Chapitre I

Arithmétique

Sommaire

Chiffre affine
Troisième

✧✧

Cryptographie

Multiplier une lettre par un nombre

Nous allons créer une nouvelle opération mathématique, la multiplication entre les lettres de l'alphabet et les nombres entiers. Pour ne pas confondre cette opération étrange avec la multiplication habituelle, nous allons utiliser un nouveau symbole ⊗. Avant d'effectuer cette opération il est nécessaire de numéroter les 26 lettres de l'alphabet de la manière suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour multiplier une lettre par un nombre entier on applique l'algorithme suivant :

— effectuer le produit du numéro de la lettre et du nombre entier ;

— calculer le reste de la division de ce produit par 26 ;

— le résultat est la lettre qui correspond au numéro obtenu.

☞ Effectuer les multiplications suivantes :

$C \otimes 1 =$ $\quad$ $D \otimes 9 =$ $\quad$ $T \otimes 26 =$ $\quad$ $F \otimes 4 =$ $\quad$ $F \otimes 56 =$

$A \otimes 2 =$ $\quad$ $M \otimes 13 =$ $\quad$ $M \otimes 0 =$ $\quad$ $F \otimes 30 =$ $\quad$ $F \otimes 82 =$

Le chiffre linéaire

Cette méthode de chiffrement consiste à multiplier les lettres du texte original par un nombre entier secret : la clé de cryptage.

☞ En observant les multiplications précédentes, indiquer le nombre de clés de cryptage possibles.

☞ Compléter le tableau suivant avec pour clé de cryptage le nombre 3 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Reste																										
Code																										

☞ Compléter le tableau suivant avec pour clé de cryptage le nombre 4 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Reste																										
Code																										

☞ Que remarquez-vous ?

Voici les tableaux de cryptage pour plusieurs clés différentes :

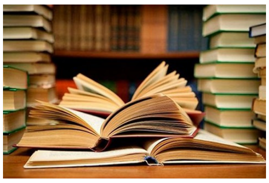
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
⊗3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4	7	10	13	16	19	22	25	2	5	8	11	14	17	20	23
⊗4	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22
⊗5	0	5	10	15	20	25	4	9	14	19	24	3	8	13	18	23	2	7	12	17	22	1	6	11	16	21
⊗9	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8	17
⊗13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13
⊗21	0	21	16	11	6	1	22	17	12	7	2	23	18	13	8	3	24	19	14	9	4	25	20	15	10	5
⊗24	0	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2

☞ Que remarquez-vous en observant les clés de cryptage 4, 13 et 24 ?

☞ Que remarquez-vous en observant les clés de cryptage 4, 13 et 24 ?

Cryptographie

Chiffre affine — Correction



Culture

Le jeu de Juniper-Green

Troisième

✧✧

Le jeu de Juniper-Green a été inventé par Richard Porteus en 1996 pour aider des enfants de l'école primaire à manipuler les tables de multiplication. Ce jeu porte le nom de l'école. Il a été popularisé par le mathématicien Ian Stewart dans un article du magazine Pour la Science au mois de juillet 1997. L'activité ci-dessous est librement inspiré de cet article.

Diviseurs et multiples d'un nombre entier

Multiple : un multiple b d'un nombre entier a est un nombre entier appartenant à la table de multiplication de a.
Diviseur : un diviseur b d'un nombre entier a est un nombre entier pour lequel a est un multiple de b.

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 48 puis de 60.

18 :

48 :

60 :

2. Faire la liste des multiples de 13 compris entre 256 et 312.

Les multiples sont :

3. Juniper-Green en mode « bataille »

Règle du jeu :

- Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier compris entre 1 et 100 ;
- Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 100 vérifiant les deux conditions suivantes :
  - Ce nombre n'a pas encore été choisi dans cette partie ;
  - Ce nombre est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.
- Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

Faire quelques parties avec votre voisin en notant à chaque fois en ligne les nombres entiers successifs choisis.
Quelle est la stratégie gagnante à ce jeu ?

4. On ajoute une règle supplémentaire : *« le premier nombre choisi doit obligatoirement être un nombre pair. »*
Refaire quelques parties avec votre voisin en utilisant cette règle.

5. Juniper-Green en mode « collaboratif »

Vous n'êtes plus obligé de commencer par un nombre pair. Dans ce mode, votre objectif, à deux, est d'obtenir la partie de Juniper-Green la plus longue possible.
5.a. Déterminer la plus longue partie de Juniper-Green en vous limitant à des nombres compris entre 1 et 40.

5.b. Déterminer la plus longue partie de Juniper-Green en élargissant votre recherche à des nombres compris entre 1 et 100.

5.c. Serez-vous assez persévérant pour déterminer la suite la plus longue avec des nombres compris entre 1 et 200 ?

Le jeu de Juniper Green

IAN STEWART

Cherchez la stratégie gagnante au jeu des diviseurs et des multiples.

Il y a un an, mon ami Ian Porteous, de l'Université de Liverpool, m'a fait découvrir un jeu amusant que son fils Richard avait inventé pour enseigner la division et la multiplication. Ce jeu est aujourd'hui nommé Juniper Green, du nom de l'école où Richard enseigne. On utilise 100 cartes, numérotées de 1 à 100, que l'on place dans l'ordre des numéros sur une table, numéros visibles ; pour que les deux joueurs puissent retrouver rapidement la carte qu'ils veulent jouer, on peut disposer les cartes en dix rangées de dix cartes, par exemple. Les règles sont simples :

1. Chaque joueur, quand vient son tour, prend une des cartes. Les cartes enlevées ne sont pas remises sur la table ni utilisées ensuite.

2. À l'exception du coup d'ouverture, chaque joueur doit choisir une carte dont le numéro est un diviseur ou un multiple du nombre choisi par l'adversaire au coup précédent.

3. Un joueur perd quand il ne peut plus prendre une carte qui soit un multiple ou un diviseur de la précédente carte retirée.

Avec ces trois règles seulement, le premier joueur pourrait toujours gagner, en tirant une carte qui porte un nombre premier supérieur à 50. Comme un nombre premier n'a que 1 et lui-même pour diviseur, l'adversaire devrait choisir la carte portant le nombre 1, mais, alors, si le premier joueur tire un autre nombre premier supérieur à 50, le second joueur perd, car il ne peut plus jouer ni 1 ni un multiple de ce second nombre premier. Pour éviter ce cas sans intérêt, on ajoute la règle :

4. Le coup d'ouverture doit être un nombre pair.

Même ainsi les grands nombres premiers conservent une importance stratégique. Si un joueur tire la carte 1, alors son adversaire peut gagner. Imaginons Bob jouant contre Alice : si Bob tire le 1, alors Alice choisit un grand nombre premier, tel que 97 (ce nombre est nécessairement resté sur la table, parce qu'il ne peut être choisi qu'après le choix de 1, car il est impair), et Bob perd la partie. Autrement dit, un joueur gagne s'il parvient à faire tirer la carte 1 à son adversaire. L'encadré inférieur montre un exemple de partie entre deux joueurs qui manquaient de sens tactique.

Mais trêve de discussion : pourquoi ne joueriez-vous pas d'abord quelques parties avec des amis, afin de découvrir par vous-même les arcanes de ce jeu ? Je m'en voudrais de vous gâcher le plaisir en vous dévoilant les stratégies gagnantes, que je garde pour une «Réactions» d'un prochain numéro, et je vous propose d'examiner seulement le jeu de Juniper Green simplifié, avec 40 cartes numérotées de 1 à 40. Ainsi vous pourrez vous-même découvrir quelques principes utiles pour la recherche de ces stratégies gagnantes, au jeu à 100 cartes. Une remarque, encore : de jeunes enfants peuvent utiliser un jeu à 20 cartes seulement.

Observons maintenant que certaines ouvertures sont très mauvaises. Par exemple, dans le jeu à 40 cartes :

COUPS	ALICE	BOB
1	38	
2		19
3	1	
4		37
5	PERD	

Le résultat aurait été identique si Alice avait commencé en tirant la carte 34, mais d'autres nombres sont aussi à éviter. Par exemple, si Alice tire inconsidérément le 5, alors Bob peut alors en profiter :

COUPS	ALICE	BOB
X	5	
X + 1		25
X + 2	1	

COUPS	ALICE	BOB	COMMENTAIRES
1	48		Nombre pair, comme l'exige la règle 4
2		96	Double du choix d'Alice
3	32		Un tiers du choix de Bob
4		64	Bob est forcé de choisir une puissance de 2
5	16		... et Alice de même
6		80	Bob multiplie par 5
7	10		Alice divise par 8
8		70	Multiplication par 7
9	35		Division par 2
10		5	Seuls choix : 5 ; 7 (ou 1, qui est perdant)
11	25		
12		75	Seuls 50 et 75 sont possibles
13	3		
14		81	
15	9		Seuls 27 et 9 sont possibles
16		27	Mauvais coup!
17	54		Imposé, car 1 est perdant
18		2	Imposé
19	62		Variante d'inspiration tactique
20		31	Imposé
21	93		Seul choix, mais excellent
22		1	Imposé... et perdant, car...
23	97		Tactique des grands nombres premiers

Nous l'avons vu, ce dernier choix fait perdre la partie à Alice (notez que 25 est nécessairement disponible, puisque, impair, il ne peut être choisi qu'après 1 ou 5).

Alice peut-elle, plutôt, obliger Bob à tirer le 5 à sa place ? Si Bob tire le 7, elle peut jouer 35 et contraindre Bob à tirer le 1 ou le 5, ce qui le fait perdre dans les deux cas. Peut-elle obliger Bob à tirer le 7 ? Oui : si Bob a joué le 3, elle peut jouer le 21 qui impose ensuite un 7. Et comment faire jouer le 3 à Bob ? S'il a joué le 13, alors Alice joue le 39, qui pousse Bob à jouer le 3. De nombre en nombre, Alice peut ainsi prévoir le jeu de Bob et le mener à la défaite.

Avec les nombres impairs, le problème est simple, mais la règle 4 impose de commencer avec des nombres pairs. La carte 2 joue vraisemblablement un rôle charnière : si Bob joue 2, Alice peut prendre le 26 et piéger Bob dans la séquence 13. Nous voici au cœur du problème : comment Alice forcera-t-elle Bob à jouer 2 ?

Si Alice commence en tirant le 22, alors Bob joue soit 2, et il est alors piégé, comme nous l'avons vu, soit 11. Dans ce dernier cas, Alice, évitant le 1 perdant, jouera 33. Le 11 ayant été joué, Bob devra prendre le 3 et Alice gagnera. Le tableau ci-dessous montre la stratégie d'Alice : chaque groupe de deux colonnes montre un des deux choix de Bob (nous supposons que chaque joueur sait qu'il faut éviter le 1).

COUPS	ALICE	BOB	ALICE	BOB
1	22			
2		11		2
3	33		26	
4		3		13
5	21		39	
6		7		3
7	35		21	
8		5		7
9	25		35	
10		PERD		5
11			25	
12				PERD

Il existe une autre ouverture avec laquelle Alice force la victoire : le 26. Les deux possibilités sont alors les suivantes :

COUPS	ALICE	BOB	ALICE	BOB
1	26			
2		13		2
3	39		22	
4		3		11
5	21		33	
6		7		3
7	35		21	
8		5		7
9	25		35	
10		PERD		5
11			25	
12				PERD

Réactions

Beaucoup de lettres que j'ai reçues à propos de *L'erreur du Grand Inquisiteur* (*Pour la Science*, décembre 1996) montrent qu'on se trompe facilement quand on manie les probabilités conditionnelles. Aussi vais-je tenter d'éclaircir les points à la source des principales difficultés. Certains lecteurs sont arrêtés dès l'exemple initial. Nous savions que la famille Dupont avait deux enfants dont un était une fille. Quelle est la probabilité que les deux soient des filles ? On supposait les sexes équiprobables, ce qui n'est pas tout à fait exact dans la réalité ; en outre, lorsque j'indiquais «l'un d'eux est une fille», je ne prétendais pas qu'un seul est une fille, mais que l'un *au moins* est une fille.

J'ai semé le trouble en ordonnant les enfants d'après leurs naissances. Il y a quatre types de familles à deux enfants, tous équiprobables : GG, GF, FG, FF. Si l'un des enfants est une fille, trois possibilités demeurent : GF, FG et FF, et un seul cas se présente, où la famille compte deux filles. De sorte que la probabilité que les Dupont aient deux filles, sachant qu'ils en ont au moins une, est égale 1/3. Si nous avions su que «l'aîné est une fille», alors la probabilité conditionnelle d'avoir deux filles aurait été 1/2.

Certains lecteurs m'ont écrit que je ne devais pas distinguer les cas GF et FG. Pourquoi pas lancer deux pièces pour représenter le phénomènes ? Les pièces représentent les sexes avec les bonnes probabilités (1/2 chacune). Si, comme moi, vous allez au moindre effort, vous simulerez l'expérience à l'aide d'un ordinateur muni d'un générateur de nombres aléatoires. Pour un million de lancers, voici ce que j'ai obtenu :

Deux «face» : 250 025
Deux «pile» : 250 719
Autres résultats : 499 256

Essayez vous-même. Si GF et FG étaient identiques, le dernier nombre devrait être proche de 333 333.

Un autre raisonnement proposé était le suivant : que nous sachions ou non qu'un enfant était F, l'autre est F ou G avec la même probabilité. Il est instructif de voir en quoi ce raisonnement est faux. Lorsque les deux enfants sont des filles, il n'y a pas d'«autre fille», à moins que je spécifie à laquelle des filles je suis en train de penser (par exemple, la plus âgée). Cette spécification détruit la symétrie supposée entre les filles et les garçons, et modifie les probabilités conditionnelles. En fait, la proposition «le plus âgé des enfants est une fille» porte plus d'information que la proposition «un enfant au moins est une fille» (la première implique la seconde, mais l'inverse n'est pas vrai). Ce ne doit pas être une surprise que les probabilités conditionnelles associées soient différentes.

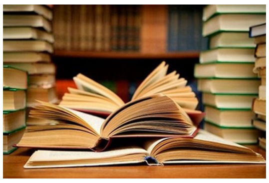
Cette fois, les nombres premiers 11 et 13 sont la clef du succès. Si l'ouverture est le double d'un tel nombre (22 ou 26), Bob est conduit à tirer 2 – qui mène Alice à la victoire – ou le nombre premier. Alors Alice répond par son triple, ce qui force Bob à jouer 3 – et Alice gagne encore. Ainsi Alice gagne parce que, à part le double du nombre premier, il y a exactement un autre multiple inférieur à 40, à savoir 33 ou 39. Ces nombres premiers «centraux», compris entre le quart et le tiers du nombre de cartes, permettent à Alice de gagner. D'autres ouvertures que 22 ou 26 mènent-elles à la victoire ? Je vous laisse y réfléchir, et aussi chercher la stratégie gagnante pour le jeu Juniper Green à 100 cartes, voire à 1 000 cartes. Le premier joueur a-t-il toujours une stratégie gagnante ?

Envisageons finalement le problème dans sa généralité. Considérons le jeu de Juniper Green à n cartes, où n est un nombre entier quelconque. Les parties nulles étant exclues, la théorie des jeux prévoit que soit Alice – qui joue la première –, soit Bob, a une stratégie gagnante, mais pas les deux. Un nombre n est «primaire» si c'est Alice qui a une stratégie gagnante, et «secondaire» si c'est Bob.

Pour de très petites valeurs de n, quelques rapides calculs montrent que 1, 3, 8 et 9 sont primaires, tandis que 2, 4, 5, 6 et 7 sont secondaires. 100 est-il un nombre primaire ou secondaire ? Et, plus généralement, quels sont les nombres n primaires et quels sont les nombres n secondaires ?

Ian STEWART est professeur de mathématiques à l'Université de Warwick.

1



Culture

Le jeu de Juniper-Green — Correction

✧✧

Penser à écrire une activité sur les suites alicotes

La leçon

Arithmétique

I — Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 La division euclidienne

Définition 1.1 : La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geqslant b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :

— $a = b \times q + r$

— $0 \leqslant r < b$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la **division euclidienne** du **dividende** a par le **diviseur** b.

Remarque :

Le diviseur ne peut pas être égal à 0![2]

Vocabulaire :

L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle **l'égalité euclidienne** .

Exemples :

$2019 = 31 \times 65 + 4$

2019 est le dividende, 31 le diviseur,

65 le quotient et 4 le reste. On constate que $4 < 65$.

Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième !

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 31 \\ \hline 159 & 65 \\ 4 & \end{array}$$

$2019 = 3 \times 673$

2 Diviseurs et multiples

Définition 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que

— a est un **multiple** de b,

— b est un **diviseur** de a,

— a est **divisible** par b

Exemple :

3 est un diviseur de 2019.

673 est un diviseur de 2019.

2019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.

2019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

Propriété 1.1 : Démontrée à l'oral et en exercice

Un nombre entier est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8;
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4;
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5;
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Remarque :
On peut mélanger ces critères :

- un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2;
- un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

Démonstration :

Divisibilité par 2 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Sur un exemple générique, prenons $a = 216$.
$a = 210 + 6$, $a = 21 \times 10 + 6$ donc $a = 10 \times 21 + 6$ et $a = 2 \times 5 \times 21 + 2 \times 3$.
On peut factoriser 2, $a = 2(5 \times 21 + 3)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 2.

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 2d$ car c vaut 0, 2, 4, 6 ou 8.
Ainsi $a = 10b + 2d$ on peut factoriser 2 pour obtenir $a = 2(5b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 2.

Divisibilité par 3 :

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,712$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999+1)+7(99+1)+1(9+1)+2$ donc $a = 2\times999+2+7\times99+7+1\times9+1+2$ ou encore $a = 2\times999+7\times99+1\times9+2+7+1+2$
Comme $999 = 3 \times 333$, $99 = 3 \times 33$ et $9 = 3 \times 3$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 3, en effet, $2+7+1+2 = 3 \times 4$
$a = 2 \times 3 \times 333 + 7 \times 3 \times 33 + 1 \times 3 \times 3 + 3 \times 4$.
On peut factoriser 3, $a = 3(2 \times 333 + 7 \times 33 + 1 \times 3 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 3.

Divisibilité par 4 :

a un nombre dont la somme des chiffres de dizaines et des unités forment un multiple de 4.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,020$.
$a = 20 \times 100 + 20$. Comme $100 = 25 \times 4$, $a = 20 \times 4 \times 25 + 4 \times 5$.
On peut factoriser 4 et $a = 4(20 \times 25 + 5)$.
Cela prouve que a est un multiple de 4.

Dans le cas général, si $a < 100$ la propriété est évidente.
Sinon $a = b \times 100 + c$ où b est un entier et c un multiple de 4 c'est-à-dire que $c = 4d$ où d est un entier.
$a = b \times 100 + 4d$ et $a = b \times 4 \times 25 + 4d$.
On peut factoriser 4 : $a = 4(b \times 25 + d)$.
Ce qui prouve que a est un multiple de 4.

Divisibilité par 5 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Sur un exemple générique, prenons $a = 8\,765$.
$a = 8760 + 5$, $a = 876 \times 10 + 5$ donc $a = 2 \times 5 \times 876 + 5 \times 1$.
On factorise 5, $a = 5(2 \times 876 + 1)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 5

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 5d$ car c vaut 0 ou 5.
Ainsi $a = 10b + 5d$ on peut factoriser 5 pour obtenir $a = 5(2b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 5.

Divisibilité par 9 :

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2718$.
$a = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999+1)+7(99+1)+1(9+1)+8$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 8$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 8$
Comme $999 = 9 \times 111$, $99 = 9 \times 11$ et $9 = 9 \times 1$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 9, en effet, $2 + 7 + 1 + 8 = 9 \times 2$
$a = 2 \times 9 \times 111 + 7 \times 9 \times 11 + 1 \times 9 + 9 \times 2$.
On peut factoriser 9, $a = 9(2 \times 111 + 7 \times 11 + 1 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 9.

CQFD

II — Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

1 Les nombres premiers

Définition 1.3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède **exactement** deux diviseurs.

Propriété 1.2 :

Si nombre entier est premier alors il est seulement divisible par 1 et lui-même.

Démonstration :

a un nombre entier.
$a = 1 \times a$ donc a est divisible par 1 et a est divisible par a.
1 et a sont deux diviseurs de a.
Si a est un nombre premier alors il possède exactement deux diviseurs : ce sont forcément 1 et a.

CQFD

---

1 n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même !

Exemples :
Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 : [3]
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

2 Décomposition en facteurs premiers

Théorème 1.1 : Théorème fondamental de l'arithmétique (Admis)

Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Ce produit est unique à l'ordre des facteurs près.[4]

Démonstration : *Hors programme*

Nous allons montrer ce résultat par récurrence.
On peut considérer que 1 est égal au produit d'une famille vide de nombre premier.
Pour nous convaincre, on peut aussi vérifier que $2 = 2$, produit d'un seul nombre premier, que $3 = 3$ ou encore que $4 = 2 \times 2$.

Supposons que tout nombre entier inférieur strictement à n, où $n > 1$, est égal à une produit unique, à l'ordre près, de facteurs premiers.
Nous voulons montrer que n peut lui aussi se décomposer en produit de facteurs premiers.

Étudions maintenant le nombre entier $p > 1$, le plus petit qui divise n.
Si $p = n$, cela signifie que n est premier et dans ce cas n est un produit de nombre premier constitué d'un seul terme.
Sinon, p est un nombre premier puisqu'il est le plus petit divisant n. En effet, dans le cas contraire, p serait composé et le plus petit nombre premier de sa décomposition diviserait aussi n.

On peut alors écrire $n = p \times \dfrac{n}{p}$.

Comme $\dfrac{n}{p} < n$, $\dfrac{n}{p}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un produit de facteurs premiers.
Et on a vu que p est premier, donc $n \times \dfrac{n}{p}$ est une décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Finalement, par récurrence, on vient de montrer que tous les nombres entiers peuvent se décomposer en produit de facteurs premiers.

Vérifions l'unicité.
Supposons que n) puisse s'écrire de deux manières différentes sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Prenons p un des nombres premiers de la première décomposition, ce nombre p est un diviseur de la seconde décomposition. Comme les nombres de la seconde décomposition sont tous premiers, il divise l'un d'entre eux. Cela signifie que p est un des termes de la seconde décomposition.
En recommençant avec chacun des termes de la première décomposition, on montre ainsi que les deux décompositions sont strictement identiques.

CQFD

Exemples :
$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Méthode 1.1 : Comment décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
Pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, on divise ce nombre par les nombres premiers dans l'ordre croissant et on recommence avec le quotient jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.
On divise donc par 2, 3, 5, 7, 11, 13...
Les critères de divisibilité sont très utiles dans cette situation.

Décomposons le nombre 3 780

$3\,780 = 2 \times 1\,890$
$1\,890 = 2 \times 945$
$945 = 3 \times 315$
$315 = 3 \times 105$
$105 = 3 \times 35$
$35 = 5 \times 7$
Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

On peut aussi présenter les calculs ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

III — Applications

IV — Fractions irréductibles

Définition 1.4 : Fraction irréductible

a et b deux nombres entiers et $b \neq 0$

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** si 1 est le seul diviseur commun de a et b.

Une fraction irréductible est donc une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

Exemple :

$\dfrac{75}{64}$ est irréductible car 75 est divisible par 1, 3, 5, 15 ,25 et 75 et 64 est divisible par 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

$\dfrac{76}{64}$ n'est pas irréductible car 76 et 64 sont divisibles par 2.

D'ailleurs $\dfrac{76}{64} = \dfrac{2 \times 38}{2 \times 32} = \dfrac{38}{32} = \dfrac{2 \times 19}{2 \times 16} = \dfrac{19}{16}$

La fraction $\dfrac{19}{16}$ est irréductible.

Méthode 1 . 2 : Simplifier une fraction en une fraction irréductible

Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez grands, il peut être utile de décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{990}{1\,260} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$$

V — Recherche des diviseurs d'un nombre

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier permet d'obtenir la liste de ses diviseurs :

Méthode 1 . 3 : Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre entier on utilise sa décomposition en produit de facteurs premiers. Il faut ensuite effectuer toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On obtient les diviseurs de 630 en effectuant les combinaisons de produits de ses facteurs premiers. Voici ses diviseurs :

Aucun facteur premier : 1

Un facteur premier : 2, 3, 5, 7 ;

Deux facteurs premiers : $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$

Trois facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$

Quatre facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

Cinq facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

On vient de trouver 21 diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 90, 105, 126, 315, 630

Méthode 1.4 : Déterminer les diviseurs communs à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et faire ensuite toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Les facteurs premiers communs sont : 2, 3, 3 et 5

Les combinaisons possibles sont : 2, 3, 5, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Il y a donc 11 diviseurs communs : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 90.

90 est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

Méthode 1.5 : Déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et déterminer le plus grand diviseur.

On a par exemple : $1080 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ et $1440 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres s'obtient en observant les facteurs premiers de ces décompositions. Il faut repérer chaque nombre premier et se demander combien de fois il apparaît en commun dans chacun des nombres.

Dans notre cas, le nombre 2 apparaît trois fois dans 1080 et quatre fois dans 1440. Il doit être présent trois fois dans le plus grand diviseur commun.
Le nombre 3 apparaît trois fois dans 1080 et deux fois dans 1440. Il doit être présent deux fois dans le plus grand diviseur commun.
Le nombre 35 apparaît un fois dans chacun des nombres.

Ainsi le plus grand diviseur commun est $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

On peut ensuite remarquer que $\dfrac{1080}{1440} = \dfrac{360 \times 3}{360 \times 4} = \dfrac{3}{4}$ qui est irréductible !

Questions du jours

Question du jour n° 1 : Division euclidienne

Trouver tous les nombres entiers compris entre 2 019 et 2 089 vérifiant les critères suivants :

- le reste de la division de ces nombres par 2 est 1 ;
- le reste de la division de ces nombres par 3 est 0 ;
- le reste de la division de ces nombres par 5 est 3.

Question du jour n° 2 : Division euclidienne — Épisode 2

Trouver tous les nombres entiers compris entre 1 789 et 2 250 vérifiant les critères suivants :

- ces nombres sont des multiples de 2 ;
- ces nombres sont des multiples de 3 ;
- ces nombres sont des multiples de 5 ;
- ces nombres sont des multiples de 7.

Question du jour n° 3 : Les années bissextiles

En 2018 le 14 mars (jour de π) était un mercredi. En 2019 c'était un jeudi. En 2020 ce sera un samedi.
Quel jour de la semaine était le 14 mars 2000 ?

Question du jour n° 4 : Les jours fériés

En 2019 le 1ermai, le 8 mai, Noël et le jour de l'an qui suit sont des mercredis. On peut observer que le 1ermai est le 121^{e}jour de l'année, le 8 mai est le 128 ^{e}et Noël le 359^{e}. De la même manière le 8 mars (67^{e}jour), journée de la femme, le 21 juin (172^{e}jour), fête de la musique et le 1ernovembre (305^{e}jour), la Toussaint sont des vendredis.
Comment expliquer ces observations ?

Question du jour n° 5 : Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 528 et 3 024.
Simplifier la fraction $\dfrac{3\,528}{3\,024}$

Question du jour n° 6 : Décomposition en produit de facteurs premiers – Épisode 2

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 7 875 et 7 425.
Simplifier la fraction $\dfrac{7\,425}{7\,875}$

Question du jour n° 7 : Les bus

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 42 min. Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 30 min. Le bus n° 67 met 35 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt ?

Question du jour n° 8 : Les bus — Épisode 2

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 60 min. Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 45 min. Le bus n° 67 met 54 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt ?

Correction du jour n° 1 : Division euclidienne

Comme le reste de la division par 2 est 1 : ce sont des nombres impairs.
Comme le reste de la division par 3 est 0 : ce sont des multiples de 3.
Les nombres divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5. Si le reste est 3, ils se terminent par 3 ou 8. Mais ils sont impairs.
Ce sont des nombres dont le chiffre des unités est 3 et des multiples de 3.
$2\,023$, $2\,033$, $2\,053$, $2\,063$ et $2\,083$ ne sont pas des multiples de 3.
Il s'agit de $2\,043$ et $2\,073$.

Correction du jour n° 2 : Division euclidienne — Épisode 2

Ce nombre est un multiple de 2, 3, 5 et 7 donc de $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$2\,100$ est un multiple de 210. $2\,310$ aussi mais trop grand. $1\,890$ est bon aussi mais pas $1\,680$ trop petit.

Correction du jour n° 3 : Les années bissextiles

Mardi 14 mars 2000 !
Il y a 365 jours dans une année ordinaire et 366 dans une année bissextile.
$365 = 7 \times 52 + 1$ et $366 = 7 \times 52 + 2$.
Les années bissextiles ont lieu les années multiples de 4.
Partant de 2018, 18 années nous séparent de 2000. Il y a donc 18 jours de décalage. 2016, 2012, 2008 et 2004 étaient bissextiles. Il faut ajouter 4 jours.
22 jours à retirer. $22 = 3 \times 7 + 1$ soit 3 semaines entières moins un jour : mardi

---

Correction du jour n° 4 : Les jours fériés

À rédiger !

Correction du jour n° 5 : Les bus

On peut facilement trouver les multiples communs en faisant la liste :
$42; 84; 126; 168; 210; 252; \dots$
$30; 60; 90; 120; 150; 180; 210; \dots$
$35; 70; 105; 140; 175; 210; \dots$
Ou avec une démarche experte :
Comme $42 = 2 \times 3 \times 7$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $35 = 5 \times 7$.
$\text{PPCM}(42, 30) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$\text{PPCM}(42, 35) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$\text{PPCM}(30, 35) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
Ils se retrouvent toutes les 210 min

Correction du jour n° 6 : Les bus — Épisode 2

En faisant la liste :
$60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; 480; 540; \dots$
$45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; 360; 405; 450; 495; 540; \dots$
$54; 108; 162; 216; 270; 324; 378; 432; 486; 540; \dots$
Penser à parler de la touche $\boxed{\text{Rép}}$ de la calculatrice !
Une méthode plus experte :
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, $45 = 3 \times 3 \times 5$ et $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$\text{PPCM}(60, 45) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$
$\text{PPCM}(60, 54) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 540$
$\text{PPCM}(45, 54) = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 270$

Exercices

Arithmétique

Troisième

Exercice n° 1.1 : Les nombres parfaits

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants :
6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre.

On dit que les nombres 6 et 28 sont parfaits.

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.
3.b En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.c Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 50 nombres parfaits (Janvier 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

Exercice n° 1.2 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.

2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations. Ces couples de nombres sont assez nombreux. En voici quelques-uns :
220 et 284 — 1 184 et 1 210 – 2 620 et 2 924 – 5 020 et 5 564 – 6 232 et 6 368

Exercice n° 1.3 : Les nombres de Mersenne

1. Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $M_3 = 2^3 - 1$ donc $M_3 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers. Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ^{e}siècle, affirme que : « Si M_n est premier alors n est premier. »
Constatez la véracité de ce théorème en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

Exercice n° 1.4 : Les nombres de Fermat

1. Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $F_0 = 2^{2^0} + 1$, $F_0 = 2^1 + 1 = 3$.
Calculer les nombres de Fermat : F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2. Vérifier à la calculatrice que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

3. Effectuer $641 \times 6\,700\,417$. Que pouvez-vous en déduire pour F_5 ?

En 1670, Pierre de Fermat fait la conjecture que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ *sont premiers pour tout entier* n *positif. Cela fait partie des 47 conjectures publiées par son fils après la mort de Fermat. En 1732, Leonhard Euler montre que* F_5 *est divisible par* 641*. Aujourd'hui encore on ne connaît que* 5 *nombres de Fermat premiers. D'après Boklan et Conway en 2016, la probabilité qu'un autre nombre de Fermat soit premier est inférieure à une chance sur un milliard. C'est la seule conjecture erronée de Fermat.*

Exercice n° 1.5 : Quelques conjectures

Voici quelques conjectures en rapport avec les nombres entiers.
Pour chacune d'entre elle, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse en proposant soit un contre-exemple, soit une démonstration.

Affirmation n° 1 : La somme de deux nombres pairs est un nombre pair ;

Affirmation n° 2 : La somme de deux nombres impairs est un nombre impair ;

Affirmation n° 3 : Si un nombre est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;

Affirmation n° 4 : Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6 ;

Affirmation n° 5 : Si un nombre est divisible par 3 et 9 alors il est divisible par 27 ;

Affirmation n° 6 : Le carré d'un nombre pair est un nombre pair ;

Affirmation n° 7 : Le carré d'un nombre impair est un nombre pair ;

Affirmation n° 8 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est un nombre pair.

✿ Exercices à rédiger à la maison ✿

Exercice n° 1 : Les nombres parfaits

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants : 6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que remarquez-vous pour 6 et 28 ?

On dit que les nombres 6 et 28 sont parfaits.

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers. En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.b Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 51 nombres parfaits (Décembre 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

Exercice n° 2 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.

2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations. Ces couples de nombres sont assez nombreux.
En voici quelques-uns :
220 *et* 284 — 1 184 *et* 1 210 – 2 620 *et* 2 924 – 5 020 *et* 5 564 – 6 232 *et* 6 368

Exercice n° 3 : Les nombres de Mersenne

1. Les nombres de Mersenne sont de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif. Par exemple $M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers.
Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ᵉsiècle, affirme que :

« Si M_n est premier alors n est premier. »

Vérifiez que ce théorème semble être vrai en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

Exercice n° 4 : Les nombres de Fermat

1. Les nombres de Fermat sont de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier positif. Par exemple $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$.
Calculer les nombres de Fermat : F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2. Vérifier à la calculatrice que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

3. Effectuer $641 \times 6\,700\,417$. Que pouvez-vous en déduire pour F_5 ?

En 1670, Pierre de Fermat fait la conjecture que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ *sont premiers pour tout entier* n *positif. Cela fait partie des 47 conjectures publiées par son fils après la mort de Fermat. En 1732, Leonhard Euler montre que* F_5 *est divisible par* 641. *Aujourd'hui encore on ne connaît que* 5 *nombres de Fermat premiers. D'après Boklan et Conway en 2016, la probabilité qu'un autre nombre de Fermat soit premier est inférieure à une chance sur un milliard. C'est la seule conjecture erronée de Fermat.*

Exercice n° 5 : Les repunits

Un **Repunit** est un nombre dont l'écriture décimale est constituée que du chiffre 1.
1, 11, 111, 11 111... 111 111 111 111 sont des Repunits.

1. Effectuer la division euclidienne en la posant de 11 par 9, de 111 par 9, de 1 111 par 9 et enfin de 11 111 par 9

2. En utilisant votre calculatrice, écrire l'égalité euclidienne qui correspond à la division par 9 des Repunits 111 111, 1 111 111, 11 111 111 et 111 111 111.

3. Que remarquez-vous ?

4. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 3 ?

5. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 9 ?

6. [WEB] – Un Repunit peut-il être premier ?

Exercice n° 6 : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

1. Calculer $\left(\sqrt{2}\right)^2$

2.a p un nombre entier. Que peut-on dire du nombre entier $2p$ et du nombre entier $2p+1$?
Tester avec des valeurs de p de votre choix pour justifier votre réponse.

2.b p un nombre entier. Simplifier les expressions suivantes :

— $(2p)^2$

— $(2p+1)^2$

2.c En utilisant les questions **2.a** et **2.b** dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

— **Affirmation 1 :** Le carré d'un nombre entier pair est pair ;

— **Affirmation 2 :** Le carré d'un nombre entier impair est pair.

3.a On suppose maintenant qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Démontrer que dans ce cas que $2q^2 = p^2$.

3.b En déduire que p^2 est pair. Qu'en est-il de p ?

3.c Comme p est pair on peut écrire $p = 2k$ où k est un entier. En calculant p^2 et en utilisant la question **3.a** montrer que $q^2 = 2k^2$

3.d En déduire que q et p sont tous les deux pairs.

3.e Que pensez-vous de la fraction $\dfrac{p}{q}$?
Pourquoi est-ce en contradiction avec l'hypothèse de départ de la question **3.a**

4. Qu'est-ce que ce raisonnement prouve pour le nombre $\sqrt{2}$?

Exercice n° 7 : **Le calendrier et l'arithmétique**

Le 20 décembre 1582, la France est passé au calendrier grégorien. Ce calendrier, promulgué par le pape Grégoire XIII en févier 1582, succède au calendrier julien.
Ce calendrier confirme l'existence d'années bissextiles, tous les quatre ans, les années divisbles par 4. Dans ce cas on ajoute une journée à l'année commune, un 366ᵉjour, le 29 février. Cette réforme consiste à supprimer trois années bissextiles tous les 400 ans. Les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles à l'exception de celles multiples de 400.

1.a. Quelle sera la prochaine année bissextile ? Justifier votre réponse.
1.b. 2000 était-elle une année bissextile ? Et 2100 ? Justifier votre réponse.

2.a. Effectuer la division euclidienne de 365 par 7 puis de 366 par 7.
2.b. Combien y-a-t-il de semaines entières dans une année ?
2.c. En 2023, j'ai fêté mon anniversaire au mois d'août, un jeudi. Quelle jour de la semaine aura lieu mon anniversaire en 2024 puis en 2025. Justifier votre réponse.

3.a. Combien d'années vont s'écouler entre le 1erjanvier 2001 et le 31 décembre 2400.
3.b. En appliquant les règles du calendrier grégorien, combien de jours vont s'écouler entre le 1erjanvier 2001 et le 31 décembre 2400 ?
3.c. Sur cette période, donner la valeur décimale exacte du nombre de jours composant chaque année. Vous pourrez pour cela faire le quotient du nombre jours par le nombre d'années.
3.d. Une année tropique, c'est à dire une année au sens astronomique, dure environ 365,2422 jours. Quel est l'écart avec la durée moyenne d'une année du calendrier grégorien. Vous pourrez exprimer ce résultat en seconde.

Le calendrier précédent, le calendrier julien, avait été mis en place par Jules César vers 46 avant notre ère. Il ajoute un jour tous les quatre ans, les années bissextiles.

4.a. En prenant une période de 400 ans, comme dans la question précédente, combien de jours comprend le calendrier julien ?
4.b. Quel est l'écart entre le calendrier julien et l'année tropique.
4.c. Que s'est-il passé le 16 décembre 1582 ?

Devoir maison : Le calendrier et l'arithmétique Correction

Arithmétique

Le 20 décembre 1582, la France est passé au calendrier grégorien. Ce calendrier, promulgué par le pape Grégoire XIII en févier 1582, succède au calendrier julien.
Ce calendrier confirme l'existence d'années bissextiles, tous les quatre ans, les années divisbles par 4. Dans ce cas on ajoute une journée à l'année commune, un 366ᵉjour, le 29 février. Cette réforme consiste à supprimer trois années bissextiles tous les 400 ans. Les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles à l'exception de celles multiples de 400.

1.a. Quelle sera la prochaine année bissextile ? Justifier votre réponse.
Nous sommes en 2023.
Comme $2024 = 4 \times 506$, $\boxed{\text{la prochaine année bissextile sera 2024. Les suivantes seront 2028, 2032, 2036...}}$
1.b. 2000 était-elle une année bissextile ? Et 2100 ? Justifier votre réponse.
$2000 = 4 \times 500$. Il s'agit d'une année multiple de 4. De plus $2000 = 400 \times 5$, c'est un multiple de 400. $\boxed{\text{2000 était bissextile.}}$

2.a. Effectuer la division euclidienne de 365 par 7 puis de 366 par 7.
2.b. Combien y-a-t-il de semaines entières dans une année ?
2.c. En 2023, j'ai fêté mon anniversaire au mois d'août, un jeudi. Quelle jour de la semaine aura lieu mon anniversaire en 2024 puis en 2025. Justifier votre réponse.

3.a. Combien d'années vont s'écouler entre le 1erjanvier 2001 et le 31 décembre 2400.
3.b. En appliquant les règles du calendrier grégorien, combien de jours vont s'écouler entre le 1erjanvier 2001 et le 31 décembre 2400 ?
3.c. Sur cette période, donner la valeur décimale exacte du nombre de jours composant chaque année. Vous pourrez pour cela faire le quotient du nombre jours par le nombre d'années.
3.d. Une année tropique, c'est à dire une année au sens astronomique, dure environ 365,2422 jours. Quel est l'écart avec la durée moyenne d'une année du calendrier grégorien. Vous pourrez exprimer ce résultat en seconde.

Le calendrier précédent, le calendrier julien, avait été mis en place par Jules César vers 46 avant notre ère. Il ajoute un jour tous les quatre ans, les années bissextiles.

4.a. En prenant une période de 400 ans, comme dans la question précédente, combien de jours comprend le calendrier julien ?
4.b. Quel est l'écart entre le calendrier julien et l'année tropique.
4.c. Que s'est-il passé le 16 décembre 1582 ?

Devoir maison

Troisième

Exercice n° 1 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.
2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations. Ces couples de nombres sont assez nombreux. En voici quelques-uns :
220 et 284 — 1 184 et 1 210 – 2 620 et 2 924 – 5 020 et 5 564 – 6 232 et 6 368

Exercice n° 2 : Résolution d'équations

Résoudre chacune des équations suivantes :

(1) $5x+7=3x+3$

(2) $7x-3=4x-10$

(3) $10-8x=5x-3$

(4) $-x-7=1+x$

(5) $11x-7=-3x+9$

(6) $3x-3+x-1=2x-5x+2$

(7) $3(2x-7)=4(3x-1)$

(8) $x-2(3x-1)=2x-(5x-1)$

Exercice n° 3 : Fonctions et tableaux de valeurs

On pose :

$$f : x \to 10-7x$$
$$g : x \to x^2+6x-7$$
$$h : x \to (x-5)(x+7)$$

1. Compléter les tableaux suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$											

2. Déterminer les images de -2 et 5 par les fonctions f, g et h.

3. Déterminer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$

4. Calculer $f(-7)$, $g(-7)$ et $h(-7)$.

5. Déterminer les antécédents de 0 par g.

6. Déterminer les antécédents de 0 par h.

7. Déterminer les antécédents de -13 par f.

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 :

2 points ☆

Faire la liste sur votre copie de tous les nombres premiers inférieurs à 50.

Exercice n° 2 :

6 points ☆ ☆

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$A = \dfrac{5}{7} - \dfrac{5}{7} \times \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $B = \left(3 - \dfrac{4}{5}\right) \times \left(5 + \dfrac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $C = \left(2 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{9}\right) \div \left(1 + \dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{4}\right)$

Exercice n° 3 :

4 points ☆

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 144.

2. Faire la liste de tous les diviseurs de 315.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 315 et 144 ?

Exercice n° 4 :

4 + 2 points ☆ ☆

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{4\,131}{9\,180}$.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 ?

BONUS : Calculer en simplifiant au maximum l'expression : $\dfrac{1}{9\,180} + \dfrac{1}{4\,131}$

Toutes les traces de recherche seront valorisées.

Exercice n° 5 :

4 points ☆ ☆

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Peut-il créer 55 bouquets ? Peut-il créer 40 bouquets ?

2. Combien au maximum pourra-t-il créer de bouquets et dans ce cas combien de pivoines et de narcisses doit-il placer dans chaque bouquet ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 :

2 points Troisième

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 —29 — 31 — 37 — 41 — 43 — 47

Exercice n° 2 :

6 points

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$$

$$A = \frac{5}{7} - \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$$

$$A = \frac{5}{7} - \frac{15}{28}$$

$$A = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} - \frac{15}{28}$$

$$A = \frac{20}{28} - \frac{15}{28}$$

$$\boxed{A = \frac{5}{28}}$$

$$B = \left(3 - \frac{4}{5}\right) \times \left(5 + \frac{3}{4}\right)$$

$$B = \left(\frac{3}{1} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5}{1} + \frac{3}{4}\right)$$

$$B = \left(\frac{3 \times 5}{1 \times 5} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5 \times 4}{1 \times 4} + \frac{3}{4}\right)$$

$$B = \left(\frac{15}{5} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{20}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

$$B = \frac{11}{5} \times \frac{23}{4}$$

$$B = \frac{11 \times 23}{5 \times 4}$$

$$\boxed{B = \frac{253}{20}}$$

$$C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$$

$$C = \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$$

$$C = \left(\frac{2 \times 9}{1 \times 9} + \frac{2 \times 3}{3 \times 3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{1 \times 20}{1 \times 20} + \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{7 \times 5}{4 \times 5}\right)$$

$$C = \left(\frac{18}{9} + \frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{20}{20} + \frac{12}{20} - \frac{35}{20}\right)$$

$$C = \frac{19}{9} \div \frac{-3}{20}$$

$$C = \frac{19}{9} \times \frac{20}{-3}$$

$$C = \frac{19 \times 20}{9 \times (-3)}$$

$$\boxed{C = -\frac{380}{27}}$$

Exercice n° 3 :

4 points

1. La liste de tous les diviseurs de 144 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 9 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — 48 — 72 — 144

2. La liste de tous les diviseurs de 315 : 1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 15 — 21 — 35 — 45 — 63 — 105 — 315

3. Le plus grand diviseur commun de 315 et 144 est 9.

EXERCICE N° 3 : *4 + 2 points* ☆ ☆

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

$$\begin{array}{r|l} 9\,180 & 2 \\ 4\,590 & 2 \\ 2\,295 & 3 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\,131 & 3 \\ 1\,377 & 3 \\ 459 & 3 \\ 153 & 3 \\ 357 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \text{ donc } 9\,180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17}$

$\boxed{4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17 \text{ donc } 4\,131 = 3^5 \times 17}$

2. $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17} = \dfrac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3} = \boxed{\dfrac{20}{9}}$

3. Comme $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{20 \times 459}{9 \times 459}$, $459 = 3 \times 3 \times 3 \times 17$, $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de } 9\,180 \text{ et } 4\,131 \text{ est } 459}$.

BONUS : $Z = \dfrac{1}{4\,131} + \dfrac{1}{9\,180}$

Comme $9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17$ et $4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17$.
Le plus petit multiple commun à ces deux nombres est $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 = 82\,620$
On constate que $82\,620 = 9\,180 \times 9$ et $82\,620 = 4\,131 \times 20$

$$Z = \frac{1}{4\,131} + \frac{1}{9\,180} = \frac{1 \times 20}{4\,131 \times 20} + \frac{1 \times 9}{9\,180 \times 9} = \frac{20}{82\,620} + \frac{9}{82\,620} = \frac{29}{82\,620}$$

Exercice n° 4 : *4 points*

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Comme $880 = 16 \times 55$ et que $1\,040 = 18 \times 55 + 50$, il ne peut pas faire 55 bouquets, sinon il resterait 50 narcisses.

Comme $880 = 22 \times 40$ et que $1\,040 = 26 \times 40$, il peut réaliser 40 bouquets.

2. *On peut faire la liste des diviseurs des deux nombres puis trouver le plus grand en commun ou examiner les décompositions en facteurs premiers.*

Liste des diviseurs

Diviseurs de 880 : 1 — 2 — 4 — 5 — 8 — 10 — 11 — 16 — 20 — 22 — 40 — 44 — 55 — 80 — 88 — 110 — 176 — 220 — 440 — 880

Diviseurs de 1 040 : 1 — 2 — 4 — 8 — 10 — 13 — 16 — 20 — 26 — 40 — 52 — 65 — 80 — 104 — 180 — 360 — 720 — 1 440

On constate que le plus grand diviseur commun est 80.

Décomposition en facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 880 & 2 \\ 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,040 & 2 \\ 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$880 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$ donc $880 = 2^4 \times 5 \times 11$

$1\,040 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 13$ donc $1\,040 = 2^4 \times 5 \times 13$

Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres est donc égal à $2^4 \times 5 = 16 \times 5 = 80$.

De plus on a $880 = 80 \times 11$ et $1\,040 = 80 \times 13$.

Il pourra créer 80 bouquets constitués chacun de 11 pivoines et 13 narcisses.

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 : *1 points*

Faire la liste, ci-dessous, de tous les nombres premiers inférieurs à 30.

Exercice n° 2 : *6 points*

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ $\qquad$ $B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

Exercice n° 3 : *4 points*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 144 et 315.

2. Faire la liste de tous les diviseurs de 144.

3. Faire la liste de tous les diviseurs de 315.

4. Quel est le plus grand diviseur commun de 315 et 144 ?

Exercice n° 4 : *6 points*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

2. Simplifier la fraction $\frac{4\,131}{9\,180}$.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 ?

4. Un confiseur d'Aix en Provence vient de réaliser 9180 calissons natures et 4131 calissons napés au chocolat noir.
Il demande à son apprenti de constituer un maximum de sachets, tous identiques, c'est à dire ayant la même répartition de calissons des deux types, de telle manière qu'il ne reste aucune confiserie à la fin.
Combien de sachets peut-il constituer et combien de calissons de chaque type doit-il placer dans chaque sachet ?

Toutes les traces de recherche seront valorisées.

Exercice n° 5 : *4 points*

Alejandro souhaite carreler un des murs de sa salle de bain avec des carreaux carrés.
Ce mur mesure 4368 mm sur 2640 mm.
Pour des raisons pratiques, il ne veux faire aucune découpe.
Il faut absolument que le mur soit entièrement carrelé. Les carreaux sont posés bord à bord.

1. Alejandro peut-il acheter des carreaux de 20 mm ?
Peut-il acheter des carreaux de 24 mm ?

2. Quelle est la taille maximale de carreaux carrés qu'Alejandro peut poser sur ce mur ?
Combien de carreaux doit-il acheter ?

Toutes les traces de recherche seront valorisées.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Question de cours Correction

Nombres premiers

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

$\boxed{2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 — 29 — 31 — 37 — 41 — 43 — 47}$

Exercice n° 2 : Fractions Correction

Fractions

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$$
$$A = \frac{5}{7} - \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$$
$$A = \frac{5}{7} - \frac{15}{28}$$
$$A = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} - \frac{15}{28}$$
$$A = \frac{20}{28} - \frac{15}{28}$$
$$\boxed{A = \frac{5}{28}}$$

$$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)$$
$$B = \left(\frac{3 \times 5}{4 \times 5} - \frac{4 \times 4}{5 \times 4}\right) \times \left(\frac{1 \times 4}{3 \times 4} - \frac{3 \times 3}{4 \times 3}\right)$$
$$B = \left(\frac{15}{20} - \frac{16}{20}\right) \times \left(\frac{4}{12} - \frac{9}{12}\right)$$
$$B = -\frac{1}{20} \times \frac{-5}{12}$$
$$B = \frac{1 \times 5}{5 \times 4 \times 12}$$
$$\boxed{B = \frac{1}{48}}$$

$$C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$$
$$C = \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$$
$$C = \left(\frac{2 \times 9}{1 \times 9} + \frac{2 \times 3}{3 \times 3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{1 \times 20}{1 \times 20} + \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{7 \times 5}{4 \times 5}\right)$$
$$C = \left(\frac{18}{9} + \frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{20}{20} + \frac{12}{20} - \frac{35}{20}\right)$$
$$C = \frac{19}{9} \times \frac{-3}{20}$$
$$C = -\frac{19 \times 3}{3 \times 3 \times 20}$$
$$\boxed{C = -\frac{19}{60}}$$

Exercice n° 3 : Liste de diviseurs Correction

Liste de diviseurs

1.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$ $\boxed{315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7}$

2. La liste de tous les diviseurs de 144 : $\boxed{1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 9 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — 48 — 72 — 144}$

3. La liste de tous les diviseurs de 315 : $\boxed{1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 15 — 21 — 35 — 45 — 63 — 105 — 315}$

4. Le plus grand diviseur commun de 315 et 144 est 9.

Exercice n° 4 : Fractions irréductibles et calissons Correction

Fractions irréductibles

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

9 180	2
4 590	2
2 295	3
765	3
255	3
85	5
17	17
1	

4 131	3
1 377	3
459	3
153	3
357	3
51	3
17	17
1	

$\boxed{9\,180 = 2\times2\times3\times3\times3\times5\times17 \text{ donc } 9\,180 = 2^2\times3^3\times5\times17}$ $\boxed{4\,131 = 3\times3\times3\times3\times3\times17 \text{ donc } 4\,131 = 3^5\times17}$

2. $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{3\times3\times3\times3\times17}{2\times2\times3\times3\times3\times5\times17} = \dfrac{3\times3}{2\times2\times5} = \boxed{\dfrac{9}{20}}$

3. Comme $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{9\times459}{20\times459}$, $459 = 3\times3\times3\times17$, $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de } 9\,180 \text{ et } 4\,131 \text{ est } 459}$.

4. Nous venons de voir que $4131 = 459\times9$ et que $9180 = 459\times20$.

$\boxed{\text{L'apprenti du confiseur pourra faire 459 sachets contenant chacun 20 calissons natures et 9 calissons napés au chocolat noir.}}$

Exercice n° 5 : Problème d'arithmétique Correction

Problème de carrelage

1. On a $4368 = 20\times218+8$ et $2640 = 20\times132$. $\boxed{\text{Il ne peut pas utiliser des carreaux de 20 cm.}}$

On a $4368 = 24\times182$ et $2640 = 24\times110$. $\boxed{\text{Il peut utiliser des carreaux de 24 cm.}}$

2.

4 368	2
2 184	2
1 092	2
546	2
273	3
91	7
13	13
1	

2 640	2
1 320	2
660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$\boxed{4\,368 = 2\times2\times2\times2\times3\times7\times13}$ $\boxed{2\,640 = 2\times2\times2\times2\times3\times5\times11}$

On a ainsi :

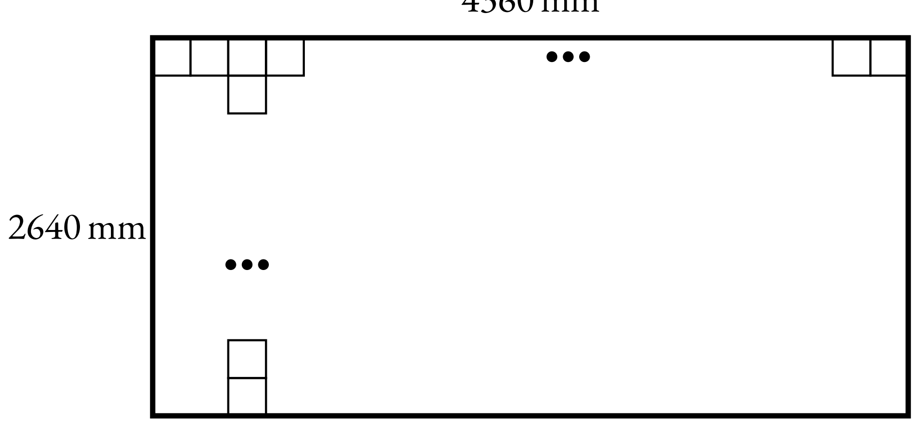
— $4368 = 2\times2\times2\times2\times3\times7\times13$

— $2640 = 2\times2\times2\times2\times3\times5\times11$

Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres est donc $2\times2\times2\times2\times3 = 48$.

Alejandro va pouvoir acheter des carreaux de 48 mm.

Or, $4368 = 48\times91$ et $2640 = 48\times55$.



Il lui faudra donc $55 \times 91 = 5005$ carreaux.

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 :

2 points

Faire la liste sur votre copie de tous les nombres premiers inférieurs à 50.

Exercice n° 2 :

3,5 points

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 144.

2. Faire la liste de tous les diviseurs de 315.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 315 et 144 ?

Exercice n° 3 :

3,5 points

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

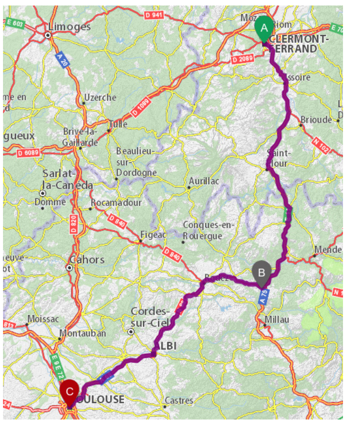
2. Simplifier la fraction $\dfrac{4\,131}{9\,180}$.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 ?

Exercice n° 4 :

7 points

1. Un lapin de garenne peut atteindre la vitesse maximale de $40\,\text{km/h}$. Usain Bolt a courru le 16 août 2009 le $100\,\text{m}$ en $9,58$ s. Il est détient depuis cette date le record du monde de l'être humain le plus rapide.
En justifiant votre réponse indiquer qui du lapin ou de l'homme est le plus rapide au sprint.



2. Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.

2.a. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2.b. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

2.c. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

Exercice n° 5 :

4 points

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Peut-il créer 55 bouquets ? Peut-il créer 40 bouquets ?

2. Combien au maximum pourra-t-il créer de bouquets et dans ce cas combien de pivoines et de narcisses doit-il placer dans chaque bouquet ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : *2 points* Troisième

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

$\boxed{2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 —29 — 31 — 37 — 41 — 43 — 47}$

Exercice n° 2 : *3,5 points* ☆ ☆

1. La liste de tous les diviseurs de 144 : $\boxed{1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 9 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — 48 — 72 — 144}$

2. La liste de tous les diviseurs de 315 : $\boxed{1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 15 — 21 — 35 — 45 — 63 — 105 — 315}$

3. $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de 315 et 144 est 9.}}$

Exercice n° 3 : *3,5 points* ☆ ☆

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

$$\begin{array}{r|r} 9\,180 & 2 \\ 4\,590 & 2 \\ 2\,295 & 3 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 4\,131 & 3 \\ 1\,377 & 3 \\ 459 & 3 \\ 153 & 3 \\ 357 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \text{ donc } 9\,180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17}$

$\boxed{4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17 \text{ donc } 4\,131 = 3^5 \times 17}$

2. $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17} = \dfrac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3 \times} = \boxed{\dfrac{20}{9}}$

3. Comme $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{20 \times 459}{9 \times 459}$, $459 = 3 \times 3 \times 3 \times 17$, $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 est 459}}$.

Exercice n° 4 : *7 points* ☆☆

1. *On peut au choix, calculer la vitesse en kilomètre heure d'Usain Bolt ou se demander le temps que ferait le lapin pour courir un* $100\,\text{m}$.

Vitesse d'Usain Bolt

On suppose que le temps et la distance sont proportionnelles.

Distance	$100\,\text{m}$	$\dfrac{100\,\text{m}\times 3\,600\,\text{s}}{9{,}58\,\text{s}} \approx 37\,578\,\text{m} \approx 37{,}6\,\text{km}$
Temps	$9{,}58\,\text{s}$	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$

La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $37{,}6\,\text{km/h}$. Elle est donc inférieure à celle du lapin.

Temps sur $100\,\text{m}$ **du lapin**

Distance	$100\,\text{m}$	$40\,\text{km} = 40\,000\,\text{m}$
Temps	$\dfrac{100\,\text{m}\times 3\,600\,\text{s}}{40\,000\,\text{m}} = 9\,\text{s}$	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$

Le lapin court le $100\,\text{m}$ en $9\,\text{s}$, il est plus rapide qu'Usain Bolt.

2.a.

Distance	$130\,\text{km}$	$200\,\text{km}$
Temps	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$	$\dfrac{3\,600\,\text{s}\times 200\,\text{km}}{130\,\text{km}} \approx 5\,538\,\text{s}$

Or $5\,538\,\text{s} = 92\times 60\,\text{s} + 18\,\text{s} = 92\,\text{min} + 18\,\text{s}$ soit $\boxed{1\ h\,32\ min\ 18\ s}$

2.b. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\,30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

2.c. Le temps et la distance sont proportionnels.
$150\ min = 9\,000\ s$

Temps	$14\,538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3\,600\ s}{14\,538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice n° 5 : *4 points*

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Comme $880 = 16 \times 55$ et que $1\,040 = 18 \times 55 + 50$, $\boxed{\text{il ne peut pas faire 55 bouquets, sinon il resterait 50 narcisses.}}$

Comme $880 = 22 \times 40$ et que $1\,040 = 26 \times 40$, $\boxed{\text{il peut réaliser 40 bouquets.}}$

2. *On peut faire la liste des diviseurs des deux nombres puis trouver le plus grand en commun ou examiner les décompositions en facteurs premiers.*

Liste des diviseurs

Diviseurs de 880 : 1 — 2 — 4 — 5 — 8 — 10 — 11 — 16 — 20 — 22 — 40 — 44 — 55 — 80 — 88 — 110 — 176 — 220 — 440 — 880

Diviseurs de 1 040 : 1 — 2 — 4 — 8 — 10 — 13 — 16 — 20 — 26 — 40 — 52 — 65 — 80 — 104 — 180 — 360 — 720 — 1 440

On constate que le plus grand diviseur commun est 80.

Décomposition en facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 880 & 2 \\ 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,040 & 2 \\ 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{880 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11 \text{ donc } 880 = 2^4 \times 5 \times 11}$ $\boxed{1\,040 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 13 \text{ donc } 1\,040 = 2^4 \times 5 \times 13}$

Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres est donc égal à $2^4 \times 5 = 16 \times 5 = 80$.

De plus on a $880 = 80 \times 11$ et $1\,040 = 80 \times 13$.

$\boxed{\text{Il pourra créer 80 bouquets constitués chacun de 11 pivoines et 13 narcisses.}}$

Évaluation

Troisième

Exercice 1 : Écrire sur votre copie la liste des nombres premiers inférieurs à 50. *(2 points)*

Exercice 2 : *(5 points)*

1. Décomposer les nombres 2 320, 2 349 et 203 en produit de nombres premiers.

2. Des archéologues viennent de découvrir dans les ruines du collège Vauquelin un trésor gaulois : 2 320 statères d'or, 2 349 quinaires en argent et 203 deniers en bronze. Les archéologues parviennent ensuite à se partager ses pièces de manière parfaitement équitable.
Combien sont les archéologues inventeurs de ce trésor ?

3. Combien de pièces de chaque sorte un archéologue va-t-il recevoir ?

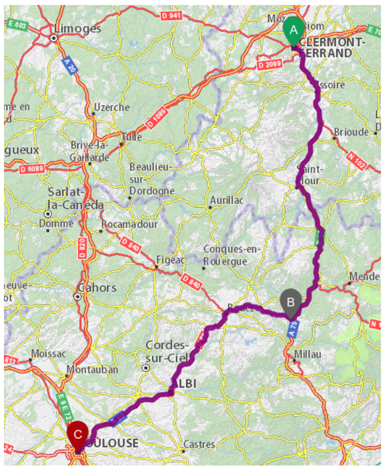
Exercice 3 : *(3 points)*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,780}{6\,840}$

Exercice 4 : *(5 points)*

Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



1. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

3. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

Exercice 5 : *(5 points)*

Un pâtissier a reçu ce matin 840 fraises maralines et 630 framboises Glen Coe. Il souhaite préparer des tartelettes aux fraises et aux framboises toutes identiques, c'est-à-dire ayant chacune la même quantité de fraises et de framboises.

1. Peut-il faire 50 tartelettes ? Peut-il faire 30 tartelettes ?

2. Déterminer le nombre maximal de tartelettes qu'il va pouvoir préparer et indiquer combien de framboises et de fraises il devra utiliser pour chacune d'entre elle.

Toute trace de recherche même non aboutie sera valorisée !

Évaluation — Correction

Exercice 1 :

2 – –3 – –5 – –7 – –11 – –13 – –17 – –19 – –23 – –29 – –31 – –37 – –41 – –43 – –47

Exercice 2 :

1. Décomposer les nombres 2 320, 2 349 et 203 en produit de nombres premiers.

$$\begin{array}{r|c} 2\,320 & 2 \\ 1\,160 & 2 \\ 580 & 2 \\ 290 & 2 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 2\,349 & 3 \\ 783 & 3 \\ 261 & 3 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 203 & 7 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{2\,320 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 29}$, $\boxed{2\,349 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 29}$ et $\boxed{203 = 7 \times 29}$.

2. Clairement 29 est le seul diviseur commun à 2 320, 2 349 et 203. Il y a donc $\boxed{\text{29 archéologues}}$.

3. $2\,320 = 29 \times 80$, $2\,349 = 29 \times 81$ et $203 = 29 \times 7$

$\boxed{\text{Chacun recevra 80 statères, 81 quinaires et 7 deniers.}}$

Exercice 3 :

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

$$\begin{array}{r|c} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 6\,840 & 2 \\ 3\,420 & 2 \\ 1\,710 & 2 \\ 855 & 3 \\ 285 & 3 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ et $6\,840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 19$

2. $\dfrac{3\,780}{6\,840} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 19} = \dfrac{3 \times 7}{2 \times 19} = \dfrac{21}{38}$

Exercice 4 :

1. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	x
Distance	$130\ km$	$200\ km$

On a $x = \dfrac{3\,600\ s \times 200\ km}{130\ km} \approx 5\,538\ s$

Or $\boxed{5\,538\ s = 92\ min\ 18\ s = 1\ h\ 32\ min\ 18\ s}$

2. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\ 30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

3. Le temps et la distance sont proportionnels.

$150\ min = 9\,000\ s$

Temps	$14\,538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3\,600\ s}{14\,538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice 5 :

1. $840 = 16 \times 50 + 40$ donc il ne peut pas faire 50 tartes.

$840 = 30 \times 28$ et $630 = 30 \times 21$: il peut faire 30 tartes.

2. Décomposons 840 et 630 en facteurs premiers.

$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Le plus grand diviseur commun est donc $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$

Il peut faire 210 tartelettes et comme $840 = 4 \times 210$ et $630 = 210 \times 3$ il y aura 4 fraises et 3 framboises par tartelette.

Évaluation

Troisième

Exercice 1 : Écrire sur votre copie la liste des nombres premiers inférieurs à 50. *(3 points)*

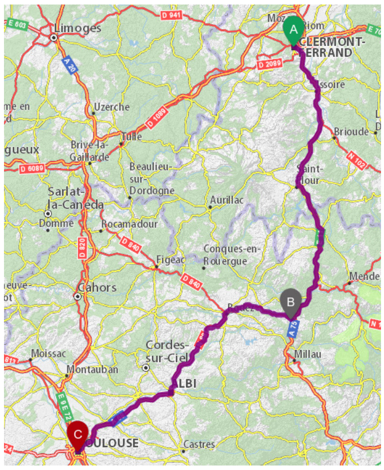
Exercice 2 : *(3 points)*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,780}{6\,840}$

Exercice 3 : *(5 points)*

Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



1. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

3. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

Exercice 4 : *(5 points)*

Un pâtissier a reçu ce matin 840 fraises maralines et 630 framboises Glen Coe. Il souhaite préparer des tartelettes aux fraises et aux framboises toutes identiques, c'est-à-dire ayant chacune la même quantité de fraises et de framboises.

1. Peut-il faire 50 tartelettes ? Peut-il faire 30 tartelettes ?

2. Déterminer le nombre maximal de tartelettes qu'il va pouvoir préparer et indiquer combien de framboises et de fraises il devra utiliser pour chacune d'entre elle.

Toute trace de recherche même non aboutie sera valorisée !

Exercice 5 : *(4 points)*

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5x+3 &= 3x+5 \\ 6x-4 &= 2x+7 \\ 4x-11 &= 10-3x \\ 3-7x &= 9-4x \end{aligned}$$

Évaluation — Correction

Exercice 1 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47

Exercice 2 :
1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

$$\begin{array}{r|l}
3\,780 & 2\\
1\,890 & 2\\
945 & 3\\
315 & 3\\
105 & 3\\
35 & 5\\
7 & 7\\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
6\,840 & 2\\
3\,420 & 2\\
1\,710 & 2\\
855 & 3\\
285 & 3\\
95 & 5\\
19 & 19\\
1 &
\end{array}$$

Ainsi $3\,780 = 2\times2\times3\times3\times3\times5\times7$ et $6\,840 = 2\times2\times2\times3\times5\times19$

2. $\dfrac{3\,780}{6\,840} = \dfrac{2\times2\times3\times3\times3\times5\times7}{2\times2\times2\times3\times3\times5\times19} = \dfrac{3\times7}{2\times19} = \dfrac{21}{38}$

Exercice 3 :
1. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	x
Distance	$130\ km$	$200\ km$

On a $x = \dfrac{3\,600\ s \times 200\ km}{130\ km} \approx 5\,538\ s$

Comme $5\,538 = 60\times92+18$ et que $92 = 60\times1+32$, on a $\boxed{5\,538\ s = 92\ min\ 18\ s = 1\ h\ 32\ min\ 18\ s}$

2. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\ 30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

3. Le temps et la distance sont proportionnels.
$150\ min = 9\,000\ s$

Temps	$14\,538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3\,600\ s}{14\,538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice 4 :
1. $840 = 16\times50+40$ donc il ne peut pas faire 50 tartes.
$840 = 30\times28$ et $630 = 30\times21$: il peut faire 30 tartes.

2. Décomposons 840 et 630 en facteurs premiers.
$840 = 2\times2\times2\times3\times5\times7$ et $630 = 2\times3\times3\times5\times7$
On peut utiliser ces décompositions pour établir la liste des diviseurs des nombres :
840 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 28 ; 30 ; 35 ; 42 ; 56 ; 70 ; 84 ; 105 ; 120 ; 140 ; 168 ; $\boxed{210}$; 280 ; 420 ; 840
630 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 15 ; 21 ; 30 ; 42 ; 63 ; 70 ; 90 ; 105 ; 126 ; $\boxed{210}$; 315 ; 630

Le plus grand diviseur commun est donc $2\times3\times5\times7 = 210$
Il peut faire 210 tartelettes et comme $840 = 4\times210$ et $630 = 210\times3$ il y aura 4 fraises et 3 framboises par tartelette.

Exercice 5 :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
5x+3 &= 3x+5\\
5x+3-3 &= 3x+5-3\\
5x &= 3x+2\\
5x-3x &= 3x+2-3x\\
2x &= 2\\
x &= \frac{2}{2}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6x-4 &= 2x+7\\
6x-4+4 &= 2x+7+4\\
6x &= 2x+11\\
6x-2x &= 2x+11-2x\\
4x &= 11\\
x &= \frac{11}{4}\\
x &= 2,75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x-11 &= 10-3x\\
4x-11+11 &= 10-3x+11\\
4x+3x &= 21-3x+3x\\
7x &= 21\\
x &= \frac{21}{3}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3-7x &= 9-4x\\
3-7x-3 &= 9-4x-3\\
-7x &= 6-4x\\
-7x+4x &= 6-4x+4x\\
-3x &= 6\\
x &= \frac{6}{-3}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

Évaluation

Troisième

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Le SCMaglev est un train japonais. Il a parcouru en 2015 les 240 km séparant Tokyo de Nagoya en 42 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2

En 2004, le colombien Juan Pablo Montoya, pilote de Formule 1, a parcouru les $5,7$ km du circuit de Monza en Italie à la vitesse moyenne de 262 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance ? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3

Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Le lièvre commun d'Europe peut se déplacer à 18 m/s.
Qui est le plus rapide des deux ?

Évaluation

Troisième

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Le TransRapid est un train chinois. Il a parcouru en 2004 370 km en 38 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2

En 2005, le sud africain Alan Van Der Merwe, pilote de Formule 1, a parcouru $3,2$ km à la vitesse moyenne de 397 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance ? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3

Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Un rhinocéros peut se déplacer à la vitesse de 15 m/s.
Qui est le plus rapide des deux ?

Évaluation

Troisième

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Le TGV est un train français. Il a parcouru en 2015 la distance de 325 km en 34 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2

En 2008, le colombien Juan Pablo Montoya a parcouru les $5,7$ km du circuit de Monza en Italie à la vitesse moyenne de 256 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance ? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3

Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Le chat commun peut se déplacer à 13 m/s.
Qui est le plus rapide des deux ?

Évaluation — Correction

Première version

Exercice 1

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$42\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$240\ km$	$\dfrac{240\ km \times 60\ min}{42\ min} \approx 343\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{343\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\dfrac{5{,}7\ km \times 3\,600\ s}{262\ km} \approx 78\ s$
Distance	$262\ km$	$5{,}7\ km$

Il a mis $\boxed{78\ s = 1\ min\ 18\ s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37{,}58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\dfrac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10{,}4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10{,}4\ m/s$, il est plus lent que le lièvre !

$18\ m \times 3\,600 = 64\,800\ m = 64{,}8\ km$
Le lièvre se déplace à $64{,}8\ km/h$.
Le lièvre est plus rapide qu'Usain Bolt !

Deuxième version

Exercice 1

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$38\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$370\ km$	$\dfrac{370\ km \times 60\ min}{38\ min} \approx 584\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{584\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\dfrac{3{,}2\ km \times 3\,600\ s}{397\ km} \approx 29\ s$
Distance	$397\ km$	$3{,}2\ km$

Il a mis $\boxed{29 s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.

$37,58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\dfrac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le rhinocéros !

$15\ m \times 3\,600 = 54\,000\ m = 54\ km$
Le rhinocéros se déplace à $54\ km/h$.
Le rhinocéros est plus rapide qu'Usain Bolt !

Troisième version

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$34\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$325\ km$	$\dfrac{325\ km \times 60\ min}{34\ min} \approx 574\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{574\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\dfrac{5,7\ km \times 3\,600\ s}{256\ km} \approx 80\ s$
Distance	$256\ km$	$5,7\ km$

Il a mis $\boxed{80\ s = 1\ min\ 20\ s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37,58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\dfrac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le chat !

$13\ m \times 3\,600 = 46\,800\ m = 46,8\ km$
Le chat se déplace à $46,8\ km/h$.
Le chat est plus rapide qu'Usain Bolt !

Remarques et intentions pédagogiques

[1] Le jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école Juniper-Green. Il a été repris par Ian Stewart qui a décrit les règles dans Pour la science de juillet 1997. Voir aussi le bulletin vert de l'APMEP nº 427. La plus longue suite que j'ai obtenue pour $n = 100$ contient 35 termes, la voici :

20 – 40 – 80 – 16 – 32 – 64 – 1 – 2 – 6 – 3 – 9 – 18 – 36 – 72 – 24 – 48 – 96 – 12 – 60 – 30 – 90 – 15 – 45 – 5 – 25 – 50 – 100 – 10 – 70 – 7 – 14 – 42 – 84 – 21 – 63

[2] En effet pour tout nombre entier positif a on a $a = 0 \times k + a$ où k est un entier positif $0 \leqslant k < a$.

Or $a \geqslant 0$ et en tant que reste de cette division il doit aussi vérifier $a < 0$.

Ces deux conditions sont incompatibles !

[3] Le plus grand nombre premier connu au 7 décembre 2018 est $2^{82\,589\,933} - 1$: il comporte 24 millions de chiffres en écriture décimale.

[4] 1 est égal au produit vide : c'est le résultat du produit d'aucun nombre. On peut ainsi étendre le théorème fondamental de l'arithmétique au nombre 1.

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 20 mars 2025 à 19:39

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.