm;

— la hauteur [SK] de la pyramide mesure 15 cm;

— EF = 2,4 cm;

— (EF)//(AB), (BC)//(FG), (CD)//(GH) et (AD)//(EH).



1. Calculer le volume de la pyramide ABCDS en centimètre cube.

2. Déterminer le coefficient de réduction qui permet de passer de la pyramide ABCDS à la pyramide EFGHS.

3. En déduire le volume de la pyramide EFGHS puis de la boite de chocolat en centimètre cube.

4.a. Calculer la mesure exacte de la diagonale du carré ABCD.
4.b. Calcule la mesure exacte du segment [SA].
4.c. En déduire une valeur approchée de la mesure SE.

5. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{KSC}$

EXERCICE N° 79 — CORRECTION

1. On sait que le volume d'une pyramide est donnée par la formule :

$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

La pyramide ABCDS a une base carrée de côté 12 cm et une hauteur de 15 cm.

Son volume : $\boxed{\frac{(12\,\text{cm})^2 \times 15\,\text{cm}}{3} = \frac{2\,160\,\text{cm}^3}{3} = 720\,\text{cm}^3}$

2. Comme les côtés de la base des deux pyramides sont parallèles, l'une est la réduction de l'autre. Ainsi le côté [EF] qui mesure 2,4 cm est une réductions du côté [AB] qui mesure 12 cm.

$\boxed{\text{Le coefficient de réduction est égal à } \frac{2{,}4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = \frac{1}{5} = 0,2.}$

Cela signfie que la petite pyramide est cinq fois plus petite que la grande.

3. On sait que **si les longueurs d'un solide sont multipliées par un nombre k positif alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.**

Comme la petite pyramide est 5 fois plus petite que la grande, son volume est $5^2 = 125$ fois plus petit.

$\boxed{\text{Le volume de la pyramide EFGHS est égal à } 720\,\text{cm}^3 \div 125 = 5{,}76\,\text{cm}^3}$

$\boxed{\text{Le volume de la boite de chocolat est égal à } 720\,\text{cm}^3 - 5{,}76\,\text{cm}^3 = 714{,}24\,\text{cm}^3}$

4.a. Dans le carré ABCD on sait que ABC est un triangle rectangle en B.
Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$

$$12^2 + 12^2 = AC^2$$

$$144 + 144 = AC^2$$

$$AC^2 = 288$$

$$AC = \sqrt{288}$$

La diagonale du carré mesure exactement $\sqrt{288}\ cm$ soit environ 16,97 cm.

On peut démontrer que la diagonale d'un carré de côté a vaut exactement $a\sqrt{2}$ mais ce n'est pas une exigence de troisième !

4.b. La hauteur du triangle est perpendiculaire (orthogonale) à la base ABCD. Ainsi le triangle AKS est rectangle en S.
De plus comme une carré est une parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Le côté [AK] mesure donc $\sqrt{288}\ cm \div 2 \approx$ 8,49 cm.

Dans le triangle AKS rectangle en S,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KA^2 + KS^2 = AS^2$$

On peut calculer la valeur exacte de KA^2 plutôt que de passer par des valeurs approchées (ce qui serait néanmoins accepté au brevet.)

$KA^2 = \left(\dfrac{\sqrt{288}}{2}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{288}\right)^2}{2^2} = \dfrac{288}{4} = 72$

$$72 + 15^2 = AS^2$$

$$72 + 225 = AS^2$$

$$AS^2 = 297$$

$$AS = \sqrt{297}$$

$$AS \approx 17,23$$

Le segment [AS] mesure exactement $\sqrt{297}\ cm$ soit environ 17,23 cm

4.c. Comme la pyramide EFGHS est une réduction de la pyramide ABCDS de coefficient 0,2.

Le côté [SE] mesure exactement $0,2 \times \sqrt{328}\ cm \approx$ 0,72 cm.

On pouvait aussi utiliser le théorème de Thalès dans le triangle SAB avec (EF)//(AB). L'égalité des trois fractions permet de retrouver le coefficient de réduction.
Les droites (EA) et (FB) sont sécantes en S, les droites (EF) et (FB) sont parallèles,
*D'après **le théorème de Thalès** on a :*

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB}$$

$$\frac{SE}{\sqrt{328}\ cm} = \frac{SF}{SB} = \frac{2,4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$SE = \dfrac{\sqrt{328}\ cm \times 2,4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}}$ *d'où* $SE = \dfrac{2,4}{12} \times \sqrt{328}\ cm$ *et* $SE = 0,2 \times \sqrt{328}\ cm$

5. La pyramide est régulières donc nous avons $SA = SB = SC = SD = \sqrt{328}\ cm$.
Le triangle SKC est rectangle en K.
On sait que $SK = 15\,\text{cm}$, $KC = \dfrac{\sqrt{288}\ cm}{2}$ et $SC = \sqrt{328}\ cm$.
On peut calculer le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle, au choix.

$$\cos\widehat{KSC} = \frac{KS}{SC} = \frac{15\,\text{cm}}{\sqrt{328}\ cm} \qquad \sin\widehat{KSC} = \frac{KA}{SC} = \frac{\dfrac{\sqrt{288}\ cm}{2}}{\sqrt{328}\ cm} \qquad \tan\widehat{KSC} = \frac{KA}{KS} = \frac{\dfrac{\sqrt{288}\ cm}{2}}{15\,\text{cm}}$$

Dans les trois cas on obtient à la calculatrice $\widehat{KSC} \approx 34°$

Exercice n° 80 : Volume du cône

Une barmaid doit choisir une forme de verre pour servir le coktail qu'elle vient de créer.
Elle dispose de deux types de verre :

1. Calculer le volume au millilitre près de chacun de ces verres.

2. Il y aura 35 personnes lors de cette soirée. Chaque personne doit pouvoir boire au maximum deux verres.
Quelle quantité de cocktail doit-elle préparer pour préparer ces verres avec le verre ayant le plus petite volume ? Arrondir ce résultat au litre près.

— un verre cylindrique de diamètre 5 cm et de hauteur 5 cm ;

— un verre conique de rayon 3,6 cm et de hauteur 7 cm.

Exercice n° 80 — Correction

1. Calcul du volume du verre cylindrique

Le verre cylindrique a un diamètre de 5 cm donc un rayon de 2,5 cm.
Pour calculer le volume d'un cylindre on utilise la formule : Volume = Aire de la base × Hauteur.

$V_1 = \pi \times (2{,}5\,\text{cm})^2 \times 5\,\text{cm} = 31,25\pi\ cm^3 \approx 98\,\text{cm}^3$

Calcul du volume du verre conique

Le verre conique a un rayon de 3,6 cm.
Pour calculer le volume d'un cône on utilise la formule : Volume = $\frac{1}{3}$ × Aire de la base × Hauteur.

$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times (3{,}6\,\text{cm})^2 \times 7\,\text{cm} = 30,24\pi\ cm^3 \approx 95\,\text{cm}^3$

On sait que $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$ et que $1\,000\,\text{cm}^3 = 1\,\text{dm}^3$ donc $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{mL}$.

Le verre cylindrique a un volume d'environ 98 mL et le verre conique 95 mL

2. Comme chaque personne peut boire au maximum deux verres, il faut prévoir 35 × 2 = 70 verres.
Le volume de verre le plus petit est obtenu avec le verre conique d'environ 95 mL.

Il faut donc préparer 95 mL × 70 = 6 650 mL = 6,65 L

Il faut préparer environ 7 L de cocktail.

EXERCICE N° 81 : Volume de la boule **GRANDEURS ET MESURES - LES VOLUMES**

Une boule de pétanque de compétition a un diamètre de 74 mm et une masse de 698 g. Elle est constitué d'acier.

1. Calculer le volume au centimètre cube près de cette boule.

On sait que la masse volumique de l'acier est $8\,\text{g/cm}^3$.
2. Quelle serait la masse de cette boule si elle était pleine ?

3. Cette boule en acier n'est pas pleine. Le centre est vide.
Montrer que le volume de vide correspond au volume d'une boule de diamètre 62 mm.

EXERCICE N° 81 — CORRECTION

1. On sait que le volume d'une boule de rayon r est donnée par la formule suivante :

$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Cette boule a un rayon de $37\,\text{mm} = 3{,}7\,\text{cm}$.

Une stratégie efficace pour éviter les difficultés de conversion avec les aires ou les volumes consiste à effectuer les conversions sur les unités simples avant de calculer. Ici on demande le résultat en centimètre cube donc on convertit le rayon en centimètre dès le début.

Le volume d'une boule vaut $\frac{4}{3}\pi \times (3{,}7\,\text{cm})^3 = \frac{202{,}612\pi\, cm^3}{3} \approx 212\,\text{cm}^3$.

2. La masse volumique indique que $1\,\text{cm}^3$ pèse 8 g.

Si la boule était pleine sa masse serait environ $8\,\text{g} \times 212 \approx 1\,696\,\text{g}$.

3. Calculons le volume d'une boule de diamètre 62 mm c'est à dire de rayon $31\,\text{mm} = 3{,}1\,\text{cm}$.

$$\frac{4}{3}\pi(3{,}1\,\text{cm})^3 = \frac{119{,}164\pi\, cm^3}{3} \approx 125\,\text{cm}^3$$

Le volume d'acier dans cette boule est donc égal à $212\,\text{cm}^3 - 125\,\text{cm}^3 = 87\,\text{cm}^3$.

Vérifions la masse : $8\,\text{g} \times 87 = 696\,\text{g}$. C'est la réponse attendu à 2 g près.

On pouvait tenter de résoudre le problème directement mais l'équation à résoudre est complexe.
On souhait que la boule ait une masse de 698 g. Le volume d'acier en centimètre cube est donc $698 \div 8 = 87{,}25$.
La boule pleine a une volume de $212\,\text{cm}^3$ *il faut donc trouver le rayon d'une boule vide de* $212\,\text{cm}^3 - 87{,}25\,\text{cm}^3 = 124{,}75\,\text{cm}^3$.
Voici l'équation à résoudre où r *désigne le rayon cherché :*

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 124{,}75$$
$$r^3 = \frac{124{,}75}{\frac{4}{3}\pi}$$
$$r^3 \approx 29{,}782$$

Cette dernière équation demande l'usage de la racine cubique à la calculatrice. Cela dépasse largement le niveau de fin de cycle 4 !
Pour information on obtient $r \approx 3{,}099\,7\,\text{cm}$ *ce qui explique l'écart de 2 g observé !*

Exercice n° 82 : Déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles — **Grandeurs et mesures - La proportionnalité**

1. Le périmètre d'un cercle est-il proportionnel à son rayon ?
2. L'aire d'un disque est-elle proportionnelle à son rayon ?
3. Le volume d'une pyramide est-elle proportionnelle à sa hauteur ?
4. Pour un être humain, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ?
5. Voici un tableau de conversion entre les trois unités de mesures usuelles de la température :

Température en degré Celsius	$-273,15°C$	$-40°C$	$-10°C$	$0°C$	$37°C$	$100°C$
Température en degré Fahrenheit	$-459,67°F$	$-40°F$	$14°F$	$32°F$	$98,6°F$	$212°F$
Température en degré Kelvin	$0°K$	$233,15°K$	$263,15°K$	$273,15°K$	$310,15°K$	$373,15°K$

5.a. La température en degré Celsius est-elle proportionnelle à celle en degré Fahrenheit ?
5.b. La température en degré Fahrenheit est-elle proportionnelle à la celle en degré Kelvin ?
5.c. On sait que la fonction qui exprime les degrés Fahrenheit en fonction des degrés Celsius est une fonction affine. Déterminer cette expression.
5.d. On sait que la fonction qui exprime les degrés Kelvin en fonction des degrés Celsius est une fonction affine. Déterminer cette expression.

Exercice n° 82 — Correction

Attention au vocabulaire. La notion de proportionnalité concerne des grandeurs quelque soit l'unité de mesure. Dire que deux grandeurs sont proportionnelles signifie qu'il existe une relation linéaire entre les deux (l'existence d'un unique coefficient multiplicateur). La notion de tableau de proportionnalité est abusive : les grandeurs représentées dans le tableau peuvent être proportionnelles. D'où l'intérêt de bien indiquer en entête des lignes ou des colonnes la nature des grandeurs représentées.

1. La fonction qui exprime le périmètre d'un cercle en fonction de son rayon r est $f(r) = 2\pi \times r$.
Il s'agit donc d'une fonction linéaire dont le coefficient est 2π.

Le rayon d'un cercle est proportionnel au périmètre du cercle.

2. La fonction qui exprime l'aire d'un disque en fonction de son rayon r est $g(x) = \pi \times r^2$.
Cette fonction n'est pas linéaire. Ces grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Par exemple pour $r = 2\,\text{cm}$ on a $g(2) = \pi \times (2\,\text{cm})^2 = 4\pi\ cm^2$.
Pour un rayon trois fois plus grand, $r = 6\,\text{cm}$, $g(6) = \pi \times (6\,\text{cm})^2 = 36\pi\ cm^2$

On remarque que $\dfrac{36\pi\ cm^2}{4\pi\ cm^2} = 9$ donc pour rayon trois fois plus grand, l'aire n'est pas trois fois plus grande !

L'aire d'un disque n'est pas proportionnelle à son rayon.

3. Le volume d'une pyramide est donné par l'expression $\dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$.

Pour une pyramide dont on ne fai varier que la hauteur h, la base a une aire fixée A. La fonction qui exprime le volume en fonction de la hauteur est donc $\text{V}(h) = \dfrac{\text{A}}{3} \times h$.

Il s'agit d'une fonction linéaire de coefficient constant $\dfrac{\text{A}}{3}$.

Le volume d'une pyramide est proportionnel à sa hauteur.

4. Si la taille et l'âge d'un être humain étaient proportionnelles alors un humain deux fois plus âgés serait deux fois plus grand. Un adulte de 20 ans mesurant 1,83 m mesurerait 3,66 m à 40 ans... ce qui est absurde !

$\boxed{\text{La taille et l'âge d'un humain ne sont pas proportionnelles.}}$

5.a. La température 0°C correspond à 32°F. Or s'il existait un coefficient multiplicateur unique k qui permet de passe des degrés Celsius au degré Fahrenheit, nous aurions $0°\text{C} \times k = 0°\text{F}$.

$\boxed{\text{La température en degré Celsius n'est pas proportionnelle à celle en degré Fahrenheit.}}$

5.b. On peut faire la même remarque en observant la colonne 0°K et $-459,67$°F.
On peut aussi comparer les quotients sur deux colonnes pour montrer l'existence ou non d'un coefficient multiplicatif unique :

$\dfrac{263,15}{14} \approx 18,796$ et $\dfrac{273,15}{32} \approx 8,536$.

$\boxed{\text{La température en degré Kelvin n'est pas proportionnelle à celle en degré Fahrenheit.}}$

5.c. Notons P cette fonction affine. Elle s'écrit $\text{P}(x) = ax + b$ où a et b sont les nombres que nous cherchons.
Comme $\text{P}(0) = 32$ on en déduit que $b = 32$ (en effet $\text{P}(0) = a \times 0 + b = b$)

De plus $\text{P}(100) = 212$ (on prend cet exemple mais un autre conviendrait aussi) donc $\text{P}(100) = a \times 100 + 32 = 212$
Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
100a + 32 &= 212 \\
100a + 32 - 32 &= 212 - 32 \\
100a &= 180 \\
a &= \frac{180}{100} \\
a &= 1,8
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction cherchée est } \text{P}(x) = 1,8x + 32}$

5.d. Notons K cette fonction affine. Elle s'écrit $\text{K}(x) = ax + b$ où a et b sont les nombres que nous cherchons.
Comme $\text{K}(0) = 273,15$ on en déduit que $b = 273,15$ (en effet $\text{K}(0) = a \times 0 + b = b$)

De plus $\text{K}(37) = 310,15$ (on prend cet exemple mais un autre conviendrait aussi) donc $\text{K}(37) = a \times 37 + 273,15 = 310,15$
Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
37a + 273,15 &= 310,15 \\
37a + 273,15 - 273,15 &= 310,15 - 273,15 \\
37a &= 37 \\
a &= \frac{37}{37} \\
a &= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction cherchée est } \text{K}(x) = x + 273,15}$

Exercice n° 83 : **Calculer une quatrième proportionnelle** — **Grandeurs et mesures - La proportionnalité**

Le cannelé, également écrit canelé, est un petit gâteau bordelais, en forme de cylindre, à pâte molle et tendre, parfumé au rhum et à la vanille, et cuit dans un moule originellement en cuivre, qui lui donne une fine croûte caramélisée.
Voici la recette pour préparer 16 cannelés :
— 50 cL de lait;
— une demi gousse de vanille;
— 3 cuillère à soupe de rhum;
— 100 g de farine;
— 200 g de sucre;
— 25 g de beurre;
— 2 oeufs entiers et 2 jaune d'œufs.

Pour la fête des mères, nous souhaitons préparer 100 cannelés. Il reste dans la réserve, un bouteille de rhum, des gousses de vanille, 1 kg de sucre et 2 kg de farine.
Au supermarché voisin, le litre de lait coûte $1,25$ € , la douzaine d'oeufs coûte $3,75$ € , la motte de beurre de $250\ g$ coûte $3,22$ €, le kilo de farine coûte $1,35$ €et le kilo de sucre en poudre coûte $0,95$ €.

Quel budget devons-nous prévoir pour réaliser cette recette?

Exercice n° 83 — Correction

Il y a clairement assez de rhum et de vanille, nous n'allons plus nous soucier de ces ingrédients.
Dans une recette de cuisine, il faut préserver les proportions! Cela signifie que les quantités de chaque ingrédient est proportionnelle au nombre de personne ou au nombre de d'éléments composés.

La farine

Nombre de cannelés	16	100
Masse de farine	$100\ g$	$\dfrac{100 \times 100\ g}{16} = 625\ g$

Il faut $625\ g$ de farine, il reste assez de farine en réserve!

Le sucre

Nombre de cannelés	16	100
Masse de sucre	$200\ g$	$625\ g \times 2 = 1250\ g$

Il faut $1250\ g = 1,25\ kg$ de sucre. Il faut penser à acheter un paquet supplémentaire.!

Le lait

Nombre de cannelés	16	100
Volume de lait	$50\ c$L	$\dfrac{100 \times 50\ c\text{L}}{16} = 312,5\ c\text{L}$

Il faut $312,5\ c\text{L} = 3,125$ L de lait, il faut acheter 4 L de lait!

Le beurre

Nombre de cannelés	16	100
Masse de beurre	$25\ g$	$\dfrac{100 \times 25\ g}{16} = 156,25\ g$

Il faut $156,25\ g$ de beurre, une motte de beurre suffira !

Les oeufs

Nombre de cannelés	16	100
Nombre d'oeufs	4	$\dfrac{100 \times 4}{16} = 25$

Il faut $25 = 2 \times 12 + 1$ oeufs, trois douzaines sont nécessaires !

Finalement, il faut acheter :

— un kilo de sucre à $0,95$ € ;

— 4 L de lait, $4 \times 1,25$ € $= 5$ € ;

— une motte de beurre à $3,22$ € ;

— trois douzaines d'oeufs à $3 \times 3,75$ € $= 11,25$ €.

Cela va finalement coûter : $0,95$ € $+5$ € $+3,22$ € $+11,25$ € $= 20,42$ €.

Exercice n° 84 : Ratio — Grandeurs et mesures - La proportionnalité

1. Une télévision LED au format 16 : 9 a une diagonale de 65″ (65 pouces) soit 163 cm.
Calculer la longueur et la largeur de l'écran de cet télévision.
2. Les longueurs des arêtes d'un pavé droit sont dans un ratio 3 : 6 : 8.
La plus courte de ces longueurs mesure 15 cm, combien mesurent les deux autres ?
3. Pour préparer du béton il faut utiliser du ciment, du sable et du gravier suivant le ratio 1 : 2 : 3.
Je souhaite préparer 12 m^3 de béton. On connaît les masses volumiques suivantes :
— sable : 1 600 kg/m^3 ;
— gravier : 1 500 kg/m^3 ;
— ciment : 900 kg/m^3.
Déterminer la masse de sable, de gravier et de ciment qu'il faut acheter pour produire la quantité de béton demandée.

Exercice n° 84 — Correction

1. Dire que la longueur L et la largeur l de cette télévision sont dans un ratio 16 : 9 signifie que $\frac{L}{16} = \frac{l}{9}$.
Cela signifie aussi que les grandeurs suivantes sont proportionnelles :

Grandeurs réelles	L	l
Ratio	16	9

Ainsi on peut considérer que l'écran de télévision est un agrandissement d'un écran de longueur 16 cm et de largeur 9 cm.
Calculons la diagonale de cet écran miniature.
D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d vérifie :

$$16^2 + 9^2 = d^2$$
$$d^2 = 256 + 81$$
$$d^2 = 337$$
$$d = \sqrt{337}$$

Ainsi, les grandeurs suivantes sont proportionnelles :

Grandeurs réelles	L	l	163 cm
Ratio	16	9	$sqrt337$

Finalement on obtient :

$$L = \frac{16 \times 163\,\text{cm}}{\sqrt{337}} \approx 142\,\text{cm}$$

$$l = \frac{9 \times 163\,\text{cm}}{\sqrt{337}} \approx 80\,\text{cm}$$

Cette télévision a une longueur d'environ 142 cm et une largeur de 80 cm

2. Cela signifie que les grandeurs suivantes sont proportionnelles :

Ratio	3	6	8
Longueurs du pavé	15 cm	x	y

On en déduit donc que : $x = \frac{6 \times 15\,\text{cm}}{3} = 30\,\text{cm}$ et $y = \frac{8 \times 15\,\text{cm}}{3} = 40\,\text{cm}$.

Les longueurs de ce pavé mesurent 15 cm, 30 cm et 40 cm.

3. Le ratio 1 : 2 : 3 signifie qu'il faut 2 unités de sable et 3 unités de graviers pour 1 unité de ciment.
L'ensemble est donc constitué de $6 = 1 + 2 + 3$ unités.
On peut donc établir le tableau suivant qui contient des grandeurs proportionnelles :

	Ciment	Sable	Gravier	Total
Ratio	1	2	3	6
Volume	V_1	V_2	V_3	$12\,m^3$

On obtient donc :

$$V_1 = \frac{1 \times 12\,m^3}{6} = 2\,m^3$$

$$V_2 = \frac{2 \times 12\,m^3}{6} = 4\,m^3$$

$$V_3 = \frac{3 \times 12\,m^3}{6} = 6\,m^3$$

On sait que la masse volumique du ciment est $900\,kg/m^3$ ce qui signifie que $1\,m^3$ de ciment a une masse de $900\,kg$.
Il faut donc :

- $2 \times 900\,kg = 1\,800\,kg$ de ciment ;
- $4 \times 1\,600\,kg = 6\,400\,kg$ de sable ;
- $6 \times 1\,500\,kg = 9\,000\,kg$ de gravier.

Il faut 1,8 t de ciment, 6,4 t de sable et 9 t de gravier.

EXERCICE N° 85 : Taux d'augmentation et de diminution en pourcentage — GRANDEURS ET MESURES - LA PROPORTIONNALITÉ

Le Dogecoin a augmenté de 48 % au mois d'avril. Il a ensuite baissé de 37 % au mois de mai.
Il coûtait 0,45€ début avril.

1. Quel était le prix du Dogecoin fin avril ?
2. Quel était son prix fin mai ?
3. Calculer le pourcentage d'augmentation ou de diminution du Dogecoin sur ces deux mois.
4. J'ai acheté 500€ de Dogecoin début avril. Combien de Dogecoin ai-je acheté ? Combien vallait mon investissement fin mai ?

EXERCICE N° 85 — CORRECTION

1. Le Dogecoin valait 0,45€ début avril. Il a augmenté ensuite de 48 %.
On sait qu'augmenter une quantité de 48 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{48}{100}=1+0,48=1,48$.

Fin avril le Dogecoin valait 0,45€ $\times 1,48 =$ 0,666€.

2. Il a ensuite baissé de 37 %.
On sait que diminuer une quantité de 37 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{37}{100}=1-0,37=0,63$.

Fin mai le Dogecoin valait 0,666€ $\times 0,63 \approx$ 0,42€.

3. Le Dogecoin est passé de 0,45€ à 0,42€.

Le coefficient de réduction est donc égal à $\dfrac{0{,}42€}{0{,}45€} \approx 0,933$.

Or $1-0,933=0,067$ donc $0,933=1-0,067=1-\dfrac{6,7}{100}$. Il s'agit d'une baisse de 6,7 %.

On pouvait aussi examiner les deux opérations à la suite :
0,45€ $\times 1,48 \times 0,63 =$ 0,45€ $\times 0,9324$
Comme $0,9324 = 1-0,0676$ *on obtient une baisse de* 6,8 % *ce qui est plus précis à cause des arrondis intermédiaires.*

4. Un Dogecoin coûtait 0,45€ quand j'en ai acheté pour 500€.

$\dfrac{500€}{0{,}45€} \approx 1111{,}111$. J'ai acheté environ 1111,111 Dogecoin.

Fin mai le Dogecoin ne valait plus que 0,42€. La valeur de mes Dogecoin était donc 0,42€ $\times$ 1111,111 = 466,67€.

Cet exercice n'est bien sûr pas un conseil en investissement. L'achat de cryptomonnaies est un investissement extrêmement risqué et la probabilité de perte de capital est très importante ! ... Et puis il ne faut pas acheter de Dogecoin... :-)

EXERCICE N° 86 : Agrandissement et réduction de figures — GRANDEURS ET MESURES - LA PROPORTIONNALITÉ

1.a. Un cylindre de révolution a un diamètre qui mesure 27 cm et une hauteur de 39 cm.
Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
1.b. Une réduction de ce cylindre a un rayon qui mesure 4,5 cm.
Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
2. Un pavé droit mesure 15 cm de long, 12 cm de large et 8 cm de haut.
On augmente sa longueur de 25 % et sa largeur de 20 %. On diminue la hauteur de 15 %.
Quelle est la pourcentage d'augmentation de son volume ?
3. Sur le plan du cadastre, un jardin rectangulaire mesure 7 cm de long sur 5 cm de large. L'échelle de ce plan est 1 : 150. Quelle est la surface réelle de ce jardin ? Exprimer ce résultat en mètre carré puis en are.
4. La Tour Eiffel mesure 324 m pour une masse totale 10 100 t.
Quelle serait la masse d'une réduction parfaite de la Tour Eiffel de 1 m de haut ?

EXERCICE N° 86 — CORRECTION

1.a. Le volume d'un cylindre se calcule en utilisant la formule Volume = Aire de la baseă × Hauteur.
L'aire latérale d'un cylindre est une rectangle dont un côté correspond à sa hauteur et l'autre correspond au périmètre du disque de base.

Ce cylindre a un diamètre de 27 cm donc un rayon de 13,5 cm.

$V = 2 \times \pi \times (13{,}5\,\text{cm})^2 \times (39\,\text{cm} = 7\,107{,}75\pi\ cm^3 \approx 22\,318\,\text{cm}^3$

Le cercle de base a un périmètre de $2 \times \pi \times 13{,}5\,\text{cm} = 27\pi\ cm$.

La surface latérale est un rectangle de $27\pi\ cm$ de long sur 39 cm de large.
Son aire mesure donc $A = 27\pi\ cm \times 39\ cm = 1\,053\pi\ cm^2 \approx 3\,306\,\text{cm}^2$

Le volume mesure environ $22\,318\,\text{cm}^3$ et une aire latérale de $3\,306\,\text{cm}^3$.

1.b. En réduisant ce cylindre, le rayon passe de 13,5 cm à 4,5 cm. Le coefficient de réduction vaut donc $\dfrac{4{,}5\,\text{cm}}{13{,}5\,\text{cm}} = \dfrac{1}{3}$.

On sait que **si les longueurs d'une figure sont multipliées par une coefficient d'agrandissement/réduction k alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.**

Ici, $k = \dfrac{1}{3} < 1$, il s'agit bien d'une réduction : le solide réduit est trois fois plus petit.

Son volume est donc multiplié par $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$ soit 27 fois plus petit.
Le volume réduit vaut donc $7\,107{,}75\pi\ cm^3 \times \dfrac{1}{27} = 263{,}25\pi\ cm^3 \approx 826\,\text{cm}^3$.

L'aire latérale est multipliée par $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ soit 9 fois plus petit.
L'aire latérale réduite vaude donc $1\,053\pi\ cm^2 \times \dfrac{1}{9} = 117\pi\ cm^3 \approx 367\,\text{cm}^2$.

Le volume réduit mesure environ $826\,\text{cm}^3$ et l'aire latérale réduite $367\,\text{cm}^2$.

On pouvait aussi calculer la nouvelle hauteur soit $39\,\text{cm} \times \dfrac{1}{3} = 13\,\text{cm}$ *puis recommencer les calculs de la question* ***1.a.***

2. Augmenter une quantité de 25 % revient à multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{25}{100} = 1 + 0,25 = 1,25$.
Augmenter une quantité de 20 % revient à multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$.

Diminuer une quantité de 15 % revient à multiplier cette quantité par $1-\dfrac{15}{100}=1-0,15=0,85$.

La longueur devient $15\,\text{cm}\times 1,25=18{,}75\,\text{cm}$.
La largeur devient $12\,\text{cm}\times 1,20=14{,}40\,\text{cm}$.
La hauteur devient $8\,\text{cm}\times 0,85=6{,}80\,\text{cm}$.

Le volume initial vaut $\text{V}_i=15\,\text{cm}\times 12\,\text{cm}\times 8\,\text{cm}=1\,440\,\text{cm}^3$.
Le volume final vaut $\text{V}_f=18{,}75\,\text{cm}\times 14{,}40\,\text{cm}\times 6{,}80\,\text{cm}=1\,836\,\text{cm}^3$.

On passe donc de $1\,440\,\text{cm}^3$ à $1\,836\,\text{cm}^3$. Il s'agit donc d'une augmentation de $\dfrac{1\,836\,\text{cm}^3}{1\,440\,\text{cm}^3}=1,275$.

Or $1,275=1+0,275=1+\dfrac{27,5}{100}$.

Il s'agit d'une augmentation de 27,5 % du volume.

On pouvait aussi constater que $1,25\times 1,20\times 0,85=1,275$.

3. L'échelle 1 : 150 qui est aussi un ratio, signifie qu'une unité sur le plan correspond à 150 unité dans la réalité.
Cela signifie aussi que le quotient entre une mesure sur le plan et une mesure réelle vaut $\dfrac{1}{150}$.
Ou encore que la mesure sur le plan est proportionnelle à la mesure dans la réalité :

Mesures sur le plan	1	
Mesure dans la réalité	150	

$7\,\text{cm}$ sur le plan correspond à $150\times 7\,\text{cm}=1\,050\,\text{cm}=10{,}5\,\text{m}$ dans la réalité.
$5\,\text{cm}$ sur le plan correspond à $150\times 5\,\text{cm}=750\,\text{cm}=7{,}5\,\text{m}$ dans la réalité.

L'aire du jardin mesure $10{,}5\,\text{m}\times 7{,}5\,\text{m}=78{,}75\,\text{m}^2$

On sait qu'un are correspond à l'aire d'un carré de $10\,\text{m}$ de côté. Cela correspond donc à $10\,\text{m}\times 10\,\text{m}=100\,\text{m}^2$.

Ce jardin mesure donc $0{,}7875\,\text{a}$

4. En passant de $324\,\text{m}$ de haut dans la réalité à une maquette de $1\,\text{m}$ le coefficient de réduction vaut $\dfrac{1\,\text{m}}{324\,\text{m}}$.

La masse de la struture métallique de la Tour Eiffel est proportionnelle à son volume. Il suffit en effet de multiplier le volume par la masse volumique du matériaux utilisé.

Comme la longueur est multipliée par $\dfrac{1}{324}$ c'est à dire divisée par 324, le volume et donc la masse est divisée par $324^3=34\,012\,224$.

La masse de la maquette vaut $\dfrac{10\,100\,\text{t}}{324^3}=\dfrac{10\,100\,000\,\text{kg}}{34\,012\,224}\approx 0{,}297\,\text{kg}$

Une Tour Eiffel de $1\,\text{m}$ de haut parfaitement identique à l'originale aurait une masse de $297\,\text{g}$.

C'est particulièrement léger. On compare souvent la structure de la Tour Eiffel à de la dentelle métallique !

Exercice n° 87 : Vitesse — **Grandeurs et mesures - Les grandeurs composées**

1. Il y a 112 km entre Toulouse et Cahors. J'ai mis 1 h 12 min pour parcourir cette distance à l'aller.
Ma vitesse moyenne au retour est de 120 km/h.
Calculer la vitesse moyenne à l'aller, en kilomètre heure au dixième près.
Calculer la vitesse moyenne sur l'aller-retour, en kilomètre heure au dixième près.
2. Le 16 août 2009, Usain Bolt a battu le record du monde du 100 m en 9,58 s. Pendant cette course il a atteint la vitesse la plus rapide jamais observée pour un être humain : 44,72 km/h.
Calculer la vitesse moyenne d'Usain Bolt durant cette course.
Quel temps aurait-il réalisé s'il avait réussi à maintenir sa vitesse maximale sur l'ensemble des 100 m ?
3. La vitesse du son dans l'air vaut environ 340 m/s. On observe un éclair frapper un arbre situé à 4 km de distance. Combien de temps met le son du tonerre à atteindre mon lieu d'observation ?

Exercice n° 87 — Correction

Je n'ai pas l'habitude d'utiliser la « formule » $v = \dfrac{d}{t}$ qu'affectionne nos collègue de physique. Je la vois même parfois sous la forme $v = \dfrac{d}{\Delta t}$ et même chez les fans de dérivée $v = \dfrac{\Delta d}{\Delta t}$!!
Je trouve que l'usage de cette formule au collège fait perdre le sens du résultat (c'est le cas de toutes les formules...). Du coup je favorise l'explicitation des grandeurs et le caractère de proportionnalité de la distance et du temps dans le calcul de la vitesse moyenne.

1. La distance parcourue et le temps sont proportionnels.

Distance	112 km	$\dfrac{60\,\text{min} \times 112\,\text{km}}{72\,\text{min}} \approx (93{,}3\,\text{km}$
Temps	$1\ h\ 12\ min = 72\,\text{min}$	$1\,\text{h} = 60\,\text{min}$

La vitesse moyenne à l'aller est de 93,3 km/h.

Au retour, je parcoure 112 km à la vitesse moyenne de 120 km/h. La distance étant proportionnelle au temps on a :

Distance	120 km	120 km
Temps	$1\,\text{h} = 60\,\text{min}$	$\dfrac{60\,\text{min} \times 120\,\text{km}}{120\,\text{km}} = 56\,\text{min}$

Je vais mettre 56 min au retour.

Ainsi pour parcourir l'aller-retour soit $2 \times 112\,\text{km} = 224\,\text{km}$ il me faut $72\,\text{min} + 56\,\text{min} = 128\,\text{min}$.

Distance	224 km	$\dfrac{60\,\text{min} \times 224\,\text{km}}{128\,\text{min}} = 105\,\text{km}$
Temps	128 min	$1\,\text{h} = 60\,\text{min}$

Ma vitesse moyenne sur l'aller-retour est 105 km/h.

Attention, il ne s'agit pas de la moyenne arithmétique des deux vitesses : $\dfrac{120+93,3}{2} = 106,65$ *!!*
Il s'agit plutôt de la moyenne harmonique des deux vitesses.

$$\frac{2}{\dfrac{1}{120}+\dfrac{1}{93,3}} = 105$$

En effet plus généralement si on note v_1 la vitesse durant un temps t_1 pour parcourir d et v_2 la vitesse durant le temps t_2 pour parcourir d alors la vitesse moyenne v aller-retour est :

$$v = \frac{d+d}{t_1+t_2} = \frac{2d}{\dfrac{d}{v_1}+\dfrac{d}{v_2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}$$

2. Usain Bolt a parcouru 100 m en 9,58 s.
La distance et le temps sont proportionnels :

Distance	100 m	$\dfrac{3\,600\,\text{s} \times 100\,\text{m}}{9{,}58\,\text{s}} \approx 37\,578\,\text{m}$
Temps	9,58 s	1 h = 60 min = 3 600 s

Il aurait parcouru 37 758 m = 37,758 km en 1 h soit une vitesse moyenne de 37,758 km/h

En courant à la vitesse moyenne de 44,72 km/h :

Distance	100 m	44,72 km = 44 720 m
Temps	$\dfrac{3\,600\,\text{s} \times 100\,\text{m}}{44\,720\,\text{m}} \approx 8{,}05\,\text{s}$	1 h = 60 min = 3 600 s

Il aurait couru le 100 m en 8,05 s !

3. Le son circule dans l'air à la vitesse de 340 m/s. La distance et le temps sont proportionnels.

Distance	340 m	4 km = 4 000 m
Temps	1 s	$\dfrac{4\,000\,\text{m} \times 1\,\text{s}}{340\,\text{m}} \approx 11{,}76\,\text{s}$

Le son de l'orage met 11,76 s pour parcourir 4 km.

Exercice n° 88 : Débit

1. Un fichier vidéo de haute qualité a une taille de 1,4 Go.
Le débit en ASDL pour télécharger un fichier est d'environ 15 Mb/s.
Le débit sur une ligne en fibre optique est d'environ 1 Gb/s.
Déterminer le temps nécessaire pour télécharger ce fichier sur une ligne ADSL et sur une ligne en fibre optique.

Indication : Conversion entre octect et bit : 1 o = 8 b

2. Je viens d'installer dans mon jardin un piscine cylindrique hors-sol de rayon 2 m et de hauteur 130 cm.
Je souhaite la remplir jusque 20 cm du bord. Le robinet que j'utilise pour cela me permet de remplir une bouteille de 1,25 L en 5 s.
Calculer le temps nécessaire au remplissage de ma piscine. On donnera le résultat à la seconde près.

Dans ma ville un mètre cube d'eau coûte 3,98 €.
Combien va me coûter le remplissage de la piscine ?

Exercice n° 88 — Correction

1. On sait que 1 Go = 1 000 Mo.
Un fichier de 1,4 Go = 1 400 Mo = 1 400 000 ko = 1 400 000 000 o = $1{,}4 \times 10^9$ o.
Cela correspond à $1{,}4 \times 10^9 \times 8\,\text{b} = 1{,}12 \times 10^{10}\,\text{b}$.

Le débit ADSL de 15 Mb/s correspond à 15 Mb = 15 000 000 b = $1{,}5 \times 10^7$ b par seconde.

Le temps nécessaire au téléchargement est donc $\dfrac{1{,}12 \times 10^{10}\,\text{b}}{1{,}5 \times 10^7\,\text{b}} \approx 747\,\text{s}$.

Comme $747 = 60 \times 12 + 27$, $\boxed{\text{Il faut 12 min 27 s pour télécharger ce fichier en ADSL.}}$

Le débit de la fibre de 1 Gb/s correspond à 1×10^9 b par seconde.

Le temps nécessaire au téléchargement est donc $\dfrac{1{,}12 \times 10^{10}\,\text{b}}{1 \times 10^9\,\text{b}} = 11{,}2\,\text{s}$.

$\boxed{\text{Il faut seulement 11,2 s pour télécharger ce fichier avec la fibre.}}$

Ce sont des débits théoriques. Le plus souvent l'ADSL a un débit de 8 Mb/s *et la fibre de* 300 Mb/s *soit quand même 38 fois plus rapide !*

2. Le volume d'un cylindre est donné par la formule suivante :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

Je souhaite la remplir jusqu'à 20 cm du bord, sa hauteur de remplissage est donc 130 cm − 20 cm = 110 cm
Le volume de la piscine vaut $\pi \times (2\,\text{m})^2 \times 110\,\text{cm} = \pi \times 4\,\text{m}^2 \times 1{,}10\,\text{m} = 4{,}4\pi\ m^3$.
On sait que $1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{L}$ donc cette piscine contient 4 400 L d'eau.

$\dfrac{4\,400\,\text{L}}{1{,}25\,\text{L}} = 3\,520$. Il faut donc $5\,\text{s} \times 3\,520 = 17\,600\,\text{s}$ pour remplir cette piscine.

Or $17\,600 = 60 \times 293 + 20$ et $293 = 60 \times 4 + 53$. $\boxed{\text{Il faut 4 h 53 min 20 s pour remplir cette piscine.}}$
Comme $1\,\text{m}^3$ coûte 3,98 € $\boxed{\text{le coût de remplissage est } 3{,}98\,€ \times 4{,}4 \approx 17{,}51\,€.}$

EXERCICE N° 89 : Masse volumique **GRANDEURS ET MESURES - LES GRANDEURS COMPOSÉES**

Au jeux olympiques de Londres en 2012, les médailles d'or, d'argent et de bronze pesaient chacune $400\,\mathrm{g}$.
Elles avaient une forme identique : celle d'un cylindre de $85\,\mathrm{mm}$ de diamètre pour une épaisseur de $7\,\mathrm{mm}$.
Sachant que les masses volumiques de l'or, de l'argent et du bronze valent respectivement $19\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, $10\,500\,\mathrm{kg/m^3}$ et $9\,200\,\mathrm{kg/m^3}$, déterminer si chacune des médailles étaient bien constituée uniquement du métal annoncé.

EXERCICE N° 89 — CORRECTION

On sait que le volume d'un cylindre est donné par la formule suivante :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

Le diamètre de ces médailles mesure $85\,\mathrm{mm}$ elles ont donc un rayon de $42{,}5\,\mathrm{mm}$.

Le volume d'une médiale vaut ainsi $\pi \times (42{,}5\,\mathrm{mm})^2 \times 7\,\mathrm{mm} = 12\,643{,}75\pi\ mm^3 \approx 39\,722\,\mathrm{mm^3} = 39{,}722\,\mathrm{cm^3}$

Les masses volumiques sont exprimées en kilo par mètre cube. Nous allons les convertir en gramme par centimètre cube.
$1\,\mathrm{kg} = 1\,000\,\mathrm{g} = 1 \times 10^3\,\mathrm{g}$ et $1\,\mathrm{m^3} = 1\,000\,\mathrm{dm^3} = 1\,000\,000\,\mathrm{cm^3} = 1 \times 10^6\,\mathrm{cm^3}$.

$19\,000\,\mathrm{kg} = 19 \times 10^3\,\mathrm{kg}$ pour $1\,\mathrm{m^3}$ correspond donc à $19 \times 10^6\,\mathrm{g}$ pour 1×10^6 cm3.

Comme $\dfrac{19 \times 10^6\,\mathrm{g}}{1 \times 10^6} = 19\,\mathrm{g}$ cela correspond à une masse volumique de $19\,\mathrm{g/cm^3}$ pour l'or.
De même la masse volumique pour l'argent vaut $10{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$ et pour le bronze $9{,}2\,\mathrm{g/cm^3}$.

Calculons la masse de chaque médaille si elles étaient vraiment dans le métal attendu :

- pour la médaille d'or : $39{,}772 \times 19\,\mathrm{g} \approx 756\,\mathrm{g}$;
- pour l'argent : $39{,}772 \times 10{,}5\,\mathrm{g} \approx 418\,\mathrm{g}$;
- pour le bronze : $39{,}772 \times 9{,}2\,\mathrm{g} \approx 365\,\mathrm{g}$.

Aucune des médailles n'était constitué uniquement du métal prévu.

La médaille d'argent est cependant la plus proche de la masse théorique.

La règle officielle pour les médailles olympiques affirme que :

- *« la médaille d'or »est composée d'argent (teneur minimale : 92, 5 % d'argent) et recouverte d'au moins 6 grammes d'or pur;*
- *« la médaille d'argent »à la même composition que la médaille d'or mais sans la dorure;*
- *« la médaille de bronze »est principalement en cuivre avec un peu d'étain et de zinc.*

Exercice n° 90 : **Consommation électrique** **Grandeurs et mesures - Les grandeurs composées**

Chez Direct Électricité, il n'y a qu'un seul tarif : 0,140 20 €/kWh. M. Galois a acheté un aquarium et quelques poissons.
En consultant la fiche technique, il observe les consommations des différents composants :

— la pompe de l'aquarium : 24 Wh ;

— l'éclairage : 45 Wh ;

— la résistance chauffante : 100 Wh.

La pompe de l'aquarium fonctionne toute la journée.
L'éclairage n'est allumé que 3 h par jour et la résistance ne chauffe que 10 h par jour.
Combien lui coûte cet aquarium en électricité en une année ?

Exercice n° 90 **Correction**

La pompe fonctionne toute la journée, toute l'année. Cela représente $24\,\text{h} \times 365 = 8\,760\,\text{h}$.
La pompe consomme 24 Wh. En une année cela fait $24\,\text{Wh} \times 8\,760 = 210\,240\,\text{Wh} = 210{,}24\,\text{kWh}$

L'éclairage est allumé 3 h par jour, toute l'année. Cela représente $3\,\text{h} \times 365 = 1\,095\,\text{h}$.
La lampe consomme 45 Wh. En une année cela fait $45\,\text{Wh} \times 1\,095 = 49\,275\,\text{Wh} = 49{,}275\,\text{kWh}$

La résistance fonctionne 10 h par jour, toute l'année. Cela représente $10\,\text{h} \times 365 = 3\,650\,\text{h}$.
La résistance consomme 100 Wh. En une année cela fait $100\,\text{Wh} \times 3\,650 = 365\,000\,\text{Wh} = 365\,\text{kWh}$.

Sur l'année la consommation totale est $210{,}94\,\text{kWh} + 49{,}275\,\text{kWh} + 365\,\text{kWh} = 625{,}215\,\text{kWh}$.

Chez Direct Électricité le tarif est : 0,140 20 €/kWh.

$\boxed{\text{Le coût de l'aquarium à l'année est } 625{,}215\,\text{kWh} \times 0{,}140\,20\,\text{€/kWh} \approx 87{,}66\,\text{€}}$.

EXERCICE N° 91 : **Expérience aléatoire à une épreuve** **PROBABILITÉS ET STATISTIQUES - PROBABILITÉS**

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

ANTICONSTITUTIONNELLEMENT

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES** ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir un **J** ?

EXERCICE N° 91 **CORRECTION**

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres !
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

2. Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

3. Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1 = 14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

4. Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2 = 10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\dfrac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

5. Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.
La probabilité cherchée est 0 %.

Exercice n° 92 : Expérience aléatoire à deux épreuves

Deux urnes contiennent des boules numérotés indiscernables au toucher.
La première urne contient des boules numérotés avec tous les nombres premiers inférieurs à 20.
Chaque boule porte un numéro différent.

La seconde urne contient des boules numérotés avec tous les diviseurs de 16.
Chaque boule porte un numéro différent.

1. Faire la liste des boules contenus dans chacune des urnes.

On choisit de manière aléatoire une boule dans la première urne et une boule dans la seconde.

2. Quelle est la probabilité que les deux numéros choisis soient égaux ?

3. Quelle est la probabilité que le numéro d'une boule soit un diviseur de l'autre numéro ?

4. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros soit supérieur à 30 ?

5. Quelle est la probabilité que le produit des deux numéros soit un nombre premier ?

Exercice n° 92 — Correction

1. Dans la première urne se trouve des boules numérotées avec les nombres premiers inférieurs à 20. Il s'agit donc des nombre 2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 soit 8 boules.

La deuxième urne contient des boules numérotées avec les diviseurs de 16. Il s'agit des nombres 1 — 2 — 4 — 8 — 16 soit 5 boule.

2. Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité où chaque issue élémentaire se réalise à la même fréquence.
Voici sous forme de tableau la liste de toutes les issues possibles :

Première urne / Seconde urne	2	3	5	7	11	13	17	19
1	1 — 2	1 — 3	1 — 5	1 — 7	1 — 11	1 — 13	1 — 17	1 — 19
2	2 — 2	2 — 3	2 — 5	2 — 7	2 — 11	2 — 13	2 — 17	2 — 19
4	4 — 2	4 — 3	4 — 5	4 — 7	4 — 11	4 — 13	4 — 17	4 — 19
8	8 — 2	8 — 3	8 — 5	8 — 7	8 — 11	8 — 13	8 — 17	8 — 19
16	16 — 2	16 — 3	16 — 5	16 — 7	16 — 11	16 — 13	16 — 17	16 — 19

Il y a $8 \times 5 = 40$ issues équiprobables.

Il n'y a qu'une issue où les numéros sont égaux, l'issue : 2 — 2.

La probabilité que les deux numéros sont égaux vaut $\dfrac{1}{40} = 0{,}025$ soit 2,5 %.

3. Les issues où l'un des numéros est un diviseur de l'autre sont :

- les huit issues contenant le nombre 1 ;
- 2 — 2 ; 4 — 2 ; 8 — 2 ; 16 — 2.

Soit 12 issues en tout.

La probabilité cherchée est égale à $\dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ soit 30 %.

4. Les issues dont la somme est supérieure à 30 sont : 16 — 17 et 16 — 19. Il y a donc deux issues !

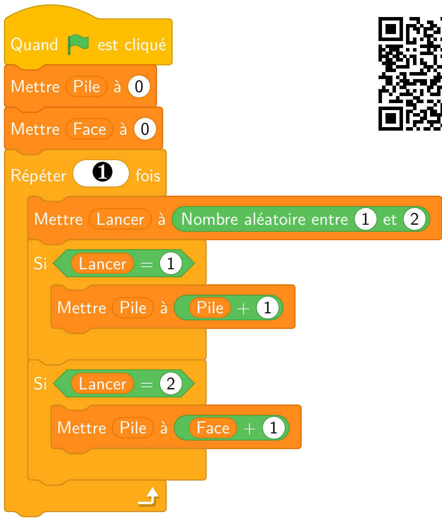
La probabilité cherchée est égale à $\dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$ soit 5 %.

5. Pour que le produit soit un nombre premier, il faut que l'un des nombres soit 1. Il s'agit donc des huit issues contenant le nombre 1.

La probabilité cherchée est égale à $\dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} = 0{,}20$ soit 20 %.

Exercice n° 93 : **Approche fréquentiste** — **Probabilités et statistiques - Probabilités**

Le programme suivant permet de simuler mille tirages aléatoires d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.



1. Compléter ce programme en indiquant par quoi remplacer le symbole ❶.
2. Quelles informations sont contenus dans les variables Pile et Face à la fin de ce programme ?
3. Pierre a utilisé quatre fois de suite le programme, il a saisi les résultats dans un tableur.

	A	B	C
1		Nombre de Piles	Nombre de Faces
2	Tentative 1	556	
3	Tentative 2	435	
4	Tentative 3	452	
5	Tentative 4	705	
6	Somme		

3.a. Quelle formule saisir dans la cellule **C2** puis recopier vers la bas pour obtenir le nombre de Faces à chaque tentative.
3.b. Quelle formule saisir dans la cellule **B6** puis recopier vers la droite pour obtenir la somme du nombre de Piles et du nombre de Faces.
3.c. Indiquez en justifiant par le calcul les nombres manquant dans cette feuille de calcul.

4. Dans cette expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce équilibrée, quelle est la probabilité d'obtenir Pile ?

5. Pierre est surpris par le résultat de la quatrième tentive. Qu'en pensez-vous ?

6. Quelles sont les fréquences d'apparition de Pile et de Face sur l'ensemble des quatre tentatives ? Qu'en pensez-vous ?

Exercice n° 93 — **Correction**

1. Il faut remplacer ❶ par 1 000.

2. Ces deux variables contiennent le nombre d'occurences de Piles et de Faces sur les 1 000 lancers.

3.a. $= 1\,000 - \text{B2}$

3.b. $= \text{B2} + \text{B3} + \text{B4} + \text{B5}$ ou $= \text{SOMME(B2 : B5)}$.

3.c.

	A	B	C
1		Nombre de Piles	Nombre de Faces
2	Tentative 1	556	1000-556=444
3	Tentative 2	435	1000-435=565
4	Tentative 3	452	1000-452=548
5	Tentative 4	705	1000-705=295
6	Somme	556+435+452+705=2148	4000-2148=1852

4. La probabilité d'obtenir Pile est la même que celle d'obtenir Face soit $\dfrac{1}{2} = 0,5$, 50 %.

5. Lors de la quatrième tentative la fréquence de Pile est de $\dfrac{705}{1\,000} = 0,705$ soit $70,5$ %.

C'est en effet très éloignée de la probabilité qui est de 50 %.
Il faut cependant se souvenir que la probabilité est une valeur théorique. Elle correspond à la fréquence théorique que nous pourrions obtenir en procédant à un très grand nombre de lancers. Même si 1 000 est un nombre relativement grand, ce nombre de lancers ne permet que d'obtenir un ordre de grandeur de la probabilité. D'ailleurs tout est possible sur un nombre fini de lancers. La probabilité est une valeur théorique !

On pourrait se demander quelle est la probabilité d'obtenir 705 *Piles sur* 1 000 *lancers. On dépasse alors largement le cadre du collège.*
Il faudrait utiliser un loi Binomiale de paramètres $p = 0,5$, $n = 1\,000$ *et* $k = 705$.
Le calcul $\mathrm{C}_{1\,000}^{705} 0,5^{1\,000}$ *demande de la puissance de calcul. Le site* `https://wolframalpha.com` *donne environ* 7×10^{-40} *ce qui est très peu... mais possible !*
D'ailleurs la probabilité pour obtenir exactement 500 *piles et* 500 *faces sur* 1 000 *lancers est d'environ* 2 %, *ce qui peut paraître surprenant.*
Il ne faut cependant pas se laisser pièger par ce genre de réponses. Déterminer la probabilité d'obtenir pile ou face sur un lancer n'a rien à voir avec le nombre d'occurences sur 1 000 *lancers.*

6. Sur 4 000 tentatives les fréquences d'apparition de pile ou de face sont respectivement :

$\dfrac{2\,148}{4\,000} = 0,537$ et $\dfrac{1\,852}{4\,000} = 0,46,3$ soit $53,7$ % et $46,3$ %.

La fréquence pratique c'est un peu approchée de la fréquence théorique. En augmentant encore le nombre de lancers on approche encore mieux la probabilité attendue.

Ici tout fini bien ! Mais cela aurait pu se passer autrement et la fréquence obtenue sur 4 000 *aurait pu rester très éloignée de la probabilité cherchée sans que cela ne remette en cause la validité du générateur de nombres aléatoires !*

EXERCICE N° 94 : Médiane

Voici la répartition des salaires annuels en euros des employés dans une entreprise.

	A	B
1		Effectif
2	[0; 10 000 [	20
3	[10 000; 20 000 [	35
4	[20 000; 30 000 [	56
5	[30 000; 40 000 [	74
6	[40 000; 50 000 [	45
7	[50 000; 100 000 [	10
8	Total	

1. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule B8 pour obtenir l'effectif total de cette entreprise ?
2. Calculer l'effectif total de cette entreprise.
3. Est-il vrai que moins de 20 % des employés gagnent plus de 40 000 €par an ?
4. Calculer la moyenne des salaires dans cette entreprise.
5. Déterminer la médiane des salaires dans cette entreprise. Interpréter ce résultat.
6. Voici le montant des salaires annuels des employés gagnant plus de 50 000 €.

56 525 € ; 67 876 € ; 85 670 € ; 52 045 € ; 75 675 € ; 81 567 € ; 73 560 € ; 65 790 € ; 51 056 € ; 89 786 €

6.a. Quelle est la moyenne de ces plus hauts salaires ?
6.b. Quelle est la médiane de ces plus hauts salaires ?

EXERCICE N° 94 **CORRECTION**

1. Il faut saisir la formule = B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 ou = SOMME(B2 : B7)

2. L'effectif total est égal à $20+35+56+74+45+10=240$.

3. Il y a $45+10=55$ employés qui gagnent plus de 40 000 € par an.
Or $\dfrac{55}{240} \approx 0,229$ soit environ 22, 9 %.

C'est faux.

4. Il faut calculer le centre de chaque intervalle puis faire une moyenne pondérée.
Par exemple 5 000 € est le centre de l'intervalle [0 €; 10 000 €[.

$$\frac{20 \times 5\,000€ + 35 \times 15\,000€ + 56 \times 25\,000€ + 74 \times 35\,000€ + 45 \times 45\,000€ + 10 \times 75\,000€}{20+35+56+74+45+10} = \frac{7\,390\,000€}{240} \approx 30\,791{,}67€$$

La moyenne des salaires de cette entreprise est 30 791,67 €.

5. Il y a 240 employés dans cette entreprise. Le salaire médian est la moyenne du 120ᵉsalaire et du 121ᵉ.

$20+35+56=111$ et $20+35+56+74=185$. Ainsi le 120ᵉsalaire et le 121ᵉsalaire sont dans l'intervalle [30 000 €; 40 000 €[. On peut donc prendre le centre de cet intervalle.

Le salaire médian vaut 35 000 €.

6.a.

$$\frac{56\,525\,€+67\,876\,€+85\,670\,€+52\,045\,€+75\,675\,€+81\,567\,€+73\,560\,€+65\,790\,€+51\,056\,€+89\,786\,€}{10}=\frac{699\,550\,€}{10}$$

$\boxed{\text{Le salaire moyen des salaires les plus élevés est } 69\,955\,€.}$

6.b. Classons ces salaires dans l'ordre croissant :

$$51\,056\,€\ ;\ 52\,045\,€\ ;\ 56\,525\,€\ ;\ 65\,790\,€\ ;\ 67\,876\,€\ ;\ 73\,560\,€\ ;\ 75\,675\,€\ ;\ 81\,567\,€\ ;\ 85\,670\,€\ ;\ 89\,786\,€$$

Le cinquième salaire vaut 67 876 € et le sixième 73 560 €. La médiane est la moyenne de ces deux montants.

$\boxed{\text{Le salaire médian des plus hauts salaires vaut } \dfrac{67\,876\,€+73\,560\,€}{2}=70\,718\,€.}$

EXERCICE N° 95 : Étendue PROBABILITÉS ET STATISTIQUES - STATISTIQUES

Voici les résultats au brevet de mathématiques de deux classes de troisième. Les notes sont sur 100.

Troisième A

- Effectif : 25 ;
- Note la plus basse : 7,5 ;
- Note la plus haute : 98 ;
- Moyenne : 47,5 ;
- Médiane : 54.

Troisième B

	[0;20[	[20;40[	[40;60[	[60;80[	[80;100]
Effectif	4	6	4	8	7

1. Quelle est l'étendue des notes pour la **Troisième A** ?

2. On sait que la note la plus basse en **Troisième B** est 01,5/100 et que l'étendue pour cette classe vaut 95.
Quelle est la meilleure note dans cette classe ?

3. Calculer la moyenne et la médiane des élèves de **Troisième B** ?

4. Quelle est l'étendue des notes obtenues par les **Troisième A** et la **Troisième B** réunis ?

5. On choisit au hasard un élève dans la classe de **Troisième B**.
Quelle est la probabilité pour qu'il ait eu une note supérieure ou égale à 60/100 ?

6. On choisit au hasard un élève dans la classe de **Troisième A**.
Quelle est la probabilité pour qu'il ait eu une note inférieure ou égale à 54/100 ?

7. Comparer les résultats de ces deux classe.

EXERCICE N° 95 CORRECTION

1. L'étendue des notes pour le Troisième A vaut $98 - 7,5 = 90,5$.

2. La note la plus haute est égale à $1,5 + 95 = 96,5$.

3. Pour la moyenne, il faut calculer les centres de chaque intervalle puis en faire la moyenne pondérée par les effectifs.

$$\text{Moyenne} = \frac{10 \times 4 + 30 \times 6 + 50 \times 4 + 70 \times 8 + 90 \times 7}{4 + 6 + 4 + 8 + 7} = \frac{1\,610}{29} \approx 55,5$$

Pour la médiane, comme l'effectif est égal à $29 = 14 + 1 + 14$, il faut déterminer la 15^{e}note dans l'ordre croissant.
On ajoute les effectifs par intervalle et on constate que $4 + 6 + 4 = 14$. La médiane se trouve donc dans l'intervalle $[60; 80[$. Nous prenons donc le centre de cet intervalle.

La médiane pour cette classe vaut 70.

4. Sur les deux classes, la note la plus basse est 1,5 en Troisième B. La note la plus haute est 98 en Troisième A.

$\boxed{\text{L'étendue sur les deux classes réunies vaut } 98 - 1,5 = 96,5.}$

5. Il y a 29 élèves en Troisième B. On suppose que le tirage se fait dans des situations d'équiprobabilité, c'est à dire que chaque élève à la même probabilité d'être choisi.
Il y a $8 + 7 = 15$ élèves qui ont un note supérieure ou égale à 60.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut environ } \dfrac{15}{29} \approx 0,52 \text{ soit } 52\ \%.}$

6. On suppose à nouveau que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
La médiane des notes de cette classe vaut exactement 54 pour un effectif de $25 = 12 + 1 + 12$ élèves.
Cela signifie que dans l'ordre croissant la 13^{e}note est égale à 54.
Il y a donc au moins 13 notes inférieure ou égale à 54. Il peut cependant y en avoir d'autres.

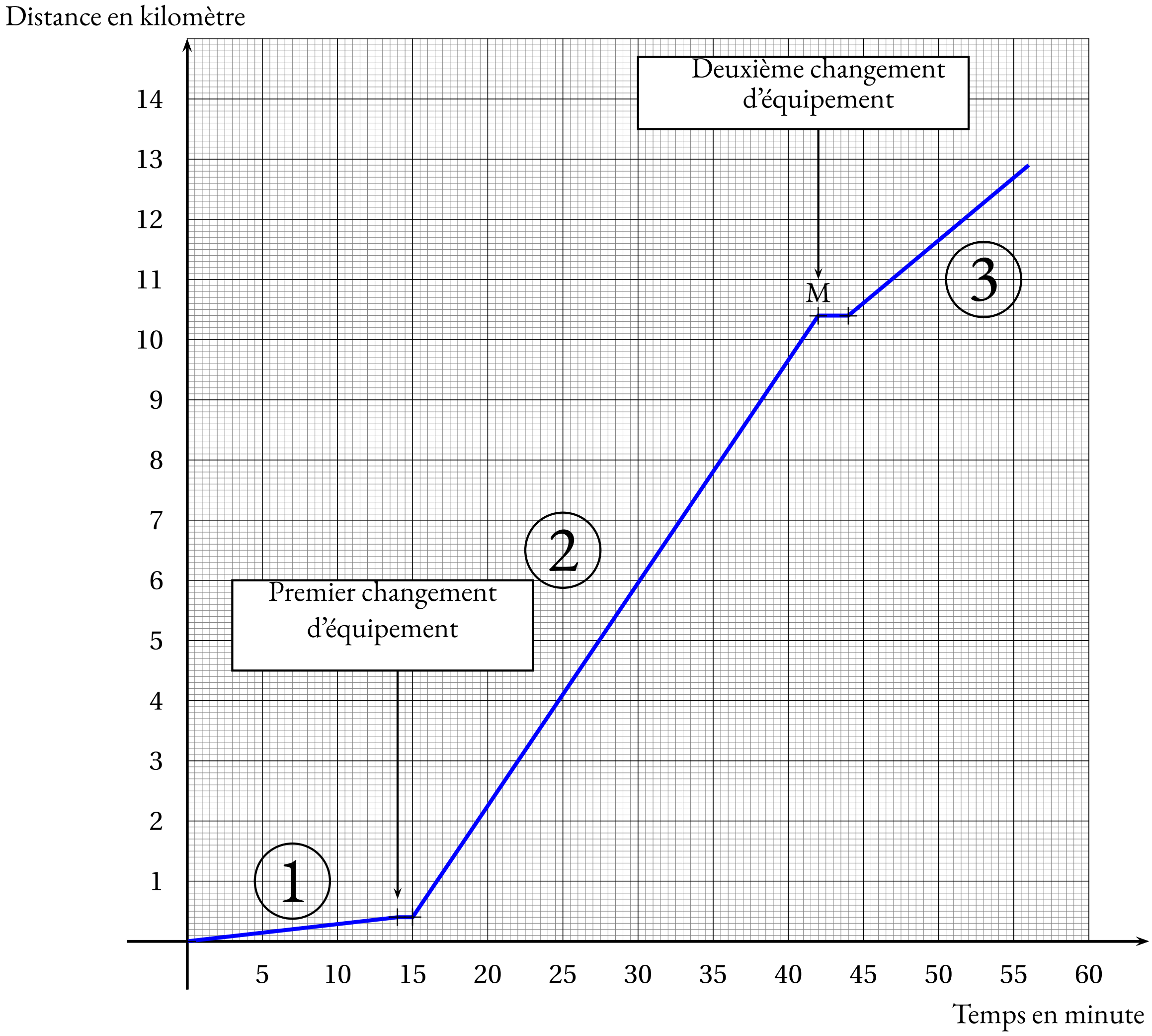
$\boxed{\text{La probabilité cherchée est supérieure ou égale à } \dfrac{13}{25} = 0,52 \text{ soit } 52\ \%.}$

7. La Troisième A a une moyenne inférieure à celle de la Troisième B. L'écart est supérieur à 7 points.
La médiane de la Troisième A est très supérieure à la moyenne ce qui est un signe d'écarts importants entre les élèves.
L'étendue de le Troisième A est aussi supérieure à l'étendue de la Troisième B, ce qui confirme l'hétérogénéité supérieure en Troisième A.
Enfin la note la plus élevée est en Troisième A et la note la plus basse en Troisième B : ce n'est pas un indicateur pertinent pour la comparaison.
On peut dire que les résultats sont globalement meilleurs en Troisième B qu'en Troisième A, la moyenne et la médiane le montrent clairement.

Une athlète a réalisé un triathlon d'une longueur totale de 12,9 km.

Les trois épreuves se déroulent dans l'ordre suivant :
- **Épreuve n° 1 :** Natation — Distance 400 m ;
- **Épreuve n° 2 :** Cyclisme ;
- **Épreuve n° 3 :** Course à pied — Distance 2,5 km.

Entre deux épreuves, l'athlète doit effectuer sur place un changement d'équipement.
Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue (exprimée en kilomètre) par l'athlète, en fonction du temps de parcours (exprimé en minute) de l'athlète pendant son triathlon.



Le point M a pour abscisse 42 et pour ordonnée 10, 4.
À l'aide des informations ci-dessus et du graphique avec la précision qu'il permet, répondre aux questions suivantes en justifiant la démarche.

1. Au bout de combien de temps l'athlète s'est-elle arrêtée pour effectuer son premier changement d'équipement ?

2. Quelle est la longueur, exprimée en kilomètre, du parcours de l'épreuve de cyclisme ?

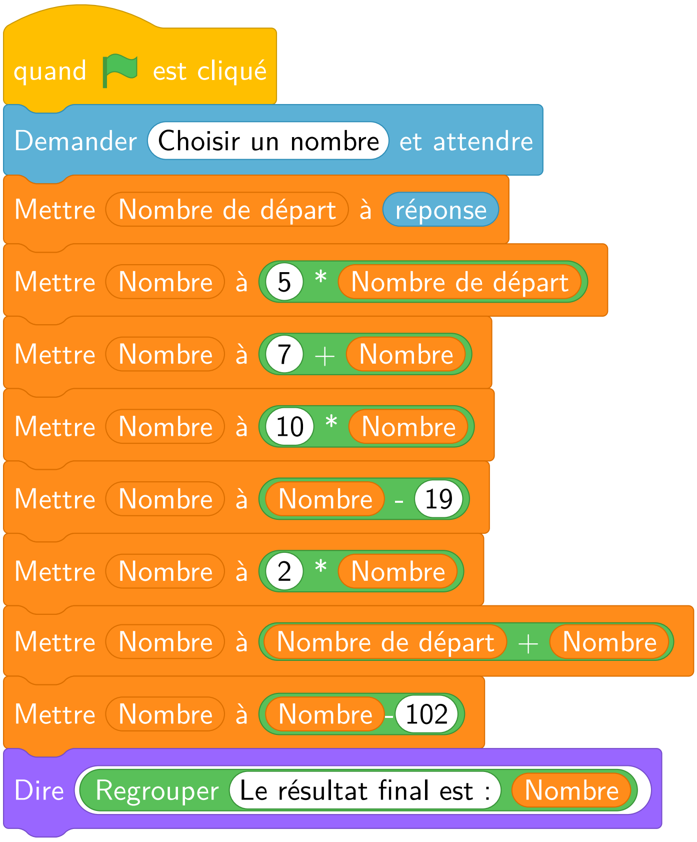
3. En combien de temps l'athlète a-t-elle effectué l'épreuve de course à pied ?

4. Pendant laquelle des trois épreuves, l'athlète a-t-elle été la moins rapide ?

5. On considère que les changements d'équipement entre les épreuves font partie du triathlon.
La vitesse moyenne de l'athlète sur l'ensemble du triathlon est-elle supérieure à 14 km/h ?

Exercice n° 97 : **Programme de calcul** **Algorithmique et programmation - Scratch**

Voici un programme de calcul proposé sous forme de script Scratch :



1. En choisissant le nombre 5 au départ quel résultat va afficher ce programme ?

2. Même question en partant des nombres 13 puis 87.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

4. Démontrez cette conjecture ?

5. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 13 837 à la fin ?

Exercice n° 97 **Correction**

1. En prenant le nombre 5 au départ on obtient successivement :
5 puis $5 \times 5 = 25$, $7 + 25 = 32$, $10 \times 32 = 320$, $320 - 19 = 301$, $2 \times 301 = 602$, $602 + 5 = 607$ et enfin $607 - 102 = 505$.

En prenant 5 au départ on obtient 505 comme résultat final.

2. En prenant 13 au départ on obtient successivement :
13 puis $13 \times 5 = 65$, $7 + 65 = 72$, $10 \times 72 = 720$, $720 - 19 = 701$, $2 \times 701 = 1\,402$, $1\,402 + 13 = 1\,415$ et enfin $1\,415 - 102 = 1\,313$.
En prenant 13 au départ on obtient 1 313 comme résultat final.

En prenant 87 au départ on obtient successivement :
87 puis $87 \times 5 = 435$, $7 + 435 = 442$, $10 \times 442 = 4\,420$, $4\,420 - 19 = 4\,401$, $2 \times 4\,401 = 8\,802$, $8\,802 + 87 = 8\,889$ et enfin $8\,889 - 102 = 8\,787$.
En prenant 87 au départ on obtient 8 787 comme résultat final.

3. Il semble que l'on obtienne le nombre répété deux fois, c'est à dire le nombre multiplié par 101.

4. Notons x le nombre de départ, on obtient successivement :

— x ;

— $5x$;

— $5x+7$;

— $10(5x+7) = 50x+70$;

— $50x+70-19 = 50x+51$;

— $2(50x+51) = 100x+102$;

— $100x+102+x = 101x+102$;

— $101x$.

$\boxed{\text{Le nombre de départ est bien multiplié par 101 avec ce programme.}}$

Cela a pour effet de « recopier » le nombre deux fois de suite pour les nombres entiers compris entre 10 *et* 99.

5. Il faut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 101x &= 13\,837 \\ x &= \frac{13\,837}{101} \\ x &= 137 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{En prenant le nombre 137 au départ on obtient 13 837 à la fin.}}$

On souhaite représenter 6 bassins rectangulaires à l'aide d'un logiciel de programmation comme sur la **Figure n° 1** ci-dessous :

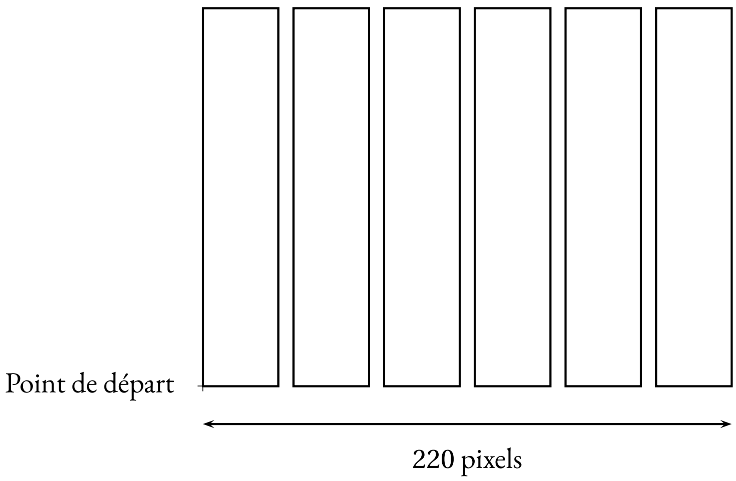
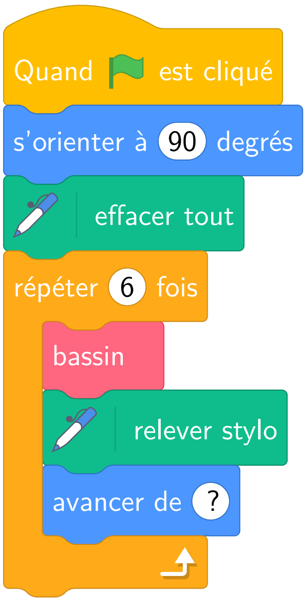


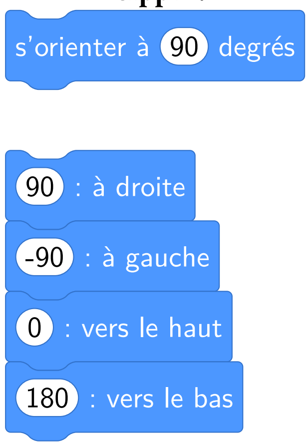
Figure n° 1

1. Compléter, en annexe, le script du bloc « bassin »pour qu'il permette de tracer un bassin rectangulaire de largeur 30 pixels et de longueur 150 pixels.

2. Le script ci-dessous doit permettre d'obtenir la **Figure n° 1**. Il utilise le bloc « bassin »de l'annexe.



Rappel :

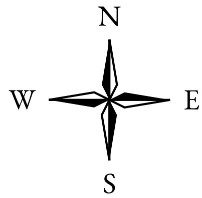


Sachant que la longueur totale de la **Figure n° 1** est de 220 pixels, quelle valeur doit être placée à la dernière ligne dans la consigne « avancer de » ? Justifier la réponse.

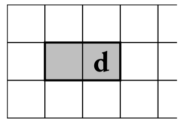
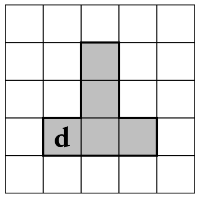
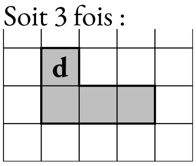
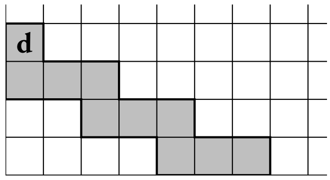
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE N° 98 — **CORRECTION**

Un programme permet à un robot de se déplacer sur les cases d'un quadrillage. Chaque case atteinte est colorée en gris. Au début d'un programme, toutes les cases sont blanches, le robot se positionne sur une case de départ indiquée par un « d » et la colore aussitôt en gris.

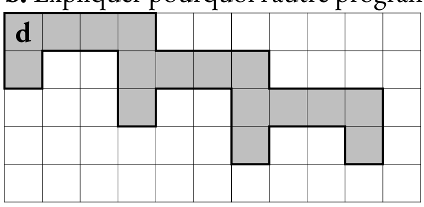


Voici des exemples de programmes et leurs effets :

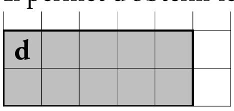
• 1W	Le robot avance de 1 case vers l'ouest.	
• 2E 1W 2N	Le robot avance de 2 cases vers l'est, puis de 1 case vers l'ouest, puis de 2 cases vers le nord.	
• 3 (1S 2E)	Le robot répète 3 fois le déplacement suivant : « avancer de 1 case vers le sud puis de 2 cases vers l'est », Soit 3 fois : 	

1. Voici un programme : **Programme** : 1W 2N 2E 4S 2W
On souhaite dessiner le motif obtenu avec ce programme.
Sur votre copie, réaliser ce motif en utilisant des carreaux, comme dans les exemples précédents. On marquera un « **d** » sur la case de départ.

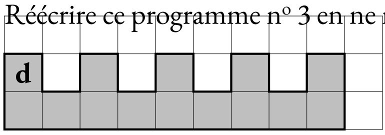
2. Voici deux programmes : **Programme n° 1** : 1S 3(1N 3E 2S) et **Programme n° 2** : 3(1S 1N 3E 1S)
a. Lequel des deux programmes permet d'obtenir le motif ci-contre ?
b. Expliquer pourquoi l'autre programme ne permet pas d'obtenir le motif ci-contre.



3. Voici un autre programme : **Programme n° 3** : 4(1S 1E 1N)
Il permet d'obtenir le résultat suivant :



Réécrire ce programme n° 3 en ne modifiant qu'une seule instruction afin d'obtenir ceci :

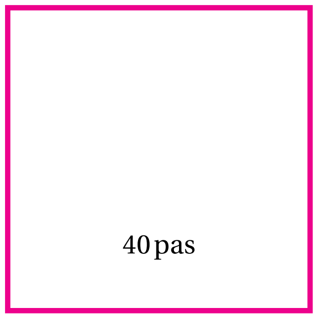


Voici un exemple de code :

Le langage LOGO utilise une Tortue pour dessiner à l'écran.
Voici quelques éléments de ce langage :

— **AVANCE** n : Fait avancer la Tortue de n pas ;
— **DROITE** n : Fait tourner la Tortue de n degré vers la droite ;
— **GAUCHE** n : Fait tourner la Tortue de n degré vers la gauche ;
— **REPETE** n [liste] : Répete n fois les commandes de la [liste] ;
— **BAISSECRAYON** : Baisse le crayon pour commencer à dessiner ;
— **LEVECRAYON** : Lève le crayon pour arrêter de dessiner ;
— **EFFACEECRAN** : Efface l'écran.

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 3
[AVANCE 40 DROITE 90]
```

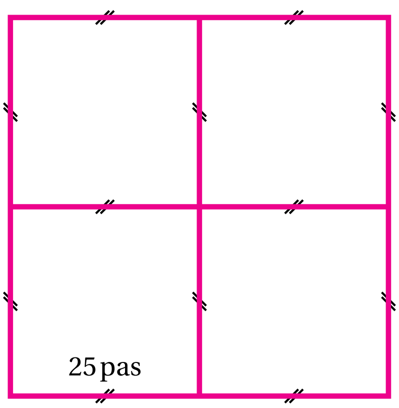


1. Écrire un programme pour que la Tortue dessine un triangle équilatéral de 30 pas de côté.

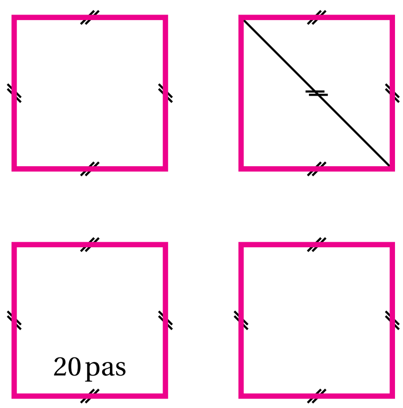
2. En prenant 1 cm pour 10 pas, tracer la figure obtenue avec ce programme :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 5 [AVANCE 50 DROITE 108]
```

3. Écrire un programme permettant de tracer chacune des figures suivantes :

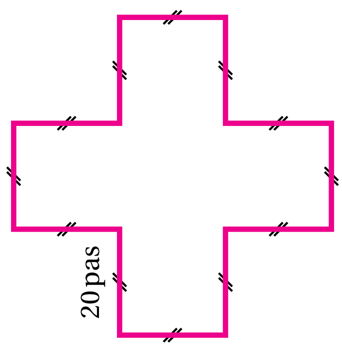


(Fig n° 1)



10 pas

(Fig n° 2)



(Fig n° 3)

Exercice n° 100 — Correction

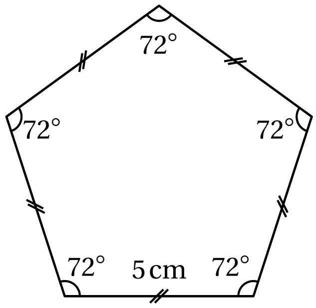
1. On sait que les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux à 60°.

Voici deux programmes possibles :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
AVANCE 30
DROITE 60
AVANCE 30
DROITE 60
AVANCE 30
```

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 3 [AVANCE 30 DROITE 60]
```

2.



3. *Il y a de très nombreuses manières d'obtenir ces figures. Je tente la solution la plus compacte !*

Pour la **Figure n° 1** :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 4 [REPETE 4 [AVANCE 25 DROITE 90] GAUCHE 90]
```

Pour la **Figure n° 2** :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 4 [REPETE 4 [AVANCE 20 DROITE 90] GAUCHE 90 LEVECRAYON AVANCE 10 BAISSE-
CRAYON]
```

Pour la **Figure n° 3** :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 4 [DROITE 90 AVANCE 20 GAUCHE 90 AVANCE 20 DROITE 90 AVANCE
20]
```

Chapitre II

Les exercices

Exercice n° 1 : Division euclidienne

Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique

1.a. Effectuer la division euclidienne de 3 451 par 51. Écrire l'égalité euclidienne.
1.b. Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 3 451 par 67.
2.a. Effectuer le division euclidienne de 3 481 par 67. Écrire l'égalité euclidiene.
2.b. Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 3 481 par 51.
3. Quand on divise ce nombre par 37, le quotient est 43 et le reste est 12. Quel est ce nombre ?
4. Quand on divise ce nombre par 17, il reste 8. Quand on divise ce nombre par 13, il reste 6.
Déterminer le plus petit nombre entier qui correspond à ces deux affirmations.

Exercice n° 2 : Diviseurs et multiples

Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 60 min.
Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 45 min.
Le bus n° 67 met 54 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt ?

Exercice n° 3 : Décomposition en produit de facteurs premiers

Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique

1. Décomposer les nombres 6 120 et 5 712 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire la liste des diviseurs communs à ces deux nombres entiers.
3. Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.
4. Simplifier la fraction $\dfrac{5712}{6120}$.
5. Un confiseur vient de recevoir 6120 dragées à la violette et 5712 galets de la Garonne. Il souhaite répartir tous les bonbons en sachets comprenant la même répartition de bonbons de deux sortes.
Quel est le nombre maximal de sachets qu'il peut composer et quelle est la répartition de chaque sachet ?

Exercice n° 4 : Fractions irréductibles

Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique

Simplifier au maximum les trois fractions suivantes : $\dfrac{6\,525}{10\,440}$; $\dfrac{11\,515}{6\,909}$; $\dfrac{3\,186}{7\,965}$

Calculer et simplifier la somme suivante : $Z = \dfrac{6\,525}{10\,440} + \dfrac{11\,515}{6\,909} + \dfrac{3\,186}{7\,965}$

Exercice n° 5 : Raisonner avec des nombres entiers

Calcul numérique - Nombres entiers, arithmétique

Indiquez si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.
— **Affirmation n° 1 :** La somme de deux nombres entiers pairs est paire.
— **Affirmation n° 2 :** La somme de deux nombres entiers impairs est impaire.
— **Affirmation n° 3 :** La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est impaire.
— **Affirmation n° 4 :** Aucun multiple de 7 n'est un nombre premier.
— **Affirmation n° 5 :** Aucun multiple de 10 n'est un nombre premier.
— **Affirmation n° 6 :** Un multiple de 18 est divisible par 3 et par 6.
— **Affirmation n° 7 :** Un nombre entier divisible par 3 et par 6 est un multiple de 18.
— **Affirmation n° 8 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
— **Affirmation n° 9 :** Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.
— **Affirmation n° 10 :** Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

EXERCICE N° 6 : Unités simples usuelles — CALCUL NUMÉRIQUE - NOMBRES DÉCIMAUX

1. Un camion rigide à quatre essieux peut transporter 32 t de marchandise dans un volume maximal de $60\,\text{m}^3$.
On souhaite le remplir avec des cartons en forme de pavé droit mesurant 80 cm de long, 50 cm de large et 45 cm de haut.
Chaque carton peut contenir 75 boites de conserve pesant chacune 786 g.

Combien de boites de conserve ce camion peut-il transporter en une seule fois ?

2. Une fourmi pèse environ 2 mg et mesure 5 mm de long. Une fourmilière géante au Japon a été découverte, elle hébergeait 307 000 000 de fourmis.
Quelle est la masse totale des fourmis de cette fourmilière ?
Quelle est la longueur totale obtenue en mettant toutes ces fourmis sur une même ligne, les unes derrière les autres ?

3. Un flacon de sérum vaccinal contient 5 mL et permet de d'obtenir 12 doses. Pour vacciner 67 millions de français il faut deux doses : une première injection puis un rappel.
Quel est le volume total en mètre cube de sérum vaccinal nécessaire à la vaccination de tous les français ?

EXERCICE N° 7 : Somme algébrique — CALCUL NUMÉRIQUE - NOMBRES RELATIFS

On pose $A = (x - y + z) - (-z + y - x)$

1. Calculer A pour $x = -1$, $y = -3$ et $z = 2$

2. Calculer A pour $x = -5$, $y = 3$ et $z = -5$

EXERCICE N° 8 : Priorités opératoires — CALCUL NUMÉRIQUE - NOMBRES RELATIFS

Calculer :

$A = 5 - 6 \times 3 + (-5) \times 2$ $\quad$ $B = -3 \times 6 - 6 \times (-4) - (-4) \times 2$ $\quad$ $C = (1 - 2 \times 3)(-1 - 3 \times (-4))$

EXERCICE N° 9 : Calculer une somme algébrique de fractions — CALCUL NUMÉRIQUE - FRACTIONS

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}$ $\quad$ $C = 5 - \frac{3}{5} + \frac{7}{3}$ $\quad$ $E = \frac{5}{12} - \frac{7}{15}$

$B = \frac{5}{4} + \frac{7}{5}$ $\quad$ $D = \left(1 - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{7} + 3\right) + \left(-3 - \frac{5}{3}\right)$ $\quad$ $F = 7 - \frac{3}{28} + \frac{9}{42}$

EXERCICE N° 10 : Calculer un produit de fractions — CALCUL NUMÉRIQUE - FRACTIONS

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ $\quad$ $C = \frac{81}{56} \times \frac{64}{63}$

$B = \frac{-5}{7} \times \frac{21}{-25}$ $\quad$ $D = \frac{12}{-35} \times \frac{-21}{36} \times \frac{25}{-16}$

Exercice n° 11 : Calculer un quotient de fractions

Calcul numérique - Fractions

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{3}{5} \div \frac{7}{4}$

$B = 5 \div \frac{3}{7}$

$C = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}}$

$D = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} \div \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$

Exercice n° 12 : Utiliser les priorités opératoires avec les fractions

Calcul numérique - Fractions

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

$C = \left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(3 + \frac{3}{4}\right)$

$B = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \times 5$

$D = \frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{2}}$

Exercice n° 13 : Calculer avec les puissances de 10

Calcul numérique - Puissances

1. Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$A = 0{,}000\,001$

$D = \frac{0{,}000\,000\,000\,1}{10\,000\,000}$

$B = 10\,000\,000\,000$

$C = 1\,000\,000 \times 0{,}000\,01$

$E = \frac{10\,000 \times 0{,}000\,000\,1}{0{,}000\,01 \times 0{,}000\,01}$

2. Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 puis sous forme décimale :

$F = 10^5 \times 10^7 \times 10^{-12}$

$I = \frac{1\,000 \times 10^{-5}}{10^{-3} \times 10^2}$

$G = 10^{-3} \times 10^0 \times 10^{-8}$

$H = (10^{-9})^3 \times (10^3)^9$

$J = \frac{10^{-5} \times 10^{-3} \times 10^{11}}{0{,}000\,01 \times 10^7}$

Exercice n° 14 : Déterminer l'écriture scientifique d'un nombre décimal

Calcul numérique - Puissances

1. Écrire les nombres décimaux sous forme scientifique

$A = 2\,021$

$D = 123\,000\,000$

$B = 0{,}000\,7$

$E = 0{,}000\,000\,176\,5$

$C = 3{,}141\,59$

$F = 250\,000 \times 0{,}000\,002$

2. Écrire les nombres suivants sous forme décimale

$G = 3{,}78 \times 10^9$

$I = 7{,}345 \times 10^0$

$H = 6{,}32 \times 10^{-7}$

$J = 1{,}125 \times 10^8 \times 1{,}6 \times 10^{-11}$

Exercice n° 15 : Utiliser les préfixes usuels — Calcul numérique - Puissances

1. Un fichier audio au format MP3 à une taille de 15 Mo.
Combien de fichier de cette taille peut-on copier sur un disque dur de 2 To ?

2. La société Drapper Fisher Jurveston a réalisé une voiture nanométrique qui fonctionne vraiment et qui mesure 13 nm de long. On estime qu'il y aurait environ $1,4$ milliards de véhicules à moteur sur Terre.
Quelle serait la taille d'une file indienne composé de tous ces véhicules si chacun de ces véhicules avait une taille nanomètrique.

3. En 2018 la consommation mondiale d'électricité était d'environ 24 739 TWh. Une centrale nucléaire produit annuellement environ 6 000 000 MWh.
Combien faut-il de centrales nucléaires pour subvenir à la consommation mondiale d'électricité ?
En 2019 on estime qu'il y avait 450 réacteurs nucléaires civils. Quel pourcentage de la demande mondiale d'électricité est produite par ces réacteurs ?

Exercice n° 16 : Calculer avec les puissances quelconques — Calcul numérique - Puissances

1. Calculer la valeur décimale des expressions suivantes :

$A = 2^7$ $\quad$ $C = (-1)^{13}$ $\quad$ $E = 2^5 \times 2^{-3}$

$B = 0,02^4$ $\quad$ $D = (-3)^4$ $\quad$ $F = 3^0 \times 2^1 \times 5^{-1}$

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances :

$G = 2^3 \times 2^7 \times 2^{-8}$ $\quad$ $H = \dfrac{3^{-9}}{3^8}$ $\quad$ $I = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 7^5}{2^{-1} \times 3^3 \times 7^{-1}}$ $\quad$ $J = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times (3 \times 2)^3$

Exercice n° 17 : Substituer dans une expression littérale — Calcul littéral - Substitution

On pose $A = (7x - 3y + 4z) - (-3x + 4y - 5z)$ et $B = (x + y - z)(z - y - x)$

1. Calculer A et B pour $x = -1$, $y = 1$ et $z = -2$.

2. Calculer A et B pour $x = 2$, $y = -1$ et $z = 1$.

Exercice n° 18 : Comprendre un programme de calcul — Calcul littéral - Substitution

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre ;
- Ajouter 2 ;
- Multiplier ce résultat par lui même ;
- Enlever le quadruple du nombre de départ ;
- Ajouter -9.

1. Tester ce programme de calcul avec les nombres 5, -1 et -8.

2. Montrer que l'expression de ce programme en fonction du nombre de départ x peut s'écrire :

$$P(x) = x^2 - 5$$

3. Quel(s) nombre(s) de départ faut-il choisir pour obtenir 44 à la fin ?

4. Quel(s) nombre(s) de départ faut-il choisir pour obtenir 0 à la fin ?

5. Quel(s) nombre(s) de départ faut-il choisir pour obtenir -9 à la fin ?

Exercice n° 19 : Réduire une expression littérale

Calcul littéral - Développer et réduire

Réduire les expressions littérales suivantes :

$A = 3x^2 + 3x - 2 + 4x^2 - 5x + 1$
$B = -3x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 5x^3 - 2x^2 - 4 + 5x$
$C = (a - b + c) - (a - b + c) - (c - a - b) - a + b - c$
$D = x - y + z - 2y + x - z + 2x - y$
$E = 3(x - y) - 4(y - x) + x - y$
$F = a(a - b) - b(b - a) + ab - (a + b)$

Exercice n° 20 : Développer en utilisant la distributivité simple

Calcul littéral - Développer et réduire

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 5(x - 1) + 3(2x + 1)$
$B = 3x(1 - x) - 2(5 - 3x)$
$C = 1 - 4(x - 1) + x(5 - x) + x^2$
$D = -3x(1 - x) + 5x(2 + 3x) - x^2$
$E = 2x(-3x - 1) - 3(-4x + 7) - x^2 + x - 1$
$F = x(2y - 1) - y(2x - 1) + x(x + y) - y(x - y)$

Exercice n° 21 : Développer en utilisant la distributivité double

Calcul littéral - Développer et réduire

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (3x - 7)(5x + 2)$
$B = (-5x + 8)(-3 - 4x)$
$C = (3x + 1)(3 - 2x) + (5x - 3)(-1 - 3x)$
$D = (6x - 3)^2 + 4(3x - 2)(4x + 7)$
$E = (1 - 3x)(3x - 2) - (5x - 1)(1 - x)$
$F = 3(3x - 2)(-3 - 3x) - 5(4x - 1)^2$

Exercice n° 22 : Développer en utilisant les identités remarquables

Calcul littéral - Développer et réduire

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (x + 6)^2$
$B = (3x - 4)^2$
$C = (7x - 1)(7x + 1)$
$D = (5x - 1)^2 + (3x + 2)^2$
$E = (7x + 3)(7x - 3) - (5 - 6x)(5 + 6x)$
$F = 4(5x - 1)^2 - 3(4x + 1)(1 - 4x)$

Exercice n° 23 : Factoriser une expression en utilisant la distributivité

Calcul littéral - Factoriser

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = 21x - 49x^2$
$B = 5x(3x - 1) + 10x$
$C = (4x - 1)(3x + 2) + (4x - 1)(5x + 7)$
$D = (1 - 7x)(2x + 5) - (1 - 7x)(3x + 8)$
$E = (3x - 4)^2 - (3x - 4)(2x - 1)$
$F = 5x(4x - 1) + (4x - 1)^2 + (4x - 1)$

Exercice n° 24 : Factoriser une expression en utilisant une différence de deux carrés

Calcul littéral - Factoriser

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = x^2 - 36$
$B = 16x^2 - 25$
$C = x^2 - 7$
$D = (5x - 1)^2 - 49$
$E = (4x - 1)^2 - 25x^2$
$F = (6x + 2)^2 - (3x - 1)^2$
$G = (5x - 1)^2 - (3x + 1)^2$
$H = 16x^2 - 23$
$I = 5x^2 - 17$

EXERCICE N° 25 : Factoriser une expression en utilisant les identités remarquables — CALCUL LITTÉRAL - FACTORISER

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = 25x^2 - 16$

$B = 36x^2 - 15$

$C = x^2 + 6x + 9$

$D = 4x^2 + 20x + 25$

$E = 25x^2 - 80x + 64$

$F = 49x^2 - 126x + 81$

EXERCICE N° 26 : Résoudre une équation du premier degré — CALCUL LITTÉRAL - ÉQUATIONS

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$3x + 5 = 2x + 3$$

$$4x - 1 = 2x - 5$$

$$1 - 7x = 5 - 4x$$

$$3x - 2 + 7 = 1 - 8x + 9$$

$$5(3x - 2) = 4(1 - 5x)$$

$$(4x - 1)(2x + 3) = (x - 3)(8x + 3)$$

EXERCICE N° 27 : Résoudre une équation produit — CALCUL LITTÉRAL - ÉQUATIONS

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$(3x - 1)(5x - 3) = 0$$

$$(1 - 7x)(5x - 7) = 0$$

$$(4x + 3)(5x - 1) + (3x - 9)(5x - 1) = 0$$

$$(1 - 5x)^2 - (1 - 5x)(2x + 1) = 0$$

EXERCICE N° 28 : Résoudre une équation carré — CALCUL LITTÉRAL - ÉQUATIONS

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$x^2 = 121$$

$$3x^2 = 7$$

$$(4x + 3)^2 = 81$$

$$(7x - 1)^2 + 25 = 0$$

$$(3x - 1)^2 - (5x - 1)^2 = 0$$

$$(6x - 3)^2 = (3 - 2x)^2$$

EXERCICE N° 29 : Calculer l'image d'un nombre par une fonction — FONCTIONS - GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

On pose : $f : x \to 3x - 7$, $g : x \to 7x^2 - 8x + 2$ et $h : x \to (3x - 1)(2x + 3) - 7x^2 + 8$

1. Calculer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$.

2. Calculer l'image de $\frac{2}{3}$ par f.

3. Développer et réduire h puis calculer $h(-2)$.

4. Calculer l'image de $\frac{-4}{5}$ par g.

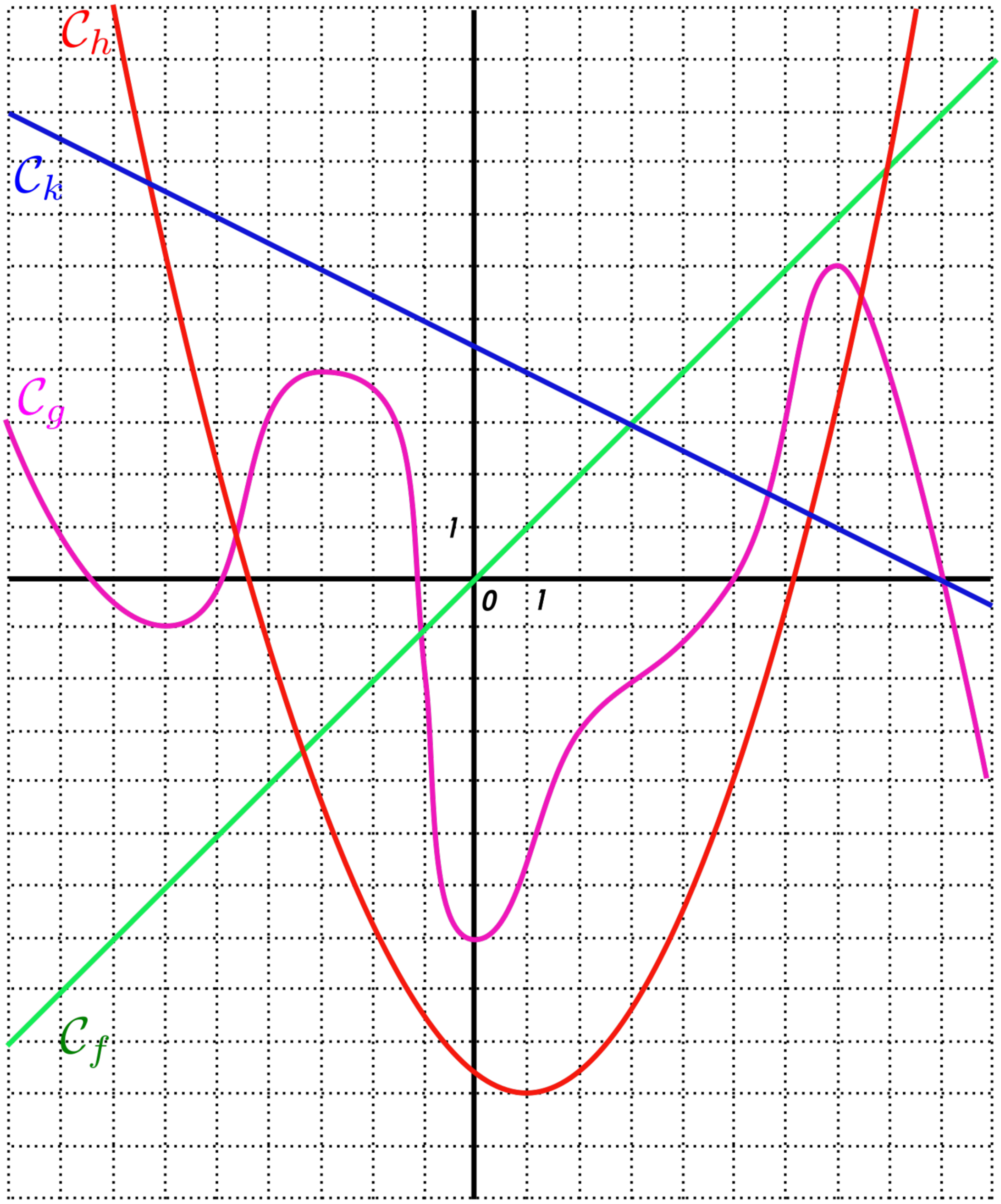
Exercice n° 30 : Déterminer le ou les antécédents d'un nombre par une fonction

On note $f(x) = 7x + 8$ et $g(x) = (5x - 1)(2x + 3) - (5x - 1)(6x + 7)$

1. Quel est l'antécédent de -6 par f ?
2.a. Développer et réduire $g(x)$.
2.b. Calculer $g(0)$ et $g(-1)$.
2.c. Factoriser $g(x)$.
2.d. Résoudre $g(x) = 0$.

Exercice n° 31 : Lire la représentation graphique d'une fonction

Sur le graphique ci-dessous se trouvent les représentations graphiques de quatre fonctions : f, g, h et k.



1. Lire sur le graphique : $f(-5)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quelle pourrait être l'expression de f ?
3. Lire sur le graphique : $g(-3)$, $g(0)$ et $g(7)$
4. Quels sont les antécédents de 0 par g.
5. Lire sur la graphique : $h(-6)$, $h(1)$ et $h(8)$
6. Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = k(x)$
7. Quels sont les antécédents de 1 par g ?
8. Quels sont les antécédents de 7 par g ?
9. Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = h(x)$

Exercice n° 32 : Lire le tableau de valeurs d'une fonction

Voici le tableau de valeurs de trois fonctions f, g et h :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	10	8	6	5	5	6	8	10	12
$g(x)$	-11	-8	-4	-5	-4	-8	-4	1	3
$h(x)$	21	18	15	12	9	6	3	0	-3

1.a. Quelle est l'image de -3 par la fonction f ?
1.b. Quelle est l'image de 4 par la fonction g ?
1.c. Quelle est l'image de 0 par la fonction h ?

2.a. Quels sont les antécédents de 6 par la fonction f ?
2.b. Quels sont les antécédents de -4 par la fonction g ?
2.c. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction h ?

3. Déterminer $f(0)$, $g(-3)$ et $h(4)$.

4. Déterminer les solutions de l'équation $g(x) = -8$.

5. On sait que la fonction h est affine. Déterminer l'expression algébrique de cette fonction.

Exercice n° 33 : Usage d'un tableur

On note $f : x \to f(x) = 7x - 3$, $\quad g : x \to g(x) = x^2 - 5x + 8 \quad$ et $\quad h(x) = (1 - 3x)(2x + 5)$

Voici un tableau de valeurs de ces trois fonctions ainsi que celui d'une fonction k.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1 x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
2 $f(x)$	-38	-31	-24	-17	-10	-3	4		18	25	32	
3 $g(x)$	58	44	32	22	14	8	4		2	4	8	
4 $h(x)$	-80	-39	-10	7		5	-14	-45	-88	-143	-210	
5 $k(x)$	34	29	24		14	9	4	-1	-6	-11	-17	

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite.

2. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers la droite.

3. Quelle formule a été saisie dans la cellule B4 puis recopiée vers la droite.

4. Dans la cellule B5 a été saisie la formule $= 9 - 5 * \text{B1}$ puis recopiée vers la droite.
Quelle est l'expression de la fonction k.

5. Compléter les cases vides de ce tableau.

Exercice n° 34 : Déterminer l'expression d'une fonction linéaire

Fonctions - Les fonctions linéaires

1. On appelle f la fonction linéaire vérifiant $f(3) = 4$.
Quelle est l'expression algébrique de f ?

2. g la fonction qui à un nombre x associe le nombre x augmenté de 12 %.
Quelle est l'expression algébrique de g ?

Exercice n° 35 : Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire

Fonctions - Les fonctions linéaires

On pose :

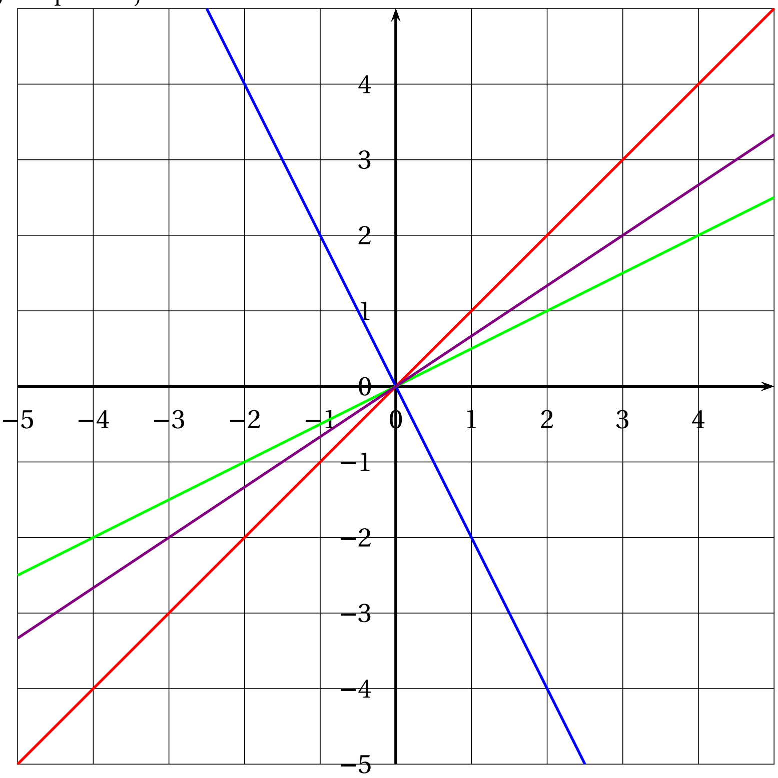
- $f : x \to 3x$;
- $g : x \to -2x$;
- $h : x \to \dfrac{x}{2}$;
- $k : x \to -x$.

Tracer la représentation graphique de ces fonctions linéaires dans un repère orthonormé.

Exercice n° 36 : Analyser la représentation graphique d'une fonction linéaire

Fonctions - Les fonctions linéaires

Voici la représentation graphique de quatre fonctions linéaires.
Indiquer leurs expressions algébriques en justifiant votre raisonnement.



Exercice n° 37 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Fonctions - Les fonctions affines

1. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que $f(0) = -7$ et $f(5) = 13$.

2. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine g telle que $g(0) = 3$ et $g(-4) = -2$.

3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine h telle que $h(-3) = 20$ et $h(5) = -12$.

4. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine k telle que $k(-2) = 5$ et $k(7) = -5$.

Exercice n° 38 : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine

Fonctions - Les fonctions affines

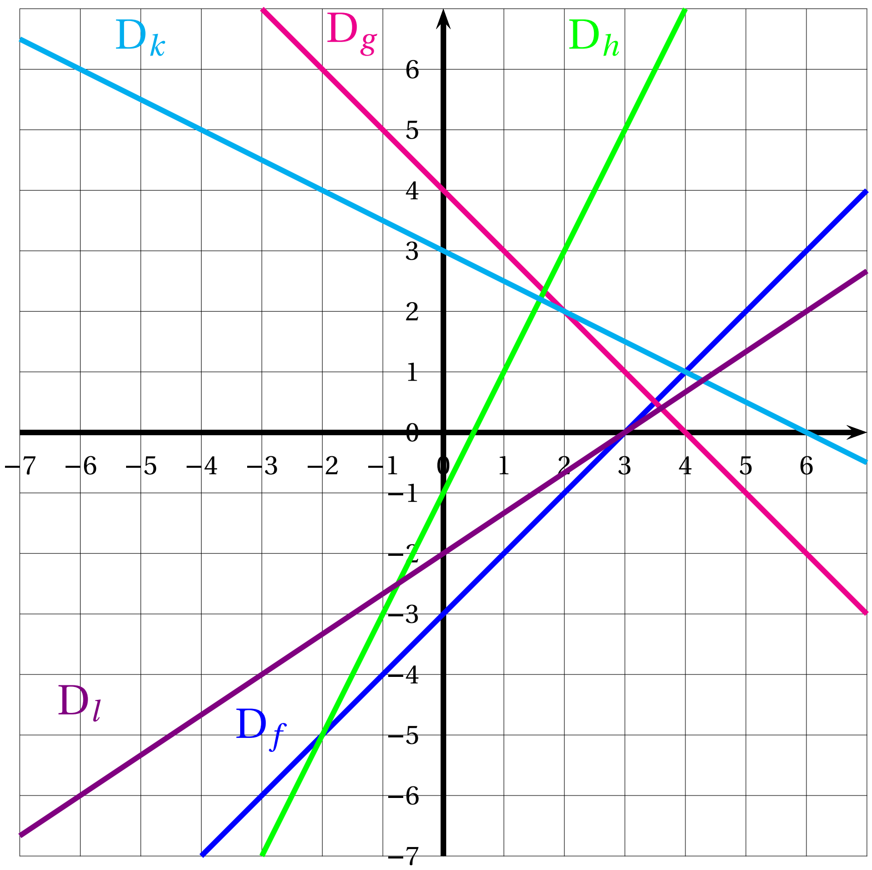
On pose :

- $f : x \to 3x - 5$;
- $g : x \to -2x + 3$;
- $h : x \to \dfrac{x}{2} - 4$;
- $k : x \to -x + 4$.
- $l : x \to -2x - 3$.

Tracer la représentation graphique de ces fonctions affines dans un repère orthonormé.

Exercice n° 39 : Analyser la représentation graphique d'une fonction affine

Fonctions - Les fonctions affines



On a représenté graphiquement ci-dessus cinq fonctions affines.

1. Déterminer l'expression algébrique de chacune de ces fonctions affine.

2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la droite D_f et de la droite D_k.

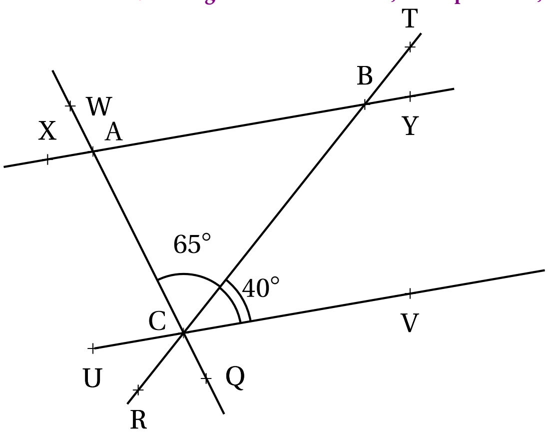
Exercice n° 40 : Droites parallèles et perpendiculaires

Géométrie plane - Bases de la géométrie

ABCD un quadrilatère ayant trois angles droits.

Démontrer que ABCD est un rectangle.

Exercice n° 41 : Angles alternes-internes, correspondants, opposés par le sommet



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

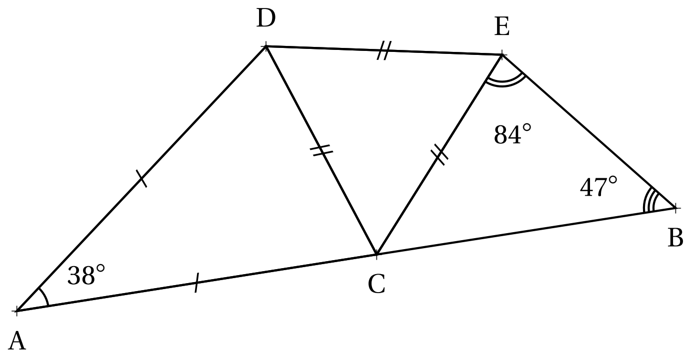
— (AB)//(CV) ;

— $\widehat{ACB} = 65°$;

— $\widehat{BCV} = 40°$.

En justifiant votre réponse calculez la mesure des angles suivants :
$\widehat{ABC}$ — $\widehat{TBY}$ — $\widehat{ABT}$ — $\widehat{YBC}$ — $\widehat{ACU}$ — $\widehat{UCR}$ — $\widehat{RCQ}$ — $\widehat{QCV}$

Exercice n° 42 : Angles et triangles



Sur la figure ci-dessus, qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— ACD est isocèle en A et CDE est équilatéral ;

— $\widehat{DAC} = 38°$, $\widehat{CBE} = 49°$, $\widehat{BEC} = 84°$;

— AC = 10 cm.

1. Tracer la figure ci-dessus en vraie grandeur.
2. Les points A, C et B sont-ils alignés ?

Exercice n° 43 : Les parallélogrammes

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Affirmation n° 1 : Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

Affirmation n° 2 : Si un parallèlogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.

Affirmation n° 3 : Si un quadrilatère a des côtés opposés deux à deux de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Affirmation n° 4 : Si un losange a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

Affirmation n° 5 : Si un quadrilatère est un carré alors c'est un losange.

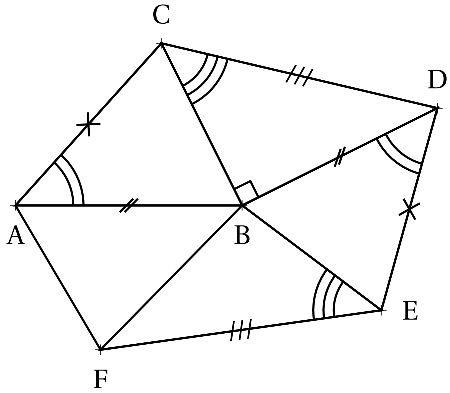
Affirmation n° 6 : Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un carré.

Affirmation n° 7 : Si un quadrilatère a un axe de symétrie alors c'est un parallélogramme.

Affirmation n° 8 : Si un quadrilatère a deux axes de symétries alors c'est un losange.

Exercice n° 44 : Cas d'égalité des triangles

Géométrie plane - Bases de la géométrie



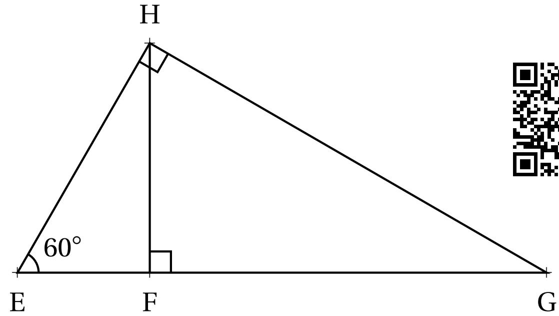
En utilisant les codages de la figure ci-contre, démontrer que le triangle ABF est isocèle et que le triangle FBE est rectangle.

Exercice n° 45 : Triangles semblables

Géométrie plane - Bases de la géométrie

La figure ci-contre n'est pas dessinées en vraie grandeur.

— EHG est rectangle en H ;
— $F \in [EG]$;
— $EG = 10\,\text{cm}$.



1. Calculer la mesure des angles : $\widehat{EFH}$, $\widehat{EHF}$, $\widehat{HGF}$ et $\widehat{FHG}$.

2. En déduire que les triangles EHG, EHF et HFG sont semblables.

3. Calculer les longueurs : EH, HG, EF, FG et FH.

4. Déterminer le coefficient d'agrandissement réduction qui permet de passer du triangle EHG au triangle HFG, puis celui qui permet de passer du triangle EHG au triangle HEF.

5. Déterminer les aires des triangles EHG, HFG et HEF. Que remarquez-vous ?

Exercice n° 46 : La symétrie axiale

Géométrie plane - Transformations géométriques

1. Tracer un triangle équilatéral ABC tel que $AB = 5\,\text{cm}$.

2.a. Construire le point D symétrique du point A par rapport à la droite (BC).
2.b. Construire le point E symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
2.c. Construire le point F symétrique du point C par rapport à la droite (AB).

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la position des points A, B et C dans le triangle DEF.

4.a. Démontrer que $AC = CD$ et que $AB = BD$.
4.b. Que dire du quadrilatère ACDB ?

5. Démontrer de même que ABCE et que CAFB sont des losanges.

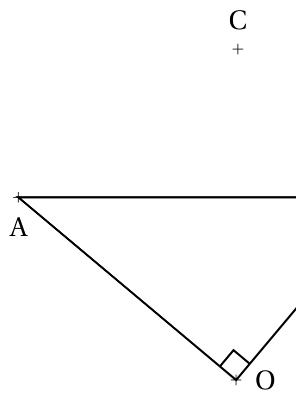
6. Démontrer la conjecture observée à la question **3.**.

7.a. Que dire du triangle DEF ?
7.b. Exprimer l'aire du triangle DEF en fonction de celle du triangle ABC.

8.a. Quelle transformation géométrique transforme le triangle ACE en le triangle BCD ?
8.b. Quelle transformation géométrique transforme le triangle ACE en le triangle ABF ?
8.c. Quelle transformation géométrique transforme le triangle BCD en le triangle ABF ?

EXERCICE N° 47 : La symétrie centrale

GÉOMÉTRIE PLANE - TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES



Sur la figure ci-contre qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

— $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 3\,\text{cm}$ et $BC = 2\,\text{cm}$;

— ABO est rectangle en O ;

— $\widehat{ABO} = 50°$;

1. Tracer cette figure.

2. Tracer le symétrique du triangle ABC par la symétrie d'axe (OB). Nommer $A_1B_1C_1$ le triangle résultat.

3. Tracer le symétrique du triangle $A_1B_1C_1$ par la symétrie d'axe (OA). Nommer $A_2B_2C_2$ le triangle résultat.

4.a. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle $A_2B_2C_2$?

4.b. Démontrer que le triangle CC_1C_2 est rectangle.

4.c. On note I l'intersection des droites (OA) et C_1C_2. Démontrer que les triangles C_2IO et C_2C_1C sont semblables.

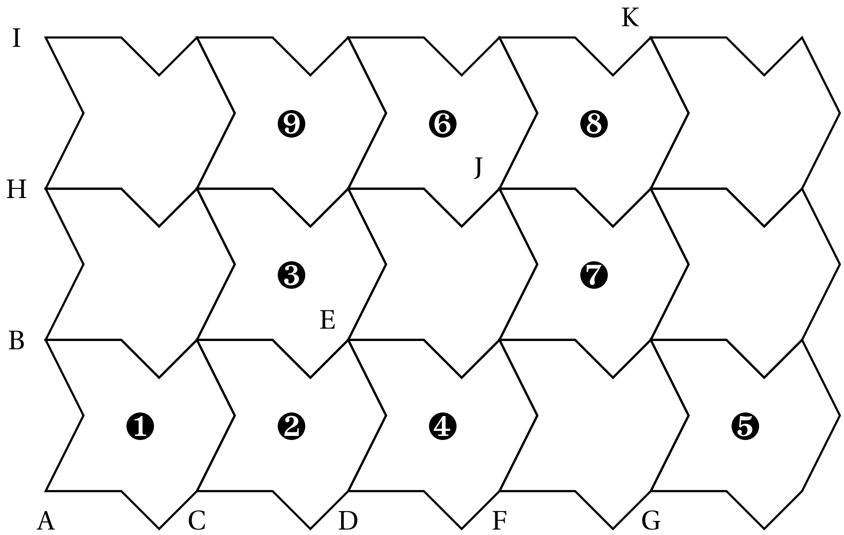
4.d. Quelle transformations géométrique permet de passer du triangle OC_2I au triangle CC_1C_2. Justifier votre réponse

4.e. Démontrer la conjecture de la question **4.a.**.

EXERCICE N° 48 : La translation

GÉOMÉTRIE PLANE - TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Voici un pavage réalisé à partir d'un motif noté ❶ :



1. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❶** au **Motif ❷** ?

2. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❶** au **Motif ❸** ?

3. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❶** au **Motif ❹** ?

4. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❺** au **Motif ❸** ?

5. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❻** au **Motif ❹** ?

6. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❻** au **Motif ❺** ?

7. Quelle tranformation géométrique permet de passer du **Motif ❸** au **Motif ❺** ?

8. Quelle est l'image du **Motif ❷** par la translation qui transforme D en J ?

9. Quelle est l'image du **Motif ❸** par la translation qui transforme A en D ?

10. Quelle est l'image du **Motif ❻** par la translation qui transforme H en A ?

11. Quelle est l'image du **Motif ❶** par la translation qui transforme A en G ?

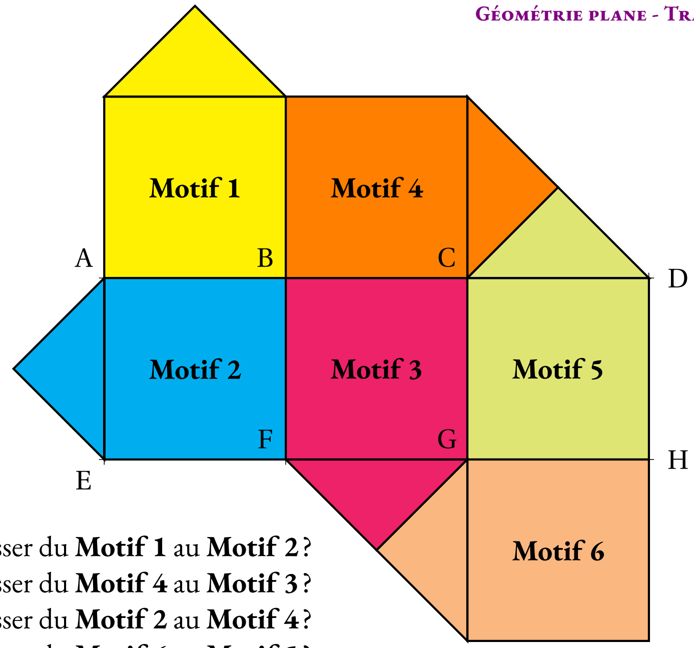
12. Quelle est l'image du **Motif ❺** par la translation qui transforme F en H ?

13. Quelle est l'image du **Motif ❼** par la translation qui transforme E en H ?

14. Quelle est l'image du **Motif ❷** par la translation qui transforme K en J ?

Exercice n° 49 : La rotation

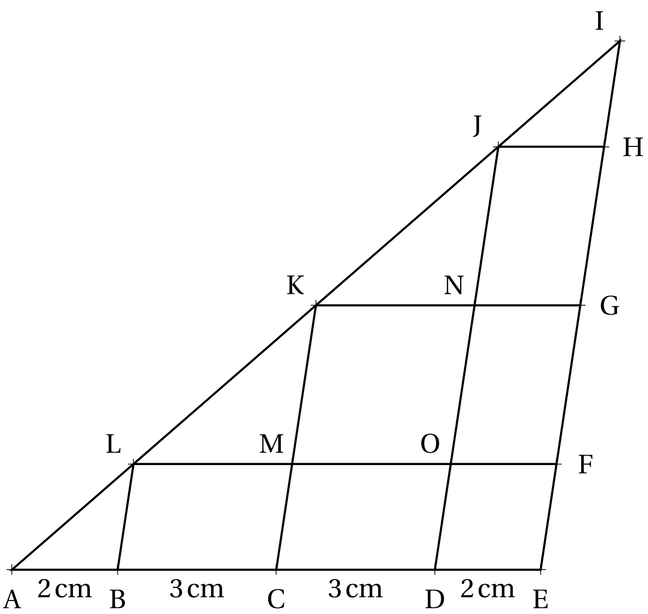
Géométrie plane - Transformations géométriques



1. Quelle transformation permet de passer du **Motif 1** au **Motif 2** ?
2. Quelle transformation permet de passer du **Motif 4** au **Motif 3** ?
3. Quelle transformation permet de passer du **Motif 2** au **Motif 4** ?
4. Quelle transformation permet de passer du **Motif 6** au **Motif 5** ?
5. Quelle transformation permet de passer du **Motif 1** au **Motif 5** ?
6. Quelle transformation permet de passer du **Motif 2** au **Motif 6** ?
7. Quelle transformation permet de passer du **Motif 3** au **Motif 2** ?

Exercice n° 50 : L'homothétie

Géométrie plane - Transformations géométriques



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- les points A, B, C, D et E sont alignés ;
- les points A, L, K, J et I sont alignés ;
- les points L, M, O et F sont alignés ;
- les points K, N et G sont alignés ;
- les points L, M, O et F sont alignés ;
- les points J, N, O et D sont alignés ;
- les points K, N et G sont alignés ;
- les points K, M et C sont alignés ;
- les droites (AE), (LF), (KG) et (JH) sont parallèles ;
- les droites (EI), (DJ), (CK) et (BL) sont parallèles ;

Dans cet exercice on ne demande aucune justification

1. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du triangle ABL au triangle ACK.
2. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du triangle ABL au triangle ADJ.
3. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du triangle AEI au triangle ABL.
4. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du parallélogramme DEFO au parallélogramme CEGK.
5. Sachant que AL = 3 cm en déduire les longueurs LK, KJ et JI.
6. Déterminer la transformation géométrique qui fait passer du parallélogramme DEFO au parallélogramme OMKN.

Exercice n° 51 : Calculer la mesure de l'hypoténuse
Géométrie plane - Théorème de Pythagore

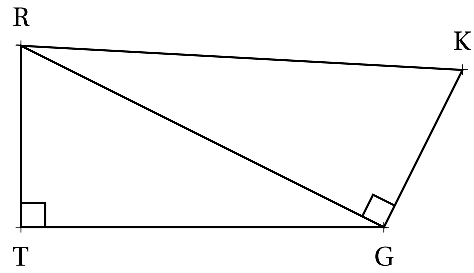
La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Le triangle GTR est rectangle en T.

On sait que GT = 68 cm, RT = 51 cm et GK = 57 cm.

1. Calculer la valeur exacte de RT.

2. Calculer une valeur approchée de RK au millimètre près.

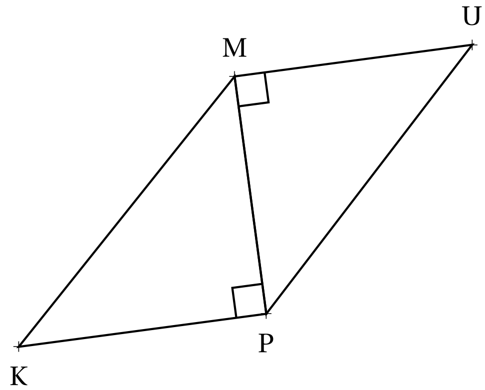


Exercice n° 52 : Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit
Géométrie plane - Théorème de Pythagore

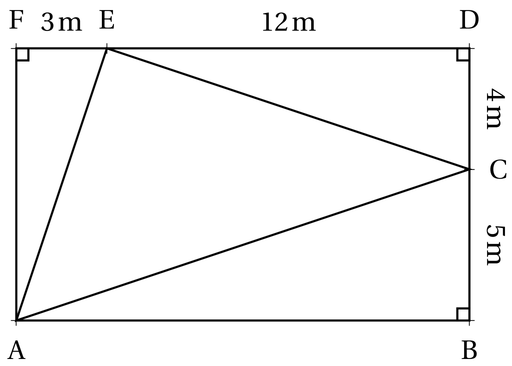
La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Le triangle PKM est rectangle en P.
Le triangle PMU est rectangle en M

On sait que KM = 19 m, KP = 15,2 m et PU = 25 m.
Calculer la valeur exacte de PM puis
une valeur approchée au centimètre près de MU.



Exercice n° 53 : Démontrer qu'un triangle est rectangle
Géométrie plane - Théorème de Pythagore

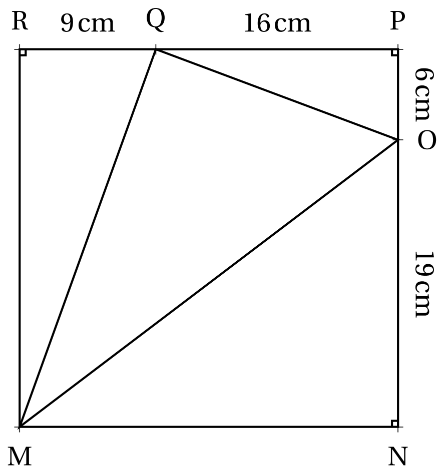


Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

- ABDF est un rectangle ;
- C ∈ [BD] et E ∈ [FD].

Démontrer que le triangle EAC est rectangle.

Exercice n° 54 : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle
Géométrie plane - Théorème de Pythagore



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

- MNPR est un carré ;
- O ∈ [PN] et Q ∈ [RP].

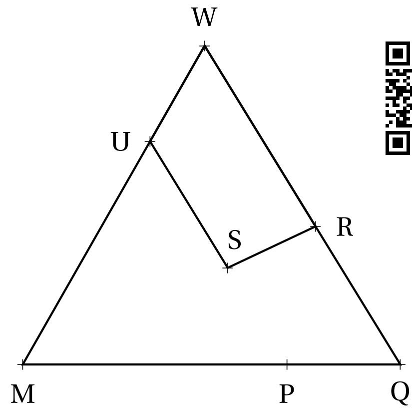
Le triangle MOQ est-il rectangle ?

Exercice n° 55 : Calculer une longueur dans une situation de Thalès triangle — Géométrie plane - Théorème de Thalès

La figure ci-contre n'est pas réalisée en vraie grandeur.
On sait que :

- (UP)//(WQ);
- M, P et Q sont alignés ainsi que M, U et W;
- M, S et R sont alignés ainsi que U, S et P;
- W, R et Q sont alignés;
- MP = 7 cm, MQ = 10 cm, SP = 5 cm, MS = 6 cm;
- WR = 7 cm, UW = 4 cm

Donner la valeur exacte puis la valeurs approchée au millimètre près de RQ, SR, US et MU.

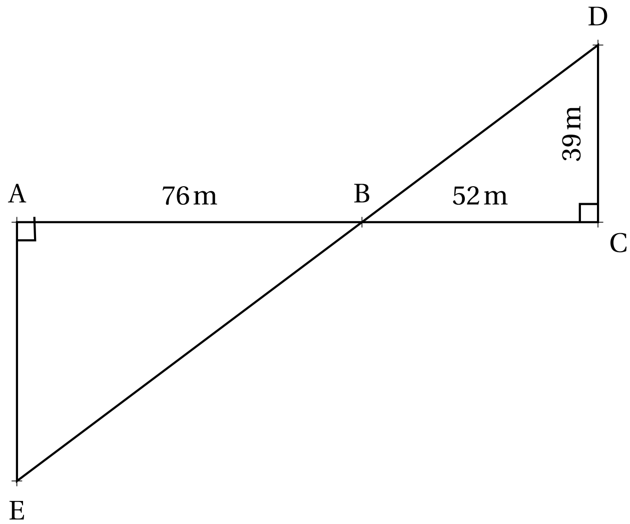


Exercice n° 56 : Calculer une longueur dans une situation de Thalès papillon — Géométrie plane - Théorème de Thalès

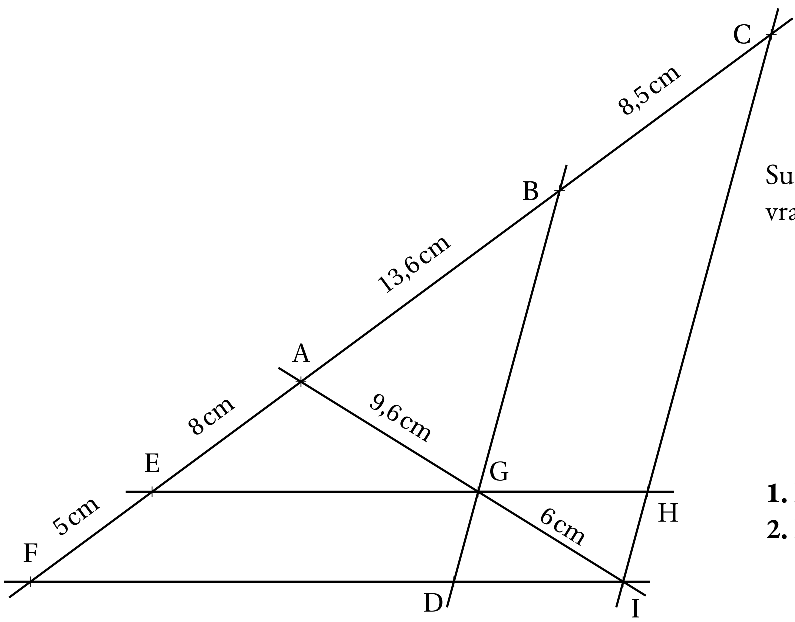
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on a :

- A, B et C sont alignés;
- E, B et D sont alignés;
- ABE est rectangle en A;
- BCD est rectangle en C.

Calculer la valeur exacte puis la valeur approchée au centimètre près de BD, AE et BE.



Exercice n° 57 : Démontrer que deux droites sont parallèles — Géométrie plane - Théorème de Thalès



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

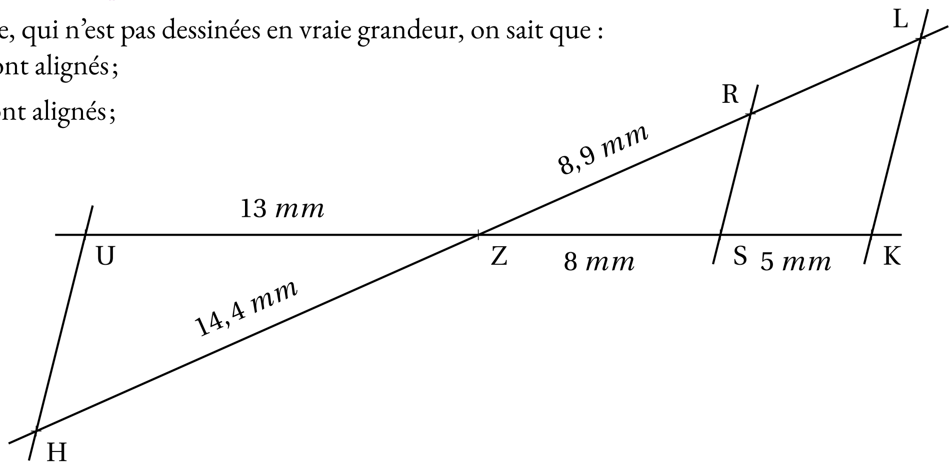
- F, E, A, B et C sont alignés;
- E, G et H sont alignés;
- F, D et I sont alignés;
- (EH)//(FI);
- (BG)//(CH).

1. Les droites (BG) et (CI) sont-elles parallèles ?
2. Les droites (EG) et (FI) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 58 : **Démontrer que deux droites sont sécantes** — **Géométrie plane - Théorème de Thalès**

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinées en vraie grandeur, on sait que :

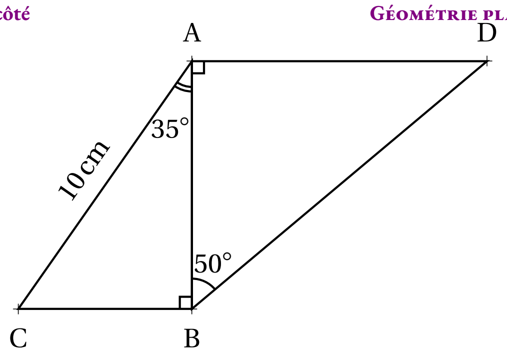
- U, Z, S et K sont alignés ;
- H, Z, R et L sont alignés ;
- (RS)//(LK).



1. Calculer RL et donner une valeur approchée au dixième près.

2. Les droites (RS) et (UH) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 59 : **Calculer la longueur d'un côté** — **Géométrie plane - Trigonométrie— Bases de la géométrie**

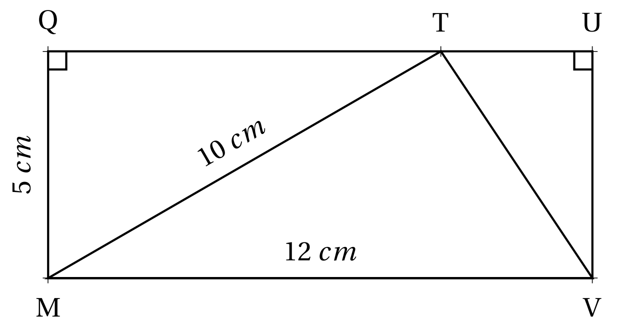


La figure ci-dessus n'est pas tracée en vraie grandeur.
ABC est un triangle rectangle en B et ADB est un triangle rectangle en A.

Calculer les valeurs exactes puis approchées au millimètre près des longueurs BC, BA, AD et BD.

Les droites (BC et (AD) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 60 : **Calculer la mesure d'un angle** — **Géométrie plane - Trigonométrie— Bases de la géométrie**



La figure ci-dessus n'est pas tracée en vraie grandeur.
QUVM est un rectangle, T ∈ [QU].

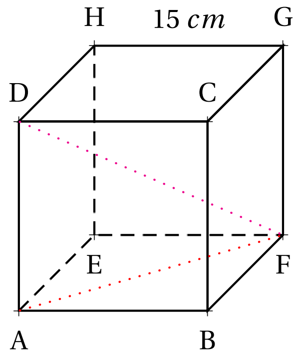
Calculer une valeur approchée au dixième de degré près la mesure des angles $\widehat{QMT}$, $\widehat{UVT}$, $\widehat{TMV}$ et $\widehat{TVM}$.

Le triangle MTV est-il rectangle ?

Exercice n° 61 : Le cube — Géométrie de l'espace - Géométrie des solides— Théorème de Pythagore

ABCDEFGH est un cube de 15 cm de côté.

1. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de la diagonale AF
2. Quelle est la nature du triangle AFD ?
3. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de la grande diagonale FD
4. Quel est le volume en litre de ce cube ?



Exercice n° 62 : Le pavé droit — Géométrie de l'espace - Géométrie des solides— Théorème de Pythagore

FGHIJKLM est un pavé droit dont les arêtes mesurent 25 m, 10 m et 15 m.

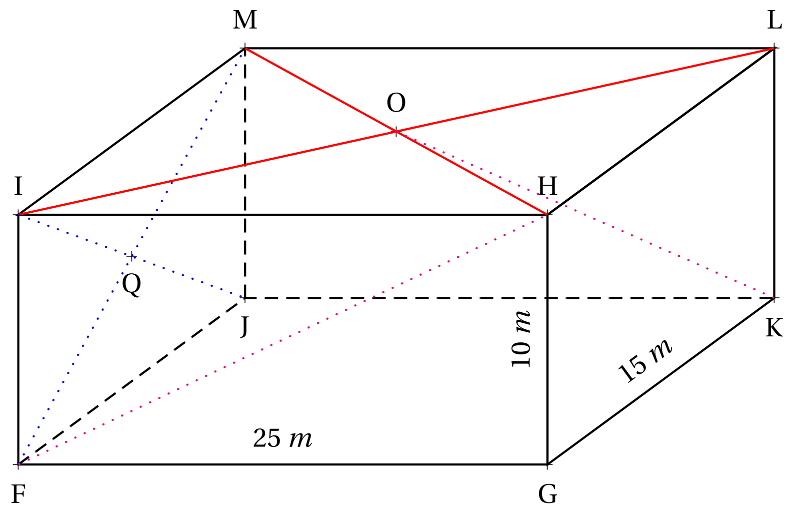
1. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de la diagonale IL

2. Quelle est la nature du triangle LOK ?

3. Calculer la valeur exacte puis approchée au centimètre près de OK.

4. Le triangle FMH est-il rectangle ?

5. Calculer le volume en litre de ce pavé.



Exercice n° 63 : Le prisme droit — Géométrie de l'espace - Géométrie des solides— Théorème de Thalès— Théorème de Pythagore

Une fourmi se déplace sur les faces du prisme droit RMSFVK dont les bases sont deux triangles rectangles.
La fourmi se situe au sommet F et elle veut se rendre près d'un grain de sucre qui se trouve au sommet S.

1. Calculer la valeur exacte et approchée au millimètre près de FS.

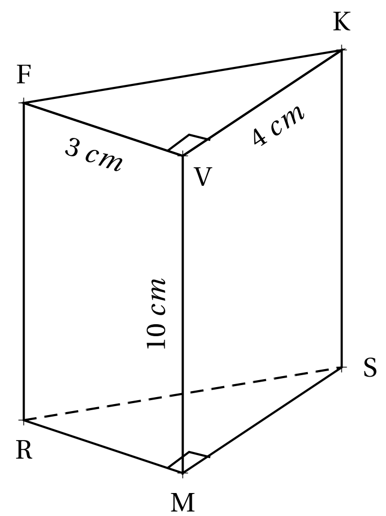
Finalement la fourmi se dirige vers le grain de sucre en passant par les faces (FVMR) puis (MSKV).

2. Tracer le patron de ce prisme droit en vraie grandeur.

3. Tracer sur ce patron le plus court chemin pour atteindre le grain de sucre en passant par les faces (FVMR) et (MSKV).

4. Calculer la valeur exacte et approchée au millimètre près de ce plus court chemin.

5. Où se situe l'intersection de ce chemin avec l'arête [MV] ?



Exercice n° 64 : Le cylindre de révolution

Géométrie de l'espace - Géométrie des solides

Un transporteur souhaite ranger des boites de conserve cylindriques dans des cartons parallélépipèdiques.

1. Un carton parallélépipèdique mesure 60 cm de long, 48 cm de large et 45 cm de haut.
Tracer le patron de ce carton à l'échelle 1 : 10.

2. Une boite cylindrique a un diamètre de 12 cm et une hauteur de 15 cm.
Tracer le parton de ce cylindre à l'échelle 1 : 5.

3. Combien de boites de conserve peut-on ranger dans chaque carton ?

4. Déterminer le volume non utilisé dans chaque carton, on donnera la réponse au centième de cm^3 près.

5. Quel est la proportion de vide exprimée en pourcentage dans chaque carton ?

Exercice n° 65 : La pyramide

Géométrie de l'espace - Géométrie des solides

La pyramide du Louvre à Paris a été construite entre 1985 et 1989 par l'architecte Leoh Minh Pei durant le premier mandat de François Mitterand.
Il s'agit d'une pyramide régulière à base carré dont le côté mesure 35,42 m.
Elle s'élève à 21,64 m de hauteur.

1. Calculer la mesure du côté des quatre triangles isocèles identiques qui forment ses faces latérales.

2. Calculer l'angle que forme une face latérale avec la base carrée.
Donner une valeur approchée au dixième de degré près.

3. Calculer le volume de cette pyramide en mètre cube. Donner un arrondi au centième près.

4. La pyramide du Louvre est une réplique de la pyramide de Khéops près de Giseh en Égypte. À sa construction il y a 4 500 ans, elle mesurait 146,58 m.

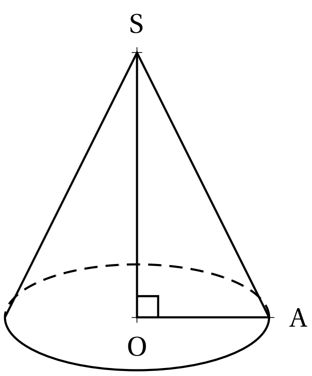
4.a. Déterminer une valeur approchée au dixième près du coefficient d'agrandissement qui permet de passer des longueurs de la pyramide du Louvre à celles de la pyramide de Khéops.

4.b. Quelles sont les mesures des longueurs de la pyramide de Khéops ?

4.c. Calculer une valeur approchée au décamètre cube près du volume de la pyramide de Khéops.

Exercice n° 66 : Le cône

Géométrie de l'espace - Géométrie des solides



Le cône de révolution ci-contre a une génératrice [SA] qui mesure 6,5 cm et un rayon [OA] de 3,9 cm.

1. Calculer la valeur exacte de la hauteur de ce cône.

2. Tracer en vraie grandeur le patron de ce cône.

3. Calculer le volume en centilitre de ce cône.
Donner une valeur approchée au dixième près.

Exercice n° 67 : La sphère et la boule — **Géométrie de l'espace - Géométrie des solides**

La planète Terre peut être modélisée sous la forme d'une boule de rayon 6 371 km.

1. Calculer la longueur de l'Équateur, arrondi le résultat au kilomètre près.

2. Calculer l'aire de la surface de la planète Terre, arrondir le résultat au kilomètre carré près.
Donner ce résultat en hectare.

3. On sait que seulement 29 % de la surface terrestre est émergée.
Calculer cette surface au kilomètre carrée près.

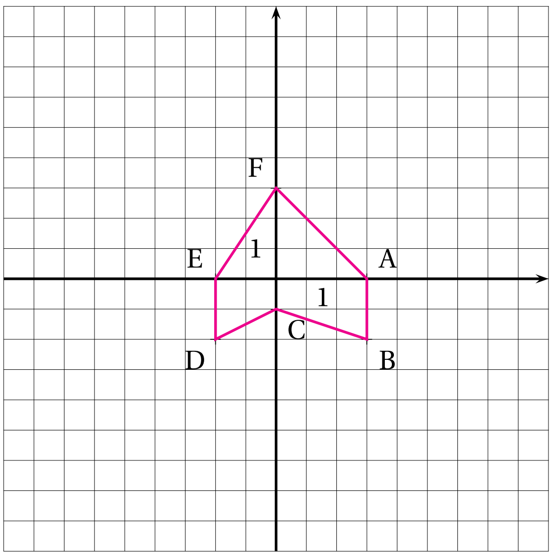
4. $134\,000\,000\,\text{km}^2$ de la surface terrestre est habitable.
Quel pourcentage de la surface terrestre émergée représente la surface habitable.

5. En 2021 il y a environ 7 868 000 000 habitants sur Terre. Quelle est la densité théorique d'habitant par hectare ?

6. Calculer le volume de la Terre arrondir le résultat au kilomètre cube près.

7. On estime que la masse de la Terre est environ $5,9722 \times 10^{24}\ kg$.
Calculer la masse volumique de la Terre au kilogramme par mètre cube près.

Exercice n° 68 : Utiliser les coordonnées dans le plan — **Géométrie cartésienne - Dans le plan**



1. Lire les coordonnées des points du polygone ABCDEF.

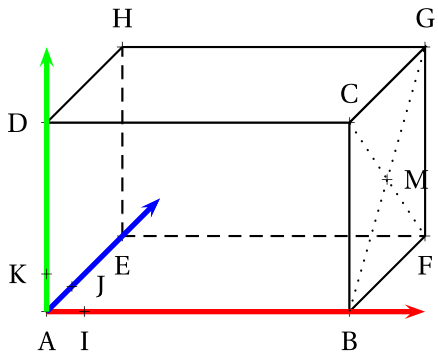
2. Tracer l'image $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ du polygone ABCDEF par la symétrie de centre B.
Lire les coordonnées des images de chaque point.

3. Tracer l'image $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ du polygone ABCDEF par la translation qui tranforme A en D.
Lire les coordonnées des images de chaque point.

4. On définit la transformation qui à un point $M(x; y)$ associe le point $M_3(x-3; y+5)$.
Déterminer les coordonnées des images des sommets du polygone $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$. Tracer ce polygone.
Quelle transformation géométrique permet de passer du polygone ABCDEF au polygone $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$?

5. On définit la transformation qui a un point $M(x; y)$ associe le point $M_4(2x+2; 2y+2)$.
Déterminer les coordonnées des images des sommets du polygone$A_4B_4C_4D_4E_4F_4$. Tracer ce polygone.
Quelle transformation géométrique permet de passer du polygone ABCDEF au polygone $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$?

Exercice n° 69 : Utiliser les coordonnées sur un pavé droit — **Géométrie cartésienne - Dans l'espace**



On se place dans le repère orthonormé $(A; AI, AJ, AK)$ dont l'unité sur chaque axe est 1 cm.
On sait que AB = 8 cm, AE = 3 cm et AD = 5 cm.

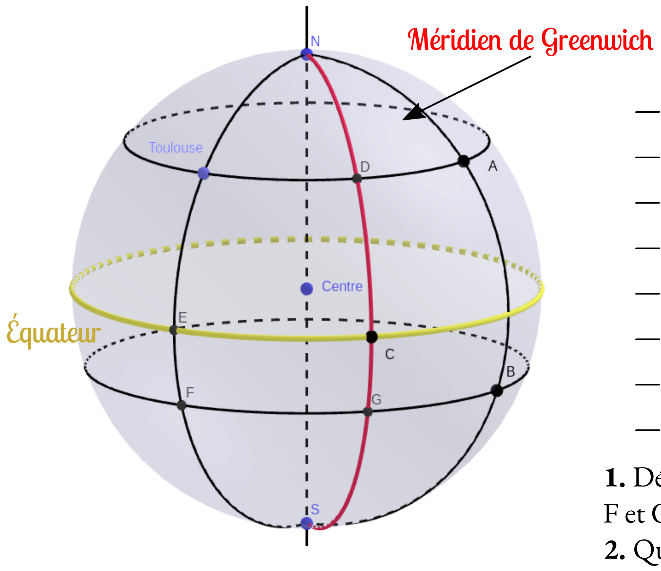
1. Indiquer les coordonnées de chacun des huit sommets du pavé droit.

2. Indiquer les coordonnées des chacuns des douze millieux des arêtes du pavé droit.

3. M est le centre de la face (BCGF).
Indiquer les coordonnées de chacun des six centres des six faces du pavé droit.

Exercice n° 70 : Utiliser les coordonnées géographiques

Sur la représentation en perspective de la sphère terrestre ci-dessus, nous avons les informations ci-après :



— les points D et A sont sur le même parallèle que Toulouse ;

— les points E et C sont sur l'équateur ;

— les points F, G et B sont sur le même parallèle ;

— les points A et B sont sur le même méridien ;

— les points D, C et G sont sur le même méridien ;

— les points E et F sont sur le même méridien que Toulouse ;

— les coordonnées géographiques de Toulouse sont (44°N; 1°O) ;

— les coordonnées géographiques du point B sonr (23°S; 45°E).

1. Déterminer les coordonnées géographiques des points A, C, D, E, F et G.

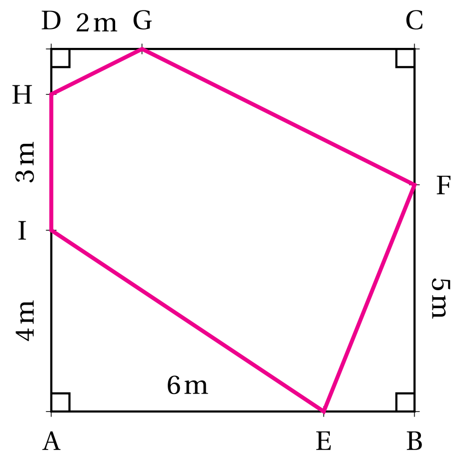
2. Quelles sont les coordonnées géographiques du point diamétralement opposé à Toulouse sur la Terre.

Exercice n° 71 : Périmètres des polygones

ABCD est un carré dont le côté mesure 8 m.

1. Calculer la valeur exacte puis approchée au millième de mètre prés du périmètre du polygone EFGHI.

2. Calculer la valeur exacte de l'aire de ce polygone en mètre carré.



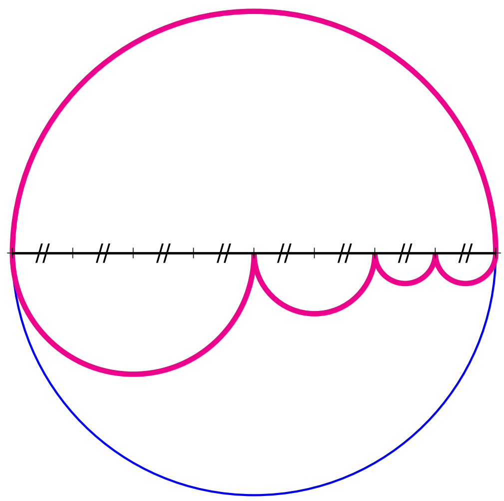
Exercice n° 72 : Périmètre du cercle

On sait que le diamètre du grand demi-cercle mesure 32 cm.

1. Calculer le périmètre d'un cercle de diamètre 32 cm.
Donner la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée au millimètre près.

2. Calculer le périmètre de la figure constituée du grand demi-cercle et des quatre petits demi-cercles.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au millimètre près.

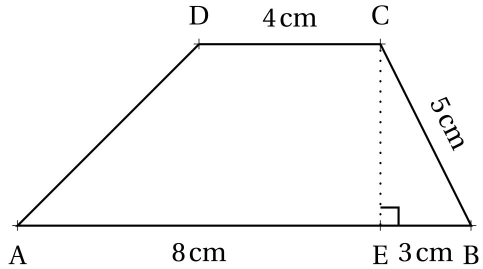
3. Calculer l'aire de la surface comprise à l'intérieur de ces demi-cercles.
Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au millimètre carré près.



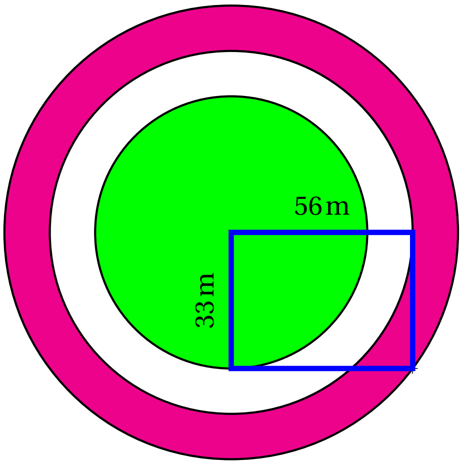
EXERCICE N° 73 : Aire des polygones GRANDEURS ET MESURES - LES AIRES

1. Calculer l'aire d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 3 dm.

2. Calculer l'aire du trapèze ABCD.



EXERCICE N° 74 : Aire du disque GRANDEURS ET MESURES - LES AIRES



Sur cette figure qui n'est pas dessinée en vraie grandeur on sait que :

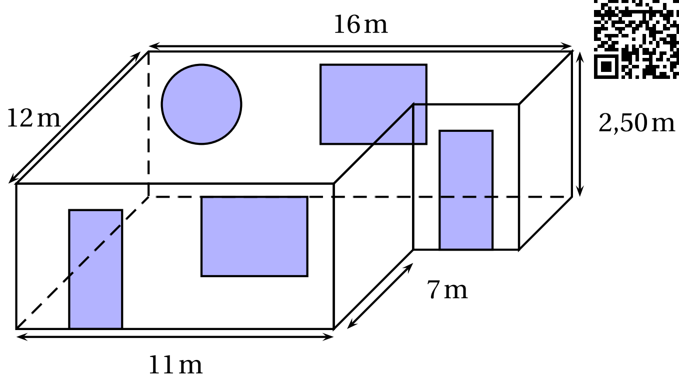
- les trois cercles sont concentriques ;
- le centre de ces cercles est un des sommets d'un rectangle mesurant 56 m de long sur 33 m de large ;
- le premier cercle a pour rayon la largeur du rectangle ;
- le deuxième cercle a pour rayon la longueur du rectangle ;
- le troisième cercle a pour rayon la diagonale du rectangle.

Comparer l'aire de la surface constituée par la couronne extérieure (en magenta) et le disque intérieure (en vert).

EXERCICE N° 75 : Aire latérale GRANDEURS ET MESURES - LES AIRES

Alice souhaite peindre la pièce principale au rez-de-jardin de sa maison.
Voici une représentation en perspective de cete pièce :
Alice estime raisonnablement que les murs sont parfaitement verticaux et orthogonaux entre eux et que le sol et le plafond sont parallèles. Cette pièce contient cinq ouvertures :

- Deux portes : 0,90 m × 2,10 m ;
- Deux fenêtres : 1,40 m × 1,10 m ;
- Un hublot : Rayon = 0,65 m.



1. Quelle est la nature du solide qui modélise cette pièce de la maison ?

2. Alice souhaite peindre en bleu azur les murs de cette pièce. Le pot de 2,5 L de peinture coûte 39,90 € et son rendement est de 28 m^2. Il faut prévoir deux couches de peinture et attendre 6 h entre les deux couches.
Combien va lui coûter la peinture pour les murs ?

3. Alice veut également repeindre le plafond en blanc. Le pot de 10 L de peinture coûte 45,90 € et a un rendement de 75 m^2. Alice n'envisage de poser qu'une seule couche de peinture au plafond.
Combien va lui coûter la peinture pour le plafond ?

Exercice n° 76 : Aire de la sphère

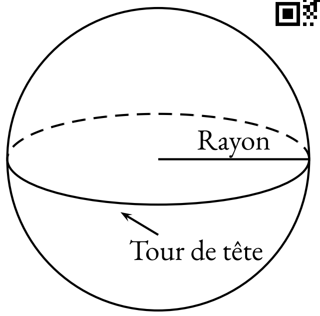
Grandeurs et mesures - Les aires

Mathieu se demande combien il a de cheveux sur la tête.
Pour cela il modélise son crâne sous la forme d'un hémisphère. En mesurant son tour de tête il obtient 56 cm.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de millimètre près du rayon de son crâne.

Mathieu a lu dans un magazine qu'en moyenne la densité de cheveux sur un crâne était de 250 cheveux par centimètre carré.

2. Déterminer le nombre de cheveux sur le crâne de Mathieu.

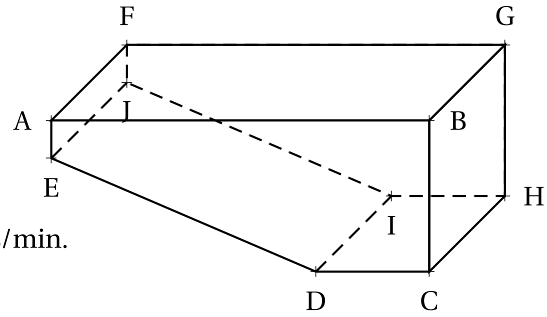


Exercice n° 77 : Volume des prismes

Grandeurs et mesures - Les volumes

La figure ci-dessus, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, représente en perspective cavalière un piscine municipale, plus précisémment le volume d'eau contenu dans cette piscine. Le segment [AE] mesure 1,20 m, il correspond au « petit bain ». Le segment [BC] mesure 3 m, il correspond au « grand bain ».
On sait que :

- ABCDEFGHIJ est un prisme droit;
- AE = 1,20 m, BC = 3 m, AF = 10 m, AB = 25 m et DC = 5 m.



1. Quelle est la nature du polygone ABCDE ? Calculer son aire.
2. Calculer le volume en mètre cube puis en litre de cette piscine.
3. Pour remplir cette piscine on utilise une pompe dont le débit est 80 L/min.
Combien de temps prend le remplissage de cette piscine ?
4. Dans cette ville, le prix de l'eau est facturé 3,17 €/m^3.
Combien coûte le remplissage de cette piscine ?

Exercice n° 78 : Volume du cylindre

Grandeurs et mesures - Les volumes

On modélise une tasse à café par un cylindre droit de 4 cm de diamètre et de 5 cm de haut. Un morceau de sucre peut être considéré comme un pavé droit de 2,5 cm de long, 1,5 cm de large et 1 cm de haut.

1. Calculer le volume de cette tasse en mL.

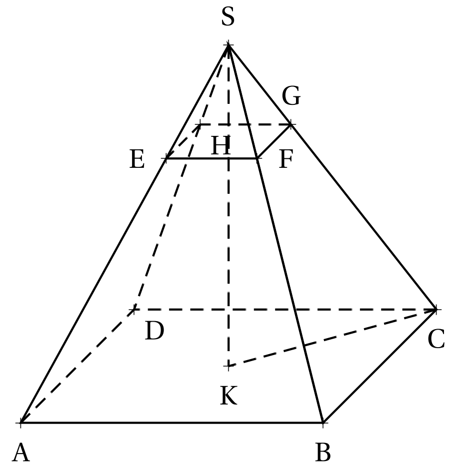
2. Calculer le volume d'un morceau de sucre en cm^3.

3. De quelle hauteur monte le café dans ma tasse quand je rajoute deux sucres ?

Exercice n° 79 : **Volume des pyramides** **Grandeurs et mesures - Les volumes**

Une boite de chocolat à la forme d'un tronc de pyramide ABCDEFGH.

On sait que :
— ABCDS est une pyramide régulière;
— ABCD est un carré de côté 12 cm;
— la hauteur [SK] de la pyramide mesure 15 cm;
— EF = 2,4 cm;
— (EF)//(AB), (BC)//(FG), (CD)//(GH) et (AD)//(EH).



1. Calculer le volume de la pyramide ABCDS en centimètre cube.

2. Déterminer le coefficient de réduction qui permet de passer de la pyramide ABCDS à la pyramide EFGHS.

3. En déduire le volume de la pyramide EFGHS puis de la boite de chocolat en centimètre cube.

4.a. Calculer la mesure exacte de la diagonale du carré ABCD.
4.b. Calcule la mesure exacte du segment [SA].
4.c. En déduire une valeur approchée de la mesure SE.

5. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{KSC}$

Exercice n° 80 : **Volume du cône** **Grandeurs et mesures - Les volumes**

Une barmaid doit choisir une forme de verre pour servir le coktail qu'elle vient de créer. Elle dispose de deux types de verre :

1. Calculer le volume au millilitre près de chacun de ces verres.

2. Il y aura 35 personnes lors de cette soirée. Chaque personne doit pouvoir boire au maximum deux verres.
Quelle quantité de cocktail doit-elle préparer pour préparer ces verres avec le verre ayant le plus petite volume? Arrondir ce résultat au litre près.
— un verre cylindrique de diamètre 5 cm et de hauteur 5 cm;
— un verre conique de rayon 3,6 cm et de hauteur 7 cm.

Exercice n° 81 : **Volume de la boule** **Grandeurs et mesures - Les volumes**

Une boule de pétanque de compétition a un diamètre de 74 mm et une masse de 698 g. Elle est constitué d'acier.

1. Calculer le volume au centimètre cube près de cette boule.

On sait que la masse volumique de l'acier est 8 g/cm^3.
2. Quelle serait la masse de cette boule si elle était pleine?

3. Cette boule en acier n'est pas pleine. Le centre est vide.
Montrer que le volume de vide correspond au volume d'une boule de diamètre 62 mm.

Exercice n° 82 : Déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles

Grandeurs et mesures - La proportionnalité

1. Le périmètre d'un cercle est-il proportionnel à son rayon ?
2. L'aire d'un disque est-elle proportionnelle à son rayon ?
3. Le volume d'une pyramide est-elle proportionnelle à sa hauteur ?
4. Pour un être humain, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ?
5. Voici un tableau de conversion entre les trois unités de mesures usuelles de la température :

Température en degré Celsius	$-273,15°C$	$-40°C$	$-10°C$	$0°C$	$37°C$	$100°C$
Température en degré Fahrenheit	$-459,67°F$	$-40°F$	$14°F$	$32°F$	$98,6°F$	$212°F$
Température en degré Kelvin	$0°K$	$233,15°K$	$263,15°K$	$273,15°K$	$310,15°K$	$373,15°K$

5.a. La température en degré Celsius est-elle proportionnelle à celle en degré Fahrenheit ?
5.b. La température en degré Fahrenheit est-elle proportionnelle à la celle en degré Kelvin ?
5.c. On sait que la fonction qui exprime les degrés Fahrenheit en fonction des degrés Celsius est une fonction affine.
Déterminer cette expression.
5.d. On sait que la fonction qui exprime les degrés Kelvin en fonction des degrés Celsius est une fonction affine.
Déterminer cette expression.

Exercice n° 83 : Calculer une quatrième proportionnelle

Grandeurs et mesures - La proportionnalité

Le cannelé, également écrit canelé, est un petit gâteau bordelais, en forme de cylindre, à pâte molle et tendre, parfumé au rhum et à la vanille, et cuit dans un moule originellement en cuivre, qui lui donne une fine croûte caramélisée.
Voici la recette pour préparer 16 cannelés :
— 50 cL de lait ;
— une demi gousse de vanille ;
— 3 cuillère à soupe de rhum ;
— 100 g de farine ;
— 200 g de sucre ;
— 25 g de beurre ;
— 2 oeufs entiers et 2 jaune d'œufs.

Pour la fête des mères, nous souhaitons préparer 100 cannelés. Il reste dans la réserve, un bouteille de rhum, des gousses de vanille, 1 kg de sucre et 2 kg de farine.
Au supermarché voisin, le litre de lait coûte 1,25 € , la douzaine d'oeufs coûte 3,75 € , la motte de beurre de 250 g coûte 3,22 €, le kilo de farine coûte 1,35 €et le kilo de sucre en poudre coûte 0,95 €.

Quel budget devons-nous prévoir pour réaliser cette recette ?

Exercice n° 84 : Ratio

Grandeurs et mesures - La proportionnalité

1. Une télévision LED au format 16 : 9 a une diagonale de 65″ (65 pouces) soit 163 cm.
Calculer la longueur et la largeur de l'écran de cet télévision.
2. Les longueurs des arêtes d'un pavé droit sont dans un ratio 3 : 6 : 8.
La plus courte de ces longueurs mesure 15 cm, combien mesurent les deux autres ?
3. Pour préparer du béton il faut utiliser du ciment, du sable et du gravier suivant le ratio 1 : 2 : 3.
Je souhaite préparer 12 m^3 de béton. On connaît les masses volumiques suivantes :
— sable : 1 600 kg/m^3 ;
— gravier : 1 500 kg/m^3 ;
— ciment : 900 kg/m^3.
Déterminer la masse de sable, de gravier et de ciment qu'il faut acheter pour produire la quantité de béton demandée.

EXERCICE N° 85 : **Taux d'augmentation et de diminution en pourcentage** — GRANDEURS ET MESURES - LA PROPORTIONNALITÉ

Le Dogecoin a augmenté de 48 % au mois d'avril. Il a ensuite baissé de 37 % au mois de mai.
Il coûtait 0,45 € début avril.
1. Quel était le prix du Dogecoin fin avril ?
2. Quel était son prix fin mai ?
3. Calculer le pourcentage d'augmentation ou de diminution du Dogecoin sur ces deux mois.
4. J'ai acheté 500 € de Dogecoin début avril. Combien de Dogecoin ai-je acheté ? Combien vallait mon investissement fin mai ?

EXERCICE N° 86 : **Agrandissement et réduction de figures** — GRANDEURS ET MESURES - LA PROPORTIONNALITÉ

1.a. Un cylindre de révolution a un diamètre qui mesure 27 cm et une hauteur de 39 cm.
Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
1.b. Une réduction de ce cylindre a un rayon qui mesure 4,5 cm.
Calculer le volume et l'aire latérale de ce cylindre.
2. Un pavé droit mesure 15 cm de long, 12 cm de large et 8 cm de haut.
On augmente sa longueur de 25 % et sa largeur de 20 %. On diminue la hauteur de 15 %.
Quelle est la pourcentage d'augmentation de son volume ?
3. Sur le plan du cadastre, un jardin rectangulaire mesure 7 cm de long sur 5 cm de large. L'échelle de ce plan est 1 : 150. Quelle est la surface réelle de ce jardin ? Exprimer ce résultat en mètre carré puis en are.
4. La Tour Eiffel mesure 324 m pour une masse totale 10 100 t.
Quelle serait la masse d'une réduction parfaite de la Tour Eiffel de 1 m de haut ?

EXERCICE N° 87 : **Vitesse** — GRANDEURS ET MESURES - LES GRANDEURS COMPOSÉES

1. Il y a 112 km entre Toulouse et Cahors. J'ai mis 1 h 12 min pour parcourir cette distance à l'aller.
Ma vitesse moyenne au retour est de 120 km/h.
Calculer la vitesse moyenne à l'aller, en kilomètre heure au dixième près.
Calculer la vitesse moyenne sur l'aller-retour, en kilomètre heure au dixième près.
2. Le 16 août 2009, Usain Bolt a battu le record du monde du 100 m en 9,58 s. Pendant cette course il a atteint la vitesse la plus rapide jamais observée pour un être humain : 44,72 km/h.
Calculer la vitesse moyenne d'Usain Bolt durant cette course.
Quel temps aurait-il réalisé s'il avait réussi à maintenir sa vitesse maximale sur l'ensemble des 100 m ?
3. La vitesse du son dans l'air vaut environ 340 m/s. On observe un éclair frapper un arbre situé à 4 km de distance. Combien de temps met le son du tonerre à atteindre mon lieu d'observation ?

EXERCICE N° 88 : **Débit** — GRANDEURS ET MESURES - LES GRANDEURS COMPOSÉES

1. Un fichier vidéo de haute qualité a une taille de 1,4 Go.
Le débit en ASDL pour télécharger un fichier est d'environ 15 Mb/s.
Le débit sur une ligne en fibre optique est d'environ 1 Gb/s.
Déterminer le temps nécessaire pour télécharger ce fichier sur une ligne ADSL et sur une ligne en fibre optique.

Indication : Conversion entre octect et bit : 1 o = 8 b

2. Je viens d'installer dans mon jardin un piscine cylindrique hors-sol de rayon 2 m et de hauteur 130 cm.
Je souhaite la remplir jusque 20 cm du bord. Le robinet que j'utilise pour cela me permet de remplir une bouteille de 1,25 L en 5 s.
Calculer le temps nécessaire au remplissage de ma piscine. On donnera le résultat à la seconde près.

Dans ma ville un mètre cube d'eau coûte 3,98 €.
Combien va me coûter le remplissage de la piscine ?

Exercice n° 89 : Masse volumique

Grandeurs et mesures - Les grandeurs composées

Au jeux olympiques de Londres en 2012, les médailles d'or, d'argent et de bronze pesaient chacune 400 g.
Elles avaient une forme identique : celle d'un cylindre de 85 mm de diamètre pour une épaisseur de 7 mm.
Sachant que les masses volumiques de l'or, de l'argent et du bronze valent respectivement $19\,000\,\text{kg/m}^3$, $10\,500\,\text{kg/m}^3$ et $9\,200\,\text{kg/m}^3$, déterminer si chacune des médailles étaient bien constituée uniquement du métal annoncé.

Exercice n° 90 : Consommation électrique

Grandeurs et mesures - Les grandeurs composées

Chez Direct Électricité, il n'y a qu'un seul tarif : 0,140 20 €/kWh. M. Galois a acheté un aquarium et quelques poissons.
En consultant la fiche technique, il observe les consommations des différents composants :

— la pompe de l'aquarium : 24 Wh ;

— l'éclairage : 45 Wh ;

— la résistance chauffante : 100 Wh.

La pompe de l'aquarium fonctionne toute la journée.
L'éclairage n'est allumé que 3 h par jour et la résistance ne chauffe que 10 h par jour.
Combien lui coûte cet aquarium en électricité en une année ?

Exercice n° 91 : Expérience aléatoire à une épreuve

Probabilités et statistiques - Probabilités

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

ANTICONSTITUTIONNELLEMENT

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES** ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir un **J** ?

Exercice n° 92 : Expérience aléatoire à deux épreuves

Probabilités et statistiques - Probabilités

Deux urnes contiennent des boules numérotés indiscernables au toucher.
La première urne contient des boules numérotés avec tous les nombres premiers inférieurs à 20.
Chaque boule porte un numéro différent.

La seconde urne contient des boules numérotés avec tous les diviseurs de 16.
Chaque boule porte un numéro différent.

1. Faire la liste des boules contenus dans chacune des urnes.

On choisit de manière aléatoire une boule dans la première urne et une boule dans la seconde.

2. Quelle est la probabilité que les deux numéros choisis soient égaux ?

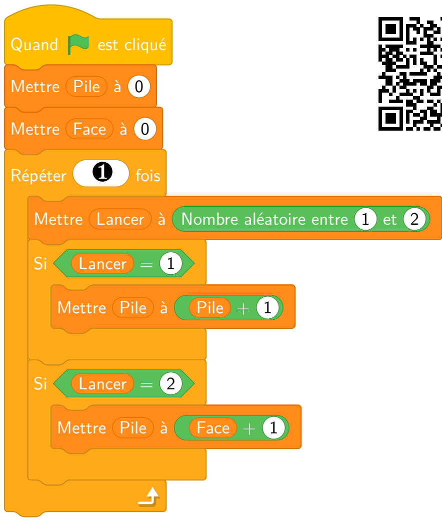
3. Quelle est la probabilité que le numéro d'une boule soit un diviseur de l'autre numéro ?

4. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros soit supérieur à 30 ?

5. Quelle est la probabilité que le produit des deux numéros soit un nombre premier ?

EXERCICE N° 93 : **Approche fréquentiste** **PROBABILITÉS ET STATISTIQUES - PROBABILITÉS**

Le programme suivant permet de simuler mille tirages aléatoires d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.



1. Compléter ce programme en indiquant par quoi remplacer le symbole ❶.
2. Quelles informations sont contenus dans les variables Pile et Face à la fin de ce programme ?
3. Pierre a utilisé quatre fois de suite le programme, il a saisi les résultats dans un tableur.

	A	B	C
1		Nombre de Piles	Nombre de Faces
2	Tentative 1	556	
3	Tentative 2	435	
4	Tentative 3	452	
5	Tentative 4	705	
6	Somme		

3.a. Quelle formule saisir dans la cellule **C2** puis recopier vers la bas pour obtenir le nombre de Faces à chaque tentative.
3.b. Quelle formule saisir dans la cellule **B6** puis recopier vers la droite pour obtenir la somme du nombre de Piles et du nombre de Faces.
3.c. Indiquez en justifiant par le calcul les nombres manquant dans cette feuille de calcul.

4. Dans cette expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce équilibrée, quelle est la probabilité d'obtenir Pile ?

5. Pierre est surpris par le résultat de la quatrième tentive. Qu'en pensez-vous ?

6. Quelles sont les fréquences d'apparition de Pile et de Face sur l'ensemble des quatre tentatives ? Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE N° 94 : **Médiane** **PROBABILITÉS ET STATISTIQUES - STATISTIQUES**

Voici la répartition des salaires annuels en euros des employés dans une entreprise.

	A	B
1		Effectif
2	[0; 10 000 [	20
3	[10 000; 20 000 [	35
4	[20 000; 30 000 [	56
5	[30 000; 40 000 [	74
6	[40 000; 50 000 [	45
7	[50 000; 100 000 [	10
8	Total	

1. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule B8 pour obtenir l'effectif total de cette entreprise ?
2. Calculer l'effectif total de cette entreprise.
3. Est-il vrai que moins de 20 % des employés gagnent plus de 40 000 €par an ?
4. Calculer la moyenne des salaires dans cette entreprise.
5. Déterminer la médiane des salaires dans cette entreprise. Interpréter ce résultat.
6. Voici le montant des salaires annuels des employés gagnant plus de 50 000 €.

56 525 € ; 67 876 € ; 85 670 € ; 52 045 € ; 75 675 € ; 81 567 € ; 73 560 € ; 65 790 € ; 51 056 € ; 89 786 €

6.a. Quelle est la moyenne de ces plus hauts salaires ?
6.b. Quelle est la médiane de ces plus hauts salaires ?

EXERCICE N° 95 : Étendue

Voici les résultats au brevet de mathématiques de deux classes de troisième. Les notes sont sur 100.

Troisième A

- Effectif : 25 ;
- Note la plus basse : 7,5 ;
- Note la plus haute : 98 ;
- Moyenne : 47,5 ;
- Médiane : 54.

Troisième B

	[0;20[	[20;40[	[40;60[	[60;80[	[80;100]
Effectif	4	6	4	8	7

1. Quelle est l'étendue des notes pour la **Troisième A** ?

2. On sait que la note la plus basse en **Troisième B** est 01,5/100 et que l'étendue pour cette classe vaut 95.
Quelle est la meilleure note dans cette classe ?

3. Calculer la moyenne et la médiane des élèves de **Troisième B** ?

4. Quelle est l'étendue des notes obtenues par les **Troisième A** et la **Troisième B** réunis ?

5. On choisit au hasard un élève dans la classe de **Troisième B**.
Quelle est la probabilité pour qu'il ait eu une note supérieure ou égale à 60/100 ?

6. On choisit au hasard un élève dans la classe de **Troisième A**.
Quelle est la probabilité pour qu'il ait eu une note inférieure ou égale à 54/100 ?

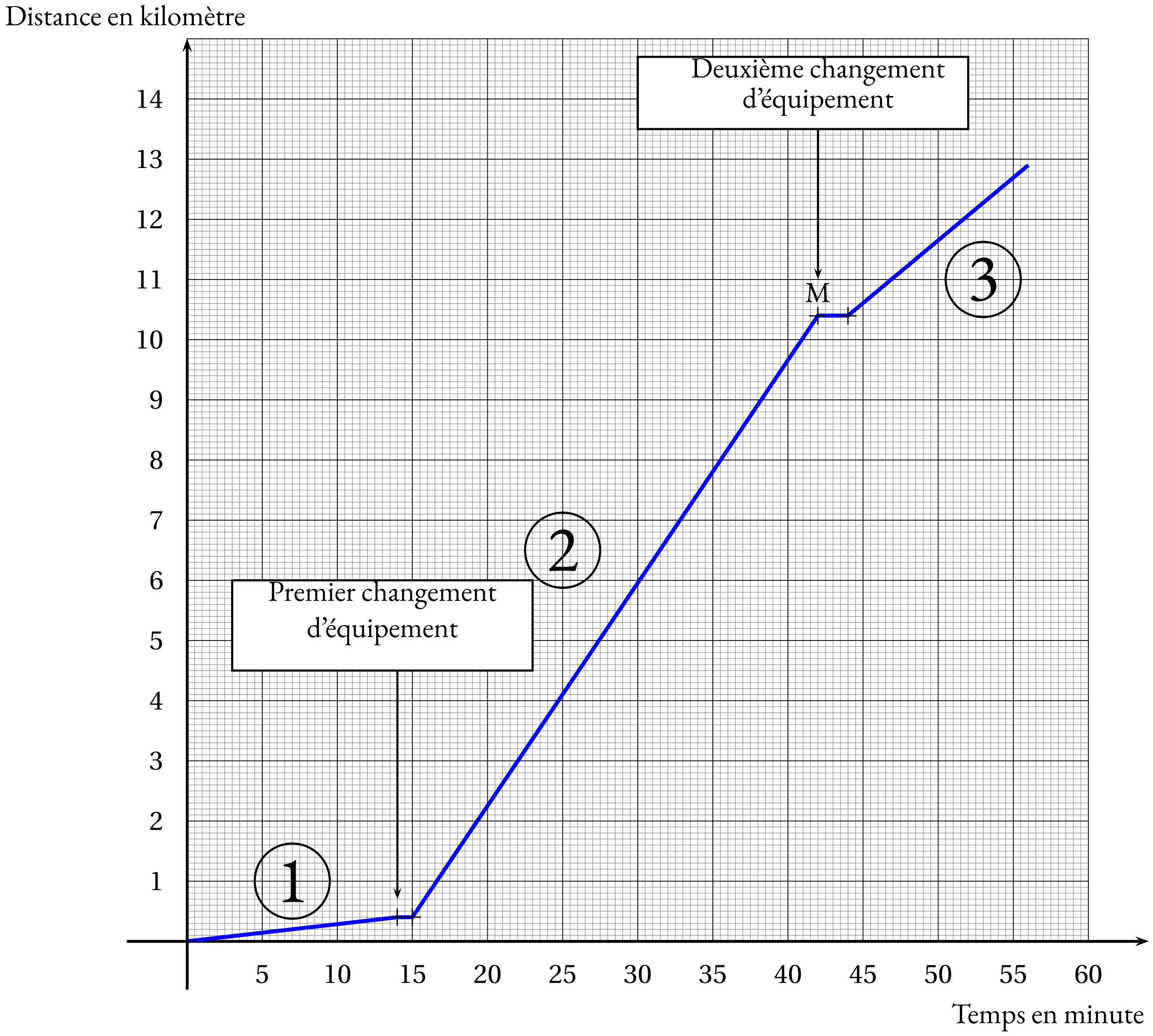
7. Comparer les résultats de ces deux classe.

Exercice n° 96 : **Lecture d'informations graphiques** **Probabilités et statistiques - Statistiques**

Une athlète a réalisé un triathlon d'une longueur totale de 12,9 km.

Les trois épreuves se déroulent dans l'ordre suivant :
- **Épreuve n° 1 :** Natation — Distance 400 m ;
- **Épreuve n° 2 :** Cyclisme ;
- **Épreuve n° 3 :** Course à pied — Distance 2,5 km.

Entre deux épreuves, l'athlète doit effectuer sur place un changement d'équipement.
Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue (exprimée en kilomètre) par l'athlète, en fonction du temps de parcours (exprimé en minute) de l'athlète pendant son triathlon.



Le point M a pour abscisse 42 et pour ordonnée $10,4$.
À l'aide des informations ci-dessus et du graphique avec la précision qu'il permet, répondre aux questions suivantes en justifiant la démarche.

1. Au bout de combien de temps l'athlète s'est-elle arrêtée pour effectuer son premier changement d'équipement ?

2. Quelle est la longueur, exprimée en kilomètre, du parcours de l'épreuve de cyclisme ?

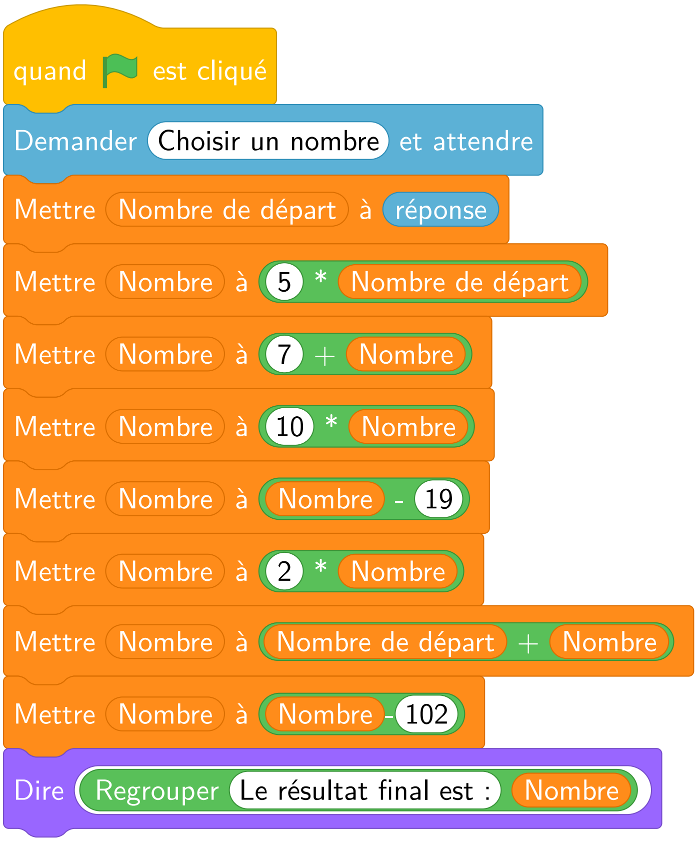
3. En combien de temps l'athlète a-t-elle effectué l'épreuve de course à pied ?

4. Pendant laquelle des trois épreuves, l'athlète a-t-elle été la moins rapide ?

5. On considère que les changements d'équipement entre les épreuves font partie du triathlon.
La vitesse moyenne de l'athlète sur l'ensemble du triathlon est-elle supérieure à 14 km/h ?

Exercice n° 97 : **Programme de calcul** **Algorithmique et programmation - Scratch**

Voici un programme de calcul proposé sous forme de script Scratch :



1. En choisissant le nombre 5 au départ quel résultat va afficher ce programme ?

2. Même question en partant des nombres 13 puis 87.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

4. Démontrez cette conjecture ?

5. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 13 837 à la fin ?

On souhaite représenter 6 bassins rectangulaires à l'aide d'un logiciel de programmation comme sur la **Figure n° 1** ci-dessous :

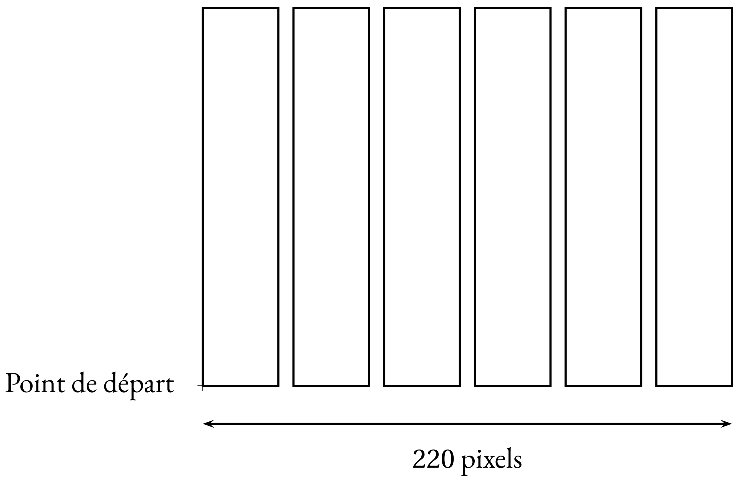
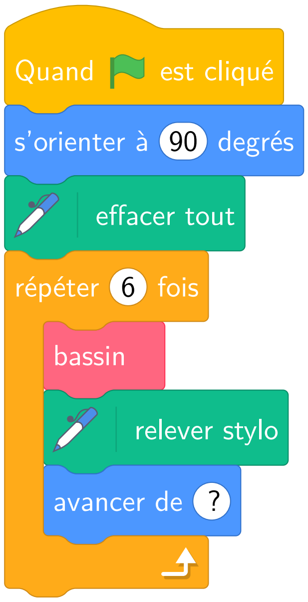


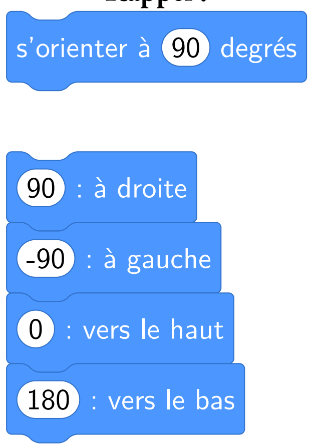
Figure n° 1

1. Compléter, en annexe, le script du bloc « bassin »pour qu'il permette de tracer un bassin rectangulaire de largeur 30 pixels et de longueur 150 pixels.

2. Le script ci-dessous doit permettre d'obtenir la **Figure n° 1**. Il utilise le bloc « bassin »de l'annexe.



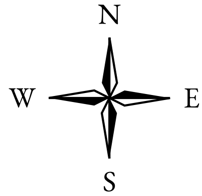
Rappel :



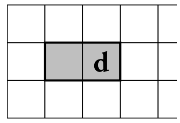
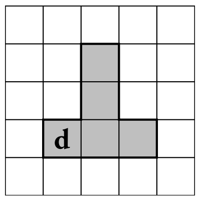
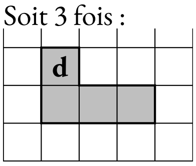
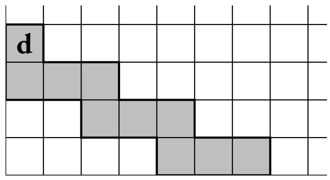
Sachant que la longueur totale de la **Figure n° 1** est de 220 pixels, quelle valeur doit être placée à la dernière ligne dans la consigne « avancer de » ? Justifier la réponse.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Un programme permet à un robot de se déplacer sur les cases d'un quadrillage. Chaque case atteinte est colorée en gris. Au début d'un programme, toutes les cases sont blanches, le robot se positionne sur une case de départ indiquée par un « d » et la colore aussitôt en gris.

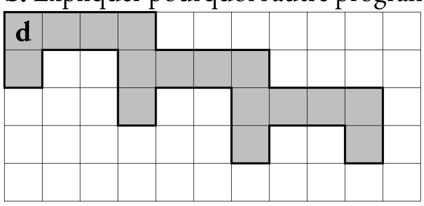


Voici des exemples de programmes et leurs effets :

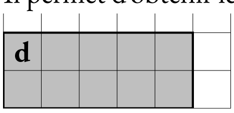
• 1W	Le robot avance de 1 case vers l'ouest.	
• 2E 1W 2N	Le robot avance de 2 cases vers l'est, puis de 1 case vers l'ouest, puis de 2 cases vers le nord.	
• 3 (1S 2E)	Le robot répète 3 fois le déplacement suivant : « avancer de 1 case vers le sud puis de 2 cases vers l'est », Soit 3 fois : 	

1. Voici un programme : **Programme** : 1W 2N 2E 4S 2W
On souhaite dessiner le motif obtenu avec ce programme.
Sur votre copie, réaliser ce motif en utilisant des carreaux, comme dans les exemples précédents. On marquera un « **d** » sur la case de départ.

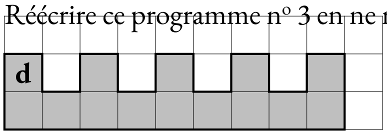
2. Voici deux programmes : **Programme n° 1** : 1S 3(1N 3E 2S) et **Programme n° 2** : 3(1S 1N 3E 1S)
a. Lequel des deux programmes permet d'obtenir le motif ci-contre ?
b. Expliquer pourquoi l'autre programme ne permet pas d'obtenir le motif ci-contre.



3. Voici un autre programme : **Programme n° 3** : 4(1S 1E 1N)
Il permet d'obtenir le résultat suivant :



Réécrire ce programme n° 3 en ne modifiant qu'une seule instruction afin d'obtenir ceci :

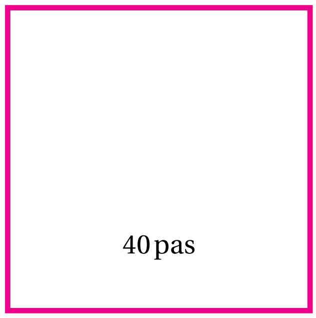


Voici un exemple de code :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 3
[AVANCE 40 DROITE 90]
```

Le langage LOGO utilise une Tortue pour dessiner à l'écran.
Voici quelques éléments de ce langage :

- **AVANCE** n : Fait avancer la Tortue de n pas ;
- **DROITE** n : Fait tourner la Tortue de n degré vers la droite ;
- **GAUCHE** n : Fait tourner la Tortue de n degré vers la gauche ;
- **REPETE** n [liste] : Répete n fois les commandes de la [liste] ;
- **BAISSECRAYON** : Baisse le crayon pour commencer à dessiner ;
- **LEVECRAYON** : Lève le crayon pour arrêter de dessiner ;
- **EFFACEECRAN** : Efface l'écran.

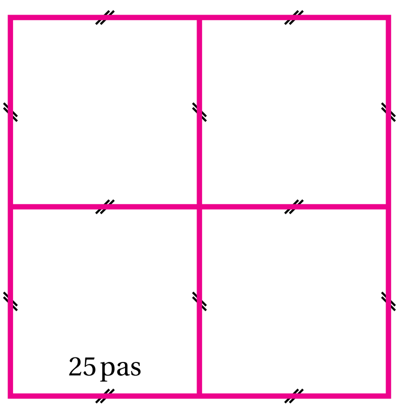


1. Écrire un programme pour que la Tortue dessine un triangle équilatéral de 30 pas de côté.

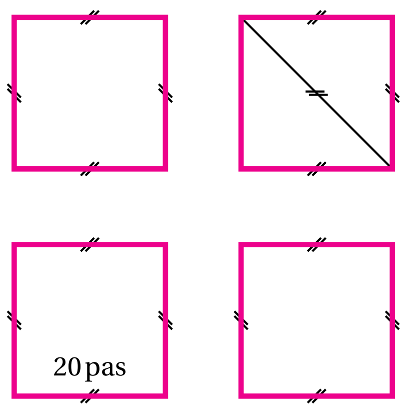
2. En prenant 1 cm pour 10 pas, tracer la figure obtenue avec ce programme :

```
EFFACEECRAN
BAISSECRAYON
REPETE 5 [AVANCE 50 DROITE 108]
```

3. Écrire un programme permettant de tracer chacune des figures suivantes :

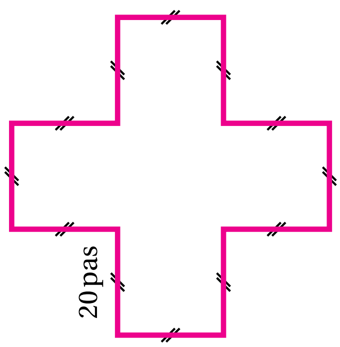


(Fig n° 1)



10 pas

(Fig n° 2)



(Fig n° 3)

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 11 juin 2024 à 12:02

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **100 exercices pour le brevet.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 11 juin 2024 à 12:02.

Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.

Adresse de l'article : `https://pi.ac3j.fr/100-exercices-corriges-pour-preparer-le-brevet-des-colleg`