Chapitre II

Les triangles semblables

Sommaire

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ?

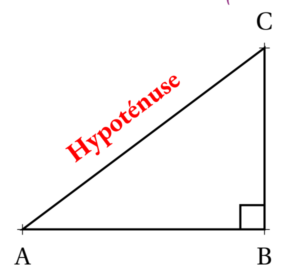
« Si vous ne pouvez pas expliquer quelque chose à un étudiant de première année, c'est que vous n'avez pas vraiment compris. » — **Richard Feynman**

C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ?

I — Les cas d'égalité des triangles

Théorème 2.1 : Hypoténuse d'un triangle rectangle *(Admis)*

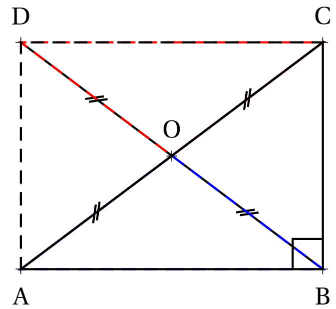
Si un triangle est rectangle **alors** son côté le plus long est opposé à l'angle droit.



Le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle s'appelle l'**hypoténuse** .

Démonstration pour l'enseignant :

Il suffit de construire le rectangle qui correspond au triangle rectangle ABC, par exemple en considérant la symétrie centrale de centre O où O est le milieu du segment [AC].
On sait que dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur.



Dans le triangle AOB, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $AB < AO + OB$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $AO + OB = AO + OC = AC$
d'où $AB < AC$

Dans le triangle BOC, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $BC < BO + OC$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $BO + OC = AO + OC = AC$
d'où $AC < AC$

Ainsi les deux côtés AB et BC ont des mesures inférieures au côté AC.

Ce résultat est bien lié à l'angle droit. C'est une conséquence des proprités des diagonales du rectangle.

CQFD

Remarque :

Le mot **hypoténuse** est féminin. Il vient du latin *hypotenusa*, lui-même transcrit du grec ancien *hupoteinousa*. Le préfixe *hupo* signifie « sous » et *teino* « tendre ». Hypoténuse signifie donc littéralement « celle qui sous-tend ». Platon, avant Euclide, a utilisé dans le Timée ce terme pour désigner le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.

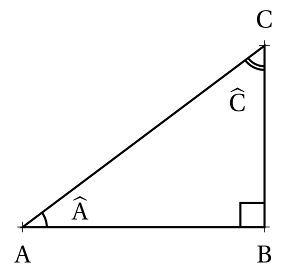
Les deux côtés **adjacent** à l'angle droit sont parfois appelé **cathètes** . Ce terme désigne plus généralement une perpendiculaire et vient du grec ancien *káthetos* qui signifie « mené en bas ».

L'adjectif **adjacent** vient du latin *adjacēre* et signifie « être situé auprès ». Il signifie, ce qui est immédiatement à côté d'un autre. Un côté est adjacent à un angle s'il « touche » l'angle, si c'est un des côtés de l'angle.

Propriété 2.1 : Les angles dans un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en B alors :

- $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles aigus ;
- $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont **complémentaires**
  Cela signifie que la somme de leurs mesures est égale à 90°.



Démonstration présentée en classe :

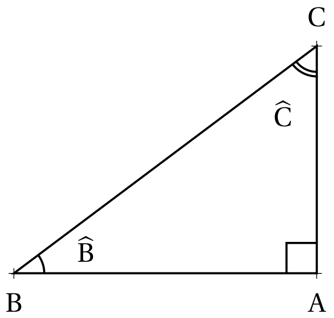
On sait que dans un triangle, la somme des trois angles est égale à 180°.
Comme l'angle droit mesure 90°, il reste 90° pour les deux autres angles.
Par conséquent, les deux autres angles ont une mesure inférieure à 90° et par définition, ils sont **complémentaires** .

CQFD

Remarque :
On dit que deux angles sont **complémentaires** si leur somme est égale à un angle droit, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 90°.
On dit que deux angles sont **supplémentaires** si leur somme est égale à un angle plat, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Définition 2.1 : Vocabulaire dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.



- [BC] est l'hypoténuse ;
- [AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit ;
- [AC] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$;
- [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.

Remarque :
Dans un triangle rectangle,

- Le **côté adjacent** à un angle aigu est le **côté opposé** de l'angle **complémentaire** .
- Le **côté opposé** à un angle aigu est le **côté adjacent** de l'angle **complémentaire** .
- Un **côté adjacent** à un angle est un côté dont l'une des extrémités est le sommet de l'angle.
- Un **côté opposé** à un angle est un côté dont aucune des extrémités est le sommet de l'angle.

II — Les triangles semblables

Propriété 2.2 : Triangles rectangles semblables *(Admise)*

Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils sont semblables.
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils ont des côtés proportionnels.

Démonstration :

Considérons deux triangles rectangles ABC et A′B′C′ rectangle respectivement en A et A′ et tel que $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Comme la somme des angles dans un triangle est égal à 180°, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
Ainsi les trois angles de ces triangles sont égaux. D'après la propriété 3.2, les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables.
Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnels.

CQFD

Remarque :
Considérons deux triangles ABC et A′B′C′ rectangles respectivement en A et A′ semblables.
Il existe donc un nombre positif non nul k tel que $A'B' = k \times AB$, $A'C' = k \times AC$ et $B'C' = k \times BC$.

Le quotient $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{k \times AB}{k \times BC} = \dfrac{AB}{BC}$

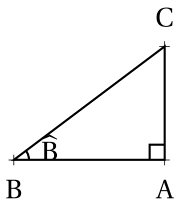
Le quotient $\dfrac{A'C'}{B'C'} = \dfrac{k \times AC}{k \times BC} = \dfrac{AC}{BC}$

Le quotient $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{k \times AC}{k \times AB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ces trois quotients ne dépendent donc pas des mesures des triangles rectangles ABC et A′B′C′. Ils ne dépendent donc que d'un des angles aigus de ces triangles, par exemple $\widehat{B}$.
Cela justifie la définition suivante :

❧ DÉFINITION 2.2 : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en A.



On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$ de la manière suivante :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}$$

MOYEN MNÉMOTECHNIQUE :
Ces trois expressions doivent être connues par coeur !
Voici un moyen pour les mémoriser, il suffit de retenir le mot suivant :

COSINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ TANGENTE ADJACENT
C A H S O H T O A
ADJACENT SINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ

REMARQUES :
Pour une mesure d'angle aigu donnée, par exemple 75°, $\cos(75°)$, $\sin(75°)$ et $\tan(75°)$ sont des nombres. Ces nombres sont connus, la plupart ne sont pas décimaux mais la calculatrice est capable d'en donner une valeur approchée.
Par exemple $\cos(75°) \approx 0{,}258\,819\,045\,1$ à 10^{-10} près.
Dans les exercices, les cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu doivent être considérés comme des nombres au même titre que π, $\sqrt{2}$, $0,5$ ou 2.

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr
— **Dernière modification :** 20 mars 2025 à 19:39

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.