Chapitre XI

Les objets de l'espace

Sommaire

I — Vocabulaire

Définition II.1 : Solide

Un **solide** est un ensemble de points de l'espace situé à l'intérieur d'une partie fermée.

Définition II.2 : Polyèdre

Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones. Les côtés de ces polygones sont appelés **arêtes** . Les extrémités de ces arêtes sont appelés **sommet**

II — Les prismes droits et le cylindre

Définition II.3 : Prisme droit

Un **Prisme droit** est un solide

Exemples :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \frac{2x}{3} - \frac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

$m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

Propriété II.1 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \to ax$ peut s'écrire $x \to ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

III — Les pyramides et le cône

Définition II.4 : Prisme droit

Un **Prisme droit** est un solide

Exemples :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \frac{2x}{3} - \frac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

$m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

Propriété II.2 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \to ax$ peut s'écrire $x \to ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

IV — La sphère et la boule

Définition II.5 : Prisme droit

Un **Prisme droit** est un solide

Exemples :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \frac{2x}{3} - \frac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

$m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

Propriété II.3 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \to ax$ peut s'écrire $x \to ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

Solides et volumes

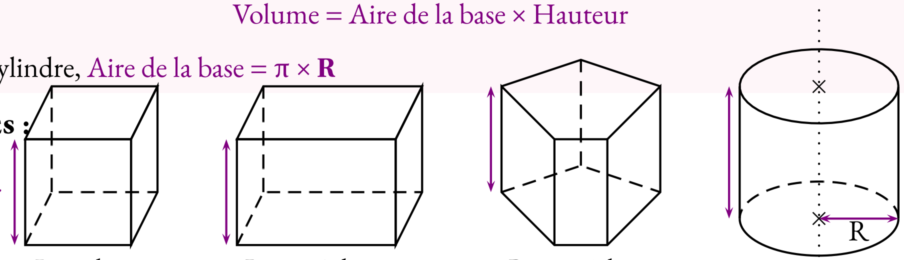
Les prismes droits et le cylindre

Un **prisme droit** est un polyèdre constitué par deux faces polygonales parallèles et superposables reliées par des faces rectangulaires.
Un **cylindre** est un solide constitué par deux disques parallèles, de même rayon, reliés par une surface de révolution.
Les deux faces parallèles sont **les bases** du solide.
La distance entre les bases est **la hauteur** du solide.
Le volume d'un cylindre ou d'un prisme droit est donné par la formule :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

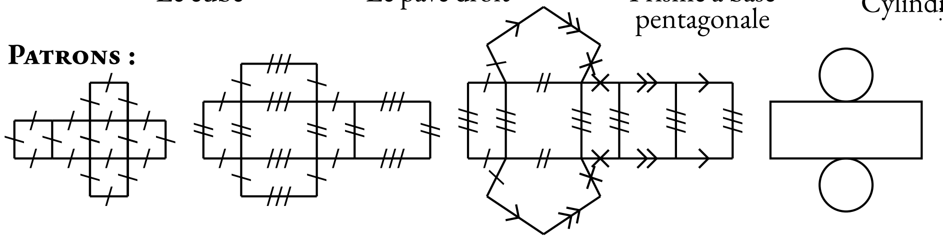
Pour le cylindre, Aire de la base = $\pi \times \mathbf{R}$

Exemples :



Le cube — Le pavé droit — Prisme à base pentagonale — Cylindre droit

Patrons :



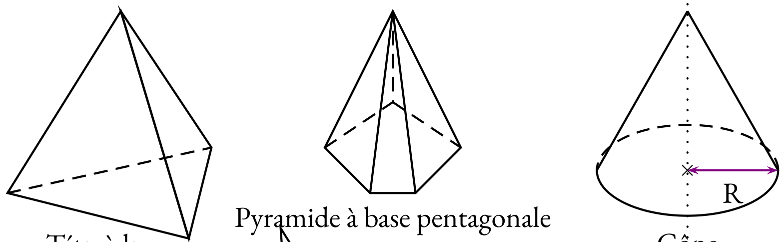
Les pyramides et le cône

Une **pyramide** est un polyèdre constitué d'une base polygonale et d'un sommet principal reliés par des faces triangulaires.
Un **cône** est un solide constitué d'une base circulaire et d'un sommet principal reliés par une surface de révolution.
La **hauteur** est la distance entre la base et le sommet principal.
Dans un cône, un segment reliant le sommet principal et un point du cercle de base s'appelle **une génératrice** .

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

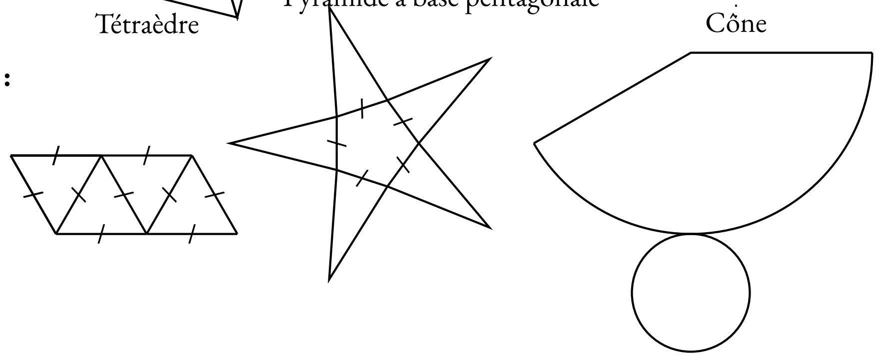
Dans le cas du cône, Aire de la base = $\pi \times \mathbf{R}$.

Exemples :



Tétraèdre — Pyramide à base pentagonale — Cône

Patrons :



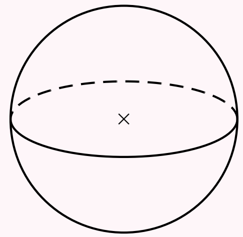
La sphère et la boule

Une **sphère** de centre O et de rayon R est une surface constituée des points situés exactement à la distance R du centre O.
Une **boule** de centre O et de rayon R est un solide constitué des point situées à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

La boule ne possède pas de patron.

$$\text{Aire de la sphère} = \mathbf{4\pi R^2}$$

$$\text{Volume de la boule} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\pi\mathbf{R^3}$$



Unités et conversion

Un mètre cube ($1\,\text{m}^3$) est le volume d'un cube de 1 m de côté.

$1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{dm}^3$	$1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$	$1\,\text{L} = 1000\,\text{mL}$
$1\,\text{m}^3 = 1\,000\,000\,\text{cm}^3$	$1\,\text{L} = 1000\,\text{cm}^3$	$1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{mL}$
$1\,\text{m}^3 = 1\,000\,000\,000\,\text{mm}^3$	$1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{L}$	$1\,\text{mL} = 1000\,\text{mm}^3$

Coefficient d'agrandissement/réduction

Si on multiplie les longueurs d'une figure par un nombre $k > 0$ alors les aires sont multpliées par k^2 et les volumes par k^3.

Cercle, disque, sphère et boule

Le plan : cercle et disque

R un nombre positif ou nul, O un point du plan.

Le cercle de centre O et de rayon R est un **courbe** constituée de tous les points du plan situés à exactement la distance R du centre O.

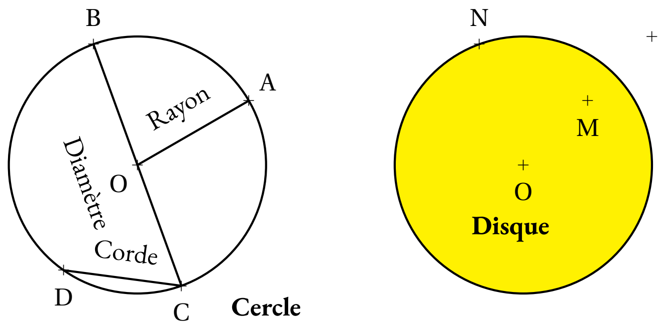
Le disque de centre O et de rayon R est une **surface** constituée de tous les points du plan situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

Vocabulaire

Un **rayon** est un segment joignant le centre à un point quelconque du cercle.
Une **corde** est un segment joignant deux points du cercle.
Un **diamètre** est une corde passant par le centre du cercle.

La longueur d'un rayon s'appelle **le rayon du cercle** , on utilise le même nom pour le segment et sa longueur.
Le diamètre a une longueur égale au double du rayon du cercle.
La longueur maximale d'une corde est égale au diamètre du cercle.

Illustrations :



$OM < R$
$ON = R$
$OP > R$

Périmètre et aire

Le **périmètre** d'un cercle de rayon R ou de diamètre D mesure sa longueur, il vaut : $\pi \times \mathbf{D} = \mathbf{2\pi} \times \mathbf{R}$.
L'**aire** d'un disque de rayon R mesure sa surface, elle vaut : $\pi \times \mathbf{R^2}$

L'espace : sphère et boule

R un nombre positif ou nul, O un point de l'espace.

La **sphère** de centre O et de rayon R est une **surface** constituée de tous les points de l'espace situés à exactement la distance R du centre O.

La **boule** de centre O et de rayon R est un **solide** constitué de tous les points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

Aire et volume

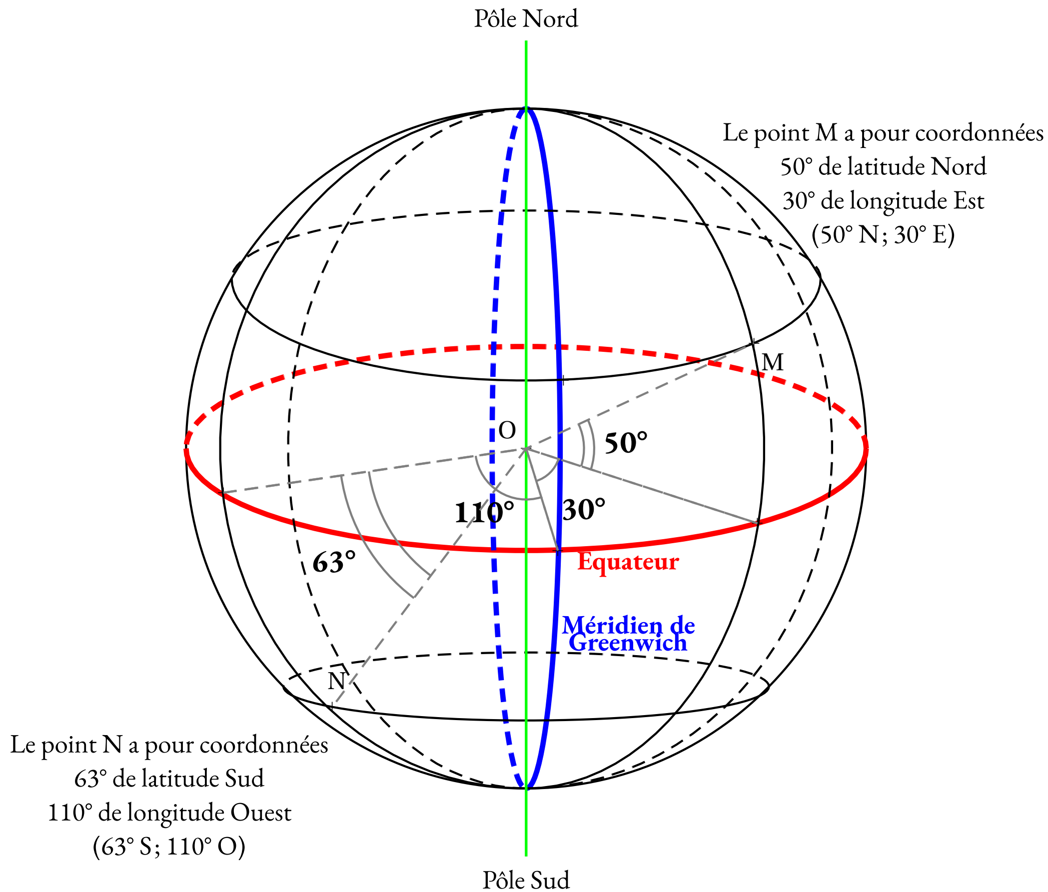
L'**aire** d'une sphère R mesure sa surface, elle vaut : $\mathbf{4\pi R^2}$.

Le **volume** d'une boule de rayon R mesure son « intérieur », il vaut : $\frac{4}{3}\pi\mathbf{R^3}$

Coordonnées géographiques

Soit une sphère de rayon R et de centre O.
Un **grand cercle** de la sphère est un cercle de rayon R et de centre O.
Un grand cercle partage la sphère en deux **hémisphères** .
Sur la **sphère terrestre** , l'**équateur** et les **méridiens** sont des grands cercles.
Un **parallèle** est un cercle de la sphère situé à l'intersection avec un plan parallèle au plan équatorial.
Tout les points de la sphère situés sur un même parallèle sont à la même **latitude** .
Un **méridien** est un cercle de la sphère terrrestre passant par les pôles Nord et Sud.
Tous les points de la sphère situés sur un même méridien sont à la même **longitude** .

Exemples :



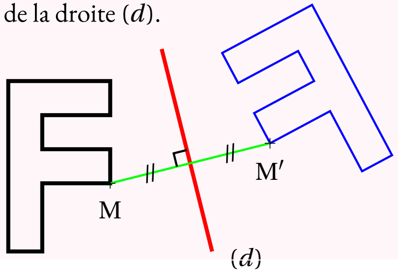
Les transformations

La symétrie axiale

(d) une droite et M un point du plan.

L'image du point M par la **symétrie d'axe** la droite (d) est l'unique point M′ vérifiant :
$(d) \perp (MM')$ et (d) coupe $[MM']$ en son milieu.
Cela revient à dire que (d) est la **médiatrice** de $[MM']$.

C'est le résultat d'un **pliage** le long de la droite (d).

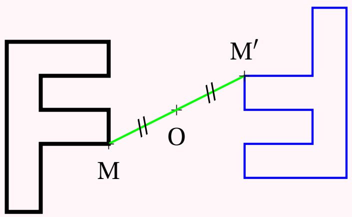


La symétrie centrale

O et M deux points du plan.

L'image du point M par la **symétrie de centre** O est l'unique point M′ vérifiant O est le milieu de $[MM']$.

C'est le résultat d'un **demi-tour** autour du point O.

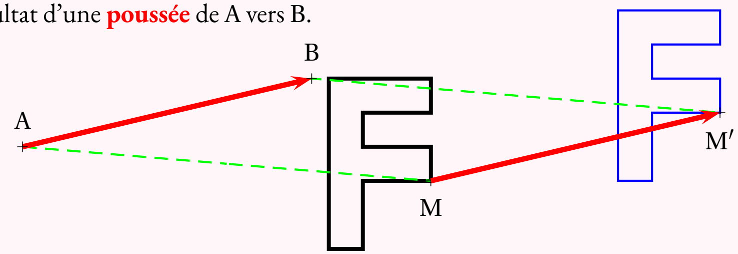


La translation

A, B et M trois points du plan.

L'image du point M par la **translation** qui transforme A en B est l'unique point M′ vérifiant ABM′M est un parallélogramme.

C'est le résultat d'une **poussée** de A vers B.



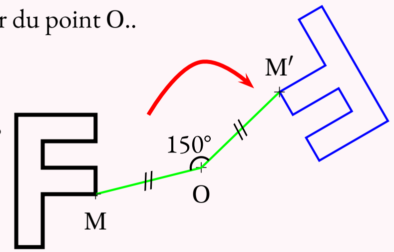
La rotation

O, et M deux points du plan.

L'image du point M par la **rotation** d'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre l'unique point M′ vérifiant $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

C'est le résultat d'une **rotation** autour du point O..

Rotation d'angle $\alpha = 150°$
dans le sens des aiguilles
d'une montre



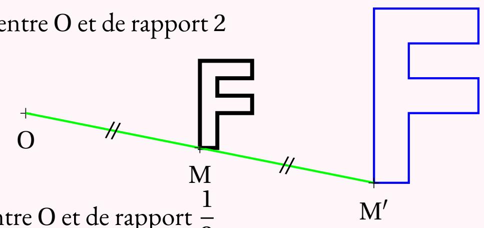
L'homothétie

O, et M deux points du plan.

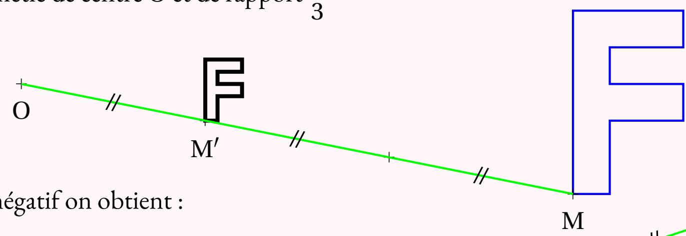
L'image du point M par l'**homothétie** de centre O et de rapport $k > 0$ est l'unique point M′ vérifiant $OM = kOM'$ et $M' \in [OM)$.

C'est le résultat d'un **agrandissement/réduction** de rapport k depuis le point O.

Homothétie de centre O et de rapport 2

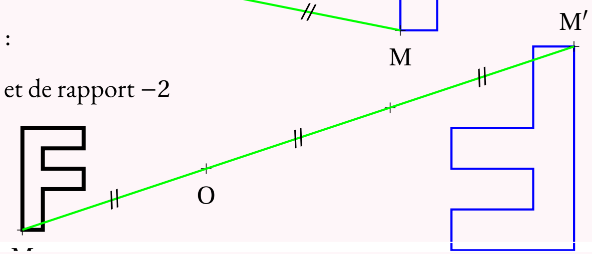


Homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$



Pour un rapport k négatif on obtient :

Homothétie de centre O et de rapport -2



Propriétés

La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et la rotation sont des **isométries** : elles ne modifient pas les angles et les longueurs.
L'homothétie ne modifie pas les angles. Elle agrandit ou réduit les longueurs.

Chapitre XII

Algorithmique

Sommaire

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 20 mars 2025 à 19:39

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.