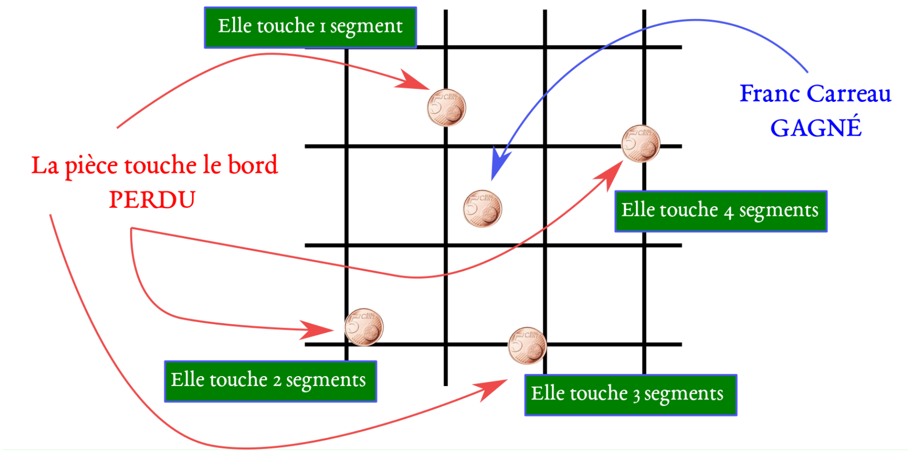
Situation initiale : Le jeu du franc carreau

Georges-Louis Leclerc comte de Buffon (1707-1788) est un naturaliste, biologiste, mathématicien, cosmologiste, philosophe et écrivain français. En 1778 il propose un jeu particulièrement intéressant : le jeu du Franc carreau. Voici le texte original :

« Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs. »

Nous allons jouer ensemble avec une pièce de 5 centimes d'euro et d'un quadrillage carré dont les carreaux mesurent 6 cm. Voici ce qui peut se passer :



1. Tracer ce quadrillage avec des carreaux carrés de 6 cm sur une feuille. Munissez-vous d'une pièce de 5 centimes et expérimentez cette situation. De manière pratique vous pouvez placer votre feuille au fond d'une boîte de chaussures pour que la pièce ne sorte pas de du quadrillage.
Je vous propose de lancer la pièce plusieurs fois (au moins 20 fois... 100 fois...) et de noter les résultats de votre expérience. Vous pouvez par exemple compléter le tableau suivant :

	Franc Carreau GAGNÉ	1 segment PERDU	2 segments PERDU	3 segments PERDU	4 segments PERDU	Total
Effectif						
Fréquence						

Rappel : L'effectif désigne tout simplement le nombre de cas observé. La fréquence est le quotient du nombre de cas observé sur le nombre total de lancers. La fréquence peut s'exprimer sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

2. Je vous propose maintenant de jouer contre moi à ce jeu. La partie coûte 2 euros. Si vous faites un Franc Carreau vous gagnez 4 euros. Sinon vous perdez vos 2 euros.
Jouez-vous à ce jeu ? Expliquez votre choix.

3. Avant de jouer à ce jeu je vous autorise à vous entrainer à lancer cette pièce avant de jouer.
Acceptez-vous maintenant de jouer ? Expliquer votre choix.

4. Vous avez joué cinq fois avec moi et cinq fois de suite vous avez gagné en faisant Franc-Carreau.
Acceptez-vous de jouer une sixième fois ? Expliquer votre choix.

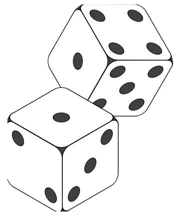
Consulter la simulation Scratch qui correspond à cette expérience.

Situation Initiale

Lancer deux dès et nombres premiers

Troisième

✦✦



On propose **l'expérience aléatoire** suivante :

— On lance deux dès cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6 ;

— on observe les deux nombres obtenus ;

— si un des deux nombres est premier (ou les deux), on calcule l'écart entre les deux nombres ;

— si aucun des nombres est premier, on calcule la somme des deux nombres.

Exemples :

— Si le premier dé montre **3** et le second **6** alors le résultat est **3** ;

— si le premier dé montre **1** et le second **4** alors le résultat est **5** ;

— si le premier dé montre **3** et le second **2** alors le résultat est **1**.

1. Avez-vous compris la règle du jeu ?
1.a. On lance les deux dés. Le premier indique 6 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.b. On lance les deux dés. Le premier indique 1 et le second 6. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.c. On lance les deux dés. Le premier indique 2 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.d. On lance les deux dés. Le premier indique 3 et le second 5. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.e. On lance les deux dés. Le premier dé indique 5. Le résultat obtenu est 1. Quel est le nombre indiqué sur le second dé ?

2. En vous fiant à votre intuition, quelle conjecture pouvez-vous faire sur le résultat le plus probable dans cette expérience aléatoire ?

3. Effectuer 20 **épreuves** de cette **expérience aléatoire** et indiquer ci-dessous les résultats obtenus :

Premier dé																				
Deuxième dé																				
Résultat																				

Indiquer ci-dessous la synthèse des résultats que vous avez obtenus avec les membres de votre groupe :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

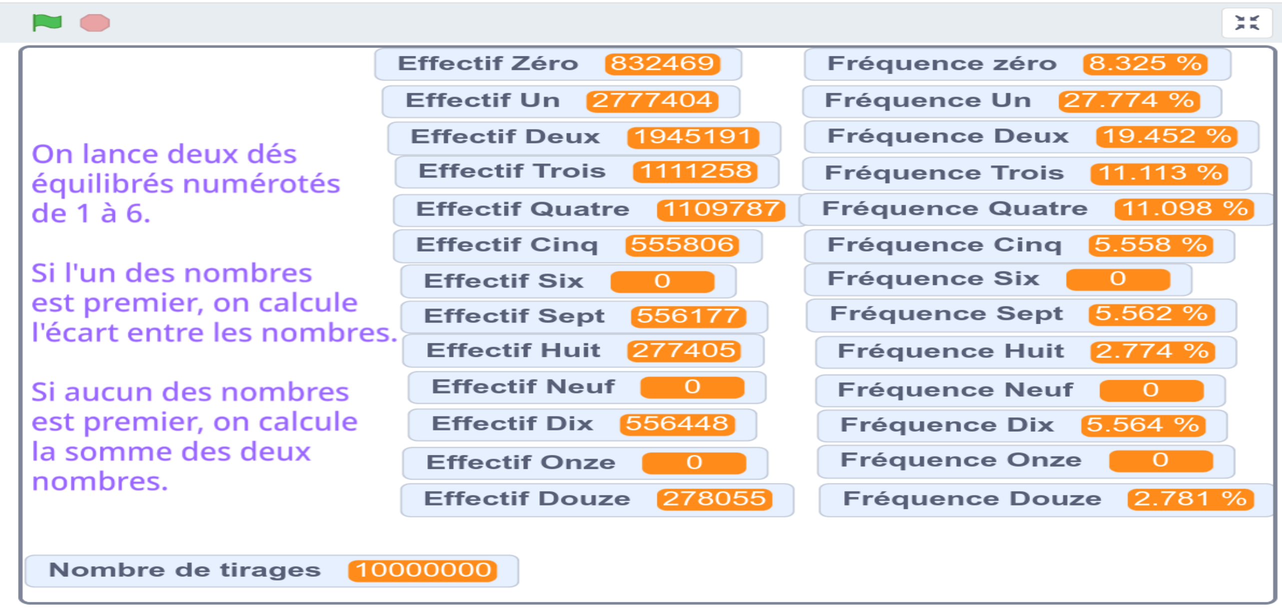
Résultat																Total
Effectif																
Fréquence																

4. Indiquer ci-dessous les résultats obtenus par la classe entière :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

Résultats														Total
Effectif														
Fréquence														

5. Les résultats de cette **expérience aléatoire** vous semblent-ils **équiprobables** ?

6. Voici les résultats de cette simulation obtenue avec Scratch.
Ces résultats sont-ils cohérents avec la simulation effectuée en classe ?



5. Dans le tableau ci-dessous, on indique en ligne les résultats du premier dé et en colonne ceux du second. Chaque case contient le résultat correspondant. Compléter ce tableau.

Second dé / Premier dé						

7. Combien y-a-t-il d'**issues** à cette **expérience aléatoires** ? Expliquer pourquoi ces issues sont **équiprobables**.

8. À l'aide du tableau ci-dessus, déterminer **la probabilité** des **événements** suivants :

— A : « Le résultat obtenu vaut 1 » ;

— B : « Le résultat obtenu vaut 6 » ;

— C : « Le résultat obtenu est un nombre pair » ;

— D : « Le résultat obtenu est un nombre impair » ;

— E : « Le résultat obtenu est un nombre premier » ;

— F : « Le résultat obtenu est supérieur à 6 » ;

— G : « Le résultat obtenu n'est pas inférieur à 9 ».

— H : « Le résultat obtenu est la somme des deux faces observées ».

Lancer deux dès et nombres premiers — Correction

Situation Initiale

Exemples :

— Si le premier dé montre **3** et le second **6** alors le résultat est **3** ;
— si le premier dé montre **1** et le second **4** alors le résultat est **5** ;
— si le premier dé montre **3** et le second **2** alors le résultat est **1**.

Les nombres premiers inférieurs à 6 sont 2, 3 et 5. 1 n'est pas un nombre premier : il ne possède qu'un seul diviseur !
3 est premier et 6 ne l'est pas, on effectue donc la différence $6-3=3$.
1 n'est pas premier, 4 non plus, on effectue la somme $1+4=5$.
3 et 2 sont premiers, on effectue la différence $3-2=1$

1. Avez-vous compris la règle du jeu ?

1.a. On lance les deux dés. Le premier indique 6 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
Aucun des nombres 6 et 4 n'est premier. Il faut donc faire la somme, $6+4=10$

1.b. On lance les deux dés. Le premier indique 1 et le second 6. Quel est le résultat dans ce cas ?
Aucun des nombres 1 et 6 n'est premier. On le répéte, 1 n'est pas un nombre premier, il ne possède qu'un seul diviseur ! Il faut faire la somme $1+6=7$.

1.c. On lance les deux dés. Le premier indique 2 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
Le nombre 2 est premier, pas le nombre 4. On calcule l'écart $4-2=2$.

1.d. On lance les deux dés. Le premier indique 3 et le second 5. Quel est le résultat dans ce cas ?
Les deux nombres 3 et 5 sont premiers. On calcule l'écart $5-3=2$.

1.e. On lance les deux dés. Le premier dé indique 5. Le résultat obtenu est 1. Quel est le nombre indiqué sur le second dé ?
Le premier dé indique 5 qui est un nombre premier. Il va donc falloir calculer l'écart entre les deux nombres. On peut effectuer $6-5=1$ ou $5-4=1$. Il y a donc deux possibilités pour le second dé : 6 ou 4.

2. Effectuer 20 **épreuves** de cette expérience aléatoire et indiquer ci-dessous les résultats obtenus :

Premier dé	1	3	1	6	5	3	6	2	3	1	1	4	1	5	6	1	2	1	1	6
Deuxième dé	3	3	5	2	1	6	6	6	1	2	4	5	3	2	1	3	3	3	3	5
Résultat	2	0	4	4	4	3	12	4	2	1	5	1	2	3	7	2	1	2	2	1

Indiquer ci-dessous la synthèse des résultats que vous avez obtenus avec les membres de votre groupe :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

Résultat	0	1	2	3	4	5	7	12								Total
Effectif	1	4	5	6	4	1	1	1								20
Fréquence	5%	20%	25%	30%	20%	5%	5%	5%								100%

3. Indiquer ci-dessous les résultats obtenus par la classe entière :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

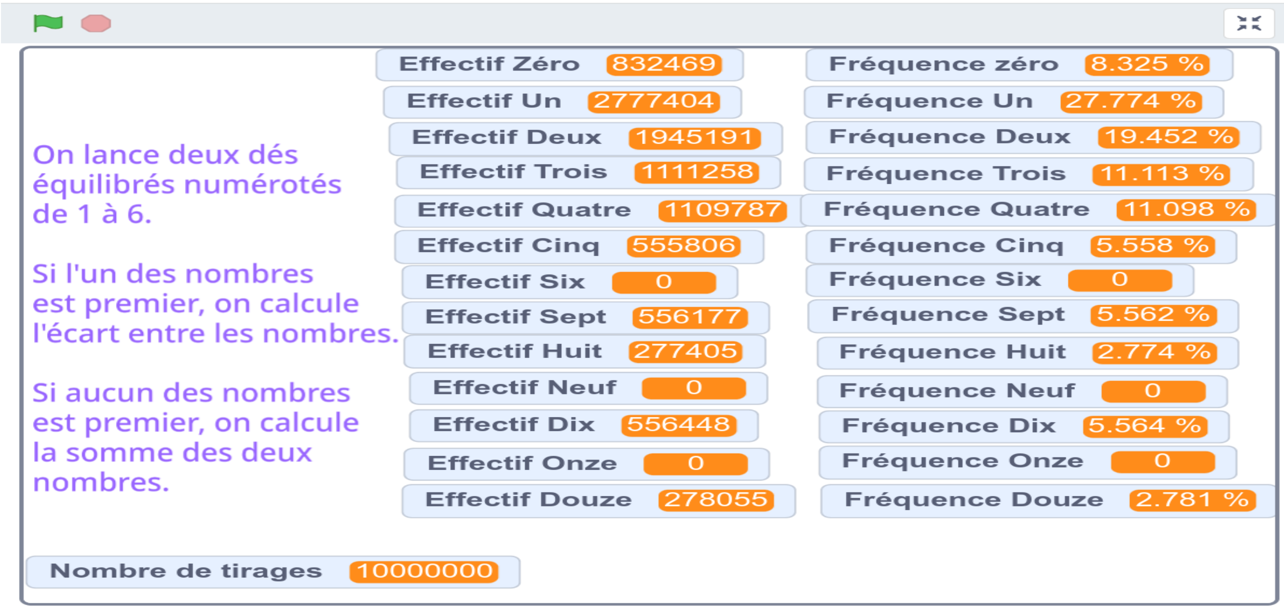
Résultats	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	55	158	99	64	48	27	0	22	11	0	28	0	8	520
Fréquence	10,6%	30,4%	19%	12,3%	9,2%	5,2%	0%	4,2%	2,1%	0%	5,4%	0%	1,5%	100%

4. Les résultats de cette expérience aléatoire vous semblent-ils **équiprobables** ?

On constate que les fréquences d'apparition de chacun des résultats sont très différentes. Par exemple, la fréquence d'apparition du 1 est très supérieure à celle du 12. D'autre part, les nombres 6, 9 et 11 ne sont pas apparus dans ces épreuves.

Ces résultats ne semblent donc pas équiprobables.

5. Voici les résultats de cette simulation obtenue avec Scratch.
Ces résultats sont-ils cohérents avec la simulation effectuée en classe ?



Scratch a réalisé 10 000 000 d'épreuves de cette expérience. On obtient chaque fréquence en divisant l'effectif par 10 000 000. On arrondit le pourcentage au dixième près.

Voici les fréquences constatées :

Résultats	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Fréquence	8,3%	27,8%	19,4%	11,1%	11,1%	5,6%	0%	5,6%	2,8%	0%	5,6%	0%	2,8%	100%

Oui. Ils confirment la succession d'épreuves réalisées par la classe entière. Ils sont différents des résultats obtenus individuellement avec seulement 20 épreuves.
Cela montre à nouveau qu'en augmentant le nombre d'épreuves d'une expérience aléatoire, les fréquences obtenues pour chaque résultat approche d'une fréquence théorique appalée probabilité.

6. Dans le tableau ci-dessous, on indique en ligne les résultats du premier dé et en colonne ceux du second. Chaque case contient le résultat correspondant. Compléter ce tableau.

Second dé / Premier dé	1	2	3	4	5	6
1	2	1	2	5	4	7
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	5	2	1	8	1	10
5	4	3	2	1	0	1
6	7	4	3	10	1	12

7. Combien il y a-t-il d'issues à cette expérience aléatoire ? Expliquer pourquoi ces issues sont équiprobables.

Il y a 6 lignes et 6 colonnes soit $6 \times 6 = 36$ issues à cette expérience aléatoire.
Comme les dés sont équilibrés, chaque face apparaît avec la même fréquence pour chacun.
Ces 36 issues sont donc bien équiprobables.

8. À l'aide du tableau ci-dessus, déterminer **la probabilité** des **événements** suivants :

— A : « Le résultat obtenu vaut 1 » ;
Le nombre 1 apparaît 10 fois dans le tableau. La probabilité cherchée est donc $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18} \approx 0,2778$ soit environ $27,8\%$. On constate la proximité de ce résultat avec la fréquence obtenue avec Scratch !

— B : « Le résultat obtenu vaut 6 » ;
Le nombre 6 n'apparaît pas dans le tableau.
La probabilité cherchée est donc 0. C'est un événement impossible.

— C : « Le résultat obtenu est un nombre pair » ;
Il y a 18 cases contenant un nombre pair. le nombre 0 est pair puisque $0 = 2 \times 0$.

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ soit 50%.

— D : « Le résultat obtenu est un nombre impair » ;
L'événement D est le contraire de l'événement C. On peut donc calculer cette probabilité en effectuant $1 - \dfrac{18}{36} = \dfrac{36}{36} - \dfrac{18}{36} = \dfrac{18}{36}$.

On pouvait aussi remarquer qu'il y a 18 nombres impairs dans le tableau.

— E : « Le résultat obtenu est un nombre premier » ;
Il y a 14 cases du tableau qui contiennent un nombre premier. La probabilité cherchée est donc $\dfrac{14}{36} = \dfrac{7}{18} \approx 0,3888$ soit environ $38,9\%$

— F : « Le résultat obtenu est supérieur à 6 » ;
Il y a 6 cases qui contiennent un nombre supérieur à 6. La probabilité cherchée est donc $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \approx 0,1667$ soit environ $16,7\%$.

— G : « Le résultat obtenu n'est pas inférieur à 9 ».
Cela signifie que le résultat doit être supérieur à 9. Il y a 3 cases qui contiennent un nombre supérieur à 9.
La probabilité cherchée est donc $\dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12} \approx 0,0833$ soit environ $8,3\%$.

— H : « Le résultat obtenu est la somme des deux faces observées ».
Seules les faces montrant les nombres 1, 4 et 6 permettent de faire la somme des deux nombres.
Il y a 9 cases qui correspondent à la somme des deux faces.

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ soit 25%.

I — Vocabulaire des probabilités

❧ DÉFINITION 8.1 : Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont le résultat est soumis au hasard.
À chaque répétition dans les mêmes conditions de cette expérience, le résultat n'est pas forcément le même.

EXEMPLES :

Expérience n° 1 : on lance une pièce de monnaie équilibrée.

Expérience n° 2 : on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Expérience n° 3 : on lance une pièce de 5 centimes d'euros sur un quadrillage.

Expérience n° 4 : on pioche deux fois de suite sans remise une boule dans une urne contenant 2 boules vertes, 3 boules noires et 1 boule blanche.

Expérience n° 5 : on lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Expérience n° 6 : deux personnes jouent à Chifoumi (Pierre – Papier – Ciseaux).

❧ DÉFINITION 8.2 : Issues possibles et événements

Les résultats élémentaires d'une expérience aléatoire sont les **issues possibles** de l'expérience.
On dit parfois que l'ensemble de ces issues forme **l'univers** des possibles.

Après une expérience aléatoire, un **événement** est ensemble constitué d'une partie des issues possibles.

Un événement ou une issue sont le plus souvent décrits par une phrase.

EXEMPLES :

Expérience n° 1 : les issues possibles sont « obtenir Pile »et « obtenir Face ».
On peut noter P l'événement « obtenir Pile »et F l'événement « obtenir Face ».

Expérience n° 2 : il y a 6 issues possibles : obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
On peut étudier de nombreux événements comme A l'événement « obtenir 5 », B l'évenement « obtenir un nombre premier », C l'événement « obtenir un multiple de 3 », D l'événement « obtenir un nombre pair »et E « obtenir un nombre impair ».
L'événement A est constitué d'une seule issue : 1.
L'événement B est constitué de trois issues : 2, 3 et 5.
L'événement C est constitué de deux issues : 3 et 6.
L'événement D est constitué des trois issues : 2, 4 et 6.
L'événement E est constitué des trois issues : 1, 3 et 5.

Expérience n° 3 : il y a deux issues possibles : faire « franc-carreau »ou « toucher une ligne ».
L'événement F est « gagner en faisant franc-carreau ».
L'événement L est « perdre en touchant une ligne ».

Expérience n° 4 : il y a de nombreuses issues comme « obtenir un boule blanche puis obtenir une boule verte ».
Voici quelques événements :
L'événement M « obtenir deux boules de la même couleur », l'événement N « obtenir deux boules de couleurs différentes »ou encore O « obtenir une boule blanche et une boule verte ».

Expérience n° 5 : il y a de nombreuses issues comme « 6 et 2 », « 2 et 2 »...

On peut considérer certains événements :
Q : « la somme des deux dés est égale à 7 ».
R : « la somme des deux dés est égale à 12 ».
S : « la somme des deux dés est égale à 1 ».
T : « la somme des deux dés est inférieure à 13 ».

Expérience n° 6 : il y a de nombreuses issues comme « Pierre-Pierre », « Feuille-Ciseaux », « Ciseaux-Pierre », ... L'ordre a de l'importance, il correspond à chacun des joueurs.
On peut considérer certains événements :
U : « le premier joueur gagne ».
V : « il y a égalité ».
W : « le premier joueur perd ».

❧ Définition 8.3 : Événements contraire

Deux événements sont **contraires** l'un de l'autre si en rassemblant les issues de chacun des deux événements on obtient toutes les issues possibles.

Exemples :

Expérience n° 2 : les événements D et E sont contraires l'un de l'autre. Ne pas être pair c'est être impair.

Expérience n° 3 : les événements F et L sont contraires l'un de l'autre. Le contraire de gagner c'est perdre !

Expérience n° 6 : les événements U et W ne sont pas contraires, car il faut tenir compte de l'égalité.

II — Fréquences et probabilités

❧ Définition 8.4 : Probabilité d'un événement

La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence de réalisation de l'événement c'est-à-dire « la chance »de réalisation de cet événement.
Un événement dont la probabilité est 1 se réalise toujours.
Un événement dont la probabilité est 0 ne se réalise jamais.

Théorème 8.1 : Stabilisation des fréquences — Admis

En répétant dans les mêmes conditions une expérience aléatoire la fréquence d'apparition de chaque issue tend à se stabiliser vers une valeur unique comprise entre 0 et 1.
Cette valeur unique est égale à la probabilité de l'événement constitué par cette issue.

Exemples :

Expérience n° 1 : en lançant de très nombreuses fois une pièce de monnaie, les fréquences d'apparition de Pile et de Face tendent à s'approcher de $\frac{1}{2} = 0,5$ soit 50 % c'est-à-dire une chance sur deux !
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/141607450/

Expérience n° 2 : en lançant de très nombreuses fois un dé à six faces les fréquences d'apparition de chaque face tendent à s'approcher de $\frac{1}{6} \approx 0,17$ soit environ 17 % c'est une chance sur six !
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/141712015/

Expérience n° 3 : en lançant une pièce de très nombreuse fois sur le quadrillage on constate que l'événement Gagner se réalise dans environ 40 % des cas et l'événement Perdre dans 60 % des cas.

Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/378552453/

Expérience n° 5 : en répétant de très nombreuses fois l'expérience et en effectuant la somme des dès on constate que les fréquences se stabilisent.
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/14171022/

III — L'équiprobabilité

PROPRIÉTÉ 8.1 : L'équiprobabilité Admise

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire se réalisent avec la même probabilité on dit c'est une situation **d'équiprobabilité** .
Dans ce cas la probabilité d'un événement se calcule de la manière suivante :

$$\frac{\text{nombre d'issues réalisant l'événement}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

EXEMPLES :

Expérience n° 1 : comme la pièce est équilibrée nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a 2 issues possibles : Pile et Face.
L'événement P est constitué d'une issue : la probabilité d'obtenir Pile est donc $\frac{1}{2} = 0,50$ soit 50 %.

L'événement F est constitué d'une issue : la probabilité d'obtenir Face est donc $\frac{1}{2} = 0,50$ soit 50 %.

P et F sont deux événements contraires et on remarque que la somme de leurs probabilités est égale à 1.

Expérience n° 2 : comme le dé est équilibré nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a 6 issues possibles.
L'événement A est constitué d'une seule issue : sa probabilité est $\frac{1}{6} \approx 0,17$ soit environ 17 %.

L'événement B est constitué de 3 issues : sa probabilité est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

L'événement C est constitué de 2 issues : sa probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %

Les événements D et E sont aussi chacun constitué de 3 issues : leurs probabilités sont 0,5 ou 50 %.

On remarque à nouveau que D et E sont contraires et que la somme de leurs probabilités vaut 1.

REMARQUE :

Expérience n° 3 : les deux issues possibles ne sont pas équiprobables. En utilisant les fréquences d'apparition avec on peut avoir une valeur approchée du résultat. Voir en annexe.

Expériences n° 4 et n° 5 : il s'agit d'expérience aléatoire à deux épreuves, on verra plus tard une méthode de calcul.

IV — Expérience aléatoire à deux épreuves

❧ Définition 8.5 :

Une expérience aléatoire est dite à **deux épreuves** lorsqu'elle est constituée de deux expériences aléatoires consécutives.
Ces deux expériences aléatoires peuvent être indépendantes l'une de l'autre, mais ce n'est pas toujours le cas.

Exemples :

Expérience 4 : c'est une expérience aléatoire à deux épreuves. Les deux épreuves ne sont pas indépendantes puisque la boule choisie lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne ensuite.

Expérience 5 : c'est aussi une expérience aléatoire à deux épreuves. Chaque lancer de dé est une expérience aléatoire indépendante de l'autre.

Expérience 6 : une autre expérience aléatoire à deux épreuves. Chaque joueur correspond à une expérience aléatoire indépendante de l'autre joueur.

Méthode 8 . 1 : Modéliser une expérience aléatoire à deux épreuves
Pour faire la liste des issues possibles équiprobables d'une expérience aléatoire à deux épreuves on peut les représenter sous forme d'un tableau ou d'un arbre.
Il faut veiller à ce que les issues dont on fait la liste soient bien équiprobables !

Exemples :

Expérience n° 5 : On pourrait se dire que les issues sont les différentes sommes possibles avec deux dès cubiques.
Ces issues sont : 2, 3, 4, ..., 12.
Elles ne sont cependant pas équiprobables car une seule combinaison donne 12 : $6+6$ alors que pour obtenir 4 il y a plusieurs possibilités : $1+3$, $2+2$, $3+1$...
On peut modéliser cette expérience sous forme du tableau suivant :

Somme		Premier dé					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Second dé	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Il y a donc 36 issues équiprobables !

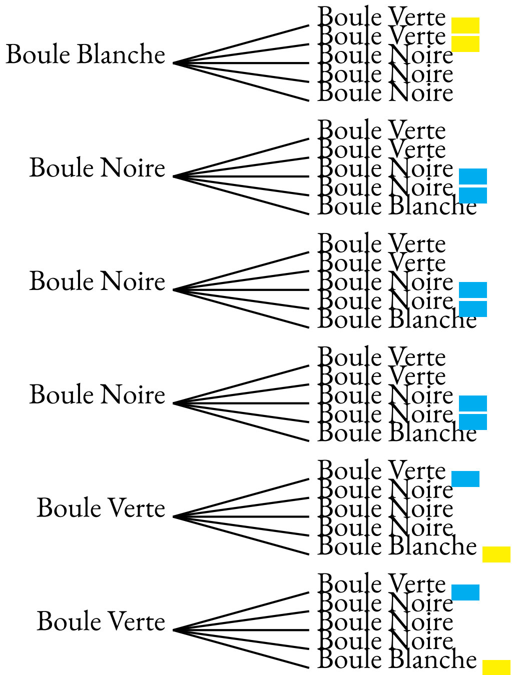
L'événement Q : « la somme est égale à 7 »a pour probabilité : $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}\approx 0,17$ soit environ 17 %.
En effet la somme 7 apparaît 6 fois dans le tableau.

L'événement R : « la somme est égale à 12 »a pour probabilité : $\dfrac{1}{36}\approx 0,03$ soit environ 3 %.
En effet la somme 12 apparaît une seule fois dans le tableau.

L'événement S : « la somme est égale à 1 »n'apparaît pas dans le tableau, cet événement est impossible, sa probabilité vaut 0.

L'événement T : « la somme est inférieure à 12 »se réalise pour toutes les cases du tableau, cet événement se réalise toujours, sa probabilité vaut 1.

Expérience n° 4 : Il y a six boules dans l'urne lors du premier tirage puis seulement cinq lors du second tirage. Cette situation se prête à la modélisation des issues sous forme d'un arbre.



C'est un arbre ayant 30 branches équiprobables.
L'événement M « obtenir deux boules de la même couleur »correspond à 9 branches de cet arbre.

La probabilité de l'événement M est donc $\dfrac{9}{30} = 0,3$ soit 30 %.

L'événement N « obtenir deux boules de couleurs différentes »est le contraire de l'événement M.

Sa probabilité est donc 70 % soit $\dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10}$: ce sont les 21 branches restantes !

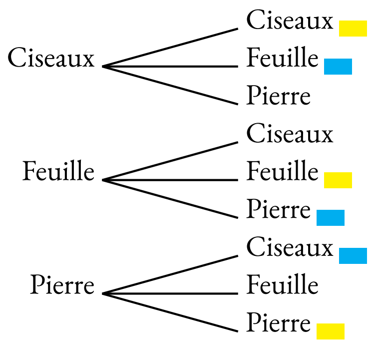
L'événement O « obtenir une boule blanche et une boule verte »correspond à 4 branches de cet arbre.

La probabilité de l'événement O est donc $\dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15} \approx 0,13$ soit 13 %

Expérience n° 6 : il y a 3 issues pour chaque joueur.
On rappelle que la Pierre gagne face aux Ciseaux (elle casse les ciseaux), la Feuille face à la Pierre (la feuille enveloppe la pierre), les Ciseaux face à la Feuille (les ciseaux coupent la feuille).

On peut au choix se servir d'un tableau ou d'un arbre.

Chifoumi		Premier Joueur		
		Pierre	**Feuille**	**Ciseaux**
Second Joueur	**Pierre**	Pierre-Pierre	Feuille-Pierre	Ciseaux-Pierre
	Feuille	Pierre-Feuille	Feuille-Feuille	Ciseaux-Feuille
	Ciseaux	Pierre-Ciseaux	Feuille-Ciseaux	Ciseaux-Ciseaux



Il y a donc 9 issues possibles.

L'événement U « le premier joueur gagne »correspond à 3 cases du tableau ou 3 branches de l'arbre.

La probabilité de l'événement U est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

L'événement V « il y a égalité »correspond à 3 cases du tableau ou 3 branches de l'arbre.

La probabilité de l'événement V est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

L'événement W n'est pas le contraire de l'événement U, car il faut tenir compte de l'égalité ! Il reste 3 branches.

La probabilité de l'événement W est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 : Calcul littéral *(5 points)*

On pose $f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. En utilisant le résultat de la question **1.** calculer $f(-1)$.

3. Factoriser $f(x)$.

Exercice n° 2 : Évolution en pourcentage *(6 points)*

Joshua fait ses achats en ligne sur mesachatsenligne.com . Il a placé dans son panier plusieurs articles depuis quelques semaines.

1. En se connectant, le site lui signale que la paire de chaussure qu'il avait placé dans son panier vient d'augmenter de 14 %. Elle coûtait 56 € auparavant.
Combien coûte ces chaussures maintenant.

2. Si Joshua commande dans les 4 heures qui viennent, le site lui propose 20 % de réduction sur tout son panier. Le montant total de ses achats avant réduction est de 139 €. Au moment de régler son achat, pour le remercier de sa fidélité, on lui propose 15 % de réduction supplémentaire sur le prix soldé.
Combien va-t-il payer ?

3. Finalement, Joshua a payé 94,52 € au lieu de 139 € après toutes les réductions.
De quel pourcentage de réduction a-t-il bénéficié ?

Exercice n° 3 : Expérience aléatoire à une épreuve *(4 points)*

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il les range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous.

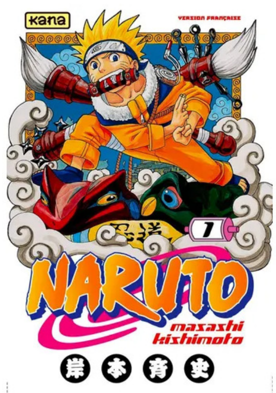
Séries franco-belges	Séries de comics	Séries de mangas
23 albums « Astérix »	35 albums « Batman »	85 albums « One-Piece »
22 albums « Tintin »	90 albums « Spider-Man »	65 albums « Naruto »
45 albums « Lucky-Luke »		

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album « Lucky-Luke » ?

1.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics ?

1.c. Quelle est la probabilité que l'album choisi ne soit pas un manga ?



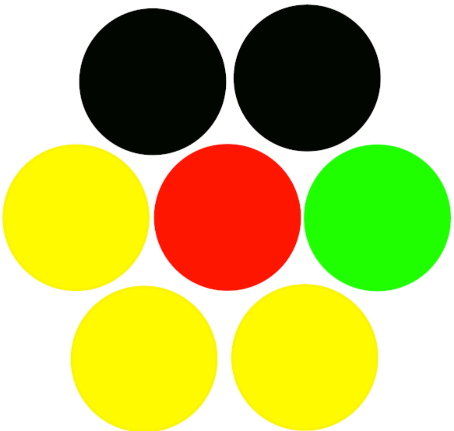
Tous les albums de chaque série sont numérotés dans l'ordre de sortie en librairie et chacune des séries est complète du numéro 1 au dernier numéro.

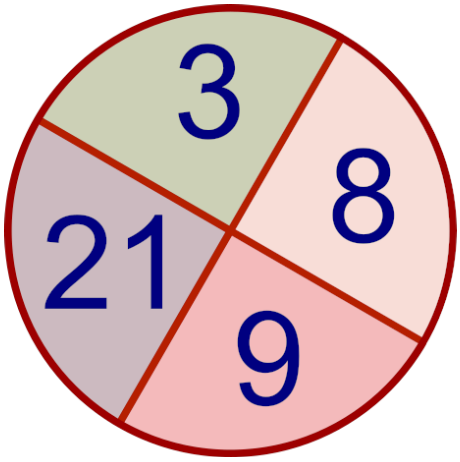
2.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 1 ?

2.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 40 ?

Exercice n° 4 : **Expérience aléatoire à deux épreuves** *(5 points)*

À la fête du collège, on propose un loterie pour financer le voyage à Édimbourg des élèves de quatrième.
Le jeu est constitué d'une urne opaque contenant des boules indiscernables au toucher et d'une roue équilibrée. L'urne contient 3 boules jaunes, 1 boules vertes, 2 boules noires et 1 boule rouge. La roue comprend les nombres 3, 8, 9 et 21.
Le jeu consiste à prendre une boule au hasard et à faire tourner la roue.





Les lots à gagner et les règles du jeu ont été fixés par les professeur de mathématiques :

— Si la boule obtenue est verte, on gagne un lot de règles, équerres et rapporteurs;
— Si la roue indique un nombre pair, on gagne une boite de compas;
— Si la boule est jaune et la roue indique un nombre supérieur à 7, on gagne des crayons de papier;
— Si la boule est rouge et la roue indique un nombre premier, on gagne une calculatrice.

Les lots sont cumulables, on peut gagner plusieurs lots en jouant une seul fois!

Pour toute la suite, indiquer votre réponse sous la forme d'une fraction puis d'un pourcentage arrondi à l'unité.

1. Quelle est la probabilité de gagner un lot de règles, équerres et rapporteurs?

2. Quelle est la probabilité de gagner une boite de compas?

3. Quelle est la probabilité de gagner des crayons de papier?

4. Quelle est la probabilité de gagner une calculatrice?

5. Quelle est la probabilité de ne rien gagner?

6. Quelle est la probabilité de gagner quelque chose?

7. Quelle est la probabilité de gagner deux lots en même temps?

8. Quelle est la probabilité de gagner trois lots en même temps?

☞ Évaluation — Correction ☜

Exercice n° 1 Correction

Calcul littéral

On pose $f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$
$f(x) = \left(30x^2 + 10x - 18x - 6\right) - \left(5x - 35x^2 - 3 + 21x\right)$
$f(x) = 30x^2 + 10x - 18x - 6 - 5x + 35x^2 + 3 - 21x$

$\boxed{f(x) = 65x^2 - 34x - 3}$

2. $f(-1) = 65 \times (-1)^2 - 34 \times (-1) - 3 = 65 \times 1 + 34 - 3 = 96$ donc $\boxed{f(-1) = 96}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$
$f(x) = (5x-3)\,[(6x+2) - (1-7x)]$
$f(x) = (5x-3)(6x+2-1+7x)$

$\boxed{f(x) = (5x-3)(13x+1)}$

Exercice n° 2 Correction

Évolution en pourcentage

1. Augmenter une grandeur de 14 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{14}{100} = 1 + 0,14 = 1,14$.

56 € $\times 1,14 = 63,84$ €, $\boxed{\text{le prix des chaussures est passé à 63,84 €.}}$

2. Diminuer une grandeur de 20 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,20 = 0,80$.

139 € $\times 0,80 = 111,20$ €, le prix après la réduction est 111,20 €.

Diminuer une grandeur de 15 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$.

$111,20$ € $\times 0,85 = 94,52$ €, $\boxed{\text{Joshua va payer 94,52 €.}}$

3. Il faut trouver le coefficient multiplicateur k vérifiant :

$$\begin{aligned} 139 \times k &= 94,52 \\ k &= \frac{94,52}{139} \\ k &= 0,68 \end{aligned}$$

Comme $1 - 0,68 = 0,32$ on a $0,68 = 1 - 0,32 = 1 - \dfrac{32}{100}$, $\boxed{\text{il s'agit d'une baisse de 32 \%.}}$

Exercice n° 3 — Correction

Expérience aléatoire à une épreuve

Dans tout cet exercice nous sommes dans une **expérience aléatoire à une épreuve** pour laquelle il y a **365 issues équiprobables**.

1.a. Il y a 45 albums de Lucky Luke. $\boxed{\dfrac{45}{365}=\dfrac{9}{73}\approx 0,12 \text{ soit } 12\ \%}$

1.b. Il y a $35+90=125$ albums classés Comics. $\boxed{\dfrac{125}{365}=\dfrac{25}{73}\approx 0,34 \text{ soit } 34\ \%}$

1.c. Il y a $85+65=150$ albums classés Mangas. Il y a donc $365-150=215$ albums qui ne sont pas des mangas.
$\boxed{\dfrac{215}{365}=\dfrac{43}{73}\approx 0,59 \text{ soit } 59\ \%}$

2.a. Il y a un numéro 1 dans chaque série soit 7 séries. $\boxed{\dfrac{7}{365}\approx 0,02 \text{ soit } 2\ \%}$

2.b. Il n'y a que 4 séries d'albums qui dépasse le numéro 40. $\boxed{\dfrac{4}{365}\approx 0,01 \text{ soit } 1\ \%}$

Exercice n° 4 — Correction

Expérience aléatoire à deux épreuves

Il s'agit d'une **expérience aléatoire à deux épreuves**. On peut présenter les résultats de cette expérience dans un tableau à double entrées.

	Boule noire	Boule noire	Boule jaune	Boule jaune	Boule jaune	Boule verte	Boule rouge
3	3N	3N	3J	3J	3J	3V	3R
8	8N	8N	8J	8J	8J	8V	8R
9	9N	9N	9J	9J	9J	9V	9R
21	21N	21N	21J	21J	21J	21V	21R

Il y a $7\times 4=28$ issues équiprobables possibles.

1. Il y a 4 issues qui correspondent. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{4}{28}=\dfrac{1}{7}\approx 0,143 \text{ soit environ } 14\,\%\,.}$

2. Il y a 7 issues qui correspondent. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}=0,25 \text{ soit } 25\,\%\,.}$

3. Il y a 3 issues qui correspondent. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{3}{28}\approx 0,107 \text{ soit environ } 11\,\%\,.}$

4. Il y a 1 issue qui correspond. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{1}{28}\approx 0,036 \text{ soit environ } 4\,\%\,.}$

5. Les cases non coloriées sont celle où on ne gagne rien.
Il y a 15 issues possibles. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{15}{28}\approx 0,536 \text{ soit environ } 53{,}6\,\%\,.}$

6. Cet événement est le contraire du précédent. Il y a donc $28-15=13$ issues possibles.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{13}{28} \approx 0,464 \text{ soit environ } 46\,\% \text{ .}}$

6. On ne peut gagner deux lots que dans un cas possible : en tirant une boule verte et un nombre pair.

Il y a 1 issue qui correspond. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{1}{28} \approx 0,036 \text{ soit environ } 4\,\% \text{ .}}$

7. On ne peut pas gagner plus de deux lots. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } 0 \text{ soit } 0\,\% \text{ .}}$

Évaluation de mathématiques — Probabilités

Exercice n° 1 :

5 points

Indiquez sans justification si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Affirmation n° 1 : Je viens de lancer dix fois une pièce de monnaie. J'ai obtenu dix fois piles. La pièce est forcément truquée !

Affirmation n° 2 : Je viens de gagner au Loto dix millions d'euros. Je peux gagner à nouveau la semaine prochaine !

Affirmation n° 3 : En choisissant une lettre au hasard dans l'alphabet il y a environ 33 % de chance d'obtenir une voyelle.

Affirmation n° 4 : J'ai plus de chance d'obtenir un six qu'un quatre en lançant un dé cubique !

Affirmation n° 5 : J'ai plus de chance de faire deux fois pile en lançant une pièce que de faire deux en lançant un dé cubique.

Affirmation n° 6 : Je choisis une lettre au hasard dans le mot **MATHEMATIQUES**. J'ai plus de chance de tomber sur un **E** que sur un **T**.

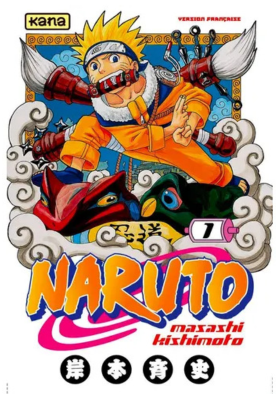
Exercice n° 2 :

5 points

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il les range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous.

Séries franco-belges	Séries de comics	Séries de mangas
23 albums « Astérix »	35 albums « Batman »	85 albums « One-Piece »
22 albums « Tintin »	90 albums « Spider-Man »	65 albums « Naruto »
45 albums « Lucky-Luke »		

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.



1.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album « Lucky-Luke » ?

1.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics ?

1.c. Quelle est la probabilité que l'album choisi ne soit pas un manga ?

Tous les albums de chaque série sont numérotés dans l'ordre de sortie en librairie et chacune des séries est complète du numéro 1 au dernier numéro.

2.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 1 ?

2.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 40 ?

Exercice n° 3 :

5 points

Dans le jeu pierre–feuille–ciseaux deux joueurs choisissent en même temps l'un des trois « coups »suivants :

— pierre en fermant la main ;

— feuille en tendant la main ;

— ciseaux en écartant deux doigts.

La pierre bat les ciseaux (en les cassant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant), il y a match nul si les deux joueurs choisissent le même coup (par exemple si chaque joueur choisit « feuille ».

1. Je joue une partie face à un adversaire qui joue au hasard et je choisis de jouer « pierre ».

1.a. Quelle est la probabilité que je perde la partie ?
1.b. Quelle est la probabilité que je ne perde pas la partie ?

2. Je joue deux parties de suite et je choisis de jouer « pierre »à chaque partie. Mon adversaire joue au hasard.

2.a. Quelle est la probabilité que je gagne les deux parties.
2.b. Quelle est la probabilité que je ne perde aucune des deux parties.

Exercice n° 4 :

5 points

Damien a fabriqué trois dés à six faces parfaitement équilibrés mais un peu particuliers.
Sur les faces du premier dé sont écrits les six plus petits nombres pairs strictement positifs : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 et 12.
Sur les faces du deuxième dé sont écrits les six plus petits nombres impairs positifs.
Sur les faces du troisième dé sont écrits les six plus petits nombres premiers.
Après avoir lancé un dé, on note le nombre obtenu sur la face du dessus.

1. Quels sont les six nombres figurant sur le deuxième dé ? Quels sont les six nombres figurant sur le troisième dé ?

2. Zoé choisit le troisième dé et le lance. Elle met au carré le nombre obtenu.
Léo choisit le premier dé et le lance. Il met au carré le nombre obtenu.

2.a. Zoé a obtenu un carré égal à 25. Quel était le nombre lu sur le dé qu'elle a lancé ?

2.b. Quelle est la probabilité que Léo obtienne un carré supérieur à celui obtenu par Zoé ?

3. Mohammed choisit un des trois dés et le lance quatre fois de suite. Il multiplie les quatre nombre obtenus et obtient 525.

3.a. Peut-on déterminer les nombres obtenus lors des quatre lancers ? Justifier votre réponse.

3.b. Peut-on déterminer quel est le dé choisi par Mohammed ? Justifier votre réponse.

Évaluation de mathématiques — Probabilités

Exercice n° 1 : *5 points*

1. Développer et réduire $f(x) = (4x-1)(2x+3) + (4x+6)(2x-1)$

2. Développer et réduire $g(x) = 5x^2 - 3x(6x+1) + 2 - 3x + (3x+1)(1-5x)$

Exercice n° 2 : *2 points*

Indiquez **sans justification** si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Affirmation n° 1 : Je viens de lancer dix fois une pièce de monnaie. J'ai obtenu dix fois piles. La pièce est forcément truquée !

Affirmation n° 2 : Je viens de gagner au Loto dix millions d'euros. Je peux gagner à nouveau la semaine prochaine !

Affirmation n° 3 : J'ai plus de chance d'obtenir un six qu'un quatre en lançant un dé cubique !

Affirmation n° 4 : Je choisis une lettre au hasard dans le mot **MATHEMATIQUES**. J'ai plus de chance de tomber sur un **E** que sur un **T**.

Exercice n° 3 : *5 points*

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il les range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous.

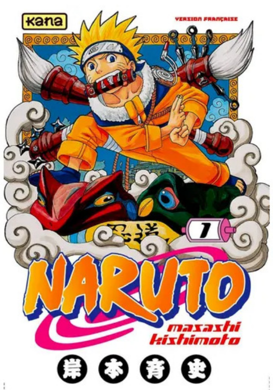
Séries franco-belges	Séries de comics	Séries de mangas
23 albums « Astérix »	35 albums « Batman »	85 albums « One-Piece »
22 albums « Tintin »	90 albums « Spider-Man »	65 albums « Naruto »
45 albums « Lucky-Luke »		

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album « Lucky-Luke » ?

1.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics ?

1.c. Quelle est la probabilité que l'album choisi ne soit pas un manga ?



Tous les albums de chaque série sont numérotés dans l'ordre de sortie en librairie et chacune des séries est complète du numéro 1 au dernier numéro.

2.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 1 ?

2.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 40 ?

Exercice n° 4 :

5 points

Dans le jeu pierre–feuille–ciseaux deux joueurs choisissent en même temps l'un des trois « coups »suivants :

— pierre en fermant la main;

— feuille en tendant la main;

— ciseaux en écartant deux doigts.

La pierre bat les ciseaux (en les cassant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant), il y a match nul si les deux joueurs choisissent le même coup (par exemple si chaque joueur choisit « feuille ».

1. Je joue une partie face à un adversaire qui joue au hasard et je choisis de jouer « pierre ».

1.a. Quelle est la probabilité que je perde la partie?

1.b. Quelle est la probabilité que je ne perde pas la partie?

2. Je joue deux parties de suite et je choisis de jouer « pierre »à chaque partie. Mon adversaire joue au hasard.

2.a. Quelle est la probabilité que je gagne les deux parties.

2.b. Quelle est la probabilité que je ne perde aucune des deux parties.

Exercice n° 5 :

5 points

Laura, Alexandre et Miloud jouent à Maxthox. Ce jeu se joue avec deux dés :

— **un dé tétraèdrique**, à quatre faces : une face rouge, une bleue, une verte et une blanche;

— **un dé octaèdrique**, à huit faces numérotées de 13 à 20.

On joue en lançant les deux dés simultanément. La règle change suivant la couleur du premier dé :

— Blanc : on perd la partie;

— Rouge : on gagne en obtenant un nombre premier avec le second dé;

— Bleu : on gagne en obtenant un multiple de 5 avec le second dé;

— Vert : on gagne en obtenant un multiple de 3 avec le second dé;

— Dans tous les autres cas on perd la partie.

On suppose que les deux dés sont équilibrés.

Pour l'ensemble de ces exercices, les probabilités seront exprimées sous la forme d'une fraction simplifiée.

1. Nadia lance le premier dé. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne la couleur blanche?

2. Simon a obtenu rouge en lançant le premier dé. Il lance le deuxième dé :

2.a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un nombre pair?

2.b. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un nombre supérieur à 12?

2.c. Quelle est la probabilité qu'il gagne?

2.d. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un multiple de 11?

3. C'est au tour de Miloud de jouer. Il lance le dé tétraèdrique puis le dé octaèdrique.

3.a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne rouge avec le premier dé et un multiple de 5 avec le second?

3.b. Quelle est la probabilité qu'il obtienne bleu ou vert avec le premier dé et un multiple de 3 avec le second?

3.c. Quelle est la probabilité qu'il gagne en lançant les deux dés?

Évaluation de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Calcul littéral

Correction

Calcul littéral

1. Développer et réduire :

$f(x) = (4x-1)(2x+3)+(4x+6)(2x-1)$

$f(x) = 8x^2+12x-2x-3+8x^2-4x+12x-6$

$\boxed{f(x) = 16x^2+18x-9}$

2. Développer et réduire :

$g(x) = 5x^2-3x(6x+1)+2-3x+(3x+1)(1-5x)$

$g(x) = 5x^2-18x^2-3x+2-3x+3x-15x^2+1-5x$

$\boxed{g(x) = -28x^2-8x+3}$

Exercice n° 2 : Vrai ou Faux

Correction

MOYEN

2 points

Probabilités Indiquez **sans justification** si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Affirmation n° 1 : Je viens de lancer dix fois une pièce de monnaie. J'ai obtenu dix fois piles. La pièce est forcément truquée !

$\boxed{\text{C'est faux !}}$ Le hasard n'a pas de mémoire, le fait d'avoir fait dix fois de suite piles n'influence pas le prochain tirage.

Affirmation n° 2 : Je viens de gagner au Loto dix millions d'euros. Je peux gagner à nouveau la semaine prochaine !

$\boxed{\text{C'est vrai !}}$ Pour la même raison. La probabilité de gagner deux fois de suite au Loto est très faible. En revanche, le fait d'avoir gagné cette semaine n'a aucune influence sur le futur tirage du loto.

Affirmation n° 3 : J'ai plus de chance d'obtenir un six qu'un quatre en lançant un dé cubique !

$\boxed{\text{C'est faux !}}$ Comme le dé est équilibré, toutes faces ont la même chance d'apparaître.

Affirmation n° 4 : Je choisis une lettre au hasard dans le mot **MATHEMATIQUES**. J'ai plus de chance de tomber sur un **E** que sur un **T**.

Dans le mot mathématiques, il y a deux **E** et deux **T**, donc j'ai la même probabilité de tomber sur l'un ou l'autre. $\boxed{\text{Faux}}$

Exercice n° 3 : Les albums de bandes dessinées

Correction

Probabilités

Dans tout cet exercice nous sommes dans une **expérience aléatoire à une épreuve** pour laquelle il y a **365 issues équiprobables**.

1.a. Il y a 45 albums de Lucky Luke. $\boxed{\dfrac{45}{365} = \dfrac{9}{73} \approx 0,12 \text{ soit } 12\ \%}$

1.b. Il y a $35+90 = 125$ albums classés Comics. $\boxed{\dfrac{125}{365} = \dfrac{25}{73} \approx 0,34 \text{ soit } 34\ \%}$

1.c. Il y a $85+65=150$ albums classés Mangas. Il y a donc $365-150=215$ albums qui ne sont pas des mangas.

$\boxed{\dfrac{215}{365}=\dfrac{43}{73}\approx 0,59 \text{ soit } 59\ \%}$

2.a. Il y a un numéro 1 dans chaque série soit 7 séries. $\boxed{\dfrac{7}{365}\approx 0,02 \text{ soit } 2\ \%}$

2.b. Il n'y a que 4 séries d'albums qui dépasse le numéro 40. $\boxed{\dfrac{4}{365}\approx 0,01 \text{ soit } 1\ \%}$

Exercice n° 4 : Chifoumi Correction

Probabilités

1. Je joue une partie face à un adversaire qui joue au hasard et je choisis de jouer « pierre ».

1.a. Nous sommes dans une **expérience aléatoire à une épreuve** pour laquelle il y a **trois issues équiprobables**, pierre, feuille, ciseau. Je perds la partie en choisissant feuille.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{1}{3}\approx 0,33\approx 33\ \%}$

1.b. Ne pas perdre la partie, signifier gagner en jouant feuille ou faire match nul en jouant pierre.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{3}\approx 0,67ă\approx 67\ \%}$

2. Nous sommes maintenant dans **une expérience aléatoire à deux épreuves**. Nous allons la modéliser sous la forme d'un tableau.

Première partie \ Deuxième partie	Pierre	Feuille	Ciseau
Pierre	Pierre - Pierre	Pierre - Feuille	Pierre - Ciseau
Feuille	Feuille - Pierre	Feuille - Feuille	Feuille - Ciseau
Ciseau	Ciseau - Pierre	Ciseau - Feuille	Ciseau - Ciseau

En lisant le tableau, on constate qu'il y a **9 issues équiprobables.**

2.a. Je joue Pierre deux fois de suite, pour perdre deux fois, il faut que l'adversaire joue Ciseau - Ciseau ce qui correspond à une seule case du tableau (la case jaune).

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est de } \dfrac{1}{9}\approx 0,11\approx 11\ \%}$

2.b. Pour ne perdre aucune partie, il ne faut pas qu'il choisisse Feuille. Il y a 4 cases du tableau qui ne contiennent pas le mot Feuille (les trois cases bleues et la case jaune).

$\boxed{\text{La probabilité cherchées est de } \dfrac{4}{9}\approx 0,44\approx 44\ \%}$

Exercice n° 5 : Le jeu et les dé polyèdriques Correction

Probabilités

1. Nadia effectue **une expérience aléatoire à une épreuve** où il y a **quatre issues possibles.**

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est de } \dfrac{1}{4}=0,25=25\ \%}$

2. Simon effectue **une expérience aléatoire à une épreuve** où il y a **8 issues possibles.**

2.a. Sur le dé octaédrique, les nombres pairs sont 14, 16, 18, 20. Il y en a 4.

La probabilité cherchée est $\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0,5 = 50~\%$

2.b. Sur le dé octaèdrique, tous les nombres sont supérieurs à 12.

La probabilité cherchée est de $\dfrac{8}{8} = 1 = 100~\%$: c'est un événement qui se réalise toujours !

2.c. Comme il a obtenu red avec le premier dé, pour gagner il doit obtenir un nombre premier avec le second dé.
Sur le dé octaèdrique, il y a les nombres premiers suivants : 13, 17 et 19 soit 3 nombres.

La probabilité cherchée est $\dfrac{3}{8} = 0,375 = 37,5~\%$

2.d. Parmi les nombres 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 et 20 aucun n'est un multiple de 11 puisque le multiple précédent est 11 et le suivant est 22.

La probabilité cherchée est $\dfrac{0}{12} = 0 = 0~\%$: c'est un événement impossible !

3. Miloud effectue **une expérience aléatoire à deux épreuves.** Nous allons modéliser ces expériences sous forme d'un tableau.

Dé tétraèdrique / Dès octaèdrique	Blanc	Bleu	Rouge	Vert
13	Blanc - 13	Bleu - 13	Rouge - 13	Vert - 13
14	Blanc - 14	Bleu - 14	Rouge - 14	Vert - 14
15	Blanc - 15	Bleu - 15	Rouge - 15	Vert - 15
16	Blanc - 16	Bleu - 16	Rouge - 16	Vert - 16
17	Blanc - 17	Bleu - 17	Rouge - 17	Vert - 17
18	Blanc - 18	Bleu - 18	Rouge - 18	Vert - 18
19	Blanc - 19	Bleu - 19	Rouge - 19	Vert - 19
20	Blanc - 20	Bleu - 20	Rouge - 20	Vert - 20

Il y a $4 \times 8 = 32$ **issues équiprobables.**

3.a. Sur le dé octaèdrique, il y a deux multiples de 5 : 15 et 20. Il y a donc deux cases du tableau qui correspondent (cases bleues).

La probabilité cherchée est $\dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16} = 0,0625 = 6,25~\%$

3.b. Sur le dé octaèdrique, les multiples de 3 sont 15 et 18. Il faut donc repérer les cases contenant 15 ou 18 et les couleurs bleu ou vert. Il y en a quatre (les cases jaunes).

La probabilité cherchée est $\dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8} = 0,125 = 12,5~\%$

3.c. Pour gagner, les règles sont différentes en fonction de la couleur du dé tétraèdrique :

— Blanc : dans tous les cas, c'est perdu ;

— Rouge : on gagne avec un nombre premier, donc avec les nombres 13, 17 et 19 ;

— Bleu : on gagne avec un multiple de 5, donc avec les nombre 15 et 20 ;

— Vert : on gagne avec un multiple de 3, donc avec les nombres 15 et 18.

On constate que cela correspond à 7 cases du tableau (4 cases vertes, la case bleue : Bleu - 15 et les deux cases jaunes Vert - 15 et Vert - 18).

La probabilité cherchée est $\dfrac{7}{32} = 0,21875 = 21,875~\%$

Exercices

Probabilités

Troisième

Exercice n° 1 : Une urne et des boules

Une urne contient des boules indiscernables au toucher :

— 2 boules vertes ;

— 5 boules bleues ;

— 1 boules noires ;

— 4 boules blanches.

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ou une boule bleue ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une boule noire ?

Exercice n° 2 : Une urne et des boules alphabétiques

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

ANTICONSTITUTIONNELLEMENT

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES** ?

4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** ?

5. Quelle est la probabilité d'obtenir un **J** ?

Exercice n° 3 : Une histoire de bonbons

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans les paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?
2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?
5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?
6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Exercices — Correction

Exercice nº 1

Correction

Une urne et des boules

L'expérience aléatoire consiste à choisir un boule indiscernable au toucher dans une urne contenant $2+5+1+4=12$ boules.
Comme elles sont indiscernables au toucher, nous pouvons dire que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a 5 boules bleues et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{12} \approx 0,42$ soit environ 42 %.

2. Il y a 4 boules blanches et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

3. Il y a 2 boules vertes et 4 boules bleues. Il y a donc 6 boules sur 12 qui conviennent.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

4. Il y a 1 boule noire, il reste donc 11 boules non noires sur 12.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{11}{12} \approx 0,92$ soit environ 92 %.

Exercice nº 2

Correction

Une urne et des boules alphabétiques

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres !
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

2. Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

3. Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1=14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

4. Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2=10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\dfrac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

5. Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.
La probabilité cherchée est 0 %.

Exercice n° 3 **Correction**

Une histoire de bonbons

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquet que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?

L'expérience aléatoire considérée est à une épreuve, elle consiste choisir un bonbon sans regarder. Nous sommes donc dans un modèle d'équiprobabilité.

Il y a $1+1+1+2=5$ bonbons dans le paquet.

Deux bonbons sont mes préférés. La probabilité cherchée est $\frac{2}{5}=0,4$ soit 40%

2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?

Il y a un seul bonbon au réglisse. La probabilité cherchée est $\frac{1}{5}=0,2$ soit 20%

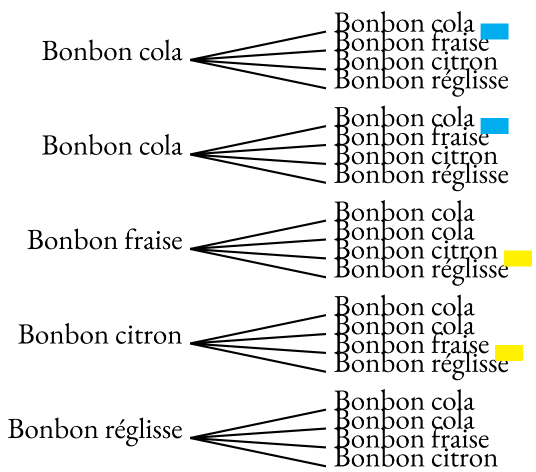
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Deux bonbons sont au citron ou à la fraise. La probabilité cherchée est $\frac{2}{5}=0,4$ soit 40%

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?

Nous sommes maintenant dans une expérience aléatoire à deux épreuves, nous pouvons la modéliser sous forme d'un arbre.



Il y a 20 branches équiprobables.

Deux branches correspondent à la question. La probabilité cherchée est $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0,1$ soit 10%.

5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?

C'est impossible puisqu'il n'y a qu'un bonbon réglisse. La probabilité cherchée est 0.

6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Deux branches correspondent à la question. La probabilité cherchée est $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0,1$ soit 10%.

Probabilités

Vocabulaire et exemples :

— Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu. Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle une épreuve.

Lancer un dé à six faces ou lancer une pièce de monnaie sont des expériences aléatoires à une épreuve.

Lancer deux dés à six faces ou deux pièces de monnaie sont des expériences aléatoires à deux épreuves.

— Le hasard n'a pas de mémoire : quand on répéte une expérience aléatoire, les résultats obtenus dans le passé n'influencent pas les futurs résultats.

Le tirage du Loto obtenu la semaine dernière a la même probabilité de survenir cette semaine !

— Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat de cette expérience. Un événement est constitué d'une ou plusieurs issues de cette expérience.

« Obtenir trois avec un dé cubique »ou « Obtenir face en lancant une pièce »sont des issues.

« Obtenir un nombre pair en lancant un dé »ou « Obtenir 7 en faisant la somme de deux dés sont des événements ».

— La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence d'apparition d'un résultat. On peut l'exprimer en pourcentage, en fraction ou sous forme décimale.

Il y a 1 chance sur 6 soit environ 16,7 % d'obtenir 4 avec un dé cubique équilibré. Il y a 50 % de faire pile avec une pièce non truquée.

— Un événement est impossible quand sa probabilité vaut 0 ;

L'événement « Obtenir 13 en faisant la somme de deux dés cubiques »est impossible.

— Un événement est certain quand sa probabilité vaut 1 ;

L'événement « Obtenir un nombre positif avec un dé cubique »est certain.

— Deux événements sont contraires quand l'un ou l'autre se produit de manière certaine. Cela signifie que la somme de leurs probabilités est égale à 1.

Les événements « Obtenir une carte noire »et « Obtenir une carte red »sont contraires quand on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Approche fréquentiste :

Lorsqu'on répéte une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un événement approche la probabilité de cet événement.

Quand on lance une pièce de monnaie 10 fois, on peut obtenir 10 fois la même face. Si la pièce n'est pas truquée, plus on répéte cette expérience, plus la fréquence d'apparition de Pile et de Face s'approche de $\frac{1}{2} = 0,5$ ou 50 %

Loi de probabilité et équiprobabilité :

— La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est la connaissance des probabilités de toutes les issues possibles de cette expérience.

— Il est souvent difficile de trouver la loi de probabilité d'une expérience aléatoire. Parfois on se contente d'une approche fréquentiste qui en répétant l'expérience donne une valeur approchée de la probabilité cherchée.

Quand on lance une punaise à tête plate, il est difficile de déterminer la probabilité qu'elle tombe à plat ou sur le côté.

La probabilité de gagner au Loto la semaine prochaine est difficile à calculer et demande des compétences de lycée.

— Si toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité de se réaliser, on dit que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. On parle aussi de loi de probabilité uniforme. Dans ce cas la probabilité d'un événement se calcule de la manière suivante :

$$\text{Probabilité de l'événement} = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à cet événement}}{\text{Nombre d'issues totales}}$$

Le lancer d'une pièce de monnaie non truquée, d'un dé cubique équilibré, la prise d'une boule non discernable au toucher... sont autant d'expériences aléatoires dont les issues sont équiprobables.

Expérience aléatoire à deux épreuves :

— Une expérience aléatoire à deux épreuves est constituée de deux épreuves indépendantes de deux expériences aléatoires à une épreuve.

On lance deux dés cubiques pour en faire la somme, on lance deux pièces de monnaies équilibrée, on fait tourner une roue et on pioche une boule... voici des expériences aléatoires à deux épreuves.

— Il faut bien choisir la définition des issues en veillant à ce qu'elles soient équiprobables. On utilise souvent pour cela un tableau à deux entrées ou un arbre.

On lance deux dés équilibrés et on fait la somme. Voici les issues possibles sous forme de tableau :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 36 issues équiprobables.

La probabilité d'obtenir un 7 est égale à $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ soit environ 16,7 %.

La probabilité d'obtenir un nombre premier est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ soit environ 41,7 %.

La probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 9 vaut $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ soit environ 27,8 %

V — Annexes

1 Exercices

Exercice n° 8.1 : Une urne et des boules

Une urne contient des boules indiscernables au toucher :

— 2 boules vertes ;

— 5 boules bleues ;

— 1 boules noires ;

— 4 boules blanches.

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ou une boule bleue ?

4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une boule noire ?

Exercice n° 8.2 : Une urne et des boules alphabétiques

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

ANTICONSTITUTIONNELLEMENT

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES** ?

4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** ?

5. Quelle est la probabilité d'obtenir un **J** ?

Exercice n° 8.1 : Une urne et des boules

Correction

L'expérience aléatoire consiste à choisir un boule indiscernable au toucher dans une urne contenant $2+5+1+4=12$ boules.
Comme elles sont indiscernables au toucher, nous pouvons dire que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a 5 boules bleues et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{12} \approx 0,42$ soit environ 42 %.

2. Il y a 4 boules blanches et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

3. Il y a 2 boules vertes et 4 boules bleues. Il y a donc 6 boules sur 12 qui conviennent.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

4. Il y a 1 boule noire, il reste donc 11 boules non noires sur 12.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{11}{12} \approx 0,92$ soit environ 92 %.

Exercice n° 8.2 : Une urne et des boules alphabétiques

Correction

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres !
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

2. Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

3. Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1=14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

4. Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2=10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\dfrac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

5. Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.

La probabilité cherchée est 0 %.

2 Évaluations

Évaluation de mathématiques

Exercice 1 : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

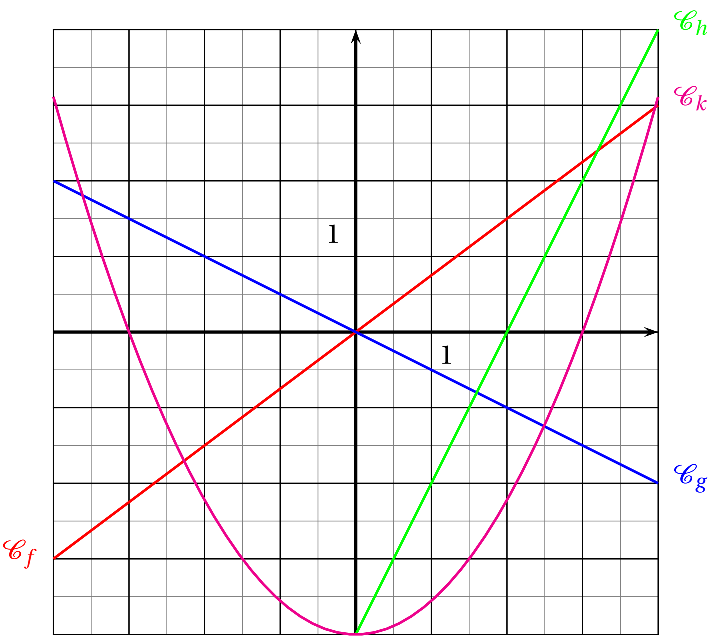
2. Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

3.a. En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.
3.b. Quels sont les antécédents de 30 par la fonction f ?

4. Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

5.a. Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$
5.b. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice 2



Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions f, g, h et k.

1. Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

2. Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions f, g, h et k.

3. Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

4. Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

Exercice 3
J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans les paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?
2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?
5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?
6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Évaluation de mathématiques

Correction

Exercice 1 : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$
$f(x) = (25x^2 - 30x + 9) - (20x^2 + 35x - 12x - 21)$

Il faut séparer les deux parties de l'expression pour ne pas commettre d'erreur.
Pour développer $(5x-3)^2$ on peut écrire $(5x-3)(5x-3)$ et utiliser la méthode habituelle.

$f(x) = 25x^2 - 30x + 9 - 20x^2 - 35x + 12x + 21$

Attention au changement de signe. Le moins devant la seconde parenthèse signifie « prendre l'opposé »de l'expression entre parenthèse.

$\boxed{f(x) = 5x^2 - 53x + 30}$

2. Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

Il suffit de remplacer x par 0 et par -1 en utilisant la forme développée : c'est plus rapide !

$f(0) = 5 \times 0^2 - 53 \times 0 + 30 = \boxed{30}$

$f(-1) = 5 \times (-1)^2 - 53 \times (-1) + 30$

Attention à $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ et par -1 !!

$f(-1) = 5 \times 1 + 53 + 30 = \boxed{88}$

3.a. En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.

Il faut résoudre :

$$5x^2 - 53x + 30 = 30$$

$$5x^2 - 53x = 0$$

Quand on voit une équation avec un x^2 il faut penser à l'équation produit et donc essayer de factoriser !

$$5x \times x - 53 \times x = 0$$

$$x(5x - 53) = 0$$

$x(5x-53)$ est bien la forme factorisée de $5x^2 - 53x$ il suffit de développer pour s'en rendre compte.

$$x(5x - 53) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

En clair, $x(5x-53)$ est le produit de x par $5x-53$. Pour que ce produit soit égal à 0 il faut que l'un des deux facteurs soit nul. Nous allons donc résoudre deux équations.

	$5x - 53 = 0$
	$5x - 53 + 53 = 53$
$x = 0$	$5x = 53$

$$x = \frac{53}{5} = 10,6$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5}}$.

3.b. Quels sont les antécédents de 30 par la fonction f ?

Les antécédents de 30 par f sont les nombres x tels que $f(x) = 30$, c'est-à-dire les nombres dont l'image est 30. Ce sont donc les solutions de l'équation précédente.

$\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5} \text{ sont les antécédents de 30 par } f.}$

4. Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

On reconnaît une forme factorisée, on peut la développer pour démontrer le résultat.

$(5x-3)(x-10) = 5x^2 - 50x - 3x + 30 = 5x^2 - 53x + 30$
On obtient bien le résultat attendu !

On peut aussi tenter de factoriser l'expression de départ.

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$
$f(x) = (5x-3)(5x-3) - (5x-3)(4x+7)$
$f(x) = (5x-3)[(5x-3) - (4x+7)]$
$f(x) = (5x-3)(5x-3-4x-7)$
$\boxed{f(x) = (5x-3)(x-10)}$

5.a. Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$

On reconnaît encore une forme factorisée.

$$(5x-3)(x-10) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x - 3 = 0$$

$$5x - 3 + 3 = 3$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$x - 10 = 0$$

$$x - 10 + 10 = 10$$

$$x = 10$$

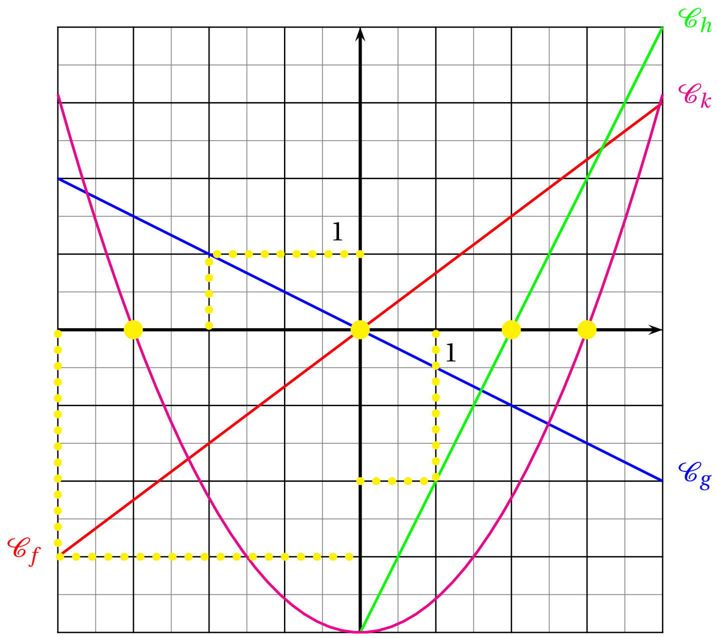
Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 10}$

5.b. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Je joue une nouvelle fois avec le vocabulaire : les antécédents de 0 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } 0,6 \text{ et } 10.}$

Exercice 2



Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions f, g, h et k.

1. Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

f est représentée graphiquement par la droite orange. Le point de cette droite ayant pour abscisse -4 a pour ordonnée -3.
Donc $\boxed{f(-4) = -3}$

g est représentée graphiquement par la droite bleue. Le point de cette droite ayant pour abscisse -2 a pour ordonnée 1.
Donc $\boxed{g(-2) = 1}$

h est représentée graphiquement par la droite verte. Le point de cette droite ayant pour abscisse 1 a pour ordonnée -2.
Donc $\boxed{h(1) = -2}$

k est représentée graphiquement par la parabole (oui cela s'appelle comme cela !) rose. Le point de cette courbe ayant pour abscisse -3 a pour ordonnée 0.
Donc $\boxed{k(-3) = 0}$

2. Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions f, g, h et k.

Les antécédents de 0 pour chaque fonction correspondent aux abscisses des points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses, en effet sur l'axe des abscisses les ordonnées sont égales 0.

La droite qui représente f coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{\text{0 est l'antécédent de 0 par } f}$.

La droite qui représente g coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{\text{0 est l'antécédent de 0 par } g}$.

La droite qui représente h coupe l'axe des abscisses en $(2;0)$ donc $\boxed{\text{2 est l'antécédent de 0 par } h}$.

La parabole qui représente k coupe l'axe des abscisses en $(-3;0)$ et $(3;0)$ donc $\boxed{-3 \text{ et } 3 \text{ sont les antécédents de 0 par } k}$.

3. Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

D'après le cours, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont linaires.}}$

4. Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

f est linéaire. Donc il existe un nombre a tel que pour tous les nombres x on a $f(x) = a \times x$

Or nous avons vu que $f(-4) = -3$, nous pouvons donc calculer a.

$f(-4) = a \times -4 = -3$ donc $a = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

Ainsi $f(x) = 0,75x$ d'où $\boxed{f(10) = 0,75 \times 10 = 7,5}$

De même $g(-2) = 1$ donc comme $g(x) = a \times x$ on a $a \times (-2) = 1$ d'où $a = \dfrac{1}{-2} = -0,5$

Ainsi $g(x) = -0,5x$ et $\boxed{g(50) = -0,5 \times 50 = -25}$

Exercice 3

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquet que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?

L'expérience aléatoire considérée est à une épreuve, elle consiste choisir un bonbon sans regarder. Nous sommes donc dans un modèle d'équiprobabilité.

Il y a $1+1+1+2 = 5$ bonbons dans le paquet.

Deux bonbons sont mes préférés. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?

Il y a un seul bonbon au réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{1}{5} = 0,2 \text{ soit } 20\%}$

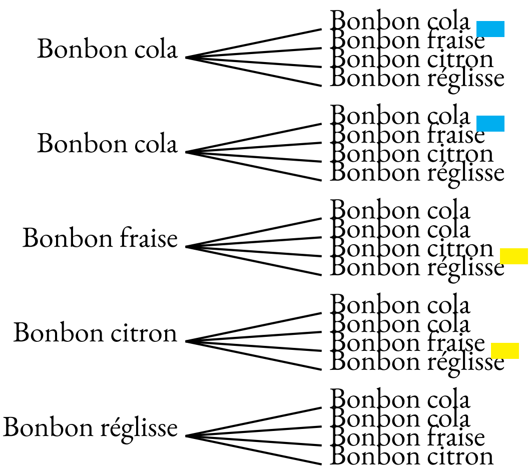
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Deux bonbons sont au citron ou à la fraise. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?

Nous sommes maintenant dans une expérience aléatoire à deux épreuves, nous pouvons la modéliser sous forme d'un arbre.



Il y a 20 branches équiprobables.

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?

C'est impossible puisqu'il n'y a qu'un bonbon réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } 0.}$

6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

Pour rester en forme en mathématiques...

Voici une sélection d'exercices qui couvrent trois thèmes du programme de troisième.
Chaque thème est décliné en trois niveaux d'expertise :

— ✖— Maîtrise satisfaisante (le niveau attendu pour le Brevet);
— ✖✖— Très bonne maîtrise (le niveau recommandé pour le lycée général);
— ✖✖✖— Hors catégorie (pour les passionnés qui aiment se creuser la tête).

À vous d'essayer d'aller le plus loin possible!

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✖

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$
$B(x) = (2-3x)(6-7x)$
$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$
$D(x) = (2x+3)^2$
$E(x) = (5x-3)^2 - 9$
$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$
$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$
$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$
$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1) = 0$$

$$(6x-3)(1+7x) = 0$$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✖✖

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x) = x^2 - 9$
$L(x) = 25x^2 - 49$
$M(x) = (5x-1)^2 - 16$
$N(x) = (3x+7)^2 - (4x-1)^2$

2. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-3)(3x-1) + (5x-3)(2x-1) = 0$$

$$(4x-3)^2 - (4x-3)(5x-1) = 0$$

$$(3x-2)^2 = 25$$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✖✖✖

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

1. Développer $(x-7)^2$

2. Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

3. Résoudre maintenant l'équation donnée au départ!

Défi. Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes!

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.

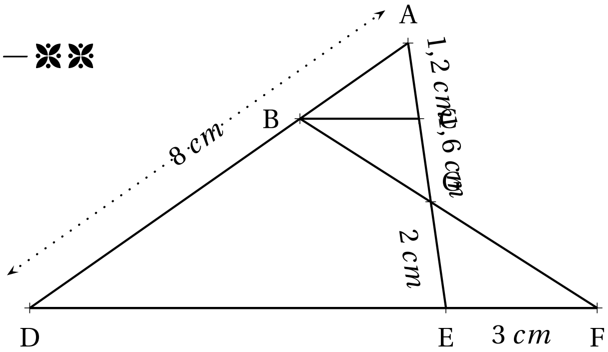
2. Calculer les longueurs BD et AE.

3. Calculer les longueurs EF et FC.

4. Calculer la longueur AF.

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* —



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

— D, E et F sont alignés ;

— A, B et D sont alignés ;

— A, C, G et E sont alignés ;

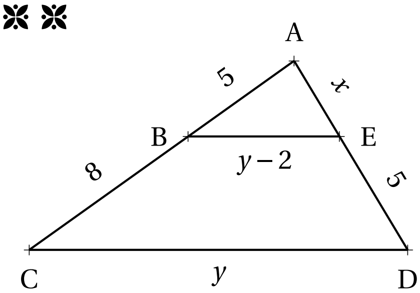
— (BC)//(DF).

1. Calculer BC.

2. Calculer DE et AB.

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

Troisième partie — *Hors catégorie* —



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs :

— les grandeurs indiquées sont exprimées en mètres ;

— A, B et C sont alignés ;

— A, E et D sont alignés ;

— (BE)//(CD).

Calculer la valeur exacte de x et de y.

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

Conjecture n° 1 : : $\frac{3}{7} - \frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

Conjecture n° 2 : : $\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7}$ est égal à 0.

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x - 3 = 4x + 13$.

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✱✱

Conjecture n° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n + 1$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Conjecture n° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

Conjecture n° 10 : : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x - 15)(15x + 35) = 0$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✱✱✱

Conjecture n° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Conjecture n° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
- Le multiplier par 13;
- Enlever 5 au résultat précédent;
- Multiplier le tout par 11;
- Ajouter 49 au résultat précédent;
- Multiplier par 7;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Conjecture n° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à 5 050

Pour rester en forme en mathématiques...

Correction

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$

$A(x) = 15x^2 + 9x + 25x + 15$

$\boxed{A(x) = 15x^2 + 34x + 15}$

$B(x) = (2-3x)(6-7x)$

$B(x) = 12 - 14x - 18x + 21x^2$

$\boxed{B(x) = 21x^2 - 32x + 12}$

$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$

$C(x) = -12x - 28x^2 + 9 + 21x$

$\boxed{C(x) = -28x^2 + 9x + 9}$

$D(x) = (2x+3)^2$

$D(x) = (2x+3)(2x+3)$

$D(x) = 4x^2 + 6x + 6x + 9$

$\boxed{D(x) = 4x^2 + 12x + 9}$

On pouvait aussi utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Cela revient à calculer mentalement le terme $2ab$ c'est-à-dire ici le double de $6x$.

Cette méthode est recommandée pour les futurs élèves de seconde générale !

$E(x) = (5x-3)^2 - 9$

$E(x) = (5x-3)(5x-3) - 9$

$E(x) = 25x^2 - 15x - 15x + 9 - 9$

$\boxed{E(x) = 25x^2 - 30x}$

$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

$F(x) = 30x^2 + 24x - 15x - 12$

$\boxed{F(x) = 30x^2 + 9x - 12}$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)[(2x-3) + (4x+5)]$

$G(x) = (5x-1)(2x-3+4x+5)$

$\boxed{G(x) = (5x-1)(6x+2)}$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)[(2x+9) - (2x-9)]$

$H(x) = (6x-1)(2x+9-2x+9)$

Attention au changement de signe !

$H(x) = (6x-1) \times 18$

$\boxed{H(x) = 18(6x-1)}$

$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)(5x-2) + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)[(5x-2) + (3x-1)]$

$I(x) = (5x-2)(5x-2+3x-1)$

$\boxed{I(x) = (5x-2)(8x-3)}$

$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)(3x-1) - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)[(3x-1) - (6x+1)]$

$J(x) = (3x-1)(3x-1-6x-1)$

Attention au changement de signe !

$\boxed{J(x) = (3x-1)(-3x-2)}$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}\approx 0,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,4 \text{ et } \frac{1}{3}}$

$$(6x-3)(1+7x)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$6x-3=0$$
$$6x-3+3=3$$
$$6x=3$$
$$x=\frac{3}{6}=0,5$$

$$1+7x=0$$
$$1+7x-1=-1$$
$$7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}\approx -0,14$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,5 \text{ et } -\frac{1}{7}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✵✵

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x)=x^2-9$

On utilise l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$K(x)=x^2-3^2$

$\boxed{K(x)=(x+3)(x-3)}$

$L(x)=25x^2-49$

$L(x)=(5x)^2-7^2$

$\boxed{L(x)=(5x+7)(5x-7)}$

$M(x)=(5x-1)^2-16$

$M(x)=(5x-1)^2-4^2$

On utilise à nouveau l'identité
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Ici $A=(5x-1)$ et $B=4$

$M(x)=[(5x-1)+4]\,[(5x-1)-4]$

$M(x)=[5x-1+4]\,[5x-1-4]$

$\boxed{M(x)=(5x+3)(5x-5)}$

$N(x)=(3x+7)^2-(4x-1)^2$

Ici $A=(3x+7)$ et $B=(4x-1)$

$N(x)=[(3x+7)+(4x-1)]\,[(3x+7)-(4x-1)]$

$N(x)=[3x+7+4x-1]\,[3x+7-4x+1]$

$\boxed{N(x)=(7x+6)(-x+8)}$

2. Résoudre les équations suivantes :

Aucune des équations suivantes ne peut être résolue tel quel. Il ne faut pas développer ces expressions, car la présence d'un terme en x^2 empêche la résolution (Voir la troisième partie).
La bonne idée consiste à factoriser ces expressions puis à utiliser la propriété « du produit nul ».

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)\left[(3x-1)+(2x-1)\right]=0$$

$$(5x-3)(3x-1+2x-1)=0$$

$$(5x-3)(5x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-3=0$$
$$5x-3+3=3$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5}=0,6$$

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 0,4}$

$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)(4x-3)+(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)\left[(4x-3)-(5x-1)\right]=0$$

$$(4x-3)(4x-3-5x+1)=0$$

$$(4x-3)(-x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$4x-3=0$$
$$4x-3+3=3$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

$$-x-2=0$$
$$-x-2+2=2$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,75 \text{ et } -2}$

$$(3x-2)^2=25$$

C’est un cas difficile. Il faut penser à « faire apparaître »un zéro d’un côté de l’égalité puis factoriser l’expression en s’inspirant de l’identité remarquable a^2-b^2

$$(3x-2)^2-25=25-25$$
$$(3x-2)^2-25=0$$
$$(3x-2)^2-5^2=0$$
$$[(3x-2)+5]\,[(3x-2)-5]=0$$
$$[3x-2+5]\,[3x-2-5]=0$$
$$(3x+3)(3x-7)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$3x+3=0$$
$$3x+3-3=-3$$
$$3x=-3$$
$$x=\frac{-3}{3}=1$$

$$3x-7=0$$
$$3x-7+7=7$$
$$3x=7$$
$$x=\frac{7}{3}\approx 2{,}33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{1 \text{ et } \frac{7}{3}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ❋❋❋

On veut résoudre l’équation :

$$x^2-14x+24=0$$

Vous pouvez constater qu’on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2-14x+24$.

Vous ne savez pas résoudre une telle équation en troisième. Ces équations avec un terme en x^2 s’appelle des équations du second degré. Vous saurez les résoudre directement en première. En attendant, l’exercice propose une version simplifiée de la méthode. Le principe de cette méthode consiste à reconnaître le début d’une identité remarquable du type $(a+b)^2$ ou $(a-)^2$ puis d’effectuer la factorisation de a^2-b^2

1. Développer $(x-7)^2$

$(x-7)^2=\boxed{x^2-14x+49}$
L’identité $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

2. Montrer que $x^2-14x+24=(x-7)^2-25$

$(x-7)^2-25=x^2-14x+49-25$
$\boxed{(x-7)^2-25=x^2-14x+24}$

3. Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

Nous allons utiliser l'identité $a^2 - b^2$ pour factoriser cette expression.

$$(x-7)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x-7)+5]\,[(x-7)-5] = 0$$
$$[x-7+5]\,[x-7-5] = 0$$
$$(x-2)(x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$x-2=0$ $x-2+2=2$ $x=2$	$x-12=0$ $x-12+12=12$ $x=12$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{2 \text{ et } 12}$
Vérifions : $2^2 - 14 \times 2 + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$ et $12^2 - 14 \times 12 = 144 - 168 + 24 = 0$
Ainsi 2 et 12 sont bien les solutions attendues !

Défi. Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

C'est une question très difficile. Nous allons utiliser le plan de la première partie !

Observons l'expression $x^2 + 8x - 9$. On veut que le début de l'expression ressemble à l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Comme $x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x$, on pense à l'identité $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. C'est assez proche de l'expression cherchée.
L'écart entre les deux expressions est : $(x^2+8x+16) - (x^2+8x-9) = 16 + 9 = 25$.
Donc finalement $x^2 + 8x - 9 = (x^2 + 8x + 16) - 25 = (x+4)^2 - 25$
Or nous savons factoriser l'expression $(x+4)^2 - 25$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2$.
Voici donc la résolution :

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+4)^2 - 25 = 0$$
$$(x+4)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x+4)+5]\,[(x+4)-5] = 0$$
$$[x+4+5]\,[x+4-5] = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$x+9=0$ $x+9-9=-9$ $x=-9$	$x-1=0$ $x-1+1=1$ $x=1$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-9 \text{ et } 1}$

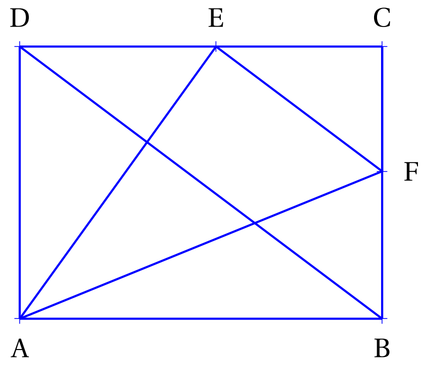
Vérifions : $1^2 + 8 \times 1 - 9 = 1 + 8 - 9 = 0$ et $(-9)^2 + 8 \times (-9) - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.



2. Calculer les longueurs BD et AE.

Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$
$$96^2 + 72^2 = BD^2$$
$$BD^2 = 9\,216 + 5\,184$$
$$BD^2 = 14\,400$$
$$BD = \sqrt{14\,400}$$
$$BD = 120$$

$\boxed{BD = 120\ mm}$

Dans le triangle ADE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DE^2 = AE^2$$
$$72^2 + 52^2 = AE^2$$
$$AE^2 = 5\,184 + 2\,704$$
$$AE^2 = 7\,888$$
$$AE = \sqrt{7\,888}$$
$$AE \approx 88{,}8$$

$\boxed{AE = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88{,}8\ mm \text{ à } 0{,}1\ mm \text{ près.}}$

3. Calculer les longueurs EF et FC.

Dans le triangle DCB, E ∈ [DC] et F ∈ [CB]
Les droites (DB) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{CE}}{\text{CD}} = \frac{\text{CF}}{\text{CB}} = \frac{\text{EF}}{\text{DB}}$$
$$\frac{96\ mm - 52\ mm}{96\ mm} = \frac{\text{CF}}{72\ mm} = \frac{\text{EF}}{120\ mm}$$
$$\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{\text{CF}}{72\ mm} = \frac{\text{EF}}{120\ mm}$$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{\text{CF}}{72\ mm}$ alors $\text{CF} = \frac{72\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 33\ mm$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{\text{EF}}{120\ mm}$ alors $\text{EF} = \frac{120\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 55\ mm$

Ainsi $\boxed{\text{CF} = 33\ mm \text{ et } \text{EF} = 55\ mm}$

4. Calculer la longueur AF.

Dans le triangle AFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{BA}^2 + \text{BF}^2 = \text{AF}^2$$
$$96^2 + (72 - 33)^2 = \text{AF}^2$$
$$\text{AF}^2 = 96^2 + 39^2$$
$$\text{AF}^2 = 9\,216 + 1\,521$$
$$\text{AF}^2 = 10\,737$$
$$\text{AF} = \sqrt{10\,737}$$
$$\text{AF} \approx 103,6$$

$\boxed{\text{AF} = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF nous avons $\text{EF} = 55\ mm$, $\text{EA} = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm$ et $\text{AF} = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm$.

Comparons AF^2 et $\text{EF}^2 + \text{EA}^2$

Pour calculer AF^2 on peut passer par la valeur approchée, mais il est plus rigoureux d'utiliser la valeur exacte.
En effet $\text{AF}^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$ d'après la définition de la racine carrée !

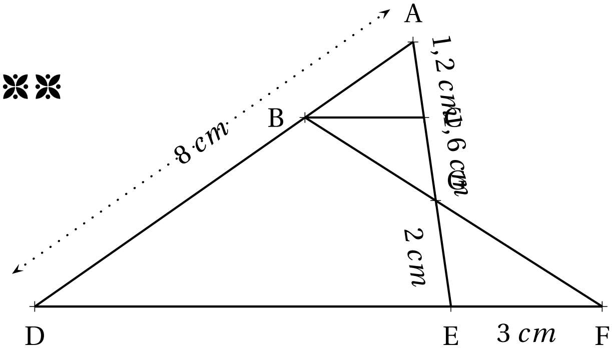
$\text{AF}^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$

$\text{EF}^2 + \text{EA}^2 = 55^2 + (\sqrt{7\,888})^2 = 3\,025 + 7\,888 = 10\,913$

On constate ainsi que $\text{EF}^2 + \text{EA}^2 \neq \text{AF}^2$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAF n'est pas rectangle}}$.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✲✲



1. Calculer BC.

La difficulté consiste à se demander dans quelle configuration on se place !

Les droites (BF) et (EC) se coupent en G. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{GE}} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}$$

$$\frac{1,6\ cm}{2\ cm} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{BC}}{3\ cm}$$

Comme $\frac{1,6\ cm}{2\ cm} = \frac{\mathrm{BC}}{3\ cm}$ on a $\mathrm{BC} = \frac{3\ cm \times 1,6\ cm}{2\ cm} = 2,4\ cm$

$\boxed{\mathrm{BC} = 2,4\ cm}$

2. Calculer DE et AB.

Dans le triangle ADE, $\mathrm{B} \in [\mathrm{AD}]$ et $\mathrm{C} \in [\mathrm{AE}]$. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DE}}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{1,6\ cm + 2\ cm} = \frac{2,4\ cm}{\mathrm{DE}}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm} = \frac{2,4\ cm}{\mathrm{DE}}$$

Comme $\frac{\mathrm{AB}}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm}$ on a $\mathrm{AB} = \frac{8\ cm \times 1,2\ cm}{3,6\ cm} = \frac{9,6}{3,6}\ cm \approx 2,7\ cm$

Comme $\frac{2,4\ cm}{\mathrm{DE}} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm}$ on a $\mathrm{DE} = \frac{2,4\ cm \times 3,6\ cm}{1,2\ cm} = 7,2\ cm$

$\boxed{\mathrm{AB} \approx 2,7\ cm \text{ à } 0,1\ cm \text{ près et } \mathrm{DE} = 7,2\ cm}$

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

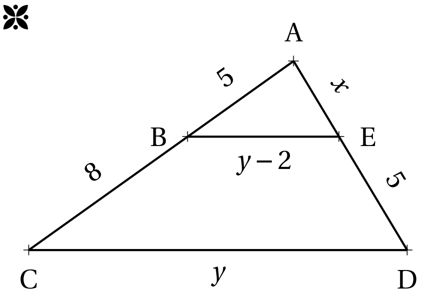
Comme les deux droites (BE) et (AF) coupent les droites (AD) et (DF) sécantes en D,

Nous allons comparer les quotients $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}}$ et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}}$

$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}} = \frac{8\ cm - 2,7\ cm}{8\ cm} = \frac{5,3\ cm}{8\ cm} \approx 0,66$ et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}} = \frac{7,2\ cm}{7,2\ cm + 3\ cm} = \frac{7,2\ cm}{10,2\ cm} \approx 0,71$

Comme $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}} \neq \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (BE) et (AF) ne sont pas parallèles.}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✵ ✵ ✵



Calculer la valeur exacte de x et de y.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD].
Comme (BE)//(CD), d'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{5}{5+8} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

Nous allons utiliser la propriété des produits en croix pour obtenir des équations que nous savons résoudre.

Comme $\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5}$ on en déduit que $5 \times (x+5) = 13 \times x$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$5(x+5) = 13x$$

$$5x + 25 = 13x$$

$$5x + 25 - 5x = 13x - 5x$$

$$25 = 8x$$

$$8x = 25$$

$$x = \frac{25}{8} = 3,125$$

Comme $\frac{5}{13} = \frac{y-2}{y}$ on en déduit que $5 \times y = 13 \times (y-2)$.
Il faut résoudre l'équation :

$$5y = 13(y-2)$$

$$5y = 13y - 26$$

$$5y - 5y = 13y - 26 - 5y$$

$$0 = 8y - 26$$

$$26 = 8y - 26 + 26$$

$$26 = 8y$$

$$8y = 26$$

$$y = \frac{26}{8} = 3,25$$

$\boxed{x = 3,125 \text{ et } y = 3,25}$

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

Conjecture n° 1 : : $\frac{3}{7} - \frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

$\frac{3}{7} - \frac{5}{4} = \frac{12}{28} - \frac{35}{28} = -\frac{23}{28} < 0$

$\boxed{\text{Conjecture n° 1 : VRAIE}}$

Conjecture n° 2 : : $\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7}$ est égal à 0.

Attention à la priorité de la multiplication.

$\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{3} - \frac{5 \times 3}{3 \times 7} = \frac{5}{3} - \frac{5}{7} = \frac{35}{21} - \frac{15}{21} = \frac{20}{21}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 2 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

$13 = 13 \times 1$: 13 est un multiple de 13 et 13 est premier.

$\boxed{\text{Conjecture n° 3 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x - 3 = 4x + 13$.

On peut tester cette proposition de solution :
Pour $x = 8$, $6x - 3 = 6 \times 8 - 3 = 48 - 3 = 45$ et $4x + 13 = 4 \times 8 + 13 = 32 + 13 = 45$
Donc 8 est une solution de l'équation.

On peut aussi résoudre cette équation (ce qui prouvera aussi que 8 est la seule solution !).

$$6x - 3 = 4x + 13$$
$$6x - 3 + 3 = 4x + 13 + 3$$
$$6x = 4x + 16$$
$$6x - 4x = 4x - 4x + 16$$
$$2x = 16$$
$$x = \frac{16}{2}$$
$$x = 8$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 4 : VRAIE}}$

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Le volume de ce pavé droit mesure : $16\ cm \times 11\ cm \times 6\ cm = 1056\ cm^3$. On sait que $1\ \text{L} = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 5 : VRAIE}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✱✱

CONJECTURE N° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

On peut vérifier sur quelques exemples :
$n=3$ on a $2n+1=2\times 3+1=6+1=7$: c'est impair.
$n=10$ on a $2n+1=2\times 10+1=20+1=21$: c'est impair.
$n=2020$ on a $2n+1=2\times 2020+1=4040+1=4041$: c'est impair !

Un nombre impair est un nombre dont le reste est 1 quand on le divise par 2. Cela signifie par exemple que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair. Pour n un nombre entier positif, $2n$ est un nombre pair puisque c'est un multiple de 2. $2n+1$ est le successeur de $2n$, il est donc impair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 6 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Pour $n=2$ on a $3n=3\times 2=6$: c'est un nombre pair. Plus généralement, $3n$ est pair dès que n est pair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 7 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Le volume d'un cylindre s'exprime sous la forme : Aire de la base × Hauteur $=\pi\times \mathrm{R}^2\times h$

Le volume d'un cône s'exprime sous la forme : $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base × Hauteur $=\frac{1}{3}\times\pi\times \mathrm{R}^2\times h$

Le cylindre à un volume de : $\pi\times(5\ cm)^2\times 10\ cm=\pi\times 25\times 10\ cm^3=250\pi\ cm^3$

Le cône à un volume de : $\frac{1}{3}\times\pi\times(12\ cm)^2\times 5\ cm=\frac{1}{3}\times 144\times 5\pi\ cm3=240\pi\ cm^3$

$\boxed{\text{Conjecture n° 8 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

La somme des carrés de deux nombres : $3^2+4^2=9+16=25$
Le carré de la somme de deux nombres : $(3+4)^2=7^2=49$

Comme $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ l'écart entre $(a+b)^2$ et a^2+b^2 est $2ab$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 9 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 10 : : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

Il faut résoudre l'équation : $(9x-15)(15x+35)=0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$9x-15=0$	$15x+35=0$
$9x-15+15=15$	$15x+35-35=-35$
$9x=15$	$15x=-35$
$x=\frac{15}{9}$	$x=-\frac{35}{15}$
$x=\frac{5}{3}$	$x=-\frac{7}{3}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 10 : VRAIE}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✺✺✺

Conjecture n° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$4+5=9$: impair.
$10+17=27$: impair.

Un nombre pair quelconque peut s'écrire $2n$ où n est un entier.
Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n$ et $2p+1$: $2n+2p+1=2(n+p)+1$: on a factorisé 2.
Donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair quelconques peut s'écrire $2k+1$ où $k=n+p$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 11 : VRAIE

Conjecture n° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7+5=12$: pair.
$11+17=28$: pair.

Un premier nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Un second nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n+1$ et $2p+1$: $2n+1+2p+1=2n+2p+2=2(n+p+1)$: on a factorisé 2.
Donc la somme de deux nombres impairs quelconques peut s'écrire $2k$ où $k=n+p+1$.
C'est l'écriture d'un nombre pair !

Conjecture n° 12 : VRAIE

Conjecture n° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7^2=49$: impair.
$11^2=121$: impair.

Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Le carré d'un nombre impair peut donc s'écrire $(2n+1)^2$
$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$: on a factorisé 2.
Donc le carré d'un nombre impair quelconque peut s'écrire $2k+1$ où $k=2n^2+2n$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 13 : VRAIE

CONJECTURE N° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999 ;
- Le multiplier par 13 ;
- Enlever 5 au résultat précédent ;
- Multiplier le tout par 11 ;
- Ajouter 49 au résultat précédent ;
- Multiplier par 7 ;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Testons avec quelques nombres :

Avec 67 : $13 \times 67 = 871$, $871 - 5 = 866$ puis $11 \times 866 = 9\,526$, $9\,526 + 49 = 9\,575$
Et enfin $7 \times 9\,575 = 67\,025$ puis $67\,025 + 42 = 67\,067$

Avec 567 : $13 \times 567 = 7\,371$, $7\,371 - 5 = 7\,366$ puis $11 \times 7\,366 = 81\,026$, $81\,026 + 49 = 81\,075$
Et enfin $7 \times 81\,075 = 567\,525$ puis $567\,525 + 42 = 567\,567$

Le nombre de départ semble répété deux fois dans le nombre résultat.

Notons x le nombre entier choisi au départ.
On le multiplie par 13 : $13x$
On enlève 5 : $13x - 5$
On multiplie le tout par 11 : $11(13x - 5) = 143x - 55$
On ajoute 49 : $143x - 55 + 49 = 143x - 6$
On multiplie par 7 : $7(143x - 6) = 1\,001x - 42$
On ajoute 42 : $1\,001x - 42 + 42 = 1\,001x$

Ainsi ce programme de calcul revient à multiplier le nombre de départ par 1 001.
En multipliant un nombre par 1 001 on obtient bien l'effet attendu !

CONJECTURE N° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$ est égal à 5 050

C'est une question célèbre ! On raconte qu'elle a été posée vers 1784 par un instituteur à une classe d'élèves de 7 ans qu'il voulait punir en leur donnant cette très longue addition. Dans cette classe cependant se trouvait celui qui allait devenir le plus grand mathématicien du XIX ᵉsiècle : Carl Friedrich Gauss. Celui-ci au bout de quelques secondes leva son ardoise avec le bon résultat ! Voici comment il s'y est pris ! Vous attendrez d'être en première pour découvrir les suites arithmétiques et une formule générale qui résoud ce problème

L'idée géniale est d'écrire cette somme dans un sens puis dans l'autre sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \ldots & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \ldots & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
S+S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Au lieu d'ajouter horizontalement il faut penser à ajouter verticalement.
On obtient le double de la somme et 100 fois le nombre 101.
Ainsi le double de la somme est égale à $100 \times 101 = 10\,100$

La somme S cherchée vaut donc $10\,100 \div 2 = 5\,050$

$\boxed{\text{Conjecture n° 15 : VRAIE}}$

Pour rester en forme en mathématiques...

Voici une sélection d'exercices qui couvrent trois thèmes du programme de troisième.
Chaque thème est décliné en trois niveaux d'expertise :

- ✻— Maîtrise satisfaisante (le niveau attendu pour le Brevet) ;
- ✻✻— Très bonne maîtrise (le niveau recommandé pour le lycée général) ;
- ✻✻✻— Hors catégorie (pour les passionnés qui aiment se creuser la tête).

À vous d'essayer d'aller le plus loin possible !

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✻

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$
$B(x) = (2-3x)(6-7x)$
$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$
$D(x) = (2x+3)^2$
$E(x) = (5x-3)^2 - 9$
$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$
$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$
$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$
$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$7x - 5 = 3x + 2$$

$$11x - 7 = 2x - 9$$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x) = x^2 - 9$
$L(x) = 25x^2 - 49$
$M(x) = (5x-1)^2 - 16$
$N(x) = (3x+7)^2 - (4x-1)^2$

2. Résoudre les équations suivantes :

$$5(4x-1) = 4(4x+3)$$

$$7(2x-4) + 3x - 1 = 3(6x-6) + 3$$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✻✻✻

On pose $f(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$ et $g(x) = (5x-8)^2 - (4x+8)(5x-8)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

2. Calculer $f(4)$ et $f(-\dfrac{2}{9})$.

3. Calculer $g(\dfrac{8}{5})$ et $g(16)$.

4. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par f et par g.

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✻

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.

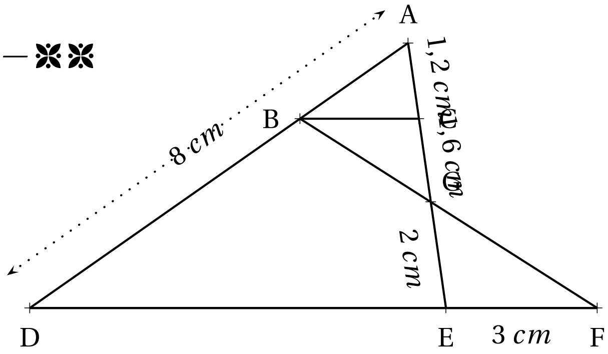
2. Calculer les longueurs BD et AE.

3. Calculer les longueurs EF et FC.

4. Calculer la longueur AF.

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

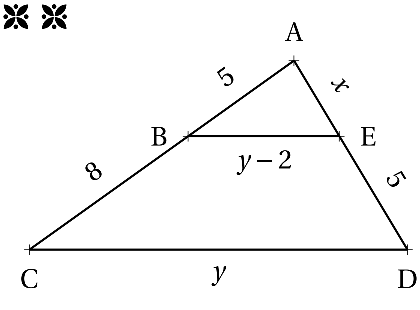
- D, E et F sont alignés ;
- A, B et D sont alignés ;
- A, C, G et E sont alignés ;
- (BC)//(DF).

1. Calculer BC.

2. Calculer DE et AB.

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✻ ✻ ✻



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs :

- les grandeurs indiquées sont exprimées en mètres ;
- A, B et C sont alignés ;
- A, E et D sont alignés ;
- (BE)//(CD).

Calculer la valeur exacte de x et de y.

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

Conjecture n° 1 : : $\frac{3}{7} - \frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

Conjecture n° 2 : : $\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7}$ est égal à 0.

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x - 3 = 4x + 13$.

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✱✱

Conjecture n° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n + 1$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Conjecture n° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

Conjecture n° 10 : : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x - 15)(15x + 35) = 0$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✱✱✱

Conjecture n° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Conjecture n° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
- Le multiplier par 13;
- Enlever 5 au résultat précédent;
- Multiplier le tout par 11;
- Ajouter 49 au résultat précédent;
- Multiplier par 7;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Conjecture n° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à 5 050

Pour rester en forme en mathématiques...

Correction

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$

$A(x) = 15x^2 + 9x + 25x + 15$

$\boxed{A(x) = 15x^2 + 34x + 15}$

$B(x) = (2-3x)(6-7x)$

$B(x) = 12 - 14x - 18x + 21x^2$

$\boxed{B(x) = 21x^2 - 32x + 12}$

$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$

$C(x) = -12x - 28x^2 + 9 + 21x$

$\boxed{C(x) = -28x^2 + 9x + 9}$

$D(x) = (2x+3)^2$

$D(x) = (2x+3)(2x+3)$

$D(x) = 4x^2 + 6x + 6x + 9$

$\boxed{D(x) = 4x^2 + 12x + 9}$

On pouvait aussi utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Cela revient à calculer mentalement le terme $2ab$ c'est-à-dire ici le double de $6x$.

Cette méthode est recommandée pour les futurs élèves de seconde générale !

$E(x) = (5x-3)^2 - 9$

$E(x) = (5x-3)(5x-3) - 9$

$E(x) = 25x^2 - 15x - 15x + 9 - 9$

$\boxed{E(x) = 25x^2 - 30x}$

$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

$F(x) = 30x^2 + 24x - 15x - 12$

$\boxed{F(x) = 30x^2 + 9x - 12}$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)[(2x-3) + (4x+5)]$

$G(x) = (5x-1)(2x-3+4x+5)$

$\boxed{G(x) = (5x-1)(6x+2)}$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)[(2x+9) - (2x-9)]$

$H(x) = (6x-1)(2x+9-2x+9)$

Attention au changement de signe !

$H(x) = (6x-1) \times 18$

$\boxed{H(x) = 18(6x-1)}$

$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)(5x-2) + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)[(5x-2) + (3x-1)]$

$I(x) = (5x-2)(5x-2+3x-1)$

$\boxed{I(x) = (5x-2)(8x-3)}$

$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)(3x-1) - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)[(3x-1) - (6x+1)]$

$J(x) = (3x-1)(3x-1-6x-1)$

Attention au changement de signe !

$\boxed{J(x) = (3x-1)(-3x-2)}$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}\approx 0,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,4 \text{ et } \frac{1}{3}}$

$$(6x-3)(1+7x)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$6x-3=0$$
$$6x-3+3=3$$
$$6x=3$$
$$x=\frac{3}{6}=0,5$$

$$1+7x=0$$
$$1+7x-1=-1$$
$$7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}\approx -0,14$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,5 \text{ et } -\frac{1}{7}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✱✱

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x)=x^2-9$

On utilise l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$K(x)=x^2-3^2$

$\boxed{K(x)=(x+3)(x-3)}$

$L(x)=25x^2-49$

$L(x)=(5x)^2-7^2$

$\boxed{L(x)=(5x+7)(5x-7)}$

$M(x)=(5x-1)^2-16$

$M(x)=(5x-1)^2-4^2$

On utilise à nouveau l'identité
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Ici $A=(5x-1)$ et $B=4$

$M(x)=[(5x-1)+4]\,[(5x-1)-4]$

$M(x)=[5x-1+4]\,[5x-1-4]$

$\boxed{M(x)=(5x+3)(5x-5)}$

$N(x)=(3x+7)^2-(4x-1)^2$

Ici $A=(3x+7)$ et $B=(4x-1)$

$N(x)=[(3x+7)+(4x-1)]\,[(3x+7)-(4x-1)]$

$N(x)=[3x+7+4x-1]\,[3x+7-4x+1]$

$\boxed{N(x)=(7x+6)(-x+8)}$

2. Résoudre les équations suivantes :

Aucune des équations suivantes ne peut être résolue tel quel. Il ne faut pas développer ces expressions, car la présence d'un terme en x^2 empêche la résolution (Voir la troisième partie).
La bonne idée consiste à factoriser ces expressions puis à utiliser la propriété « du produit nul ».

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)\left[(3x-1)+(2x-1)\right]=0$$

$$(5x-3)(3x-1+2x-1)=0$$

$$(5x-3)(5x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$5x-3=0$	$5x-2=0$
$5x-3+3=3$	$5x-2+2=2$
$5x=3$	$5x=2$
$x=\dfrac{3}{5}=0,6$	$x=\dfrac{2}{5}=0,4$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 0,4}$

$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)(4x-3)+(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)\left[(4x-3)-(5x-1)\right]=0$$

$$(4x-3)(4x-3-5x+1)=0$$

$$(4x-3)(-x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$4x-3=0$	$-x-2=0$
$4x-3+3=3$	$-x-2+2=2$
$4x=3$	$-x=2$
$x=\dfrac{3}{4}=0,75$	$x=-2$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,75 \text{ et } -2}$

$$(3x-2)^2 = 25$$

C'est un cas difficile. Il faut penser à « faire apparaître »un zéro d'un côté de l'égalité puis factoriser l'expression en s'inspirant de l'identité remarquable $a^2 - b^2$

$$(3x-2)^2 - 25 = 25 - 25$$
$$(3x-2)^2 - 25 = 0$$
$$(3x-2)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(3x-2)+5]\,[(3x-2)-5] = 0$$
$$[3x-2+5]\,[3x-2-5] = 0$$
$$(3x+3)(3x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$3x+3 = 0$$
$$3x+3-3 = -3$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3} = 1$$

$$3x-7 = 0$$
$$3x-7+7 = 7$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{1 \text{ et } \frac{7}{3}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* —

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

Vous ne savez pas résoudre une telle équation en troisième. Ces équations avec un terme en x^2 s'appelle des équations du second degré. Vous saurez les résoudre directement en première. En attendant, l'exercice propose une version simplifiée de la méthode. Le principe de cette méthode consiste à reconnaître le début d'une identité remarquable du type $(a+b)^2$ ou $(a-)^2$ puis d'effectuer la factorisation de $a^2 - b^2$

1. Développer $(x-7)^2$

$(x-7)^2 = \boxed{x^2 - 14x + 49}$

L'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

$(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 49 - 25$

$\boxed{(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 24}$

3. Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

Nous allons utiliser l'identité $a^2 - b^2$ pour factoriser cette expression.

$$(x-7)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x-7)+5]\,[(x-7)-5] = 0$$
$$[x-7+5]\,[x-7-5] = 0$$
$$(x-2)(x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$x-2=0$	$x-12=0$
$x-2+2=2$	$x-12+12=12$
$x=2$	$x=12$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{2 \text{ et } 12}$
Vérifions : $2^2 - 14\times 2 + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$ et $12^2 - 14\times 12 = 144 - 168 + 24 = 0$
Ainsi 2 et 12 sont bien les solutions attendues !

Défi. Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

C'est une question très difficile. Nous allons utiliser le plan de la première partie !

Observons l'expression x^2+8x-9. On veut que le début de l'expression ressemble à l'identité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
Comme $x^2+8x = x^2+2\times 4x$, on pense à l'identité $(x+4)^2 = x^2+8x+16$. C'est assez proche de l'expression cherchée.
L'écart entre les deux expressions est : $(x^2+8x+16)-(x^2+8x-9) = 16+9 = 25$.
Donc finalement $x^2+8x-9 = (x^2+8x+16)-25 = (x+4)^2-25$
Or nous savons factoriser l'expression $(x+4)^2-25$ en utilisant l'identité a^2-b^2.
Voici donc la résolution :

$$x^2+8x-9=0$$
$$(x+4)^2-25=0$$
$$(x+4)^2-5^2=0$$
$$[(x+4)+5]\,[(x+4)-5]=0$$
$$[x+4+5]\,[x+4-5]=0$$
$$(x+9)(x-1)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$x+9=0$	$x-1=0$
$x+9-9=-9$	$x-1+1=1$
$x=-9$	$x=1$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-9 \text{ et } 1}$

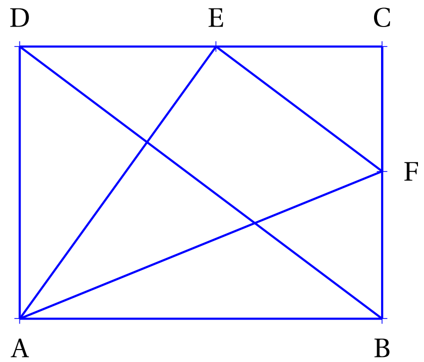
Vérifions : $1^2+8\times 1-9 = 1+8-9 = 0$ et $(-9)^2+8\times(-9)-9 = 81-72-9 = 0$

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.



2. Calculer les longueurs BD et AE.

Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$
$$96^2 + 72^2 = BD^2$$
$$BD^2 = 9\,216 + 5\,184$$
$$BD^2 = 14\,400$$
$$BD = \sqrt{14\,400}$$
$$BD = 120$$

$\boxed{BD = 120\ mm}$

Dans le triangle ADE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DE^2 = AE^2$$
$$72^2 + 52^2 = AE^2$$
$$AE^2 = 5\,184 + 2\,704$$
$$AE^2 = 7\,888$$
$$AE = \sqrt{7\,888}$$
$$AE \approx 88{,}8$$

$\boxed{AE = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88{,}8\ mm \text{ à } 0{,}1\ mm \text{ près.}}$

3. Calculer les longueurs EF et FC.

Dans le triangle DCB, E ∈ [DC] et F ∈ [CB]
Les droites (DB) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DB}}$$
$$\frac{96\ mm - 52\ mm}{96\ mm} = \frac{\mathrm{CF}}{72\ mm} = \frac{\mathrm{EF}}{120\ mm}$$
$$\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{\mathrm{CF}}{72\ mm} = \frac{\mathrm{EF}}{120\ mm}$$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{\mathrm{CF}}{72\ mm}$ alors $\mathrm{CF} = \frac{72\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 33\ mm$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{\mathrm{EF}}{120\ mm}$ alors $\mathrm{EF} = \frac{120\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 55\ mm$

Ainsi $\boxed{\mathrm{CF} = 33\ mm \text{ et } \mathrm{EF} = 55\ mm}$

4. Calculer la longueur AF.

Dans le triangle AFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BF}^2 = \mathrm{AF}^2$$
$$96^2 + (72 - 33)^2 = \mathrm{AF}^2$$
$$\mathrm{AF}^2 = 96^2 + 39^2$$
$$\mathrm{AF}^2 = 9\,216 + 1\,521$$
$$\mathrm{AF}^2 = 10\,737$$
$$\mathrm{AF} = \sqrt{10\,737}$$
$$\mathrm{AF} \approx 103{,}6$$

$\boxed{\mathrm{AF} = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103{,}6\ mm \text{ à } 0{,}1\ mm \text{ près.}}$

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF nous avons $\mathrm{EF} = 55\ mm$, $\mathrm{EA} = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88{,}8\ mm$ et $\mathrm{AF} = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103{,}6\ mm$.

Comparons AF^2 et $\mathrm{EF}^2 + \mathrm{EA}^2$

Pour calculer AF^2 on peut passer par la valeur approchée, mais il est plus rigoureux d'utiliser la valeur exacte.
En effet $\mathrm{AF}^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$ d'après la définition de la racine carrée !

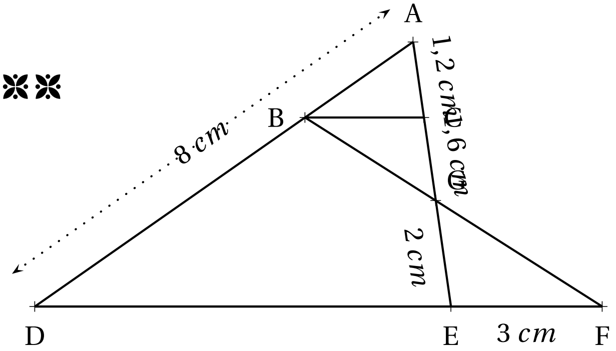
$\mathrm{AF}^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$

$\mathrm{EF}^2 + \mathrm{EA}^2 = 55^2 + (\sqrt{7\,888})^2 = 3\,025 + 7\,888 = 10\,913$

On constate ainsi que $\mathrm{EF}^2 + \mathrm{EA}^2 \neq \mathrm{AF}^2$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAF n'est pas rectangle}}$.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* —



1. Calculer BC.

La difficulté consiste à se demander dans quelle configuration on se place !

Les droites (BF) et (EC) se coupent en G. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{GC}}{\text{GE}} = \frac{\text{GB}}{\text{GF}} = \frac{\text{BC}}{\text{EF}}$$

$$\frac{1,6\,cm}{2\,cm} = \frac{\text{GB}}{\text{GF}} = \frac{\text{BC}}{3\,cm}$$

Comme $\frac{1,6\,cm}{2\,cm} = \frac{\text{BC}}{3\,cm}$ on a $\text{BC} = \frac{3\,cm \times 1,6\,cm}{2\,cm} = 2,4\,cm$

$\boxed{\text{BC} = 2,4\,cm}$

2. Calculer DE et AB.

Dans le triangle ADE, B ∈ [AD] et C ∈ [AE]. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AD}} = \frac{\text{AC}}{\text{AE}} = \frac{\text{BC}}{\text{DE}}$$

$$\frac{\text{AB}}{8\,cm} = \frac{1,2\,cm}{1,6\,cm + 2\,cm} = \frac{2,4\,cm}{\text{DE}}$$

$$\frac{\text{AB}}{8\,cm} = \frac{1,2\,cm}{3,6\,cm} = \frac{2,4\,cm}{\text{DE}}$$

Comme $\frac{\text{AB}}{8\,cm} = \frac{1,2\,cm}{3,6\,cm}$ on a $\text{AB} = \frac{8\,cm \times 1,2\,cm}{3,6\,cm} = \frac{9,6}{3,6}\,cm \approx 2,7\,cm$

Comme $\frac{2,4\,cm}{\text{DE}} = \frac{1,2\,cm}{3,6\,cm}$ on a $\text{DE} = \frac{2,4\,cm \times 3,6\,cm}{1,2\,cm} = 7,2\,cm$

$\boxed{\text{AB} \approx 2,7\,cm \text{ à } 0,1\,cm \text{ près et DE} = 7,2\,cm}$

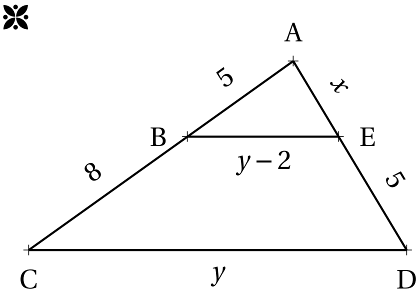
3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

Comme les deux droites (BE) et (AF) coupent les droites (AD) et (DF) sécantes en D,
Nous allons comparer les quotients $\frac{\text{DB}}{\text{DA}}$ et $\frac{\text{DE}}{\text{DF}}$

$\frac{\text{DB}}{\text{DA}} = \frac{8\,cm - 2,7\,cm}{8\,cm} = \frac{5,3\,cm}{8\,cm} \approx 0,66$ et $\frac{\text{DE}}{\text{DF}} = \frac{7,2\,cm}{7,2\,cm + 3\,cm} = \frac{7,2\,cm}{10,2\,cm} \approx 0,71$

Comme $\frac{\text{DB}}{\text{DA}} \neq \frac{\text{DE}}{\text{DF}}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (BE) et (AF) ne sont pas parallèles.}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✱ ✱ ✱



Calculer la valeur exacte de x et de y.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD].
Comme (BE)//(CD), d'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{CD}$$
$$\frac{5}{5+8}=\frac{x}{x+5}=\frac{y-2}{y}$$
$$\frac{5}{13}=\frac{x}{x+5}=\frac{y-2}{y}$$

Nous allons utiliser la propriété des produits en croix pour obtenir des équations que nous savons résoudre.

Comme $\frac{5}{13}=\frac{x}{x+5}$ on en déduit que $5\times(x+5)=13\times x$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$5(x+5)=13x$$
$$5x+25=13x$$
$$5x+25-5x=13x-5x$$
$$25=8x$$
$$8x=25$$
$$x=\frac{25}{8}=3,125$$

Comme $\frac{5}{13}=\frac{y-2}{y}$ on en déduit que $5\times y=13\times(y-2)$.
Il faut résoudre l'équation :

$$5y=13(y-2)$$
$$5y=13y-26$$
$$5y-5y=13y-26-5y$$
$$0=8y-26$$
$$26=8y-26+26$$
$$26=8y$$
$$8y=26$$
$$y=\frac{26}{8}=3,25$$

$\boxed{x=3,125 \text{ et } y=3,25}$

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

Conjecture n° 1 : : $\frac{3}{7}-\frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

$\frac{3}{7}-\frac{5}{4}=\frac{12}{28}-\frac{35}{28}=-\frac{23}{28}<0$

$\boxed{\text{Conjecture n° 1 : VRAIE}}$

Conjecture n° 2 : : $\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}$ est égal à 0.

Attention à la priorité de la multiplication.
$\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{3}-\frac{5\times 3}{3\times 7}=\frac{5}{3}-\frac{5}{7}=\frac{35}{21}-\frac{15}{21}=\frac{20}{21}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 2 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

$13 = 13\times 1$: 13 est un multiple de 13 et 13 est premier.

$\boxed{\text{Conjecture n° 3 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x-3=4x+13$.

On peut tester cette proposition de solution :
Pour $x=8$, $6x-3=6\times 8-3=48-3=45$ et $4x+13=4\times 8+13=32+13=45$
Donc 8 est une solution de l'équation.

On peut aussi résoudre cette équation (ce qui prouvera aussi que 8 est la seule solution !).

$$6x-3=4x+13$$
$$6x-3+3=4x+13+3$$
$$6x=4x+16$$
$$6x-4x=4x-4x+16$$
$$2x=16$$
$$x=\frac{16}{2}$$
$$x=8$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 4 : VRAIE}}$

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Le volume de ce pavé droit mesure : $16\ cm\times 11\ cm\times 6\ cm=1056\ cm^3$. On sait que $1\ \text{L}=1\ dm^3=1000\ cm^3$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 5 : VRAIE}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻

CONJECTURE N° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

On peut vérifier sur quelques exemples :
$n=3$ on a $2n+1=2\times3+1=6+1=7$: c'est impair.
$n=10$ on a $2n+1=2\times10+1=20+1=21$: c'est impair.
$n=2020$ on a $2n+1=2\times2020+1=4040+1=4041$: c'est impair !

Un nombre impair est un nombre dont le reste est 1 quand on le divise par 2. Cela signifie par exemple que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair. Pour n un nombre entier positif, $2n$ est un nombre pair puisque c'est un multiple de 2. $2n+1$ est le successeur de $2n$, il est donc impair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 6 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Pour $n=2$ on a $3n=3\times2=6$: c'est un nombre pair. Plus généralement, $3n$ est pair dès que n est pair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 7 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Le volume d'un cylindre s'exprime sous la forme : Aire de la base × Hauteur $=\pi\times R^2\times h$

Le volume d'un cône s'exprime sous la forme : $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base × Hauteur $=\frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times h$

Le cylindre à un volume de : $\pi\times(5\ cm)^2\times10\ cm=\pi\times25\times10\ cm^3=250\pi\ cm^3$

Le cône à un volume de : $\frac{1}{3}\times\pi\times(12\ cm)^2\times5\ cm=\frac{1}{3}\times144\times5\pi\ cm3=240\pi\ cm^3$

$\boxed{\text{Conjecture n° 8 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

La somme des carrés de deux nombres : $3^2+4^2=9+16=25$
Le carré de la somme de deux nombres : $(3+4)^2=7^2=49$

Comme $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ l'écart entre $(a+b)^2$ et a^2+b^2 est $2ab$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 9 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 10 : : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

Il faut résoudre l'équation : $(9x-15)(15x+35)=0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$9x-15=0$	$15x+35=0$
$9x-15+15=15$	$15x+35-35=-35$
$9x=15$	$15x=-35$
$x=\frac{15}{9}$	$x=-\frac{35}{15}$
$x=\frac{5}{3}$	$x=-\frac{7}{3}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 10 : VRAIE}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✻✻✻

CONJECTURE N° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$4+5=9$: impair.
$10+17=27$: impair.

Un nombre pair quelconque peut s'écrire $2n$ où n est un entier.
Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n$ et $2p+1$: $2n+2p+1=2(n+p)+1$: on a factorisé 2.
Donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair quelconques peut s'écrire $2k+1$ où $k=n+p$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 11 : VRAIE

CONJECTURE N° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7+5=12$: pair.
$11+17=28$: pair.

Un premier nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Un second nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n+1$ et $2p+1$: $2n+1+2p+1=2n+2p+2=2(n+p+1)$: on a factorisé 2.
Donc la somme de deux nombres impairs quelconques peut s'écrire $2k$ où $k=n+p+1$.
C'est l'écriture d'un nombre pair !

Conjecture n° 12 : VRAIE

CONJECTURE N° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7^2=49$: impair.
$11^2=121$: impair.

Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Le carré d'un nombre impair peut donc s'écrire $(2n+1)^2$
$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$: on a factorisé 2.
Donc le carré d'un nombre impair quelconque peut s'écrire $2k+1$ où $k=2n^2+2n$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 13 : VRAIE

CONJECTURE N° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999 ;
- Le multiplier par 13 ;
- Enlever 5 au résultat précédent ;
- Multiplier le tout par 11 ;
- Ajouter 49 au résultat précédent ;
- Multiplier par 7 ;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Testons avec quelques nombres :

Avec 67 : $13 \times 67 = 871$, $871 - 5 = 866$ puis $11 \times 866 = 9\,526$, $9\,526 + 49 = 9\,575$
Et enfin $7 \times 9\,575 = 67\,025$ puis $67\,025 + 42 = 67\,067$

Avec 567 : $13 \times 567 = 7\,371$, $7\,371 - 5 = 7\,366$ puis $11 \times 7\,366 = 81\,026$, $81\,026 + 49 = 81\,075$
Et enfin $7 \times 81\,075 = 567\,525$ puis $567\,525 + 42 = 567\,567$

Le nombre de départ semble répété deux fois dans le nombre résultat.

Notons x le nombre entier choisi au départ.
On le multiplie par 13 : $13x$
On enlève 5 : $13x - 5$
On multiplie le tout par 11 : $11(13x - 5) = 143x - 55$
On ajoute 49 : $143x - 55 + 49 = 143x - 6$
On multiplie par 7 : $7(143x - 6) = 1\,001x - 42$
On ajoute 42 : $1\,001x - 42 + 42 = 1\,001x$

Ainsi ce programme de calcul revient à multiplier le nombre de départ par $1\,001$.
En multipliant un nombre par $1\,001$ on obtient bien l'effet attendu !

CONJECTURE N° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à $5\,050$

C'est une question célèbre ! On raconte qu'elle a été posée vers 1784 par un instituteur à une classe d'élèves de 7 ans qu'il voulait punir en leur donnant cette très longue addition. Dans cette classe cependant se trouvait celui qui allait devenir le plus grand mathématicien du XIX ᵉsiècle : Carl Friedrich Gauss. Celui-ci au bout de quelques secondes leva son ardoise avec le bon résultat ! Voici comment il s'y est pris ! Vous attendrez d'être en première pour découvrir les suites arithmétiques et une formule générale qui résoud ce problème

L'idée géniale est d'écrire cette somme dans un sens puis dans l'autre sens :

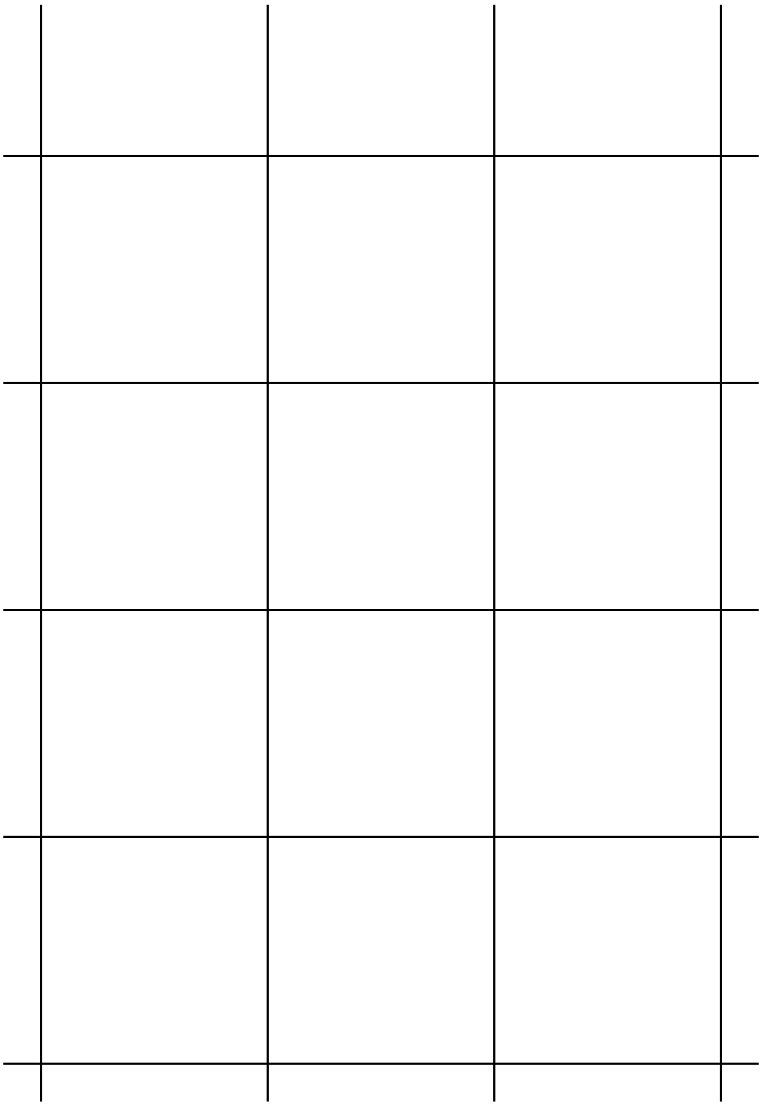
$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & ... & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
S+S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Au lieu d'ajouter horizontalement il faut penser à ajouter verticalement.
On obtient le double de la somme et 100 fois le nombre 101.
Ainsi le double de la somme est égale à $100 \times 101 = 10\,100$

La somme S cherchée vaut donc $10\,100 \div 2 = 5\,050$

$\boxed{\text{Conjecture n° 15 : VRAIE}}$

3 Annexe



Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr
— **Dernière modification :** 20 mars 2025 à 19:39

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.