Chapitre VII

Proportionnalité et fonction linéaire

Sommaire

Finance

Intérêts, crédit et agios

Troisième

✧✧✧

Livret Jeune

Le Livret Jeune est un compte d'épargne défiscalisé réservé aux jeunes entre 12 et 25 ans. Les versements sur ce compte ne peuvent pas dépasser 1 600 € en dehors des intérêts. La banque LGL propose un compte rémunéré à 2 %.

1. Le 1er janvier de l'année de ses 12 ans, les parents de Mathéo ont placé 1 600 € sur un Livret Jeune de la LGL.
On note C_{12} le montant en euros sur son compte le premier janvier de l'année de ses 12 ans, ainsi $C_{12} = 1\,600$
Quels intérêts ont été ajoutés sur ce compte un an plus tard ?
Calculer C_{13} le montant en euros sur son compte le 1er janvier de l'année de ses 13 ans ?

2. Calculer C_{14} le montant en euros son compte le 1er janvier de l'année de ses 14 ans ?

3. Calculer C_{15} le montant en euros sur compte le 1er janvier de l'année de ses 15 ans ?

4. Calculer les quotients $\dfrac{C_{13}}{C_{12}}$, $\dfrac{C_{14}}{C_{13}}$ et $\dfrac{C_{15}}{C_{16}}$.

5. En déduire C_{18} le montant en euros sur son compte pour sa majorité ?

6. En déduire C_{25} le montant en euros son compte l'année de ses 25 ans ?

Le découvert autorisé

Ma conseillère financier m'a accordé un découvert autorisé de 1 500 €. Le montant des agios est fixé à 15 % annuel, cela signifie que 100 € de découvert pendant une année de 365 jours coûte 15 €. Le montant des agios est proportionnel aux nombres de jours de découvert.

1. Le mois dernier j'ai eu 450 € de découvert pendant 12 jours. Combien cela va-t-il me coûter ?

2. La durée maximale d'un découvert autorisé est de 30 jours. Combien coûte un découvert de 1 500 € pendant 30 jours ?

3. J'ai l'habitude d'être à découvert les cinq derniers jours du mois pour un montant en moyenne de 200 €.
Combien me coûte chaque année cette mauvaise habitude ?

Le crédit bancaire

Je souhaite acquérir une moto. Elle coûte 15 000 €. Ma banque me propose un crédit à la consommation au TAEG de 5 % sur 5 ans. On me propose un crédit à amortissement constant. Cela signifie que tous les mois je rembourse le même montant de la somme empruntée auquel la banque ajoute les intérêts d'emprunt.

1. Sans tenir compte des intérêts d'emprunt, quel montant constant (l'amortissement) vais-je rembourser chaque mois pour cette moto ?

Pour me faire payer les intérêts d'emprunt, ma banque calcule au début de chaque année le reste de la somme que je lui dois et elle me fait payer 5 % de cette somme en intérêts d'emprunt annuel. Ces intérêts sont ensuite répartis équitablement sur chacune des mensualités.

2. Quels intérêts d'emprunt vais-je payer la première année ? Calculer les mensualités de la première année du crédit ?

3. Quelles seront les mensualités durant la deuxième année du crédit ?

4. Quelle seront les mensualités durant les trois années suivantes ?

5. Combien aura coûté finalement cette moto à la fin du remboursement de ce crédit ?

6. Pour l'achat d'une maison à 210 000 € sur 20 ans au TAEG de 2 %, pour quelle raison la banque ne peut-elle pas proposer un emprunt à amortissement constant ?

Agios : ensemble des frais perçus par la banque pour le fonctionnement d'un compte.
Amortissement : partie du capital emprunté qui est remboursé à chaque échéance, par exemple chaque mois.
Compte epargne : compte sur lequel les fonds sont disponibles sous forme de retrait d'espèces, il est forcément créditeur et peut faire l'objet d'une rémunération sous forme d'intérêts fiscalisés ou non.
Crédit à la consommation : prêt accordé par une banque au particulier pour financer un achat important.
Intérêts d'emprunt : rémunération du prêt que l'emprunteur verse périodiquement au prêteur.
Mensualités : sommes versées mensuellement pour rembourser un crédit à la consommation.

Finance

Intérêts, crédit et agios — Correction

I — Augmentation et diminution en pourcentage

Propriété 7.1 : Augmentation et diminution en pourcentage

On note x un nombre positif quelconque.

Augmenter une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1+\dfrac{x}{100}$

Diminuer une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{x}{100}$

Démonstration :

Sur un exemple générique. Notons G une grandeur.

Augmentons cette grandeur de 20 %.
20 % de G revient à effectuer $G\times\dfrac{20}{100}=0,20G$
Ajoutons l'augmentation, la grandeur augmentée est : $G+0,20G=G\times1+G\times0,20=G\times(1+0,20)$ on factorise G !
On obtient bien $G\times(1+0,20)=G\times(1+\dfrac{20}{100})=1,20G$

Diminuons cette grandeur de 20 %.
On reprend le raisonnement précédent, la grandeur diminuée est : $G-0,20G=G\times1-G\times0,20=G\times(1-0,20)$.
On obtient bien $G\times(1-0,20)=G\times(1-\dfrac{20}{100})=0,80G$

CQFD

Exemples :
Augmenter une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{35}{100}=1+0,35=1,35$

Diminuer une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{35}{100}=1-0,35=0,65$

Augmenter une grandeur de 2,7 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{2,7}{100}=1+0,027=1,027$

Diminuer une grandeur de 1 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{1}{100}=1-0,01=0,99$

Remarques :
Augmenter une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{100}{100}=1+1=2$

Diminuer une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{100}{100}=0$

Diminuer d'un pourcentage inférieur à 100 % n'a pas de sens ! Par contre une augmentation est possible.

Augmenter une grandeur de 5 000 % revient à multiplier par $1+\dfrac{5\,000}{100}=1+50=51$

Attention au biais cognitif suivant : augmenter de 300 % revient à multiplier par 4 et pas 3 !!!

Méthode 7.1 : Effectuer une diminution ou une augmentation en pourcentage
Un livret d'épargne rémunère les dépôts de 1,5 % par an. On dépose 5 000 €sur ce livret.
De quelle montant dispose t-on au bout d'un an ? de deux ans ? de dix ans ?

Augmenter de 1,5 % revient à multiplier par $1+\dfrac{1,5}{100}=1+0,015=1,015$
Au bout d'un an il y aura : $5\,000$ € $\times 1,015=5\,075$ €.

Au bout de deux ans on aura : $5075 \text{ €} \times 1,015 = 5151,125 \text{ €}$ soit $5000 \text{ €} \times 1,015 \times 1,015 = 5000 \text{ €} \times 1,015^2$

Au bout de dix ans on aura : $5000 \text{ €} \times \underbrace{1,015 \times 1,015 \times \ldots \times 1,015}_{\text{10 fois}} = 5000 \text{ €} \times 1,015^{10} = 5802,704 \text{ €}$.

Méthode 7 . 2 : Déterminer une augmentation ou une diminution en pourcentage

Un prix est passé de 75 € à 57 €. Quel est le pourcentage de diminution ?

Il faut chercher le coefficient multiplicateur k tel que $75 \times k = 57$

Ainsi $k = \dfrac{57}{75} = 0,76$.

Or $0,76 = 1 - 0,24 = 1 - \dfrac{24}{100}$. On peut remarquer que $76\ \% + 24\ \% = 100\ \%$!

Il s'agit d'une diminution de 24 %.

II — La fonction linéaire

Définition 7.1 : La fonction linéaire

On choisit a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \rightarrow a \times x$$

La fonction linéaire de coefficient a modélise le programme de calcul suivant :

— Choisir un nombre ;
— Le multiplier par a ;
— Écrire le résultat.

Exemples :

$f(x) = 5x$ – la fonction linéaire de coefficient 5

$g(x) = x$ – la fonction linéaire de coefficient 1 car $x = 1 \times x$

$h(x) = -x$ – la fonction linéaire de coefficient -1 car $-x = -1 \times x$

$k(x) = -3x$ – la fonction linéaire de coefficient 3

$l(x) = \dfrac{x}{5}$ – la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{5}$ car $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{5} \times x$

$m(x) = 3x + 6$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du $+6$

$p(x) = 4x^2$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du x^2

$t(x) = \dfrac{1}{x}$ – ce n'est pas une fonction linéaire

Propriété 7.2 : Fonction linéaire et proportionnalité

Les images et les antécédents par une fonction linéaire sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient de la fonction linéaire.

Démonstration :

a un nombre et f la fonction linéaire de coefficient a.
Pour un nombre x quelconque, son image est $f(x) = ax$. On constate que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{ax}{x} = a$
Cela prouve que x et $f(x)$ sont proportionnels.

CQFD

Exemple :
Soit g la fonction linéaire de coefficient $-3,25$.
Dressons un tableau de valeurs de cette fonction.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	9,75	6,5	3,25	0	-3,25	-6,5	-9,75	-13

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité de coefficient $-3,25$.

Méthode 7 . 3 : Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre et son image
Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = -2$.

Il faut déterminer le coefficient a de cette fonction.
Comme pour tout x on a $f(x) = ax$ or $f(3) = -2$, on en déduit que $a \times 3 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{3}$
Il s'agit de la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{2}{3}$.

Propriété 7.3 :

Si f est une fonction linéaire alors $f(0) = 0$

Démonstration :

f la fonction linéaire de coefficient a donc pour tout nombre x on a $f(x) = ax$
Ainsi $f(0) = a \times 0 = 0$

Propriété 7.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

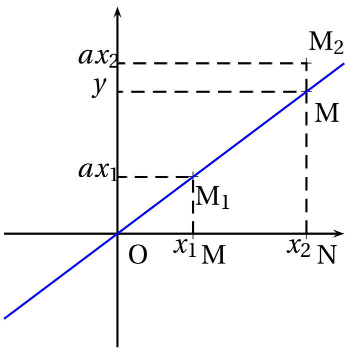
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Démonstration :

a un nombre quelconque et x_1 et x_2 deux nombres quelconques différents.
Nous pouvons commencer par traiter le cas où x_1 et x_2 sont positifs.

Considérons les points $\mathrm{O}(0;0)$, $\mathrm{M}_1(x_1, ax_1)$ et $\mathrm{M}_2(x_2; ax_2)$.
O, M_1 et M_2 sont trois points distincts de la représentation graphique de la fonctions linéaire de coefficient a, $f(x) = ax$.
Nous allons montrer que ces points sont alignés.

Considérons la droite (OM_1) et un point $\mathrm{M}(x_2; y_2)$ de la droite $(0\mathrm{M}_1)$ d'abscisse x_2. Nous allons prouver que $y_2 = ax_2$.



Dans le triangle OMN, comme les droites (MM_1) et (NN_1) sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, elles sont parallèles entre elles.
Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OM}_1} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{ON}_1} = \frac{\mathrm{MM}_1}{\mathrm{NN}_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{ON}_1} = \frac{ax_1}{y}$$

Ainsi comme $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{ax_1}{y}$ on a $y = \dfrac{x_2 \times ax_1}{x_1} = ax_2$

Ainsi le point M a pour coordonnées $\mathrm{M}(x_1; ax_1)$, il s'agit du point M_1.

Cela prouve que deux points quelconques, M_1 et M_2, de la représentation graphique de la fonction linéaire, $f(x) = ax$, sont alignés avec l'origine du repère.

Si x_1 et x_2 sont négatifs, on peut effectuer une symétrie de centre O pour obtenir deux points M'_1 et M'_2 dont les abscisses sont positives. Ces points sont donc alignés avec l'origine d'après la première partie. Or par propriété de la symétrie centrale, O, M_1 et $\mathrm{M}'1$ sont alignés ainsi que 0, M_2 et M'_2. Finalement O, M_1 et M_2 sont bien alignés.

Si x_1 ou x_2 est négatif, on raisonne de la même manière avec un seul symétrique.

CQFD

Exercices

Évolution en pourcentages

Troisième

Exercice n° 1 : Une histoire de soldes

Chez Lowcoast Blagnac, il y a des soldes exceptionnelles :

— 30 % de réduction sur tous les polos;

— 10 % de réduction supplémentaire en caisse sur le prix soldé.

1. Adriel a choisi un polo à 89 € . Combien va-t-il payer ?

2. Etania a pris trois tee-shirt à 34 € pièce et une sacoche à 57 €. Combien va-t-elle payer ?

3. En rentrant chez eux, Adriel et Etania se rendent sur le site officiel de Lowcoast. Le site propose 40 % de réduction sur tous les articles. Etania dit à Adriel qu'ils ont fait de meilleurs affaires en se rendant à Blagnac. A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.

Exercice n° 2 : Un crédit doit être remboursé

Solomon souhaite partir faire un tour du monde pendant son année de césure. Comme il n'est pas très économe, il doit demander un crédit à la consomation à sa banque pour financer son voyage. Il pense avoir besoin d'emprunter 7500 € pour réaliser son projet.
La banque lui propose un crédit au taux de 4,5 % pendant 7 ans et une mensualité de 104 € .

1. Solomon n'est pas un spécialiste de la finance. Il pense qu'il va rembourser 7,5 % en plus des 7500 € dont il a besoin, ce qui lui semble raisonnable. Combien Solomon pense-t-il que va lui coûter son prêt ?

2. Calculer le coût réel de son prêt en tenant compte de la proposition de la banque.

3. Quel pourcentage du montant emprunté représentent les intérêts remboursés ? Arrondir au dixième près.

Exercice n° 3 : Un placement de père de famille

À la naissance de sa petite fille Nada, le 1^er^janvier 2024, son grand-père a décidé de lui ouvrir un Livret A avec 3000 € .
Cette année, le Livret A est rémunéré au taux annuel de 3 % , cela signifie que chaque année, la banque augmente le capital du Livret de 3 % . Les intérêts obtenus s'ajoutent au capital de l'année et rapportent à leur tour des intérêts l'année suivante.

1. Combien aura Nada, le 1er janvier 2025 ?
2. Même question pour les 1er janvier 2026, 2027 et 2028 ? (On suppose que le taux reste inchangé !)
3. Expliquer pourquoi le capital détenu sur ce Livret A au bout de n années sera de 3000 € $\times 1,03^n$.
4. Combien aura Nada a sa majorité ?
5. Quel est le pourcentage d'augmentation de son capital en 18 ans ?

Exercice n° 4 : Il ne faut investir que l'argent qu'on est prêt à perdre !

En août 2021, Tilda a entendu parler des cryptomonnaies. Elle est alors convaincue qu'elle peut devenir riche en quelques semaines en misant sur ces actifs. En suivant des conseils d'influenceurs sur Touk Touk, elle s'est décidée à investir 500 € . Elle était sûre d'elle en achetant du DogeCoin, la cryptomonnaie d'Elon Musk !

1. En août 2021, un DogeCoin valait environ 0,29 €. Combien a-t-elle pu en acheter ? Arrondir au centième d'unité près.

Malheureusement, durant les mois qui ont suivi, le cours de cette cryptomonnaie n'a fait que chuter.
Lassée d'attendre, elle décide finalement de se débarasser de cet actif en juin 2022, un DogeCoin ne vaut plus que 0,04 €.

2. Combien a-t-elle perdu lors de ces transactions ?

3. De quelle proportion, exprimée en pourcentage, a baissé cette cryptomonnaie en moins d'un an ?

4. Si Tilda n'avait pas vendu ses DogeCoin, quel pourcentage d'augmentation lui aurait permis de retrouver sa mise de départ ?

Exercices — Correction

Exercice n° 1 **Correction**

Une histoire de soldes

1. Diminuer une grandeur de 30 % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{30}{100}=1-0,30=0,70$.

Diminuer une grandeur de 10 % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{10}{100}=1-0,10=0,90$

Ainsi, le polo passe de 89 € à 89 € $\times 0,70=62,30$ € puis $62,30\times 0,90=56,07$ €.

Adriel va payer 56,07 €.

2. Etania doit payer 3×34 € $+57$ € $=102$ € $+57$ € $=159$ €.

En déduisant d'abord 30 % on arrive à 159 € $\times 0,70=111,30$ € puis en caisse 111,30 € $\times 0,90=100,17$ €.

Etania va payer 100,17 €.

3. Diminuer une grandeur de 40 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{40}{100}=1-0,40=0,60$.

Adriel aurait ainsi payé 89 € $\times 0,60=53,40$ € et Etania 159 € $\times 0,60=95,40$ €.

Etania a tord, ils auraient dû faire leurs achats en ligne !

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 : Calcul littéral

(7 points)

On pose $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

2. Calculer $g(-2)$.

3. Factoriser $g(x)$.

4. Résoudre $(6x-3)(1-2x) = 0$

Exercice n° 2 : Les fonctions linéaires

(7 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Voici plusieurs fonctions. Lesquelles sont linéaires ?
On ne demande pas de justifier votre réponse.

$f(x) = 3x$ # $g(x) = -x$ # $h(x) = 3x-7$ # $l(x) = 0$

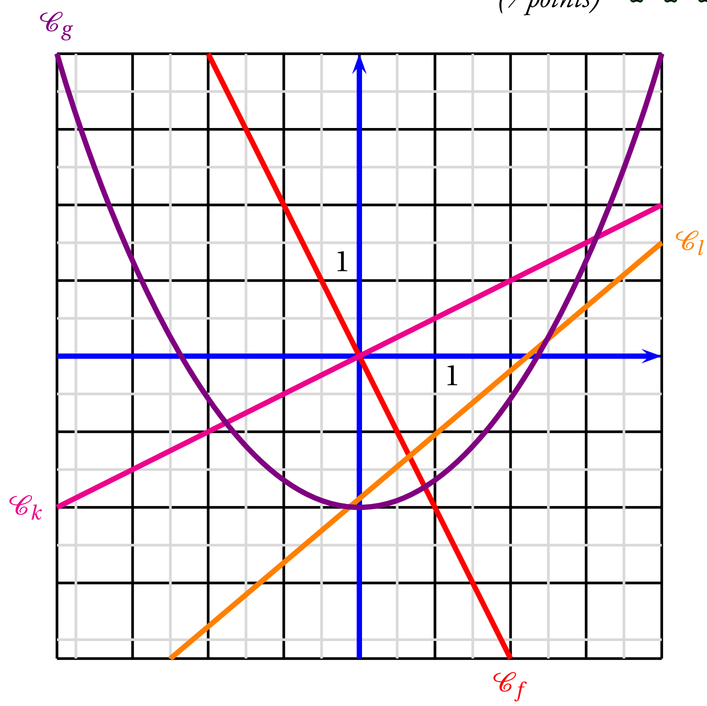
$k(x) = 8$ # $m(x) = \dfrac{x}{5}$ # $n(x) = 3x^2$ # $p(x) = 5x-2x$

2. f est une fonction linéaire tel que $f(5) = -3$.
Déterminer l'expression de la fonction f en justifiant votre réponse.

3. g est une fonction linéaire tel que $g(7) = 2$.
Calculer $g(5)$ en justifiant votre réponse.

4. Un prix augmente de 13% puis il diminue de 7%. On appelle h la fonction linéaire qui au prix de départ associe le prix après l'augmentation et la diminution. Quelle est l'expression de cette fonction ?

5. Voici les représentations graphiques de quatre fonctions.
Indiquer celles qui correspondent à des fonctions linéaires.
Pour ces fonctions linéaires, déterminer leurs expressions en justifiant votre réponse.



Exercice n° 3 : Scratch

(6 points)

Voici un algorithme programmé dans un langage utilisant des blocs.

1.a. Que va afficher le programme si le nombre de départ est 5 ?
1.b. Que va afficher le programme si le nombre de départ est -3 ?

2. Juliette prétend qu'en choisissant les nombres de départ 1 et 2 elle a obtenu le même nombre.
Est-ce vrai ?

3. En partant du nombre générique x, donner l'expression de la fonction $f(x)$ qui correspond à ce programme de calcul.

4. Développer et réduire $f(x) = (2x-7)(10x+5)$.

5. Quels nombres faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin du programme.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 — Correction

Calcul littéral

On pose $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$

1. $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$
$g(x) = (30x^2 + 12x - 15x - 6) - (42x^2 - 21x + 6x - 2)$
$g(x) = 30x^2 + 12x - 15x - 6 - 42x^2 + 21x - 6x + 2$

$\boxed{g(x) = -12x^2 + 12x - 4}$

2. $g(-2) = -12 \times (-2)^2 + 12 \times (-2) - 4 = -12 \times 4 - 24 - 4 = -48 - 28 = -76$

$\boxed{g(-2) = -76}$

3. $g(x) = {\color{red}(6x-3)}(5x+2) - (7x+1){\color{red}(6x-3)}$
$g(x) = {\color{red}(6x-3)}\,[(5x+2) - (7x+1))$
$g(x) = (6x-3)(5x+2-7x-1)$

$\boxed{g(x) = (6x-3)(-2x+1)}$

4. Résoudre $(6x-3)(1-2x) = 0$

$$(6x-1)(1-2x) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 6x-1 &= 0 \\ 6x-1{\color{red}+1} &= 0{\color{red}+1} \\ 6x &= 1 \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-2x &= 0 \\ 1-2x{\color{red}-1} &= 0{\color{red}-1} \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-2} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{6} \text{ et } 0,5}$

Exercice n° 2 — Correction

Les fonctions linéaires

1. $\boxed{f \text{ est une fonction linéaire de coefficient } 3 \text{ car } f(x) = 3 \times x.}$

$\boxed{g \text{ est une fonction linéaire de coefficient } -1 \text{ car } g(x) = -1 \times x.}$

$\boxed{h \text{ n'est pas une fonction linéaire, elle n'est pas de la forme } ax.}$

$\boxed{l \text{ est une fonction linéaire de coefficient } 0, \text{ car } l(x) = 0 \times x.}$

$\boxed{k \text{ n'est pas une fonction linéaire, elle n'est pas de la forme } ax.}$

$\boxed{m \text{ est une fonction linéaire de coefficient } \frac{1}{5} \text{ car } m(x) = \frac{x}{5} = \frac{1}{5}x.}$

$\boxed{n \text{ n'est pas une fonction linéaire, elle n'est pas de la forme } ax.}$

$\boxed{p \text{ est une fonction linéaire de coefficient } 3 \text{ car } p(x) = 5x - 2x = 3x.}$

2. f est une fonction linéaire, donc elle s'écrit $f(x) = ax$. On cherche la valeur de a.

On sait que $f(5) = -3$ donc $5 \times a = -3$ c'est à dire $a = -\frac{3}{5}$.

$\boxed{f(x) = -\frac{3}{5}x \text{ ou } f(x) = -\frac{3x}{5}.}$

3. g est une fonction linéaire, donc elle s'écrit $g(x) = ax$. On cherche la valeur de a.

On sait que $g(7) = 2$ donc $7 \times a = 2$ c'est à dire $a = \frac{2}{7}$.

$g(x) = \frac{2}{7}x$ ou $g(x) = -\frac{2x}{7}$.

$g(5) = \frac{2}{7} \times 5 = \frac{10}{7}$.

On pouvait aussi utiliser un tableau avec des grandeurs proportionnelles puisque pour une fonction linéaire, les antécédents et les images sont proportionnelles.

x	7	5
$g(x)$	2	$\frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$

3. Augmenter une grandeur de 13 %, revient à la multiplier par $1 + \frac{13}{100} = 1 + 0,13 = 1,13$
Diminuer une grandeur de 7 %, revient à la multiplier par $1 - \frac{7}{100} = 1 - 0,07 = 0,93$.

Notons x le prix de départ, il devient $1,13x$ après l'augmentation de 13 % puis $0,93 \times 1,13x$ après la diminution de 7 %.
Comme $0,93 \times 1,13x = 1{,}0509x$, la fonction linéiare cherchée est $\boxed{h(x) = 1{,}0509x}$.

4. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.
Seules les représentations graphiques des fonctions f, et k sont des droites qui passent par $(0;0)$.
Reste à déterminer une image pour chacune des fonctions.

On constate que le points de coordonnées $(1;-2)$ est sur la représentation graphique de f, donc $f(1) = -2$.
Comme f est une fonction linéaire, elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax$.
Or $f(1) = -2$, donc $1 \times a = -2$ et ainsi $a = \frac{-2}{1} = -2$ donc $\boxed{f(x) = -2x}$.

On constate que le points de coordonnées $(2;1)$ est sur la représentation graphique de k, donc $k(2) = 1$.
Comme k est une fonction linéaire, elle s'écrit sous la forme $k(x) = ax$.
Or $k(2) = 1$, donc $2 \times a = 1$ et ainsi $a = \frac{1}{2} = 0,5$ donc $\boxed{k(x) = 0,5x}$.

Exercice n° 3 — Correction

Scratch

1.a. En partant du nombre de départ 5, Réponse prend la valeur 5. Puis Chouchou prend la valeur 5.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times 5 = 10$ et Coucou devient $10 + (-7) = 3$.
Hibou vaut $10 \times 5 = 50$ puis $50 + 5 = 55$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $3 \times 55 = 165$. $\boxed{\text{En partant de 5 on obtient 165 à la fin.}}$

1.b. En partant du nombre de départ -3, Réponse prend la valeur -3. Puis Chouchou prend la valeur -3.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times (-3) = -6$ et Coucou devient $-6 + (-7) = -13$.

Hibou vaut $10 \times (-3) = -30$ puis $-30 + 5 = -25$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $-13 \times -25 = 325$. $\boxed{\text{En partant de -3 on obtient 325 à la fin.}}$

2. En partant du nombre de départ 1, Réponse prend la valeur 1. Puis Chouchou prend la valeur 1.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times 1 = 2$ et Coucou devient $2 + (-7) = -5$.
Hibou vaut $10 \times 1 = 10$ puis $10 + 5 = 15$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $-5 \times 15 = -75$. $\boxed{\text{En partant de 1 on obtient -75 à la fin.}}$

En partant du nombre de départ 2, Réponse prend la valeur 2. Puis Chouchou prend la valeur 2.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times 2 = 4$ et Couou devient $4 + (-7) = -3$.
Hibou vaut $10 \times 2 = 20$ puis $20 + 5 = -25$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $-3 \times -25 = -75$. $\boxed{\text{En partant de 2 on obtient -75 à la fin.}}$

$\boxed{\text{Juliette a raison, pour 1 et 2 le programme donne le même résultat.}}$

3. En partant du nombre générique x, Réponse prend la valeur x. Puis Chouchou prend la valeur x.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times x = 2x$ et Couou devient $2x + (-7) = 2x - 7$.
Hibou vaut $10 \times x = 10x$ puis $10x + 5$

Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $(2x-7)(10x+5)$. $\boxed{\text{Ainsi } f(x) = (2x-7)(10x+5)}$

4. $f(x) = (2x-7)(10x+5)$
$f(x) = 20x^2 + 10x - 70x - 35$

$\boxed{f(x) = 20x^2 - 60x - 35}$

5. Il faut résoudre l'équation suivante :

$$(2x-7)(10x+5) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= 0 \\ 2x - 7 {\color{red}+7} &= 0 {\color{red}+7} \\ 2x &= 7 \\ x &= \frac{7}{2} \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x + 5 &= 0 \\ 10x + 5 {\color{red}-5} &= 0 {\color{red}-5} \\ 10x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{10} \\ x &= -0,5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{3,5 \text{ et } -0,5}$

III — Annexes

1 Exercices

Exercice n° 7.1 : Le rectangle

On considère une rectangle de 5 cm de longueur et de 4 cm de large.
On augmente sa largeur de 20 % et on diminue sa longueur de 20 %.

L'aire du rectangle a-t-elle augmenté ou diminué ? Quel est le pourcentage d'augmentation ou de diminution ?

Exercice n° 7.2 : Reconnaissance de fonctions

Voici des fonctions. Indiquez lesquelles sont des fonctions linéaires en justifiant votre réponse.

$f(x) = -3x$
$g(x) = 1 - 5x$
$h(x) = x$
$k(x) = 1$
$l(x) = 0$
$m(x) = \dfrac{x}{7}$
$n(x) = 3x^2$
$t(x) = 3,14159x$

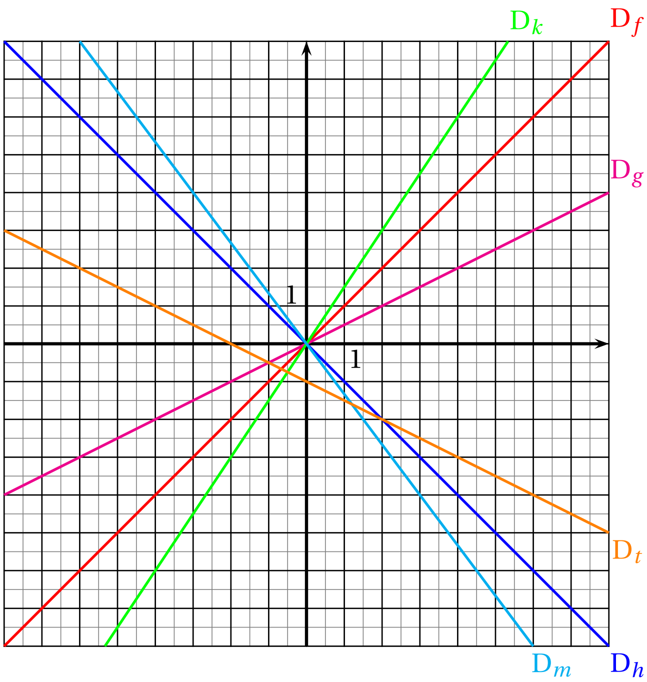
Exercice n° 7.3 : Détermination d'une fonction linéaire

1. h est une fonction linéaire dont on sait que $h(5) = -2$. Quel est le coefficient de cette fonction ?

2. Déterminer la fonction linéaire k pour laquelle l'image de -3 est 4.

3. t une fonction linéaire telle que $t(-2) = 3$. Calculer en justifiant $t(3)$.

Exercice n° 7.4 : Fonction linéaire et représentation graphique



Ci-dessus ont été tracé les représentations graphiques des fonctions f, g, h, k, m et t. Chacune de ces représentation est une droite.
Lesquelles de ces droites sont les représentations graphiques de fonctions linéaires et quel est le coefficient de chacune des ces fonctions ?

Exercice n° 7.1 : Le rectangle

Correction

On considère une rectangle de 5 cm de longueur et de 4 cm de large.
On augmente sa largeur de 20 % et on diminue sa longueur de 20 %.

L'aire du rectangle avant transformation était : $\mathbb{A} = 5\ cm \times 4\ cm = 20\ cm^2$

En augmentant sa largeur de 20 % elle devient : $4\ cm \times 1,20 = 4,8\ cm$
En diminuant sa longueur de 20 % elle devient : $5\ cm \times 0,80 = 4\ cm$

L'aire après transformation est donc : $\mathbb{B} = 4\ cm \times 4,8\ cm = 19,2\ cm^2$

Il s'agit donc d'une diminution.

Notons k le coefficient d'agrandissement/réduction on a $20\ cm^2 \times k = 19,2\ cm^2$ d'où $k = \dfrac{19,2\ cm^2}{20\ cm^2} = 0,96$

Comme $0,96 = 1 - 0,04 = 1 - \dfrac{4}{100}$: $\boxed{\text{il s'agit d'une diminution de 4 \%}}$.

D'autre part on peut remarquer que $1,20 \times 0,80 = 0,96$ ce qui donne aussi le résultat !

Exercice n° 7.2 : Reconnaissance de fonctions

Correction

Voici des fonctions. Indiquez lesquelles sont des fonctions linéaires en justifiant votre réponse.
$f(x) = -3x$: oui, linéaire de coefficient -3.
$g(x) = 1 - 5x$: oui, linéaire de coefficient $-1,5$
$h(x) = x$: oui, linéaire de coefficient 1
$k(x) = 1$: non, elle n'est pas linéaire car $1 \neq ax$ pour tous nombres a.
$l(x) = 0$: oui, elle est linéaire car $0 = 0 \times x$, donc de coefficient 0.
$m(x) = \dfrac{x}{7}$: oui, elle est linéaire de coefficient $\dfrac{1}{7}$ car $\dfrac{x}{7} = \dfrac{1}{7} \times x$
$n(x) = 3x^2$: non, elle n'est pas linéaire.
$t(x) = 3,14159x$: oui, elle est linéaire de coefficient $3,14159$

Exercice n° 7.3 : Détermination d'une fonction linéaire

Correction

1. h est une fonction linéaire dont on sait que $h(5) = -2$. Quel est le coefficient de cette fonction ?

On sait que $h(x) = ax$ et que $h(5) = -2$ donc $a \times 5 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{5} = -0,4$.

Le coefficient est $-0,4$. Il s'agit de la fonction $\boxed{h(x) = -0,4x}$.

2. Déterminer la fonction linéaire k pour laquelle l'image de -3 est 4.

Même technique. $k(x) = ax$ donc comme $k(-3) = 4$ on a $a \times (-3) = 4$ et $a = -\dfrac{4}{3}$.

Le coefficient est $-\dfrac{4}{3}$. Il s'agit de la fonction $\boxed{k(x) = -\dfrac{4}{3}x}$.

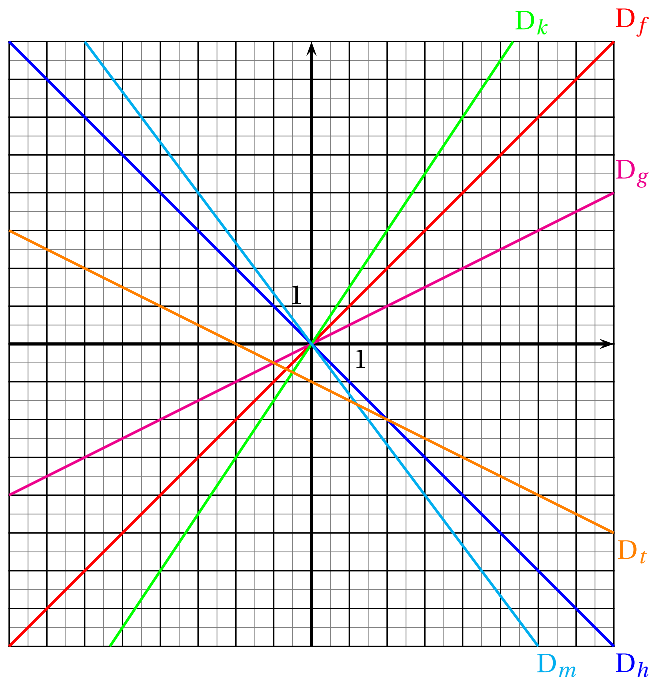
3. t une fonction linéaire telle que $t(-2) = 3$. Calculer en justifiant $t(3)$.

$t(x) = ax$ et $t(-2) = 3$ donc $-2 \times a = 3$ et $a = -\dfrac{3}{2} = -1,5$

La fonction t est linéaire de coefficient $-1,5$ donc $t(x) = -1,5x$, ainsi $\boxed{t(3) = -1,5 \times 3 = -4,5}$.

EXERCICE N° 7.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

CORRECTION



Ci-dessus ont été tracé les représentations graphiques des fonctions f, g, h, k, m et t. Chacune de ces représentation est une droite. Lesquelles de ces droites sont les représentations graphiques de fonctions linéaires et quel est le coefficient de chacune des ces fonctions ?

Les fonctions f, g, h, k et m sont linéaires car leurs représentation sont des droites passant par l'origine.
La fonction t n'est pas linéaire car la droite qui la représente ne passe pas par l'origine.

La droite D_f passe par le point $(2;2)$ (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme f est linéaire, elle s'écrit $f(x) = ax$. On a donc $f(2) = 2$ donc $a \times 2 = 2$ d'où $a = 1$.

f est la fonction linéaire de coefficient 1 c'est à dire $\boxed{f(x) = 1x = x}$.

La droite D_g passe par le point $(4;2)$ (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme g est linéaire, elle s'écrit $g(x) = ax$. On a donc $g(4) = 2$ donc $a \times 4 = 2$ d'où $a = \dfrac{2}{4} = 0,5$.

g est la fonction linéaire de coefficient $0,5$ c'est à dire $\boxed{g(x) = 0,5x}$.

La droite D_h passe par le point $(1;-1)$ (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme h est linéaire, elle s'écrit $h(x) = ax$. On a donc $h(1) = -1$ donc $a \times 1 = -1$ d'où $a = -1$.

h est la fonction linéaire de coefficient -1 c'est à dire $\boxed{h(x) = -1x = -x}$.

La droite D_k passe par le point $(2;3)$ (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme k est linéaire, elle s'écrit $k(x) = ax$. On a donc $k(2) = 3$ donc $a \times 2 = 3$ d'où $a = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

k est la fonction linéaire de coefficient $1,5$ c'est à dire $\boxed{k(x) = 1,5x}$.

La droite D_m passe par le point $(3;-4)$ (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme m est linéaire, elle s'écrit $m(x) = ax$. On a donc $m(3) = -4$ donc $a \times 3 = -4$ d'où $a = -\dfrac{4}{3}$.

m est la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{4}{3}$ c'est à dire $\boxed{m(x) = -\dfrac{4}{3}x = -\dfrac{4x}{3}}$.

Interrogation de mathématiques

Exercice 1
Un article à 189 € est soldé de 30 %. Combien vaut le prix après réduction ?

Exercice 2
Après une augmentation de 35 %, le carburant coûte $2,916$ €. Quel était le prix avant cette augmentation ?

Exercice 3
La population de MathLand est passée de 135 678 à 167 908 habitants en 10 ans.
Donner une valeur approchée de l'augmentation en pourcentage. On arrondira le résultat à l'unité près.

Exercice 4
Un commerçant décide d'augmenter tout ses prix de 25 % puis le lendemain de diminuer ces nouveaux prix de 20 %.

1. Le prix de départ est 49 €. On augmente ce prix de 25 %, calculer le nouveau prix.
2. On diminue ensuite le prix obtenu à la question **1.** de 20 %. Calculer le nouveau prix.
3. En appliquant successivement une augmentation de 25 % puis une diminution de 20 %, de combien en pourcentage ce prix a-t-il augmenté ou diminué ?

Interrogation de mathématiques

Exercice 1
Un article à 178 € est soldé de 25 %. Combien vaut le prix après réduction ?

Exercice 2
Après une augmentation de 45 %, le carburant coûte $2,871$ €. Quel était le prix avant cette augmentation ?

Exercice 3
La population de MathLand est passée de 234 678 à 278 987 habitants en 10 ans.
Donner une valeur approchée de l'augmentation en pourcentage. On arrondira le résultat à l'unité près.

Exercice 4
Un commerçant décide d'augmenter tout ses prix de 20 % puis le lendemain de diminuer ces nouveaux prix de 15 %.

1. Le prix de départ est 59 €. On augmente ce prix de 20 %, calculer le nouveau prix.
2. On diminue ensuite le prix obtenu à la question **1.** de 15 %. Calculer le nouveau prix.
3. En appliquant successivement une augmentation de 20 % puis une diminution de 15 %, de combien en pourcentage ce prix a-t-il augmenté ou diminué ?

Interrogation de mathématiques

Exercice 1
Un article à 289 € est soldé de 35 %. Combien vaut le prix après réduction ?

Exercice 2
Après une augmentation de 15 %, le carburant coûte $2,323$ €. Quel était le prix avant cette augmentation ?

Exercice 3
La population de MathLand est passée de 98 760 à 127 987 habitants en 10 ans.
Donner une valeur approchée de l'augmentation en pourcentage. On arrondira le résultat à l'unité près.

Exercice 4
Un commerçant décide d'augmenter tout ses prix de 30 % puis le lendemain de diminuer ces nouveaux prix de 25 %.

1. Le prix de départ est 69 €. On augmente ce prix de 30 %, calculer le nouveau prix.
2. On diminue ensuite le prix obtenu à la question **1.** de 25 %. Calculer le nouveau prix.
3. En appliquant successivement une augmentation de 30 % puis une diminution de 25 %, de combien en pourcentage ce prix a-t-il augmenté ou diminué ?

FONCTIONS LINÉAIRES

Augmentation et diminution en pourcentage

AUGMENTATION ET DIMINUTION EN POURCENTAGE

x est un nombre positif.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $1+\dfrac{x}{100}$;

Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $1-\dfrac{x}{100}$.

COEFFICIENT D'AGRANDISSEMENT-RÉDUCTION :

Quand on multiplie une grandeur par un nombre supérieur à 1 on augmente la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par 1 on ne change pas la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par un nombre inférieur à 1 on diminue la grandeur.

EXEMPLE :

Un commerçant diminue tous les prix de 30 % puis un peu plus tard il augmente tous les prix de 30 %. Les prix ont-ils retrouvé le niveau de départ ?

Prenons pour exemple un prix P = 67 €.

Diminuer ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1-\dfrac{30}{100}=1-0,30=0,70$

Le prix diminué est donc $\mathrm{D}=0,70\times\mathrm{P}=0,70\times 67$ € $=46,90$ €.

Augmenter ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1+\dfrac{30}{100}=1+0,30=1,30$.

Le prix augmenté est donc $\mathrm{A}=1,30\times\mathrm{D}=1,30\times 46,90$ € $=60,97$ €.

On constate que le prix final est plus bas que le prix initial. L'augmentation de 30 % ne suffit pas à remonter jusqu'au prix initial.

De manière plus littérale on a : $\mathrm{A}=1,30\times\mathrm{D}=1,30\times 0,70\times\mathrm{P}$ or $1,30\times 0,70=0,91$. Ainsi $\mathrm{A}=0,91\times\mathrm{P}$.

Comme $0,91=1-0,09$ car $1-0,91=0,09$, on a $0,91=1-\dfrac{9}{100}$. Il s'agit d'un baisse de 9 %.

On peut se demander quel pourcentage d'augmentation aurait permis de remonter au prix initial.
Cela revient à résoudre l'équation suivante dont l'inconnue est k :

$$\begin{aligned} 0,70\times k\times\mathrm{P}&=\mathrm{P}\\ 0,70\times k&=1\\ k&=\frac{1}{0,70}\\ k&\approx 1,43 \end{aligned}$$

Comme $1,43=1+\dfrac{43}{100}$, il aurait fallu augmenter le prix de 43 %.

LA FONCTION LINÉAIRE

a un nombre quelconque fixé.
La fonction linéaire de coefficient a est définie ainsi :

$$f: x\to f(x)=ax$$

EXEMPLES :

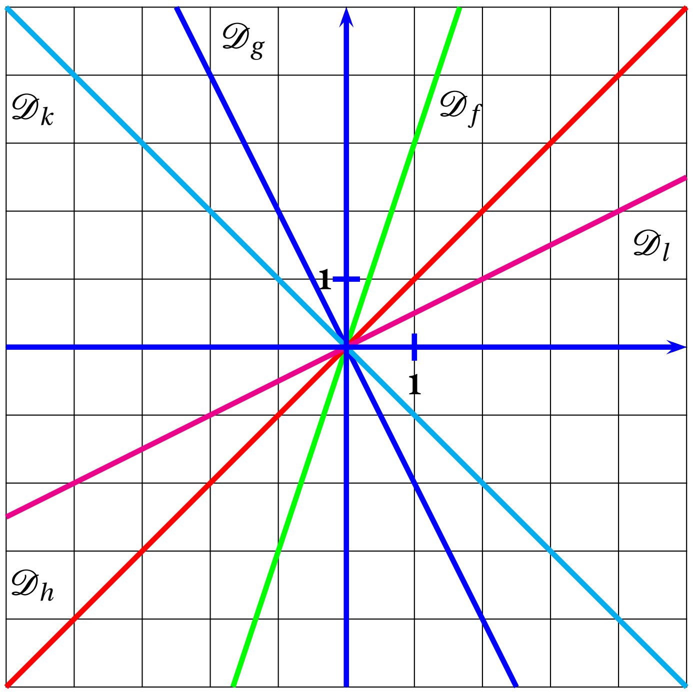
- $f(x)=3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3 ;
- $g(x)=-2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2 ;
- $h(x)=x$ est la fonction linéaire de coefficient 1 ;
- $k(x)=-x$ est la fonction linéaire de coefficient -1 ;
- $l(x)=\dfrac{x}{2}$ est la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$;
- $m(x)=0$ est la fonction linéaire de coefficient 0 ;

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION LINÉAIRE

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau constitué de deux grandeurs proportionnelles dont le coefficient de proportionnalité est celui de la fonction.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

EXEMPLES :

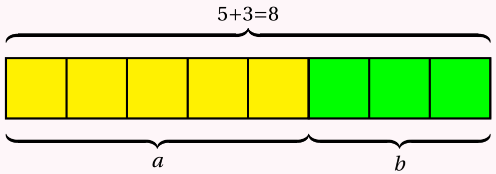


Ratio

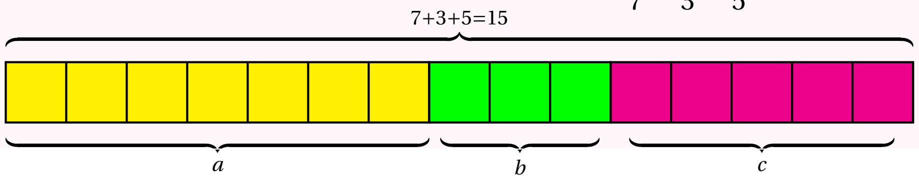
Définition sur un exemple générique

On dit que deux nombres a et b sont dans **le ratio** $5:3$ si $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{3}$.

On a aussi $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$, ce qui explique le choix de l'expression « être dans le ratio **5** pour **3** ».



On dit que trois nombres a, b et c sont dans **le ratio** $7:3:5$ si $\dfrac{a}{7}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{5}$.

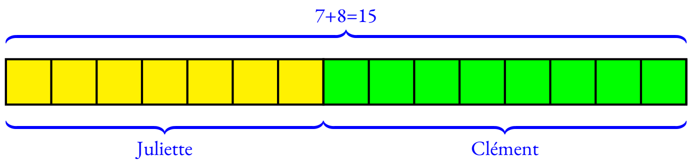


Exemples :

1. Juliette et Clément ont partagé un sachet de 135 bonbons selon le ratio 7 : 8.
Combien chacun a-t-il reçu ?

Notons j et c le nombre de bonbons reçus par chacun. On a $\dfrac{j}{7}=\dfrac{c}{8}$.

On peut représenter cette situation ainsi :



Il y a donc 15 parts en tout. Un part correspond à $135 \div 15 = 9$ bonbons.

Juliette a reçu $9\times 7 = 63$ bonbons et Clément $9 \times 8 = 72$ bonbons.

On a bien $\dfrac{63}{7}=\dfrac{72}{8}=9$ et même $\dfrac{63}{72}=\dfrac{9\times 7}{9\times 8}=\dfrac{7}{8}$.

On peut aussi représenter ces informations dans un tableau en ajoutant une colonne pour le total :

	Juliette	Clément	Total
Bonbons	$\dfrac{135\times 7}{15}=\dfrac{945}{15}=63$	$\dfrac{135\times 8}{15}=\dfrac{1080}{15}=72$	135
Ratio	7	8	15

2. Le **sexe-ratio** est un indicateur démographique qui permet d'exprimer le nombre de mâles par rapport au nombre de femelles d'une population donnée.
En France on dit que le sexe-ratio est de 105 : 100 parce qu'il naît environ 105 garçons pour 100 filles.
En 2022, il y a eu 723 000 naissances. Combien cela fait-il de garçons et de filles ?

En partageant 723 000 en $105+100=205$ parts on arrive à $723\,000 \div 205 \approx 3526{,}83$.
Il est né environ $3526{,}83 \times 105 = 370\,317$ garçons pour $3526{,}83\times 100 = 352\,683$ filles à l'unité près.

3. Un plan à **l'échelle** $1:10\,000$ signifie que les mesures sur le plan p et les mesures réelles r sont dans un ratio $1:10\,000$.
On a ainsi $\dfrac{p}{1}=\dfrac{r}{10\,000}$ soit $p=\dfrac{r}{10\,000}$.
Les mesures sur le plan sont 10 000 fois plus petites que celles de la réalité.

4. Un écran de télévision est au **format** 16 : 9.
Cela signifie que sa longueur L et sa largeur l vérifient $\dfrac{\mathrm{L}}{16}=\dfrac{l}{9}$ ou que $\dfrac{\mathrm{L}}{l}=\dfrac{16}{9}$.

5. Les mesures d'un pavé droit sont au ratio 2 : 5 : 7.
Si la plus grande mesure vaut 91 cm, combien valent les deux autres ?

Comme $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{91}{7}$ on peut utiliser la règle de trois :

$x=\dfrac{2\times 91\,\text{cm}}{7}=\dfrac{182\,\text{cm}}{7}=26\,\text{cm}$ et $y=\dfrac{5\times 91\,\text{cm}}{7}=65\,\text{cm}$.

6. Dans une classe de 30 élèves, le ratio de garçons filles est de 40 : 60. On a donc $\dfrac{g}{f}=\dfrac{40}{60}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Ce ratio est donc équivalent à 4 : 6 et 2 : 3.
De plus la somme $40+60=100$, il y a donc 40 % de garçons et 60 % de filles soit 12 garçons et 18 filles.

7. Pour produire un béton classique il faut du ciment, du sable, du gravier et de l'eau dont les volumes suivent le ratio 1 : 2 : 3 : 6

8. Le fameux gateau quatre quarts est constitué d'un quart de lait, un quart de farine, un quart de sucre et un quart d'oeufs.
Ces ingrédients sont donc dans le ratio 1 : 1 : 1 : 1.

Chapitre VIII

Les probabilités

Sommaire

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 20 mars 2025 à 19:39

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.