Remarques et intentions pédagogiques

[1] Le jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école Juniper-Green. Il a été repris par Ian Stewart qui a décrit les règles dans Pour la science de juillet 1997. Voir aussi le bulletin vert de l'APMEP n° 427. La plus longue suite que j'ai obtenue pour $n = 100$ contient 35 termes, la voici :

20 – 40 – 80 – 16 – 32 – 64 – 1 – 2 – 6 – 3 – 9 – 18 – 36 – 72 – 24 – 48 – 96 – 12 – 60 – 30 – 90 – 15 – 45 – 5 – 25 – 50 – 100 – 10 – 70 – 7 – 14 – 42 – 84 – 21 – 63

[2] En effet pour tout nombre entier positif a on a $a = 0 \times k + a$ où k est un entier positif $0 \leqslant k < a$.

Or $a \geqslant 0$ et en tant que reste de cette division il doit aussi vérifier $a < 0$.

Ces deux conditions sont incompatibles !

[3] Le plus grand nombre premier connu au 7 décembre 2018 est $2^{82\,589\,933} - 1$: il comporte 24 millions de chiffres en écriture décimale.

[4] 1 est égal au produit vide : c'est le résultat du produit d'aucun nombre. On peut ainsi étendre le théorème fondamental de l'arithmétique au nombre 1.

Chapitre II

Les triangles semblables

Sommaire

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ?

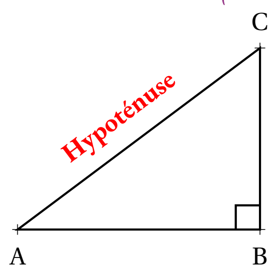
« Si vous ne pouvez pas expliquer quelque chose à un étudiant de première année, c'est que vous n'avez pas vraiment compris. » — **Richard Feynman**

C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ?

I — Les cas d'égalité des triangles

THÉORÈME 2.1 : Hypoténuse d'un triangle rectangle *(Admis)*

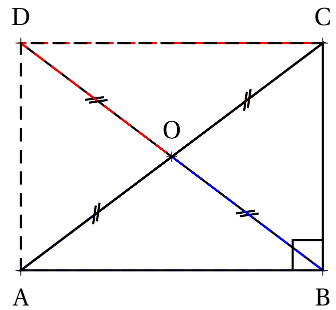
Si un triangle est rectangle **alors** son côté le plus long est opposé à l'angle droit.



Le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle s'appelle l'**hypoténuse** .

DÉMONSTRATION :

Il suffit de construire le rectangle qui correspond au triangle rectangle ABC, par exemple en considérant la symétrie centrale de centre O où O est le milieu du segment [AC].
On sait que dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur.



Dans le triangle AOB, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $AB < AO + OB$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $AO + OB = AO + OC = AC$
d'où $AB < AC$

Dans le triangle BOC, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $BC < BO + OC$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $BO + OC = AO + OC = AC$
d'où $AC < AC$

Ainsi les deux côtés AB et BC ont des mesures inférieures au côté AC.

Ce résultat est bien lié à l'angle droit. C'est une conséquence des proprités des diagonales du rectangle.

CQFD

Remarque :

Le mot **hypoténuse** est féminin. Il vient du latin *hypotenusa*, lui-même transcrit du grec ancien *hupoteinousa*. Le préfixe *hupo* signifie « sous » et *teino* « tendre ». Hypoténuse signifie donc littéralement « celle qui sous-tend ». Platon, avant Euclide, a utilisé dans le Timée ce terme pour désigner le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.

Les deux côtés **adjacent** à l'angle droit sont parfois appelé **cathètes** . Ce terme désigne plus généralement une perpendiculaire et vient du grec ancien *káthetos* qui signifie « mené en bas ».

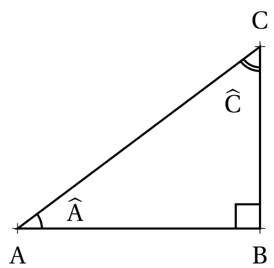
L'adjectif **adjacent** vient du latin *adjacēre* et signifie « être situé auprès ». Il signifie, ce qui est immédiatement à côté d'un autre. Un côté est adjacent à un angle s'il « touche » l'angle, si c'est un des côtés de l'angle.

PROPRIÉTÉ 2.1 : Les angles dans un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en B alors :

— $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles aigus;

— $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont **complémentaires**
Cela signifie que la somme de leurs mesures est égale à $90°$.



DÉMONSTRATION :

On sait que dans un triangle, la somme des trois angles est égale à $180°$.
Comme l'angle droit mesure $90°$, il reste $90°$ pour les deux autres angles.
Par conséquent, les deux autres angles ont une mesure inférieure à $90°$ et par définition, ils sont **complémentaires** .

CQFD

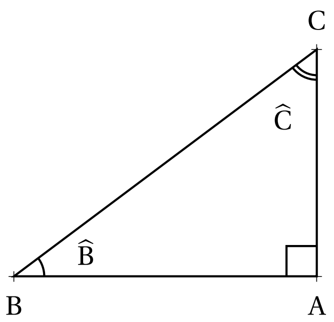
Remarque :

On dit que deux angles sont **complémentaires** si leur somme est égale à un angle droit, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

On dit que deux angles sont **supplémentaires** si leur somme est égale à un angle plat, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Définition 2.1 : Vocabulaire dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.



— [BC] est l'hypoténuse ;
— [AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit ;
— [AC] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$;
— [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.

Remarque :

Dans un triangle rectangle,

— Le **côté adjacent** à un angle aigu est le **côté opposé** de l'angle **complémentaire** .
— Le **côté opposé** à un angle aigu est le **côté adjacent** de l'angle **complémentaire** .
— Un **côté adjacent** à un angle est un côté dont l'une des extrémités est le sommet de l'angle.
— Un **côté opposé** à un angle est un côté dont aucune des extrémités est le sommet de l'angle.

II — Les triangles semblables

Propriété 2.2 : Triangles rectangles semblables *(Admise)*

Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils sont semblables.
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils ont des côtés proportionnels.

Démonstration :

Considérons deux triangles rectangles ABC et A′B′C′ rectangle respectivement en A et A′ et tel que $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Comme la somme des angles dans un triangle est égal à 180°, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
Ainsi les trois angles de ces triangles sont égaux. D'après la propriété 3.2, les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables.
Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnels.

CQFD

Remarque :
Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles respectivement en A et A' semblables.
Il existe donc un nombre positif non nul k tel que $A'B' = k \times AB$, $A'C' = k \times AC$ et $B'C' = k \times BC$.

Le quotient $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{k \times AB}{k \times BC} = \dfrac{AB}{BC}$

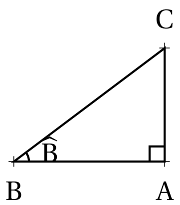
Le quotient $\dfrac{A'C'}{B'C'} = \dfrac{k \times AC}{k \times BC} = \dfrac{AC}{BC}$

Le quotient $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{k \times AC}{k \times AB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ces trois quotients ne dépendent donc pas des mesures des triangles rectangles ABC et $A'B'C'$. Ils ne dépendent donc que d'un des angles aigus de ces triangles, par exemple $\widehat{B}$.
Cela justifie la définition suivante :

❧ Définition 2.2 : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en A.



On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$ de la manière suivante :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}$$

Moyen mnémotechnique :
Ces trois expressions doivent être connues par coeur !
Voici un moyen pour les mémoriser, il suffit de retenir le mot suivant :

COSINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ TANGENTE ADJACENT

C A H S O H T O A

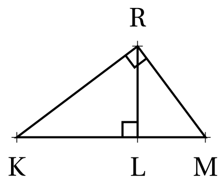
ADJACENT SINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ

Remarques :
Pour une mesure d'angle aigu donnée, par exemple 75°, $\cos(75°)$, $\sin(75°)$ et $\tan(75°)$ sont des nombres. Ces nombres sont connus, la plupart ne sont pas décimaux mais la calculatrice est capable d'en donner une valeur approchée.
Par exemple $\cos(75°) \approx 0{,}258\,819\,045\,1$ à 10^{-10} près.
Dans les exercices, les cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu doivent être considérés comme des nombres au même titre que π, $\sqrt{2}$, $0,5$ ou 2.

III — Exemples importants

Triangles rectangles ayant un angle aigu égaux.
Triangles homothétiques : Thalès dans le triangle

Exercice n° 2.1 : Vocabulaire

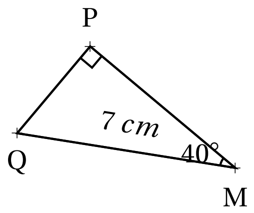


1. Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots :
adjacent, opposé ou hypoténuse
Dans le triangle KRM rectangle en R :

— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$
— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$
— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$
— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$
— [MK] est ....

2. Recommencer la question **1.** avec le triangle RLK puis RLM en faisant pour chacun 5 phrases du même type.
3. Citer tous les couples d'angles complémentaires de cette figure. En déduire tous les angles égaux de cette figure ?
4. Que peut-on dire des triangles KRM, KRL et RLM ?

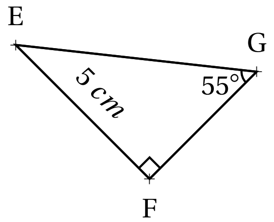
Exercice n° 2.2 : Calcul de deux côtés — Épisode 1



Le triangle QPM est rectangle en P.
On sait que $\widehat{PMQ} = 40°$ et que $QM = 7\ cm$

Calculer les valeurs exactes de PQ et PM.
Donner une valeur approchée au mm près.

Exercice n° 2.3 : Calcul de deux côtés — Épisode 2



Le triangle EFG est rectangle en F.
On sait que $\widehat{FGE} = 40°$ et que $FE = 5\ cm$

Calculer les valeurs exactes de FG et GE.
Donner une valeur approchée au mm près.

Exercice n° 2.4 : Dans quel triangle rectangle ?

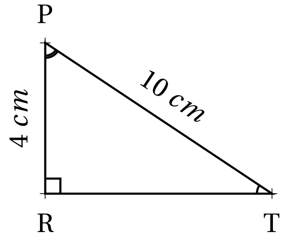
Exercice n° 2.5 : L'angle à 30°

1. Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que :

— $AC = 10\ cm$
— $\widehat{BAC} = 30°$

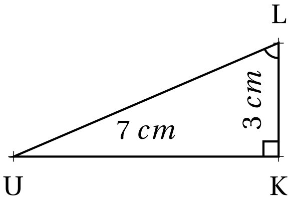
2. Calculer en justifiant votre réponse une valeur approchée au millimètre près des mesures AC et AB
3. Que remarquez-vous pour le côté [BC] ?
4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?
5. En utilisant votre calculatrice calculer $\cos(30°)$, $\sin(30°)$, $\cos(60°)$ et $\sin(60°)$.
Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer cela ?

Exercice n° 2.6 : Calcul d'un angle — Épisode 1



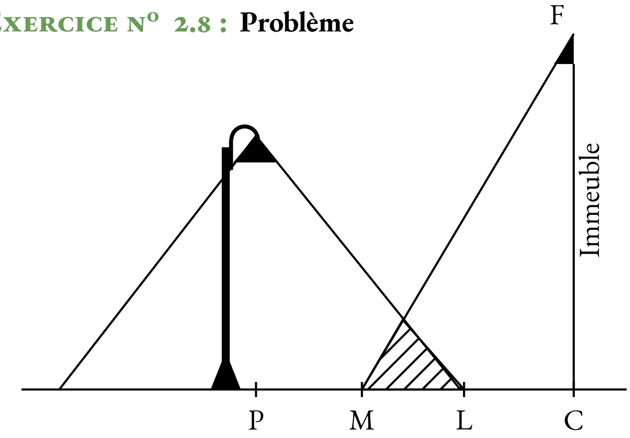
Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{RPT}$ et $\widehat{RTP}$

Exercice n° 2.7 : Calcul d'un angle — Épisode 2

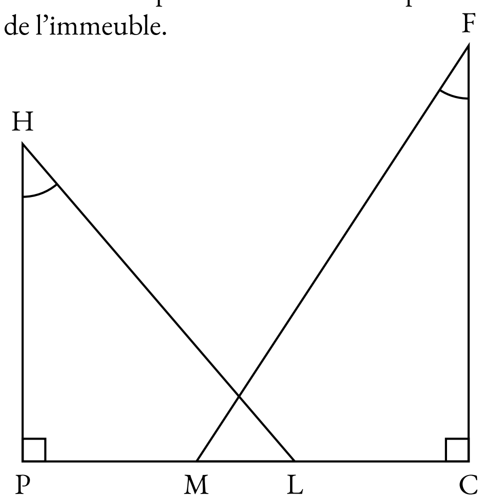


Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{KUL}$ et $\widehat{KLU}$

Exercice n° 2.8 : Problème



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

PC = $5,5\ m$, CF = $5\ m$ et HP = $4\ m$

$\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3,4\ m$.

2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.

3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *7 points* ★★

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

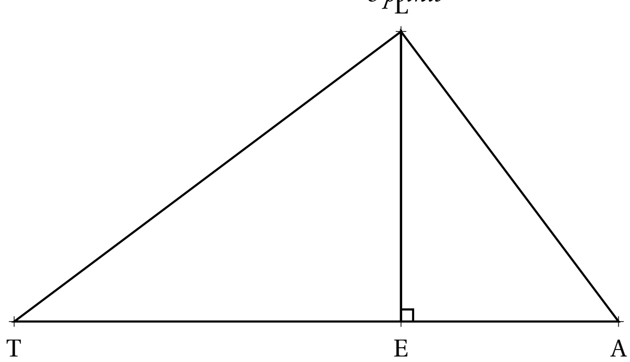
1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points* ★★



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

- E $\in$ [TA] ;
- (LE) $\perp$ (EA) ;
- LT = 16 cm, LA = 12 cm et TA = 20 cm.

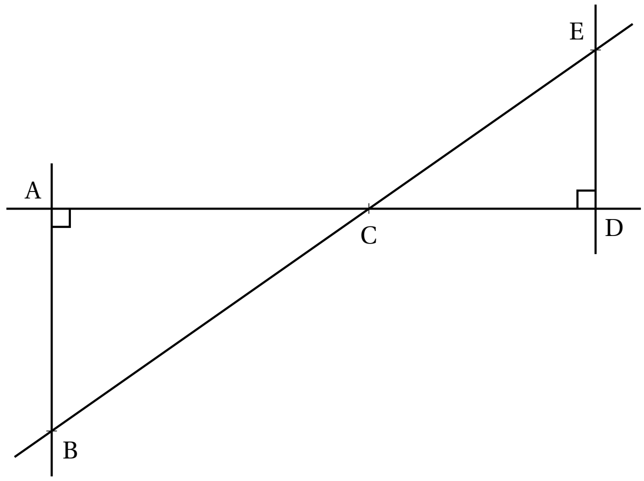
1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{\text{LTA}}$.

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{\text{TLE}}$, $\widehat{\text{ELA}}$ et $\widehat{\text{LAE}}$.

Exercice n° 3 : *7 points* ★★



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinées en vraie grandeur, on sait que :

- Les points A, C et D sont alignés ;
- les points B, C et E sont alignés ;
- (AB) $\perp$ (AD) et (ED) $\perp$ (AD) ;
- CD = 5 m, CA = 7 m et $\widehat{\text{ECD}} = 35°$.

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

4. Déterminer la mesure de $\widehat{\text{ACB}}$.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Correction

Calcul littéral

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = \left(6x^2 + 21x - 10x - 35\right) - \left(3x - 15x^2 - 5 + 25x\right)$

Il vaut mieux protéger les calculs par des parenthèses pour éviter les erreurs causées par le signe moins.

$f(x) = 6x^2 + 21x - 10x - 35 - 3x + 15x^2 + 5 - 25x$

$\boxed{f(x) = 21x^2 - 17x - 30}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

$\boxed{f(0) = -30}$

$f(\frac{1}{3}) = 21\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 17 \times \frac{1}{3} - 30 = 21 \times \frac{1}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{21}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{7}{3} - \frac{17}{3} - \frac{90}{3} = \boxed{-\frac{100}{3}}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$
$f(x) = (3x-5)\left((2x+7) - (1-5x)\right)$
$f(x) = (3x-5)(2x+7-1+5x)$

$\boxed{f(x) = (3x-5)(7x+6)}$

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

$$(3x-5)(7x+6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 0 \\ 3x-5+5 &= 0+5 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x+6 &= 0 \\ 7x+6-6 &= 0-6 \\ 7x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{5}{3} \text{ et } -\frac{6}{7}}$

Exercice n° 2 : Correction

Trigonométrie

1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

Comparons $LT^2 + LA^2$ et TA^2 :

$LT^2 + LA^2$	TA^2
$16^2 + 12^2$	20^2
$256 + 144$	
400	400

Comme

$$LT^2 + LA^2 = TA^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle LTA est rectangle en L}}$.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

Dans le triangle LTA rectangle en L, on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

$\cos\widehat{LTA} = \dfrac{16\ cm}{20\ cm} = 0,8$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\sin\widehat{LTA} = \dfrac{12\ cm}{20\ cm} = 0,6$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\tan\widehat{LTA} = \dfrac{12\ cm}{16\ cm} = 0,75$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{LTA} \approx 36,87°}$

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

Dans le triangle LTE rectangle en E on a :

$\cos 36,87° = \dfrac{TE}{16\ cm}$ donc $\boxed{TE = 16\ cm \times \cos 36,87° \approx 12,8\ cm \text{ au millimètre près.}}$

$\sin 36,87° = \dfrac{LE}{16\ cm}$ donc $\boxed{LE = 16\ cm \times \sin 36,87° \approx 9,6\ cm \text{ au millimètre près.}}$

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

On sait que la somme des angles dans un triangle est égale à 180°.

Dans le triangle TLE :

$\widehat{TLE} + \widehat{LTE} + \widehat{LET} = 180°$ donc $\widehat{TLE} + 36,87° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{TLE} = 180° - 90° - 36,87° = 53,13°}$

Dans le triangle TLA :

$\widehat{TLA} + \widehat{LTA} + \widehat{LAT} = 180°$ donc $\widehat{LAT} + 36,87° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{LAT} = 180° - 90° - 36,87° = 53,13°}$

Dans le triangle LEA :

$\widehat{LEA} + \widehat{LAE} + \widehat{ALE} = 180°$ donc $\widehat{ELA} + 53,13° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{ELA} = 180° - 90° - 53,13° = 36,87°}$

Exercice n° 3 : Correction

Thalès — Trigonométrie

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

Dans le triangle CDE rectangle en D on a :

$\cos 35° = \dfrac{5\ m}{CE}$ donc $\boxed{CE = \dfrac{5\ m}{\cos 35°} \approx 6,11\ m \text{ au centième près.}}$

$\tan 35° = \dfrac{DE}{5\ m}$ donc $\boxed{DE = 5\ m \times \tan 35° \approx 3{,}5\ m \text{ au centième près.}}$

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

Les droites (ED) et (AB) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles.

$\boxed{\text{Les droites (ED) et (AB) sont parallèles.}}$

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C. On sait que (AB)//(ED).
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{5\ m}{7\ m} = \frac{6{,}11\ m}{CB} = \frac{3{,}5\ m}{AB}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$CB = \dfrac{7\ m \times 6{,}11\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{CB \approx 8{,}55\ m}$

$AB = \dfrac{3{,}5\ m \times 7\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{AB \approx 4{,}9\ m}$

4. Déterminer la mesure de $\widehat{ACB}$.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ECD}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux.

$\boxed{\widehat{ACB} = 35°}$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) + (7x-1)(6x+3)$

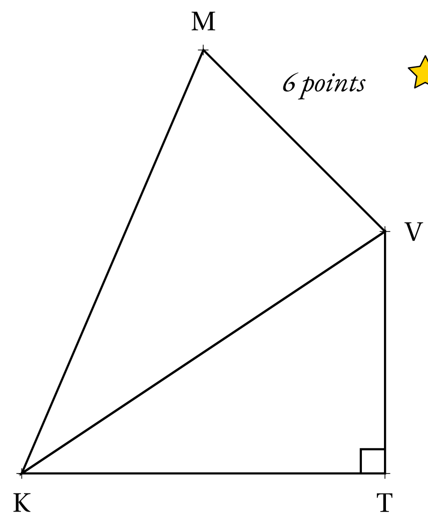
1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

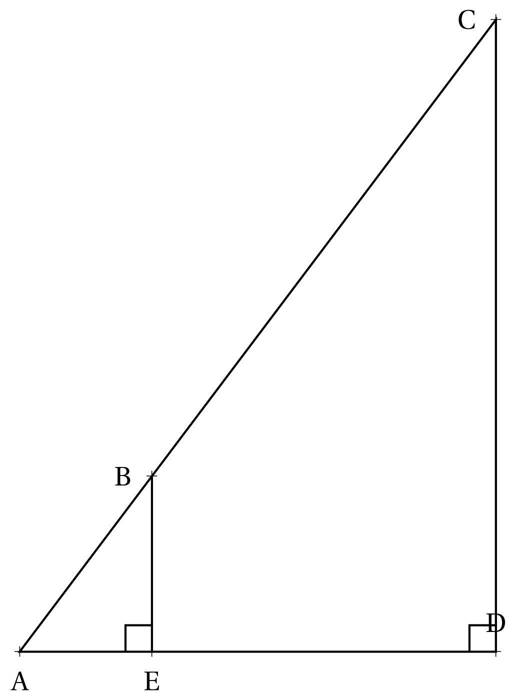
- Le triangle KTV est rectangle en T ;
- $\widehat{VKT} = 39°$;
- KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m

1. Calculer VT et KT. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.

Exercice n° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- E ∈ [AD] et B ∈ [AC] ;
- AEB est rectangle en E ;
- ADC est rectangle en D ;
- $\widehat{BAE} = 53°$;
- AE = 5 cm et ED = 13 cm.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral

Exercice n° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$ et $g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(-3x-1) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points*

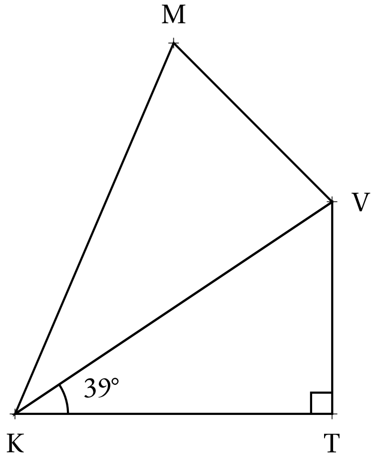
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

- Le triangle KTV est rectangle en T ;
- $\widehat{VKT} = 39°$;
- $KV = 76\,m$, $VM = 57\,m$ et $MK = 95\,m$

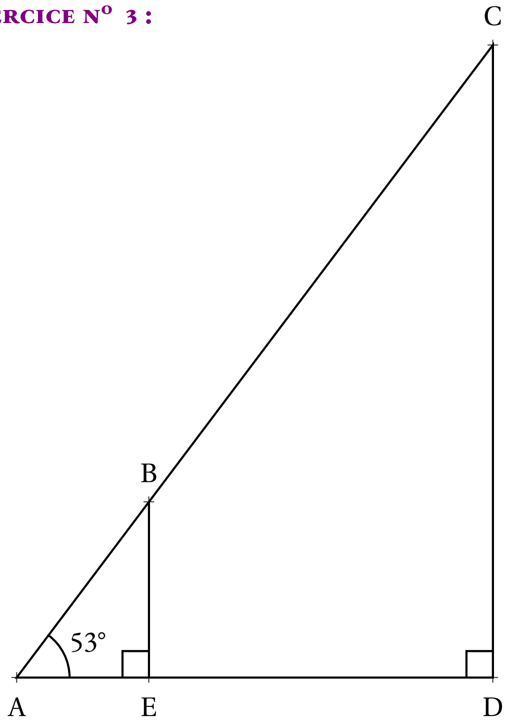
1. Calculer VT et KT.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.



EXERCICE N° 3 : *7 points* ★★



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- $E \in [AD]$ et $B \in [AC]$;
- AEB est rectangle en E ;
- ADC est rectangle en D ;
- $\widehat{BAE} = 53°$;
- $AE = 5\,\text{cm}$ et $ED = 13\,\text{cm}$.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral — CORRECTION

Exercice n° 1 : Calcul littéral CORRECTION

MOYEN

Développer et factoriser

1. $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (21x^2 + 14x - 3x - 2) - (42x^2 + 21x - 6x - 3)$

$f(x) = 21x^2 + 14x - 3x - 2 - 42x^2 - 21x + 6x + 3$

$\boxed{f(x) = -21x^2 - 4x + 1}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = (5x-1)(5x-1) - (4x+3)(4x+3)$

$g(x) = (25x^2 - 5x - 5x + 1) - (16x^2 + 12x + 12x + 9)$

$g(x) = 25x^2 - 5x - 5x + 1 - 16x^2 - 12x - 12x - 9$

$\boxed{g(x) = 9x^2 - 34x - 8}$

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

$f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (7x-1)[(3x+2) - (6x+3)]$

$f(x) = (7x-1)(3x+2-6x-3)$

$\boxed{f(x) = (7x-1)(-3x-1)}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = [(5x-1) + (4x+3)][(5x-1) - (4x+3)]$

$g(x) = (5x-1+4x+3)(5x-1-4x-3)$

$\boxed{g(x) = (9x+2)(x-4)}$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 0 \\ 7x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 7x &= 1 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 5 &= 0 \\ 9x + 5 - 5 &= 0 - 5 \\ 9x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{7} \text{ et } -\frac{5}{9}}$

Exercice n° 2 : Trigonométrie CORRECTION

MOYEN

Calculer un angle ou un côté avec la trigonométrie

1. Dans le triangle VTK, rectangle en T, l'hypoténuse est le côté[VK].

Calcul de VT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté opposé à l'angle à 39°.

$\sin 39° = \dfrac{VT}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{VT = 76\,\text{m} \times \sin 39° \approx 47{,}83\,\text{m} \text{ au centimètre près.}}$

Calcul de KT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté adjacent à l'angle à 39°.

$\cos 39° = \dfrac{KT}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{KT = 76\,\text{m} \times \cos 39° \approx 59{,}06\,\text{m} \text{ au centimètre près.}}$

On pouvait aussi, même si je le déconseille, utiliser le théorème de Pythagore :
Dans le triangle KTV rectangle en T,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TK^2 + TV^2 = KV^2$$

$$\begin{aligned} TK^2 + 47,83^2 &= 76^2 \\ TK^2 + 2287,7089 &= 5776 \\ TK^2 &= 5776 - 2287,7089 \\ TK^2 &= 3488,2911 \\ TK &= \sqrt{3488,2911} \\ TK &\approx 59,06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 59,06^2 + TV^2 &= 76^2 \\ 3488,0836 + TV^2 &= 5776 \\ TV^2 &= 5776 - 3488,0836 \\ TV^2 &= 2287,9164 \\ TV &= \sqrt{2287,9164} \\ TV &\approx 47,83 \end{aligned}$$

2. Comparons $VM^2 + VK^2$ et MK^2 :

$VM^2 + VK^2$	MK^2
$57^2 + 76^2$	95^2
$3249 + 5776$	
9025	9025

Comme $VM^2 + VK^2 = MK^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle VKM est rectangle en V}}$.

3. Dans le triangle VKM rectangle en V, on peut calculer au choix :

$\cos\widehat{MKV} = \dfrac{76\,\text{m}}{95\,\text{m}}$
$\cos\widehat{MKV} = 0,8$

$\sin\widehat{MKV} = \dfrac{57\,\text{m}}{95\,\text{m}}$
$\sin\widehat{MKV} = 0,6$

$\tan\widehat{MKV} = \dfrac{57\,\text{m}}{76\,\text{m}}$
$\tan\widehat{MKV} = 0,75$

Dans tous les cas, à la calculatrice, on arrive à $\boxed{\widehat{MKV} \approx 36,9°}$.

Exercice n° 3 : Trigonométrie, Pythagore et Thalès

Correction

MOYEN
Utiliser les grands résultats de la géométrie

1. Dans le triangle AEB, rectangle en E, l'hypoténuse est le côté [AB].

Calcul de EB :
On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{BE}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{BE = 5\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 6,6\,\text{cm au millimètre près.}}$

Calcul de AB :
On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{5\,\text{cm}}{AB}$ donc $\boxed{AB = \dfrac{5\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 8,3\,\text{cm au millimètre près.}}$

On pouvait aussi utiliser le théorème de Pythagore pour trouver le second côté… mais je le déconseille !

2. Les droites (EB) et (DC) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

$\boxed{\text{Les droites (EB) et (DC) sont parallèles.}}$

3. On pouvait utiliser deux raisonnements :
Avec la trigonométrie :
Dans le triangle ADC, rectangle en D, l'hypoténuse est le côté [AC].

Calcul de CD :

On connaît la mesure du côté adjacent $AD = AE + ED = 5\,\text{cm} + 13\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$ et on veut le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{CD}{18\,\text{cm}}$ donc $\boxed{CD = 18\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 23{,}9\,\text{cm} \text{ au millimètre près.}}$

Calcul de AC :

On connaît la mesure du côté adjacent AD et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{18\,\text{cm}}{AD}$ donc $\boxed{AD = \dfrac{18\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 29{,}9\,\text{cm} \text{ au millimètre près.}}$

Avec le théorème de Thalès :
Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A, les droites (BE) et (CD) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}$$

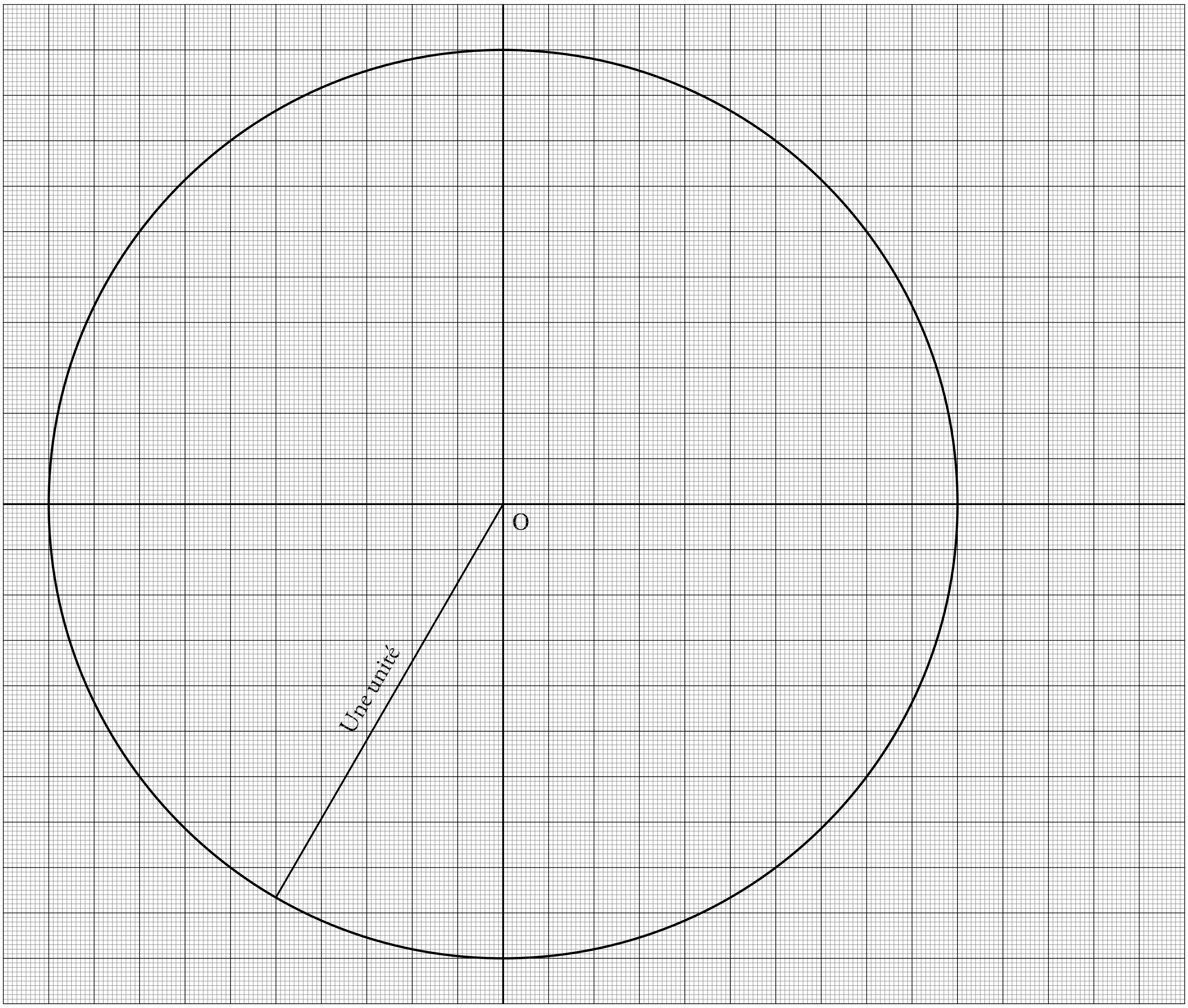
$$\frac{5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} = \frac{8{,}3\,\text{cm}}{AC} = \frac{6{,}6\,\text{cm}}{DC}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AC = \dfrac{8{,}3\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $AC = \dfrac{149{,}4\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $AC \approx 29{,}9\,\text{cm}$

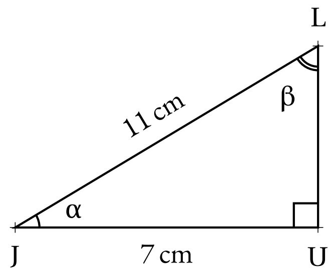
$DC = \dfrac{6{,}6\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $DC = \dfrac{118{,}8\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $DC \approx 23{,}8\,\text{cm}$

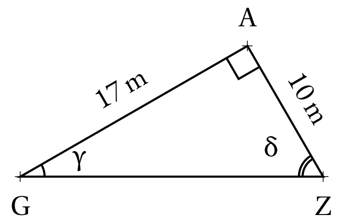
Le cercle trigonométrique

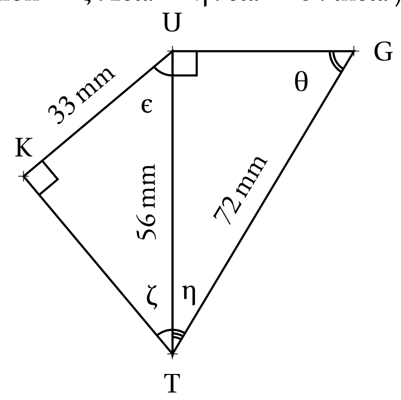


Exercice n° 1 : Calculer la mesure d'un angle

Pour chacune des figures suivantes, déterminer, en justifiant votre réponse, une valeur approchée des angles marqués par une lettre grecque, au dixième de degré près. (α : alpha — β : beta — γ : gamma — δ : delta — ϵ : epsilon — ζ : zeta — η : eta — θ : theta)

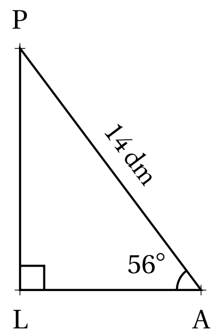


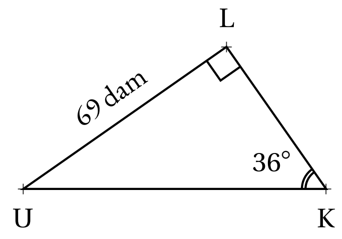


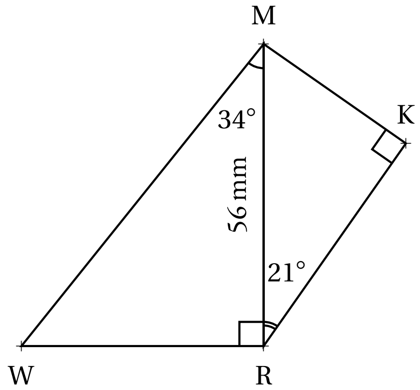


Exercice n° 2 : Calculer la mesure d'un côté

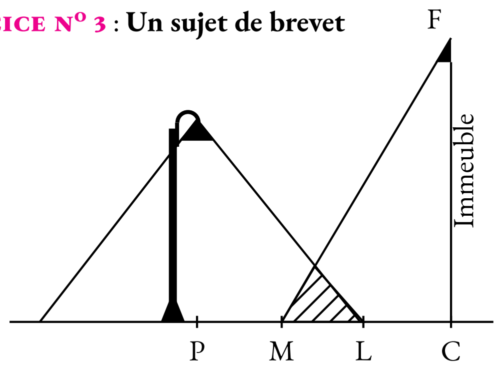
Pour chacune des figures suivantes, déterminer par le calcul, en justifiant votre réponse, la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième d'unité près, de chacune des mesures des côtés des triangles rectangles.



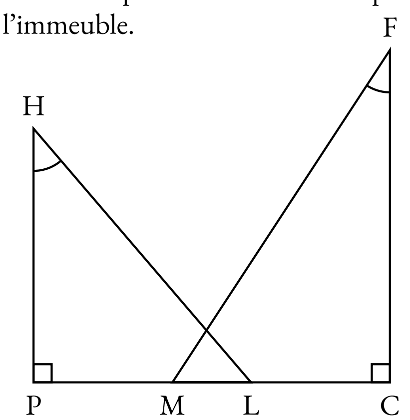




Exercice n° 3 : Un sujet de brevet



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :

On dispose des données suivantes :

PC = $5,5\ m$, CF = $5\ m$, HP = $4\ m$ et $\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3,4\ m$.

2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.

3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Exercices — Correction

Exercice n° 1

Correction

Dans le triangle JLU **rectangle en** U.

On connaît le côté adjacent à l'angle α et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{7\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\alpha \approx 50,5°}$

On connaît le côté opposé à l'angle β et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\beta$

$\sin\beta = \dfrac{7\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\beta \approx 39,5°}$

Comme attendu, on constate que α et β sont complémentaires, c'est à dire que $50,5° + 39,5° = 90°$.

Dans le triangle GAZ **rectangle en** A.

On connaît le côté adjacent à l'angle γ et le côté opposé, on peut donc calculer $\tan\gamma$

$\tan\gamma = \dfrac{10\,\text{m}}{17\,\text{m}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\gamma \approx 30,5°}$

On connaît le côté opposé à l'angle δ et le côté opposé, on peut donc calculer $\tan\delta$

$\tan\delta = \dfrac{17\,\text{m}}{10\,\text{m}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\delta \approx 59,5°}$

Comme attendu, on constate que γ et δ sont complémentaires, c'est à dire que $30,5° + 59,5° = 90°$.

Dans le triangle KUT **rectangle en** K.

On connaît le côté adjacent à l'angle ϵ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\epsilon$

$\cos\epsilon = \dfrac{33\,\text{mm}}{56\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\epsilon \approx 53,9°}$

On connaît le côté opposé à l'angle ζ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\zeta$

$\sin\zeta = \dfrac{33\,\text{mm}}{56\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\zeta \approx 36,1°}$

Comme attendu, on constate que ϵ et ζ sont complémentaires, c'est à dire que $53,9° + 36,1° = 90°$.

Dans le triangle TUG **rectangle en** U.

On connaît le côté adjacent à l'angle η et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\eta$

$\cos\eta = \dfrac{56\,\text{mm}}{72\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\eta \approx 38,9°}$

On connaît le côté opposé à l'angle θ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\theta$

$\sin\theta = \dfrac{56\,\text{mm}}{72\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\theta \approx 51,1°}$

Comme attendu, on constate que η et θ sont complémentaires, c'est à dire que $38,9° + 51,1° = 90°$.

Dans le triangle PLA **rectangle en** L

Calculons LA

On connaît la mesure de l'hypoténuse PA.
On cherche la mesure de LA le côté adjacent à l'angle à 56°.

$$\cos 56° = \frac{\text{LA}}{14\,\text{dm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{LA} = 14\,\text{dm} \times \cos 56° \approx 7{,}8\,\text{dm}}$

Calculons PL

On connaît la mesure de l'hypoténuse PA.
On cherche la mesure de PL le côté opposé à l'angle à 56°.

$$\sin 56° = \frac{\text{PL}}{14\,\text{dm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{PL} = 14\,\text{dm} \times \sin 56° \approx 11{,}6\,\text{dm}}$

Dans le triangle ULK **rectangle en** L

Calculons LK

On connaît la mesure de LU le côté opposé à l'angle à 36°.
On cherche la mesure de LK le côté adjacent à l'angle à 36°.

$$\tan 36° = \frac{69\,\text{dam}}{\text{LK}}$$

Ainsi $\boxed{\text{LK} = \frac{69\,\text{dam}}{\tan 36°} \approx 95\,\text{dam}}$

Calculons UK

On connaît la mesure de LU le côté opposé à l'angle à 36°.
On cherche la mesure de UK, l'hypoténuse du triangle.

$$\sin 36° = \frac{69\,\text{dam}}{\text{UK}}$$

Ainsi $\boxed{\text{UK} = \frac{69\,\text{dam}}{\sin 36°} \approx 117{,}4\,\text{dam}}$

Dans le triangle WRM **rectangle en** R

Calculons WM

On connaît la mesure de MR le côté adjacent à l'angle à 34°.
On cherche la mesure de WM l'hypoténuse du triangle.

$$\cos 34° = \frac{56\,\text{mm}}{\text{WM}}$$

Ainsi $\boxed{\text{WM} = \frac{56\,\text{mm}}{\cos 34°} \approx 67{,}5\,\text{mm}}$

Calculons WR

On connaît la mesure de MR le côté adjacent à l'angle à 34°.
On cherche la mesure de WR le côté opposé à l'angle à 34°.

$$\tan 34° = \frac{\text{WR}}{56\,\text{mm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{WR} = 56\,\text{mm} \times \tan 34° \approx 37{,}8\,\text{mm}}$

Dans le triangle MKR **rectangle en** K

Calculons MK

On connaît la mesure de MR l'hypoténuse du triangle.
On cherche la mesure de MK le côté opposé à l'angle à 21°.

$$\sin 21° = \frac{\text{MK}}{56\,\text{mm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{MK} = 56\,\text{mm} \times \sin 21° \approx 20\,\text{mm}}$

Calculons RK

On connaît la mesure de MR l'hypoténuse du triangle.
On cherche la mesure de RK, le côté adjacent de l'angle à 21°.

$$\cos 21° = \frac{\text{RK}}{56\,\text{mm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{RK} = 56\,\text{mm} \times \cos 21° \approx 52{,}3\,\text{mm}}$

Exercice n° 3 Correction

1. Dans le triangle HPL rectangle en P.
On connaît la mesure HP du côté adjacent à l'angle $\widehat{PHL}$.
On cherche la mesure PL du côté opposé à l'angle $\widehat{PHL}$.

$\tan\widehat{PHL} = \dfrac{PL}{HP}$, $\tan 40° = \dfrac{PL}{4\,m}$ d'où $\boxed{PL = 4\,m \times \tan 40° \approx 3{,}4\,m}$

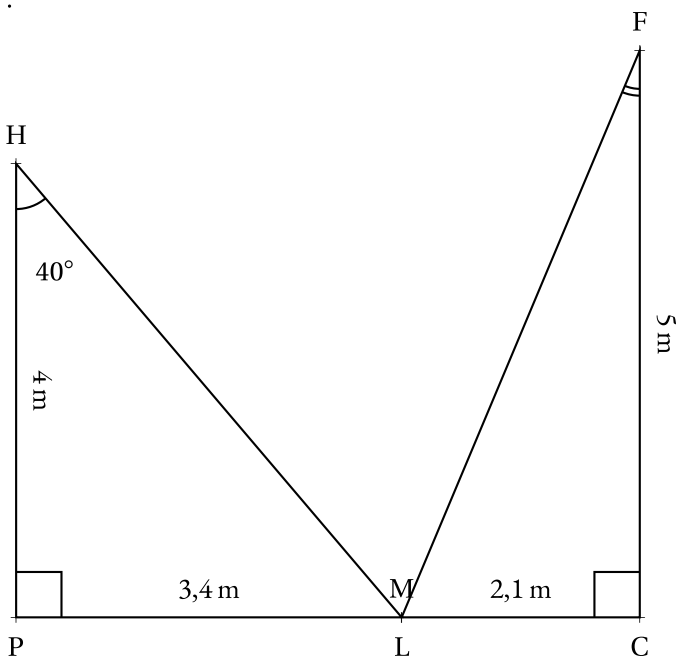
2. On sait que $PC = 5{,}5\,m$ et que $PL \approx 3{,}4\,m$.
On a donc $LC = PC - PL \approx 5{,}5\,m - 3{,}4\,m \approx 2{,}1\,m$.

Il reste à calculer MC.
Dans le triangle FMC rectangle en C.
On connaît la mesure FC du côté adjacent à l'angle $\widehat{MFC}$.
On cherche la mesure MC du côté opposé à l'angle $\widehat{MFC}$.

$\tan\widehat{MFC} = \dfrac{MC}{FC}$, $\tan 33° = \dfrac{MC}{5\,m}$ d'où $\boxed{MC = 5\,m \times \tan 33° \approx 3{,}2\,m}$

Finalement $\boxed{ML = MC - LC \approx 3{,}2\,m - 2{,}1\,m \approx 1{,}1\,m}$

3. On souhaite obtenir la figure suivante :



Dans le triangle FLC rectangle en C.
On connaît la mesure FC du côté adjacent à l'angle $\widehat{MFC}$.
On connaît la mesure LC du côté opposé à l'angle $\widehat{MFC}$.

$\tan\widehat{MFC} = \dfrac{LC}{FC} = \dfrac{2{,}1\,m}{5\,m}$.

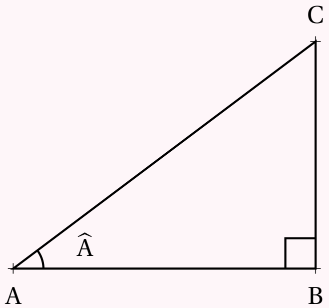
À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{MFC} \approx 23°}$.

Trigonométrie

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en B :

- le plus long côté du triangle, opposé à l'angle droit est l'hypoténuse ;
- le côté de l'angle droit étant un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
- le côté de l'angle droit n'étant pas un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$.



- [AC] est l'hypoténuse du triangle ;
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
- [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$;
- [BC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$;

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en B, il existe trois grandeurs qui ne dépendent que de l'angle $\widehat{A}$ que l'on nomme cosinus, sinus et tangente de l'angle $\widehat{A}$. La connaissance de l'une de ces grandeurs permet de retrouver la mesure de l'angle $\widehat{A}$.
On les définit ainsi :

$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à l'angleă}\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle}\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle}\widehat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle}\widehat{A}}$$

Moyen mnémotechnique :

L'acronyme suivant permet de se souvenir facilement de ces trois définitions :

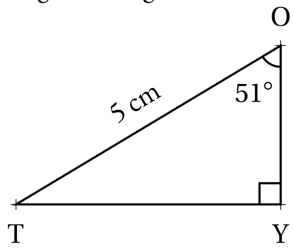
C A H   S O H   T O A

C pour cosinus, S pour sinus et T pour tangente.
A pour adjacent, O pour opposé et H pour hypoténuse.

Usages :

Pour calculer la longueur d'un côté connaissant un côté et un angle

TOY un triangle rectangle en T.



Calculons la longueur OY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 51°. On utilise donc le **cosinus**.

$\cos 51° = \dfrac{\text{OY}}{5\ cm}$ soit $\boxed{\text{OY} = 5\ cm \times \cos 51°}$

Finalement OY $\approx 3,15\ cm$

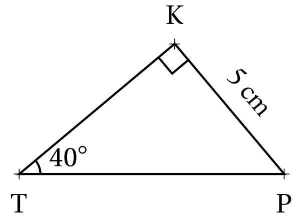
Calculons la longueur TY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté opposé à l'angle à 51°. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 51° = \dfrac{\text{TY}}{5\ cm}$ soit $\boxed{\text{TY} = 5\ cm \times \sin 51°}$

Finalement TY $\approx 3,89\ cm$

KPT un triangle rectangle en K.



Calculons la longueur TP :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle de l'hypoténuse. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 40° = \dfrac{5\ cm}{\text{TP}}$ soit $\boxed{\text{TP} = \dfrac{5\ cm}{\sin 40°}}$

Finalement TP $\approx 7,78\ cm$

Calculons la longueur TK :

On connaît la mesure du côté opposé, on veut celle du côté adjacent. On utilise donc la **tangente**.

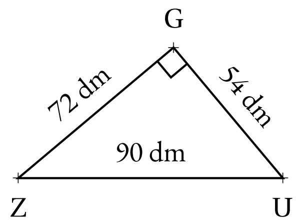
$\tan 40° = \dfrac{5\ cm}{\text{TK}}$ soit $\boxed{\text{TK} = \dfrac{5\ cm}{\tan 40°}}$

Finalement TK $\approx 5,96\ cm$

Pour résoudre une équation du type $5 = \dfrac{x}{7}$ ou $8 = \dfrac{7}{x}$, on écrit chaque membre comme une fraction, $\dfrac{5}{1} = \dfrac{x}{7}$ et $\dfrac{8}{1} = \dfrac{7}{x}$ puis on utilise la règle de trois !

Pour calculer la mesure d'un angle connaissant deux côtés

ZUG un triangle rectangle en G.



Calculons la mesure des angles $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$.

On peut calculer au choix soit le cosinus, le sinus ou la tangente de chacun de ces angles.

Ainsi $\cos\widehat{UZG} = \dfrac{72\ dm}{90\ dm} = 0,8$.

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{UZG} \approx 36,87°}$

Il faut saisir seconde cos 0,8

Comme $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$ sont complémentaires, $\widehat{GUZ} = 90° - 36,87° = 53,13°$

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD

— **Web :** pi.ac3j.fr

— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 23 juin 2024 à 16:22

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 23 juin 2024 à 16:22.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : **`https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college`**.