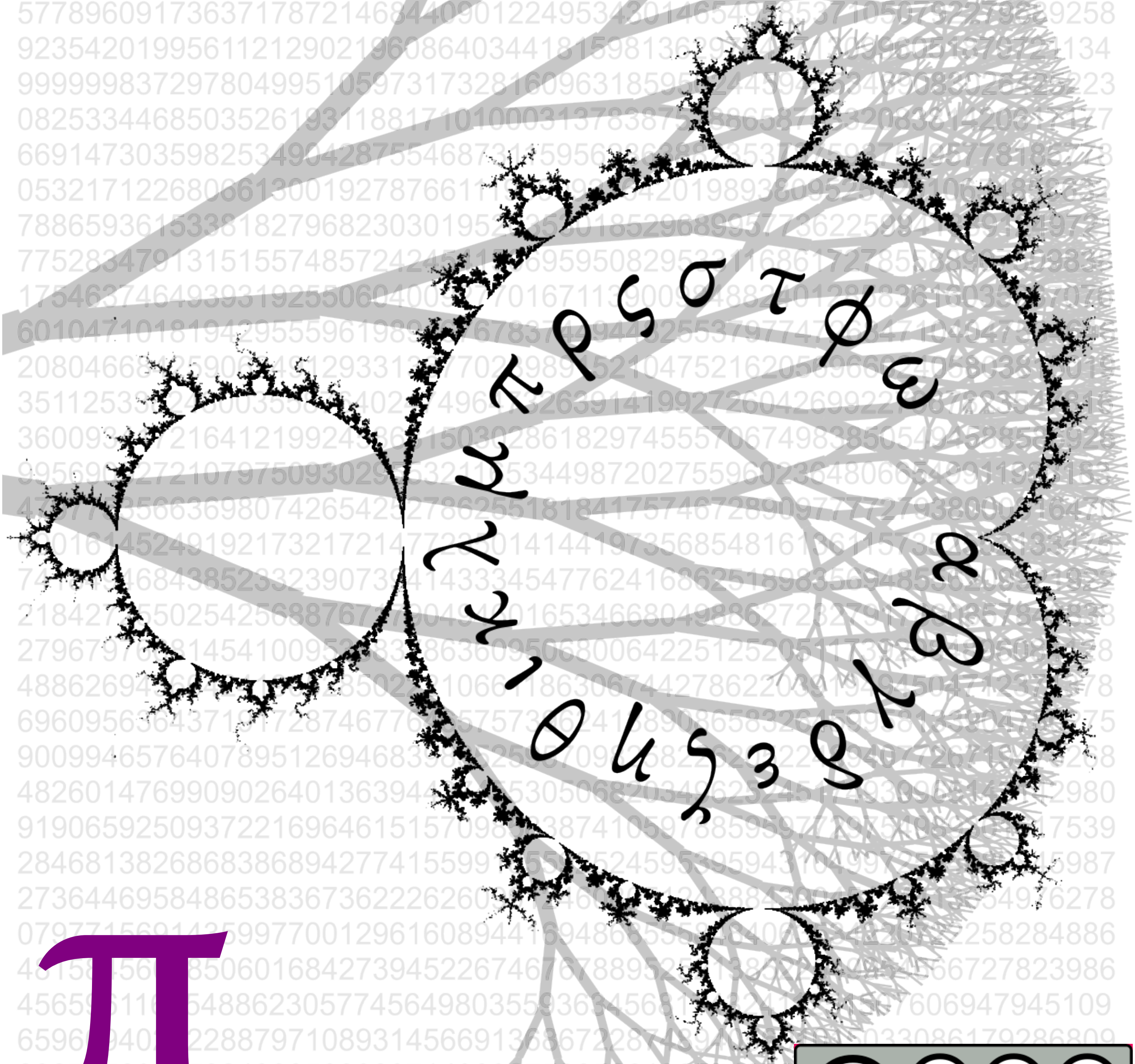
Troisième
Cours
Mathématiques



Collège Vauquelin

Année scolaire 2023-2024

Version du 23 juin 2024

Table des matières

Chapitre 1 — ARITHMÉTIQUE 5

Cryptographie : Chiffre affine . . . 6
Culture : Le jeu de Juniper-Green . . . 9
La leçon . . . 13
I Diviseurs et multiples d'un nombre entier . . . 13
1 La division euclidienne . . . 13
2 Diviseurs et multiples . . . 13
3 Les critères de divisibilité . . . 14
II Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers . . . 15
1 Les nombres premiers . . . 15
2 Décomposition en facteurs premiers . . . 15
III Applications . . . 17
IV Fractions irréductibles . . . 17
V Recherche des diviseurs d'un nombre . . . 17
Questions du jours . . . 19
Exercices . . . 21
Devoirs maison . . . 24
Devoir maison : Vacances d'Automne . . . 28
Évaluation : Arithmétique et fractions . . . 32
Évaluation : Arithmétique et fractions . . . 36
Évaluation : Arithmétique et vitesse . . . 40
Évaluation : Arithmétique et vitesse . . . 44
Évaluation : Arithmétique, vitesse et équations . . . 46
Évaluation : Vitesses . . . 49
Troisième — Fiche de synthèse : Arithmétique . . . 53

Chapitre 2 — LES TRIANGLES SEMBLABLES 55

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ? . . . 56
C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ? . . . 56
I Les cas d'égalité des triangles . . . 57
II Les triangles semblables . . . 58
III Exemples importants . . . 59
Fiche d'exercices : Trigonométrie . . . 73
Fiche de synthèse : Trigonométrie . . . 77

Chapitre 3 — GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS 79

Situation initiale : Un programme de calcul pour les nombres premiers ? . . . 80

Microbit : Programmé pour calculer . . . 81
I Définition, notation et vocabulaire : image et antécédent . . . 86
II Tableau des images et représentation graphique . . . 87
Exercices . . . 90
Pythagore — Fonctions — Vitesses — 1h . . . 94
Évaluation : Calcul littéral — Programme de calcul — Vitesse — Fonctions . . . 120
Réactivation . . . 123
Équations du premier degré . . . 123
Fiche de synthèse : Généralités sur les fonctions . . . 135
III Annexes . . . 136
1 Documents pratiques . . . 137

Chapitre 4 — LE THÉORÈME DE THALÈS 139

Situation initiale : La tour Eiffel . . . 140
I Le théorème de Thalès – Version triangle . . . 141
II Le théorème de Thalès – Version générale . . . 143
III La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès . . . 144
IV Application aux triangles semblables . . . 144
Exercices . . . 146
Réactivation . . . 151
Exercices . . . 151
Exercices . . . 155
Exercices . . . 159
Évaluation : Arithmétique, développement, Thalès et vitesse . . . 163
Évaluation : Pythagore et lecture graphique . . . 167
Évaluation : Pythagore et lecture graphique . . . 170
Évaluation : Calcul littéral, Pythagore et Thalès . . . 174
Évaluations . . . 178
Théorème de Thalès — 20 min . . . 178
Théorème de Thalès — Fonctions — 1 h . . . 180
Théorème de Thalès — Développement — 1 h . . . 183
Fiche de synthèse : Le théorème de Thalès . . . 223

Chapitre 5 — STATISTIQUES 225

Infox : Le paradoxe de Simpson — Les calculs rénaux . . . 226
Infox : Le paradoxe de Simpson — Cigarettes et mortalité . . . 228
Infox : Le paradoxe de Simpson — Covid et vaccin . . . 231
Situation initiale : Les équipes de basket-ball . . . 234
I Moyenne arithmétique et pondérée . . . 238
Évaluation : Statistiques et calcul littéral . . . 239
Fiche de synthèse : Statistiques . . . 243

Chapitre 6 — CALCUL LITTÉRAL 245

Situation initiale : Tour de magie et programme de calcul . . . 246
I La distributivité . . . 247
II Développer et réduire un expression littérale . . . 247
III Factoriser avec un facteur commun . . . 247
IV Initiation au calcul littéral . . . 247
V Résoudre une équation produit . . . 247
Exercices . . . 248
Prépa brevet . . . 272
Fiche de synthèse . . . 294

Fiche de synthèse : Calcul littéral . . . 294

Chapitre 7 — PROPORTIONNALITÉ ET FONCTION LINÉAIRE 295

Finance : Intérêts, crédit et agios . . . 296
I Augmentation et diminution en pourcentage . . . 298
II La fonction linéaire . . . 299
Exercices . . . 302
Évaluation : Fonction linéaire, Scratch, calcul littéral . . . 304
III Annexes . . . 308
1 Exercices . . . 308
Fiche de synthèse : Pourcentages et fonction linéaire . . . 313
Fiche de synthèse : Ratio . . . 314

Chapitre 8 — LES PROBABILITÉS 315

Situation initiale : Le jeu du franc carreau . . . 316
Activité — Situation initiale : Lancer deux dès et nombres premiers . . . 317
I Vocabulaire des probabilités . . . 322
II Fréquences et probabilités . . . 323
III L'équiprobabilité . . . 324
IV Expérience aléatoire à deux épreuves . . . 325
Évaluations . . . 329
Évaluation : Probabilités — Calcul littéral — Pourcentages . . . 329
Exercices . . . 340
Fiche de synthèse : Probabilités . . . 344
V Annexes . . . 345
1 Exercices . . . 345
2 Évaluations . . . 348
3 Annexe . . . 387

Chapitre 9 — LES FONCTIONS AFFINES 389

Situation initiale : La salle de sport . . . 390
I Définition et exemples . . . 396
II Fonction affine et représentation graphique . . . 398
III Fonction affine et accroissements . . . 399
IV Annexe . . . 400
Fiche de synthèse : Les fonctions affines . . . 407

Chapitre 10 — LA TRIGONOMÉTRIE 409

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ? . . . 410
C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ? . . . 410
Situation initiale : Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ? . . . 411
I Vocabulaire du triangle rectangle . . . 413
II Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu . . . 414
III Usage de la trigonométrie . . . 416
IV Quelques propriétés trigonométriques . . . 418
1 Les angles complémentaires et la tangente . . . 418
2 Quelques angles particuliers . . . 419
3 La relation fondamentale . . . 419
4 Trigonométrie et cercle de rayon unité . . . 419
Évaluation : Trigonométrie et calcul littéral . . . 432

Fiche d'exercices : Trigonométrie 437
Activité — Culture : Tables de trigonométrie 441
Troisième — Fiche de synthèse : Trigonométrie 443

Chapitre 11 — LES OBJETS DE L'ESPACE **445**

I Vocabulaire 446
II Les prismes droits et le cylindre 446
III Les pyramides et le cône 447
IV La sphère et la boule 447
Troisième — Fiche de synthèse : Arithmétique 449
Cinquième — Fiche de synthèse : Angles et triangles 450
Cinquième — Fiche de synthèse : Les quadrilatères 451
Troisième — Fiche de synthèse : Triangles égaux et semblables 452
Fiche de synthèse : Solides et volumes 453
Fiche de synthèse : Cercle, disque, sphère et boule 455
Fiche de synthèse : Les transformations 456

Chapitre 12 — ALGORITHMIQUE **459**

Exercices 460
Fiche de synthèse 470
Fiche de synthèse : Tableur 470

Chapitre 13 — LE RESTE **471**

Prépa brevet 488
Instruction en famille : Le robot Sora-Q 511
Tâche complexe : La salle de classe 516
Curiosité mathématique : Le polyèdre de Szilassi 518
Exercices 526
Fiche de synthèse : Grandeurs simples et composées 527
Fiche de synthèse : Tableur 528

Informations légales **529**

Chapitre I

Arithmétique

Sommaire

Cryptographie : Chiffre affine . . . 6
Culture : Le jeu de Juniper-Green . . . 9
La leçon . . . 13
I Diviseurs et multiples d'un nombre entier . . . 13
1 La division euclidienne . . . 13
2 Diviseurs et multiples . . . 13
3 Les critères de divisibilité . . . 14
II Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers . . . 15
1 Les nombres premiers . . . 15
2 Décomposition en facteurs premiers . . . 15
III Applications . . . 17
IV Fractions irréductibles . . . 17
V Recherche des diviseurs d'un nombre . . . 17
Questions du jours . . . 19
Exercices . . . 21
Devoirs maison . . . 24
Devoir maison : Vacances d'Automne . . . 28
Évaluation : Arithmétique et fractions . . . 32
Évaluation : Arithmétique et fractions . . . 36
Évaluation : Arithmétique et vitesse . . . 40
Évaluation : Arithmétique et vitesse . . . 44
Évaluation : Arithmétique, vitesse et équations . . . 46
Évaluation : Vitesses . . . 49
Troisième — Fiche de synthèse : Arithmétique . . . 53

Cryptographie

Chiffre affine

Troisième

Multiplier une lettre par un nombre

Nous allons créer une nouvelle opération mathématique, la multiplication entre les lettres de l'alphabet et les nombres entiers. Pour ne pas confondre cette opération étrange avec la multiplication habituelle, nous allons utiliser un nouveau symbole $\otimes$. Avant d'effectuer cette opération il est nécessaire de numéroter les 26 lettres de l'alphabet de la manière suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour multiplier une lettre par un nombre entier on applique l'algorithme suivant :

— effectuer le produit du numéro de la lettre et du nombre entier ;

— calculer le reste de la division de ce produit par 26 ;

— le résultat est la lettre qui correspond au numéro obtenu.

☞ Effectuer les multiplications suivantes :

$C \otimes 1 =$	$D \otimes 9 =$	$T \otimes 26 =$	$F \otimes 4 =$	$F \otimes 56 =$
$A \otimes 2 =$	$M \otimes 13 =$	$M \otimes 0 =$	$F \otimes 30 =$	$F \otimes 82 =$

Le chiffre linéaire

Cette méthode de chiffrement consiste à multiplier les lettres du texte original par un nombre entier secret : la clé de cryptage.

☞ En observant les multiplications précédentes, indiquer le nombre de clés de cryptage possibles.

☞ Compléter le tableau suivant avec pour clé de cryptage le nombre 3 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Reste																										
Code																										

☞ Compléter le tableau suivant avec pour clé de cryptage le nombre 4 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Reste																										
Code																										

☞ Que remarquez-vous ?

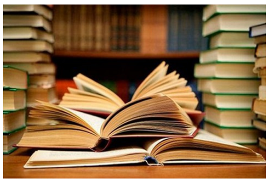
Voici les tableaux de cryptage pour plusieurs clés différentes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
⊗3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4	7	10	13	16	19	22	25	2	5	8	11	14	17	20	23
⊗4	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22
⊗5	0	5	10	15	20	25	4	9	14	19	24	3	8	13	18	23	2	7	12	17	22	1	6	11	16	21
⊗9	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8	17
⊗13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13
⊗21	0	21	16	11	6	1	22	17	12	7	2	23	18	13	8	3	24	19	14	9	4	25	20	15	10	5
⊗24	0	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2

☞ Que remarquez-vous en observant les clés de cryptage 4, 13 et 24 ?

☞ Que remarquez-vous en observant les clés de cryptage 4, 13 et 24 ?

Chiffre affine — Correction



Culture

Le jeu de Juniper-Green

Troisième

✧✧

Le jeu de Juniper-Green a été inventé par Richard Porteus en 1996 pour aider des enfants de l'école primaire à manipuler les tables de multiplication. Ce jeu porte le nom de l'école. Il a été popularisé par le mathématicien Ian Stewart dans un article du magazine Pour la Science au mois de juillet 1997. L'activité ci-dessous est librement inspiré de cet article.

Diviseurs et multiples d'un nombre entier

Multiple : un multiple b d'un nombre entier a est un nombre entier appartenant à la table de multiplication de a.
Diviseur : un diviseur b d'un nombre entier a est un nombre entier pour lequel a est un multiple de b.

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 48 puis de 60.

18 :

48 :

60 :

2. Faire la liste des multiples de 13 compris entre 256 et 312.

Les multiples sont :

3. Juniper-Green en mode « bataille »

Règle du jeu :

- Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier compris entre 1 et 100;
- Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 100 vérifiant les deux conditions suivantes :
  - Ce nombre n'a pas encore été choisi dans cette partie;
  - Ce nombre est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.
- Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

Faire quelques parties avec votre voisin en notant à chaque fois en ligne les nombres entiers successifs choisis.
Quelle est la stratégie gagnante à ce jeu ?

4. On ajoute une règle supplémentaire : « *le premier nombre choisi doit obligatoirement être un nombre pair.* »
Refaire quelques parties avec votre voisin en utilisant cette règle.

5. Juniper-Green en mode « collaboratif »

Vous n'êtes plus obligé de commencer par un nombre pair. Dans ce mode, votre objectif, à deux, est d'obtenir la partie de Juniper-Green la plus longue possible.

5.a. Déterminer la plus longue partie de Juniper-Green en vous limitant à des nombres compris entre 1 et 40.

5.b. Déterminer la plus longue partie de Juniper-Green en élargissant votre recherche à des nombres compris entre 1 et 100.

5.c. Serez-vous assez persévérant pour déterminer la suite la plus longue avec des nombres compris entre 1 et 200 ?

Le jeu de Juniper Green

IAN STEWART

Cherchez la stratégie gagnante au jeu des diviseurs et des multiples.

Il y a un an, mon ami Ian Porteous, de l'Université de Liverpool, m'a fait découvrir un jeu amusant que son fils Richard avait inventé pour enseigner la division et la multiplication. Ce jeu est aujourd'hui nommé Juniper Green, du nom de l'école où Richard enseigne. On utilise 100 cartes, numérotées de 1 à 100, que l'on place dans l'ordre des numéros sur une table, numéros visibles ; pour que les deux joueurs puissent retrouver rapidement la carte qu'ils veulent jouer, on peut disposer les cartes en dix rangées de dix cartes, par exemple. Les règles sont simples :

1. Chaque joueur, quand vient son tour, prend une des cartes. Les cartes enlevées ne sont pas remises sur la table ni utilisées ensuite.

2. À l'exception du coup d'ouverture, chaque joueur doit choisir une carte dont le numéro est un diviseur ou un multiple du nombre choisi par l'adversaire au coup précédent.

3. Un joueur perd quand il ne peut plus prendre une carte qui soit un multiple ou un diviseur de la précédente carte retirée.

Avec ces trois règles seulement, le premier joueur pourrait toujours gagner, en tirant une carte qui porte un nombre premier supérieur à 50. Comme un nombre premier n'a que 1 et lui-même pour diviseur, l'adversaire devrait choisir la carte portant le nombre 1, mais, alors, si le premier joueur tire un autre nombre premier supérieur à 50, le second joueur perd, car il ne peut plus jouer ni 1 ni un multiple de ce second nombre premier. Pour éviter ce cas sans intérêt, on ajoute la règle :

4. Le coup d'ouverture doit être un nombre pair.

Même ainsi les grands nombres premiers conservent une importance stratégique. Si un joueur tire la carte 1, alors son adversaire peut gagner. Imaginons Bob jouant contre Alice : si Bob tire le 1, alors Alice choisit un grand nombre premier, tel que 97 (ce nombre est nécessairement resté sur la table, parce qu'il ne peut être choisi qu'après le choix de 1, car il est impair), et Bob perd la partie. Autrement dit, un joueur gagne s'il parvient à faire tirer la carte 1 à son adversaire. L'encadré inférieur montre un exemple de partie entre deux joueurs qui manquaient de sens tactique.

Mais trêve de discussion : pourquoi ne joueriez-vous pas d'abord quelques parties avec des amis, afin de découvrir par vous-même les arcanes de ce jeu? Je m'en voudrais de vous gâcher le plaisir en vous dévoilant les stratégies gagnantes, que je garde pour une «Réactions» d'un prochain numéro, et je vous propose d'examiner seulement le jeu de Juniper Green simplifié, avec 40 cartes numérotées de 1 à 40. Ainsi vous pourrez vous-même découvrir quelques principes utiles pour la recherche de ces stratégies gagnantes, au jeu à 100 cartes. Une remarque, encore : de jeunes enfants peuvent utiliser un jeu à 20 cartes seulement.

Observons maintenant que certaines ouvertures sont très mauvaises. Par exemple, dans le jeu à 40 cartes :

COUPS	ALICE	BOB
1	38	
2		19
3	1	
4		37
5	PERD	

Le résultat aurait été identique si Alice avait commencé en tirant la carte 34, mais d'autres nombres sont aussi à éviter. Par exemple, si Alice tire inconsidérément le 5, alors Bob peut alors en profiter :

COUPS	ALICE	BOB
X	5	
X + 1		25
X + 2	1	

COUPS	ALICE	BOB	COMMENTAIRES
1	48		Nombre pair, comme l'exige la règle 4
2		96	Double du choix d'Alice
3	32		Un tiers du choix de Bob
4		64	Bob est forcé de choisir une puissance de 2
5	16		... et Alice de même
6		80	Bob multiplie par 5
7	10		Alice divise par 8
8		70	Multiplication par 7
9	35		Division par 2
10		5	Seuls choix : 5 ; 7 (ou 1, qui est perdant)
11	25		
12		75	Seuls 50 et 75 sont possibles
13	3		
14		81	
15	9		Seuls 27 et 9 sont possibles
16		27	Mauvais coup!
17	54		Imposé, car 1 est perdant
18		2	Imposé
19	62		Variante d'inspiration tactique
20		31	Imposé
21	93		Seul choix, mais excellent
22		1	Imposé... et perdant, car...
23	97		Tactique des grands nombres premiers

Nous l'avons vu, ce dernier choix fait perdre la partie à Alice (notez que 25 est nécessairement disponible, puisque, impair, il ne peut être choisi qu'après 1 ou 5).

Alice peut-elle, plutôt, obliger Bob à tirer le 5 à sa place ? Si Bob tire le 7, elle peut jouer 35 et contraindre Bob à tirer le 1 ou le 5, ce qui le fait perdre dans les deux cas. Peut-elle obliger Bob à tirer le 7? Oui : si Bob a joué le 3, elle peut jouer le 21 qui impose ensuite un 7. Et comment faire jouer le 3 à Bob ? S'il a joué le 13, alors Alice joue le 39, qui pousse Bob à jouer le 3. De nombre en nombre, Alice peut ainsi prévoir le jeu de Bob et le mener à la défaite.

Avec les nombres impairs, le problème est simple, mais la règle 4 impose de commencer avec des nombres pairs. La carte 2 joue vraisemblablement un rôle charnière : si Bob joue 2, Alice peut prendre le 26 et piéger Bob dans la séquence 13. Nous voici au cœur du problème : comment Alice forcera-t-elle Bob à jouer 2?

Si Alice commence en tirant le 22, alors Bob joue soit 2, et il est alors piégé, comme nous l'avons vu, soit 11. Dans ce dernier cas, Alice, évitant le 1 perdant, jouera 33. Le 11 ayant été joué, Bob devra prendre le 3 et Alice gagnera. Le tableau ci-dessous montre la stratégie d'Alice : chaque groupe de deux colonnes montre un des deux choix de Bob (nous supposons que chaque joueur sait qu'il faut éviter le 1).

COUPS	ALICE	BOB	ALICE	BOB
1	22			
2		11		2
3	33		26	
4		3		13
5	21		39	
6		7		3
7	35		21	
8		5		7
9	25		35	
10		PERD		5
11			25	
12				PERD

Il existe une autre ouverture avec laquelle Alice force la victoire : le 26. Les deux possibilités sont alors les suivantes :

COUPS	ALICE	BOB	ALICE	BOB
1	26			
2		13		2
3	39		22	
4		3		11
5	21		33	
6		7		3
7	35		21	
8		5		7
9	25		35	
10		PERD		5
11			25	
12				PERD

Réactions

Beaucoup de lettres que j'ai reçues à propos de *L'erreur du Grand Inquisiteur* (*Pour la Science*, décembre 1996) montrent qu'on se trompe facilement quand on manie les probabilités conditionnelles. Aussi vais-je tenter d'éclaircir les points à la source des principales difficultés. Certains lecteurs sont arrêtés dès l'exemple initial. Nous savions que la famille Dupont avait deux enfants dont un était une fille. Quelle est la probabilité que les deux soient des filles ? On supposait les sexes équiprobables, ce qui n'est pas tout à fait exact dans la réalité ; en outre, lorsque j'indiquais «l'un d'eux est une fille», je ne prétendais pas qu'un seul est une fille, mais que l'un *au moins* est une fille.

J'ai semé le trouble en ordonnant les enfants d'après leurs naissances. Il y a quatre types de familles à deux enfants, tous équiprobables : GG, GF, FG, FF. Si l'un des enfants est une fille, trois possibilités demeurent : GF, FG et FF, et un seul cas se présente, où la famille compte deux filles. De sorte que la probabilité que les Dupont aient deux filles, sachant qu'ils en ont au moins une, est égale 1/3. Si nous avions su que «l'aîné est une fille», alors la probabilité conditionnelle d'avoir deux filles aurait été 1/2.

Certains lecteurs m'ont écrit que je ne devais pas distinguer les cas GF et FG. Pourquoi pas lancer deux pièces pour représenter le phénomènes ? Les pièces représentent les sexes avec les bonnes probabilités (1/2 chacune). Si, comme moi, vous allez au moindre effort, vous simulerez l'expérience à l'aide d'un ordinateur muni d'un générateur de nombres aléatoires. Pour un million de lancers, voici ce que j'ai obtenu :

Deux «face» : 250 025
Deux «pile» : 250 719
Autres résultats : 499 256

Essayez vous-même. Si GF et FG étaient identiques, le dernier nombre devrait être proche de 333 333.

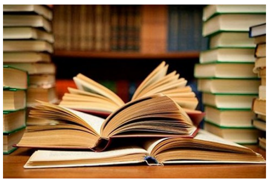
Un autre raisonnement proposé était le suivant : que nous sachions ou non qu'un enfant était F, l'autre est F ou G avec la même probabilité. Il est instructif de voir en quoi ce raisonnement est faux. Lorsque les deux enfants sont des filles, il n'y a pas d'«autre fille», à moins que je spécifie à laquelle des filles je suis en train de penser (par exemple, la plus âgée). Cette spécification détruit la symétrie supposée entre les filles et les garçons, et modifie les probabilités conditionnelles. En fait, la proposition «le plus âgé des enfants est une fille» porte plus d'information que la proposition «un enfant au moins est une fille» (la première implique la seconde, mais l'inverse n'est pas vrai). Ce ne doit pas être une surprise que les probabilités conditionnelles associées soient différentes.

Cette fois, les nombres premiers 11 et 13 sont la clef du succès. Si l'ouverture est le double d'un tel nombre (22 ou 26), Bob est conduit à tirer 2 – qui mène Alice à la victoire – ou le nombre premier. Alors Alice répond par son triple, ce qui force Bob à jouer 3 – et Alice gagne encore. Ainsi Alice gagne parce que, à part le double du nombre premier, il y a exactement un autre multiple inférieur à 40, à savoir 33 ou 39. Ces nombres premiers «centraux», compris entre le quart et le tiers du nombre de cartes, permettent à Alice de gagner. D'autres ouvertures que 22 ou 26 mènent-elles à la victoire ? Je vous laisse y réfléchir, et aussi chercher la stratégie gagnante pour le jeu Juniper Green à 100 cartes, voire à 1 000 cartes. Le premier joueur a-t-il toujours une stratégie gagnante ?

Envisageons finalement le problème dans sa généralité. Considérons le jeu de Juniper Green à n cartes, où n est un nombre entier quelconque. Les parties nulles étant exclues, la théorie des jeux prévoit que soit Alice – qui joue la première –, soit Bob, a une stratégie gagnante, mais pas les deux. Un nombre n est «primaire» si c'est Alice qui a une stratégie gagnante, et «secondaire» si c'est Bob.

Pour de très petites valeurs de n, quelques rapides calculs montrent que 1, 3, 8 et 9 sont primaires, tandis que 2, 4, 5, 6 et 7 sont secondaires. 100 est-il un nombre primaire ou secondaire ? Et, plus généralement, quels sont les nombres n primaires et quels sont les nombres n secondaires ?

Ian STEWART est professeur de mathématiques à l'Université de Warwick.



Culture

Le jeu de Juniper-Green — Correction

✧✧

La leçon

Arithmétique

I — Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 La division euclidienne

Définition 1.1 : La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geqslant b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :

— $a = b \times q + r$

— $0 \leqslant r < b$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la **division euclidienne** du **dividende** a par le **diviseur** b.

Remarque :

Le diviseur ne peut pas être égal à 0![2]

Vocabulaire :

L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle **l'égalité euclidienne** .

Exemples :

$2019 = 31 \times 65 + 4$

2019 est le dividende, 31 le diviseur,

65 le quotient et 4 le reste. On constate que $4 < 65$.

Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième!

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 31 \\ \cline{2-2} 159 & 65 \\ 4 & \end{array}$$

$2019 = 3 \times 673$

2 Diviseurs et multiples

Définition 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que

— a est un **multiple** de b,

— b est un **diviseur** de a,

— a est **divisible** par b

Exemple :

3 est un diviseur de 2019.

673 est un diviseur de 2019.

2019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.

2019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

Propriété 1.1 : Démontrée à l'oral et en exercice

Un nombre entier est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Remarque :
On peut mélanger ces critères :

- un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2 ;
- un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

Démonstration :

Divisibilité par 2 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Sur un exemple générique, prenons $a = 216$.
$a = 210 + 6$, $a = 21 \times 10 + 6$ donc $a = 10 \times 21 + 6$ et $a = 2 \times 5 \times 21 + 2 \times 3$.
On peut factoriser 2, $a = 2(5 \times 21 + 3)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 2.

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 2d$ car c vaut 0, 2, 4, 6 ou 8.
Ainsi $a = 10b + 2d$ on peut factoriser 2 pour obtenir $a = 2(5b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 2.

Divisibilité par 3 :

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,712$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999+1)+7(99+1)+1(9+1)+2$ donc $a = 2\times999+2+7\times99+7+1\times9+1+2$ ou encore $a = 2\times999+7\times99+1\times9+2+7+1+2$
Comme $999 = 3 \times 333$, $99 = 3 \times 33$ et $9 = 3 \times 3$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 3, en effet, $2 + 7 + 1 + 2 = 3 \times 4$
$a = 2 \times 3 \times 333 + 7 \times 3 \times 33 + 1 \times 3 \times 3 + 3 \times 4$.
On peut factoriser 3, $a = 3(2 \times 333 + 7 \times 33 + 1 \times 3 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 3.

Divisibilité par 4 :

a un nombre dont la somme des chiffres de dizaines et des unités forment un multiple de 4.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,020$.
$a = 20 \times 100 + 20$. Comme $100 = 25 \times 4$, $a = 20 \times 4 \times 25 + 4 \times 5$.
On peut factoriser 4 et $a = 4(20 \times 25 + 5)$.
Cela prouve que a est un multiple de 4.

Dans le cas général, si $a < 100$ la propriété est évidente.
Sinon $a = b \times 100 + c$ où b est un entier et c un multiple de 4 c'est-à-dire que $c = 4d$ où d est un entier.
$a = b \times 100 + 4d$ et $a = b \times 4 \times 25 + 4d$.
On peut factoriser 4 : $a = 4(b \times 25 + d)$.
Ce qui prouve que a est un multiple de 4.

Divisibilité par 5 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Sur un exemple générique, prenons $a = 8\,765$.
$a = 8760 + 5$, $a = 876 \times 10 + 5$ donc $a = 2 \times 5 \times 876 + 5 \times 1$.
On factorise 5, $a = 5(2 \times 876 + 1)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 5

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 5d$ car c vaut 0 ou 5.
Ainsi $a = 10b + 5d$ on peut factoriser 5 pour obtenir $a = 5(2b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 5.

Divisibilité par 9 :

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2718$.
$a = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999+1)+7(99+1)+1(9+1)+8$ donc $a = 2\times999+2+7\times99+7+1\times9+1+8$ ou encore $a = 2\times999+7\times99+1\times9+2+7+1+8$
Comme $999 = 9 \times 111$, $99 = 9 \times 11$ et $9 = 9 \times 1$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 9, en effet, $2+7+1+8 = 9 \times 2$
$a = 2\times9\times111+7\times9\times11+1\times9+9\times2$.
On peut factoriser 9, $a = 9(2\times111+7\times11+1+4)$
Finalement a est bien un multiple de 9.

CQFD

II — Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

1 Les nombres premiers

Définition I.3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède **exactement** deux diviseurs.

Propriété I.2 :

Si nombre entier est premier alors il est seulement divisible par 1 et lui-même.

Démonstration :

a un nombre entier.
$a = 1 \times a$ donc a est divisible par 1 et a est divisible par a.
1 et a sont deux diviseurs de a.
Si a est un nombre premier alors il possède exactement deux diviseurs : ce sont forcément 1 et a.

CQFD

---

1 n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même !

Exemples :

Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 : [3]
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

2 Décomposition en facteurs premiers

Théorème I.1 : Théorème fondamental de l'arithmétique (Admis)

Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Ce produit est unique à l'ordre des facteurs près.[4]

Démonstration : *Hors programme*

Nous allons montrer ce résultat par récurrence.
On peut considérer que 1 est égal au produit d'une famille vide de nombre premier.
Pour nous convaincre, on peut aussi vérifier que $2 = 2$, produit d'un seul nombre premier, que $3 = 3$ ou encore que $4 = 2 \times 2$.

Supposons que tout nombre entier inférieur strictement à n, où $n > 1$, est égal à une produit unique, à l'ordre près, de facteurs premiers.
Nous voulons montrer que n peut lui aussi se décomposer en produit de facteurs premiers.

Étudions maintenant le nombre entier $p > 1$, le plus petit qui divise n.
Si $p = n$, cela signifie que n est premier et dans ce cas n est un produit de nombre premier constitué d'un seul terme.
Sinon, p est un nombre premier puisqu'il est le plus petit divisant n. En effet, dans le cas contraire, p serait composé et le plus petit nombre premier de sa décomposition diviserait aussi n.

On peut alors écrire $n = p \times \dfrac{n}{p}$.

Comme $\dfrac{n}{p} < n$, $\dfrac{n}{p}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un produit de facteurs premiers.
Et on a vu que p est premier, donc $n \times \dfrac{n}{p}$ est une décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Finalement, par récurrence, on vient de montrer que tous les nombres entiers peuvent se décomposer en produit de facteurs premiers.

Vérifions l'unicité.
Supposons que n) puisse s'écrire de deux manières différentes sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Prenons p un des nombres premiers de la première décomposition, ce nombre p est un diviseur de la seconde décomposition. Comme les nombres de la seconde décomposition sont tous premiers, il divise l'un d'entre eux. Cela signifie que p est un des termes de la seconde décomposition.
En recommençant avec chacun des termes de la première décomposition, on montre ainsi que les deux décompositions sont strictement identiques.

CQFD

Exemples :
$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Méthode 1.1 : Comment décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
Pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, on divise ce nombre par les nombres premiers dans l'ordre croissant et on recommence avec le quotient jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.
On divise donc par 2, 3, 5, 7, 11, 13...
Les critères de divisibilité sont très utiles dans cette situation.

Décomposons le nombre 3 780

$3\,780 = 2 \times 1\,890$
$1\,890 = 2 \times 945$
$945 = 3 \times 315$
$315 = 3 \times 105$
$105 = 3 \times 35$
$35 = 5 \times 7$
Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

On peut aussi présenter les calculs ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

III — Applications

IV — Fractions irréductibles

Définition 1.4 : Fraction irréductible

a et b deux nombres entiers et $b \neq 0$

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** si 1 est le seul diviseur commun de a et b.

Une fraction irréductible est donc une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

Exemple :
$\dfrac{75}{64}$ est irréductible car 75 est divisible par 1, 3, 5, 15 ,25 et 75 et 64 est divisible par 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

$\dfrac{76}{64}$ n'est pas irréductible car 76 et 64 sont divisibles par 2.

D'ailleurs $\dfrac{76}{64} = \dfrac{2 \times 38}{2 \times 32} = \dfrac{38}{32} = \dfrac{2 \times 19}{2 \times 16} = \dfrac{19}{16}$

La fraction $\dfrac{19}{16}$ est irréductible.

Méthode 1 . 2 : Simplifier une fraction en une fraction irréductible
Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez grands, il peut être utile de décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{990}{1\,260} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$$

V — Recherche des diviseurs d'un nombre

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier permet d'obtenir la liste de ses diviseurs :

Méthode 1 . 3 : Déterminer les diviseurs d'un nombre entier
Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre entier on utilise sa décomposition en produit de facteurs premiers. Il faut ensuite effectuer toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On obtient les diviseurs de 630 en effectuant les combinaisons de produits de ses facteurs premiers. Voici ses diviseurs :

Aucun facteur premier : 1

Un facteur premier : 2, 3, 5, 7 ;

Deux facteurs premiers : $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$

Trois facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$

Quatre facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

Cinq facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

On vient de trouver 21 diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 90, 105, 126, 315, 630

Méthode 1.4 : Déterminer les diviseurs communs à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et faire ensuite toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Les facteurs premiers communs sont : 2, 3, 3 et 5

Les combinaisons possibles sont : 2, 3, 5, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Il y a donc 11 diviseurs communs : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 90.

90 est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

Méthode 1.5 : Déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et déterminer le plus grand diviseur.

On a par exemple : $1080 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ et $1440 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres s'obtient en observant les facteurs premiers de ces décompositions. Il faut repérer chaque nombre premier et se demander combien de fois il apparaît en commun dans chacun des nombres.

Dans notre cas, le nombre 2 apparaît trois fois dans 1080 et quatre fois dans 1440. Il doit être présent trois fois dans le plus grand diviseur commun.
Le nombre 3 apparaît trois fois dans 1080 et deux fois dans 1440. Il doit être présent deux fois dans le plus grand diviseur commun.
Le nombre 35 apparaît un fois dans chacun des nombres.

Ainsi le plus grand diviseur commun est $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

On peut ensuite remarquer que $\dfrac{1080}{1440} = \dfrac{360 \times 3}{360 \times 4} = \dfrac{3}{4}$ qui est irréductible !

✿ Questions du jours ✿

Question du jour n° 1 : Division euclidienne

Trouver tous les nombres entiers compris entre 2019 et 2089 vérifiant les critères suivants :

— le reste de la division de ces nombres par 2 est 1 ;

— le reste de la division de ces nombres par 3 est 0 ;

— le reste de la division de ces nombres par 5 est 3.

Question du jour n° 2 : Division euclidienne — Épisode 2

Trouver tous les nombres entiers compris entre 1789 et 2250 vérifiant les critères suivants :

— ces nombres sont des multiples de 2 ;

— ces nombres sont des multiples de 3 ;

— ces nombres sont des multiples de 5 ;

— ces nombres sont des multiples de 7.

Question du jour n° 3 : Les années bissextiles

En 2018 le 14 mars (jour de π) était un mercredi. En 2019 c'était un jeudi. En 2020 ce sera un samedi.
Quel jour de la semaine était le 14 mars 2000 ?

Question du jour n° 4 : Les jours fériés

En 2019 le 1ᵉʳmai, le 8 mai, Noël et le jour de l'an qui suit sont des mercredis. On peut observer que le 1ᵉʳmai est le 121ᵉjour de l'année, le 8 mai est le 128 ᵉet Noël le 359ᵉ. De la même manière le 8 mars (67ᵉjour), journée de la femme, le 21 juin (172ᵉjour), fête de la musique et le 1ᵉʳnovembre (305ᵉjour), la Toussaint sont des vendredis.
Comment expliquer ces observations ?

Question du jour n° 5 : Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 528 et 3 024.
Simplifier la fraction $\dfrac{3\,528}{3\,024}$

Question du jour n° 6 : Décomposition en produit de facteurs premiers – Épisode 2

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 7 875 et 7 425.
Simplifier la fraction $\dfrac{7\,425}{7\,875}$

Question du jour n° 7 : Les bus

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 42 min. Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 30 min. Le bus n° 67 met 35 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt ?

Question du jour n° 8 : Les bus — Épisode 2

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 60 min. Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 45 min. Le bus n° 67 met 54 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt ?

Correction du jour n° 1 : Division euclidienne

Comme le reste de la division par 2 est 1 : ce sont des nombres impairs.
Comme le reste de la division par 3 est 0 : ce sont des multiples de 3.
Les nombres divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5. Si le reste est 3, ils se terminent par 3 ou 8. Mais ils sont impairs.
Ce sont des nombres dont le chiffre des unités est 3 et des multiples de 3.
$2\,023$, $2\,033$, $2\,053$, $2\,063$ et $2\,083$ ne sont pas des multiples de 3.
Il s'agit de $2\,043$ et $2\,073$.

Correction du jour n° 2 : Division euclidienne — Épisode 2

Ce nombre est un multiple de 2, 3, 5 et 7 donc de $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$2\,100$ est un multiple de 210. $2\,310$ aussi mais trop grand. $1\,890$ est bon aussi mais pas $1\,680$ trop petit.

Correction du jour n° 3 : Les années bissextiles

Mardi 14 mars 2000 !
Il y a 365 jours dans une année ordinaire et 366 dans une année bissextile.
$365 = 7 \times 52 + 1$ et $366 = 7 \times 52 + 2$.
Les années bissextiles ont lieu les années multiples de 4.
Partant de 2018, 18 années nous séparent de 2000. Il y a donc 18 jours de décalage. 2016, 2012, 2008 et 2004 étaient bissextiles. Il faut ajouter 4 jours.
22 jours à retirer. $22 = 3 \times 7 + 1$ soit 3 semaines entières moins un jour : mardi

---

Correction du jour n° 4 : Les jours fériés

À rédiger !

Correction du jour n° 5 : Les bus

On peut facilement trouver les multiples communs en faisant la liste :
$42; 84; 126; 168; 210; 252; \dots$
$30; 60; 90; 120; 150; 180; 210; \dots$
$35; 70; 105; 140; 175; 210; \dots$
Ou avec une démarche experte :
Comme $42 = 2 \times 3 \times 7$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $35 = 5 \times 7$.
$\text{PPCM}(42, 30) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$\text{PPCM}(42, 35) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$\text{PPCM}(30, 35) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
Ils se retrouvent toutes les 210 min

Correction du jour n° 6 : Les bus — Épisode 2

En faisant la liste :
$60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; 480; 540; \dots$
$45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; 360; 405; 450; 495; 540; \dots$
$54; 108; 162; 216; 270; 324; 378; 432; 486; 540; \dots$
Penser à parler de la touche $\boxed{\text{Rép}}$ de la calculatrice !
Une méthode plus experte :
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, $45 = 3 \times 3 \times 5$ et $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$\text{PPCM}(60, 45) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$
$\text{PPCM}(60, 54) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 540$
$\text{PPCM}(45, 54) = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 270$

Exercices

Arithmétique

Troisième

Exercice n° 1.1 : Les nombres parfaits

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants :
6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre.

On dit que les nombres 6 et 28 sont parfaits.

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.
3.b En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.c Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 50 nombres parfaits (Janvier 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

Exercice n° 1.2 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.

2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations. Ces couples de nombres sont assez nombreux. En voici quelques-uns :
220 et 284 — 1 184 et 1 210 – 2 620 et 2 924 – 5 020 et 5 564 – 6 232 et 6 368

Exercice n° 1.3 : Les nombres de Mersenne

1. Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $M_3 = 2^3 - 1$ donc $M_3 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers. Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ^{e}siècle, affirme que : « Si M_n est premier alors n est premier. »
Constatez la véracité de ce théorème en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

Exercice n° 1.4 : Les nombres de Fermat

1. Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $F_0 = 2^{2^0} + 1$, $F_0 = 2^1 + 1 = 3$.
Calculer les nombres de Fermat : F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2. Vérifier à la calculatrice que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

3. Effectuer $641 \times 6\,700\,417$. Que pouvez-vous en déduire pour F_5 ?

En 1670, Pierre de Fermat fait la conjecture que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ *sont premiers pour tout entier* n *positif. Cela fait partie des 47 conjectures publiées par son fils après la mort de Fermat. En 1732, Leonhard Euler montre que* F_5 *est divisible par* 641. *Aujourd'hui encore on ne connaît que* 5 *nombres de Fermat premiers. D'après Boklan et Conway en 2016, la probabilité qu'un autre nombre de Fermat soit premier est inférieure à une chance sur un milliard. C'est la seule conjecture erronée de Fermat.*

Exercice n° 1.5 : Quelques conjectures

Voici quelques conjectures en rapport avec les nombres entiers.
Pour chacune d'entre elle, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse en proposant soit un contre-exemple, soit une démonstration.

Affirmation n° 1 : La somme de deux nombres pairs est un nombre pair ;
Affirmation n° 2 : La somme de deux nombres impairs est un nombre impair ;
Affirmation n° 3 : Si un nombre est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;
Affirmation n° 4 : Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6 ;
Affirmation n° 5 : Si un nombre est divisible par 3 et 9 alors il est divisible par 27 ;
Affirmation n° 6 : Le carré d'un nombre pair est un nombre pair ;
Affirmation n° 7 : Le carré d'un nombre impair est un nombre pair ;
Affirmation n° 8 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est un nombre pair.

✿ Exercices à rédiger à la maison ✿

Exercice n° 1 : Les nombres parfaits

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants : 6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que remarquez-vous pour 6 et 28 ?

On dit que les nombres 6 et 28 sont parfaits.

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers. En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.b Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 51 nombres parfaits (Décembre 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

Exercice n° 2 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.

2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations. Ces couples de nombres sont assez nombreux.
En voici quelques-uns :
220 *et* 284 — 1 184 *et* 1 210 – 2 620 *et* 2 924 – 5 020 *et* 5 564 – 6 232 *et* 6 368

Exercice n° 3 : Les nombres de Mersenne

1. Les nombres de Mersenne sont de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif. Par exemple $M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers.
Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ᵉsiècle, affirme que :

« Si M_n est premier alors n est premier. »

Vérifiez que ce théorème semble être vrai en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

Exercice n° 4 : Les nombres de Fermat

1. Les nombres de Fermat sont de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier positif. Par exemple $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$.
Calculer les nombres de Fermat : F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2. Vérifier à la calculatrice que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

3. Effectuer $641 \times 6\,700\,417$. Que pouvez-vous en déduire pour F_5 ?

En 1670, Pierre de Fermat fait la conjecture que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ *sont premiers pour tout entier* n *positif. Cela fait partie des 47 conjectures publiées par son fils après la mort de Fermat. En 1732, Leonhard Euler montre que* F_5 *est divisible par* 641. *Aujourd'hui encore on ne connaît que* 5 *nombres de Fermat premiers. D'après Boklan et Conway en 2016, la probabilité qu'un autre nombre de Fermat soit premier est inférieure à une chance sur un milliard. C'est la seule conjecture erronée de Fermat.*

Exercice n° 5 : Les repunits

Un **Repunit** est un nombre dont l'écriture décimale est constituée que du chiffre 1.
1, 11, 111, 11 111... 111 111 111 111 sont des Repunits.

1. Effectuer la division euclidienne en la posant de 11 par 9, de 111 par 9, de 1 111 par 9 et enfin de 11 111 par 9

2. En utilisant votre calculatrice, écrire l'égalité euclidienne qui correspond à la division par 9 des Repunits 111 111, 1 111 111, 11 111 111 et 111 111 111.

3. Que remarquez-vous ?

4. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 3 ?

5. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 9 ?

6. [WEB] – Un Repunit peut-il être premier ?

Exercice n° 6 : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

1. Calculer $\left(\sqrt{2}\right)^2$

2.a p un nombre entier. Que peut-on dire du nombre entier $2p$ et du nombre entier $2p+1$?
Tester avec des valeurs de p de votre choix pour justifier votre réponse.

2.b p un nombre entier. Simplifier les expressions suivantes :

— $(2p)^2$

— $(2p+1)^2$

2.c En utilisant les questions **2.a** et **2.b** dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

— **Affirmation 1 :** Le carré d'un nombre entier pair est pair ;

— **Affirmation 2 :** Le carré d'un nombre entier impair est pair.

3.a On suppose maintenant qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Démontrer que dans ce cas que $2q^2 = p^2$.

3.b En déduire que p^2 est pair. Qu'en est-il de p ?

3.c Comme p est pair on peut écrire $p = 2k$ où k est un entier. En calculant p^2 et en utilisant la question **3.a** montrer que $q^2 = 2k^2$

3.d En déduire que q et p sont tous les deux pairs.

3.e Que pensez-vous de la fraction $\dfrac{p}{q}$?
Pourquoi est-ce en contradiction avec l'hypothèse de départ de la question **3.a**

4. Qu'est-ce que ce raisonnement prouve pour le nombre $\sqrt{2}$?

Exercice n° 7 : Le calendrier et l'arithmétique

Le 20 décembre 1582, la France est passé au calendrier grégorien. Ce calendrier, promulgué par le pape Grégoire XIII en févier 1582, succède au calendrier julien.
Ce calendrier confirme l'existence d'années bissextiles, tous les quatre ans, les années divisbles par 4. Dans ce cas on ajoute une journée à l'année commune, un 366ᵉjour, le 29 février. Cette réforme consiste à supprimer trois années bissextiles tous les 400 ans. Les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles à l'exception de celles multiples de 400.

1.a. Quelle sera la prochaine année bissextile ? Justifier votre réponse.
1.b. 2000 était-elle une année bissextile ? Et 2100 ? Justifier votre réponse.

2.a. Effectuer la division euclidienne de 365 par 7 puis de 366 par 7.
2.b. Combien y-a-t-il de semaines entières dans une année ?
2.c. En 2023, j'ai fêté mon anniversaire au mois d'août, un jeudi. Quelle jour de la semaine aura lieu mon anniversaire en 2024 puis en 2025. Justifier votre réponse.

3.a. Combien d'années vont s'écouler entre le 1erjanvier 2001 et le 31 décembre 2400.
3.b. En appliquant les règles du calendrier grégorien, combien de jours vont s'écouler entre le 1erjanvier 2001 et le 31 décembre 2400 ?
3.c. Sur cette période, donner la valeur décimale exacte du nombre de jours composant chaque année. Vous pourrez pour cela faire le quotient du nombre jours par le nombre d'années.
3.d. Une année tropique, c'est à dire une année au sens astronomique, dure environ 365,2422 jours. Quel est l'écart avec la durée moyenne d'une année du calendrier grégorien. Vous pourrez exprimer ce résultat en seconde.

Le calendrier précédent, le calendrier julien, avait été mis en place par Jules César vers 46 avant notre ère. Il ajoute un jour tous les quatre ans, les années bissextiles.

4.a. En prenant une période de 400 ans, comme dans la question précédente, combien de jours comprend le calendrier julien ?
4.b. Quel est l'écart entre le calendrier julien et l'année tropique.
4.c. Que s'est-il passé le 16 décembre 1582 ?

Arithmétique

Le 20 décembre 1582, la France est passé au calendrier grégorien. Ce calendrier, promulgué par le pape Grégoire XIII en févier 1582, succède au calendrier julien.
Ce calendrier confirme l'existence d'années bissextiles, tous les quatre ans, les années divisbles par 4. Dans ce cas on ajoute une journée à l'année commune, un 366^e^jour, le 29 février. Cette réforme consiste à supprimer trois années bissextiles tous les 400 ans. Les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles à l'exception de celles multiples de 400.

1.a. Quelle sera la prochaine année bissextile ? Justifier votre réponse.
Nous sommes en 2023.
Comme $2024 = 4 \times 506$, $\boxed{\text{la prochaine année bissextile sera 2024. Les suivantes seront 2028, 2032, 2036...}}$
1.b. 2000 était-elle une année bissextile ? Et 2100 ? Justifier votre réponse.
$2000 = 4 \times 500$. Il s'agit d'une année multiple de 4. De plus $2000 = 400 \times 5$, c'est un multiple de 400. $\boxed{\text{2000 était bissextile.}}$

2.a. Effectuer la division euclidienne de 365 par 7 puis de 366 par 7.
2.b. Combien y-a-t-il de semaines entières dans une année ?
2.c. En 2023, j'ai fêté mon anniversaire au mois d'août, un jeudi. Quelle jour de la semaine aura lieu mon anniversaire en 2024 puis en 2025. Justifier votre réponse.

3.a. Combien d'années vont s'écouler entre le 1^er^janvier 2001 et le 31 décembre 2400.
3.b. En appliquant les règles du calendrier grégorien, combien de jours vont s'écouler entre le 1^er^janvier 2001 et le 31 décembre 2400 ?
3.c. Sur cette période, donner la valeur décimale exacte du nombre de jours composant chaque année. Vous pourrez pour cela faire le quotient du nombre jours par le nombre d'années.
3.d. Une année tropique, c'est à dire une année au sens astronomique, dure environ 365,2422 jours. Quel est l'écart avec la durée moyenne d'une année du calendrier grégorien. Vous pourrez exprimer ce résultat en seconde.

Le calendrier précédent, le calendrier julien, avait été mis en place par Jules César vers 46 avant notre ère. Il ajoute un jour tous les quatre ans, les années bissextiles.

4.a. En prenant une période de 400 ans, comme dans la question précédente, combien de jours comprend le calendrier julien ?
4.b. Quel est l'écart entre le calendrier julien et l'année tropique.
4.c. Que s'est-il passé le 16 décembre 1582 ?

Devoir maison

Troisième

Exercice n° 1 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.
2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations. Ces couples de nombres sont assez nombreux. En voici quelques-uns :
220 et 284 — 1 184 et 1 210 – 2 620 et 2 924 – 5 020 et 5 564 – 6 232 et 6 368

Exercice n° 2 : Résolution d'équations

Résoudre chacune des équations suivantes :

(1) $5x+7=3x+3$

(2) $7x-3=4x-10$

(3) $10-8x=5x-3$

(4) $-x-7=1+x$

(5) $11x-7=-3x+9$

(6) $3x-3+x-1=2x-5x+2$

(7) $3(2x-7)=4(3x-1)$

(8) $x-2(3x-1)=2x-(5x-1)$

Exercice n° 3 : Fonctions et tableaux de valeurs

On pose :

$$f : x \rightarrow 10-7x$$
$$g : x \rightarrow x^2+6x-7$$
$$h : x \rightarrow (x-5)(x+7)$$

1. Compléter les tableaux suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$											

2. Déterminer les images de -2 et 5 par les fonctions f, g et h.

3. Déterminer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$

4. Calculer $f(-7)$, $g(-7)$ et $h(-7)$.

5. Déterminer les antécédents de 0 par g.

6. Déterminer les antécédents de 0 par h.

7. Déterminer les antécédents de -13 par f.

Devoir maison — Correction

Exercice nº 1 — Correction

1.

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{220 = 2 \times 2 \times 5 \times 11}$ $\boxed{284 = 2 \times 2 \times 71}$

2. Diviseurs de 220 : 1 — 2 — 4 — 5 — 10 — 11 — 20— 22 — 44 — 55 — 110 — 220
Diviseurs de 284 : 1 — 2 — 4 — 71 — 142 — 284

La somme des diviseurs de 220 : $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$
La somme des diviseurs de 284 : $1+2+4+71+142 = 220$

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3.

$$\begin{array}{r|l} 1\,184 & 2 \\ 592 & 2 \\ 296 & 2 \\ 148 & 2 \\ 74 & 2 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1\,210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{1\,184 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 37}$ $\boxed{1\,210 = 2 \times 5 \times 11 \times 11}$

Les diviseurs de 1184 : 1 — 2 — 4 — 8 — 16 — 32 — 37 — 74 — 148 — 296 — 592 — 1184
Les diviseurs de 1210 : 1 — 2 — 5 — 10 — 11 — 22 — 55 — 110 — 121 — 242 — 605 — 1210

La somme des diviseurs de 1184 : $1+2+4+8+16+32+37+74+148+296+592 = 1210$
La somme des diviseurs de 1210 : $1+2+5+10+11+22+55+110+121+242+605 = 1184$
Ils sont amicaux !

Exercice nº 2 — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 3x+3 \\ 5x+7-7 &= 3x+3-7 \\ 5x &= 3x-4 \\ 5x-3x &= 3x-4-3x \\ 2x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{2} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x-3 &= 4x-10 \\ 7x-3+3 &= 4x-10+3 \\ 7x &= 4x-7 \\ 7x-4x &= 4x-7-4x \\ 3x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10-8x &= 5x-3 \\ 10-8x-10 &= 5x-3-10 \\ -8x &= 5x-13 \\ -8x-5x &= 5x-13-5x \\ -13x &= -13 \\ x &= \frac{-13}{-13} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-x-7&=1+x\\
-x-7+7&=1+x+7\\
-x&=8+x\\
-x-x&=8+x-x\\
-2x&=8\\
x&=-\frac{8}{2}\\
x&=-4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11x-7&=-3x+9\\
11x-7+7&=-3x+9+7\\
11x&=-3x+16\\
11x+3x&=-3x+16-3x\\
14x&=16\\
x&=\frac{16}{14}\\
x&=\frac{8}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x-3+x-1&=2x-5x+2\\
4x-4&=-3x+2\\
4x-4+4&=-3x+2+4\\
4x&=-3x+6\\
4x+3x&=-3x+6+3x\\
7x&=6\\
x&=\frac{6}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3(2x-7)&=4(3x-1)\\
6x-21&=12x-4\\
6x-21+21&=12x-4+21\\
6x&=12x+17\\
6x-12x&=12x+17-12x\\
-6x&=17\\
x&=-\frac{17}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x-2(3x-1)&=2x-(5x-1)\\
x-6x+2&=2x-5x+1\\
-5x+2&=-3x+1\\
-5x+2-2&=-3x+1-2\\
-5x&=-3x-1\\
-5x+3x&=-3x+1+3x\\
-2x&=1\\
x&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice n° 3 — Correction

On pose :

$$\begin{aligned}
&f : x \to 10-7x\\
&g : x \to x^2+6x-7\\
&h : x \to (x-5)(x+7)
\end{aligned}$$

1. Compléter les tableaux suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	45	38	31	24	17	10	3	-4	-11	-18	-25

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0	9	20	33	48

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	-20	-27	-32	-35	-36	-35	-32	-27	-20	-11	0

2. Déterminer les images de -2 et 5 par les fonctions f, g et h.

$f(-2)=-24$, $f(5)=-25$
$g(-2)=-15$, $g(5)=48$
$h(-2)=-35$, $h(5)=0$

3. Déterminer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$

$f(0)=10$, $g(0)=-7$ et $h(0)=-35$

4. Calculer $f(-7)$, $g(-7)$ et $h(-7)$.

$f(-7) = 10 - 7 \times (-7) = 10 + 49 = 59$
$g(-7) = (-7)^2 + 6 \times (-7) - 7 = 49 - 42 - 7 = 0$
$h(-7) = (-7-5)(-7+7) = -12 \times 0 = 0$

5. Déterminer les antécédents de 0 par g.

On a trouvé deux antécédents de 0 par g : 1 et -7

6. Déterminer les antécédents de 0 par h.

On a trouvé deux antécédents de 0 par h : 5 et -7

7. Déterminer les antécédents de -13 par f.

Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
10 - 7x &= -13 \\
10 - 7x - 10 &= -13 - 10 \\
-7x &= -23 \\
x &= \frac{23}{7}
\end{aligned}$$

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 :

2 points

Faire la liste sur votre copie de tous les nombres premiers inférieurs à 50.

Exercice n° 2 :

6 points

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ $\quad$ $B = \left(3 - \frac{4}{5}\right) \times \left(5 + \frac{3}{4}\right)$ $\quad$ $C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

Exercice n° 3 :

4 points

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 144.

2. Faire la liste de tous les diviseurs de 315.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 315 et 144 ?

Exercice n° 4 :

4 + 2 points

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

2. Simplifier la fraction $\frac{4\,131}{9\,180}$.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 ?

BONUS : Calculer en simplifiant au maximum l'expression : $\frac{1}{9\,180} + \frac{1}{4\,131}$

Toutes les traces de recherche seront valorisées.

Exercice n° 5 :

4 points

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Peut-il créer 55 bouquets ? Peut-il créer 40 bouquets ?

2. Combien au maximum pourra-t-il créer de bouquets et dans ce cas combien de pivoines et de narcisses doit-il placer dans chaque bouquet ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 :

2 points Troisième

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 —29 — 31 — 37 — 41 — 43 — 47

Exercice n° 2 :

6 points

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$

$A = \frac{5}{7} - \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$

$A = \frac{5}{7} - \frac{15}{28}$

$A = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} - \frac{15}{28}$

$A = \frac{20}{28} - \frac{15}{28}$

$\boxed{A = \frac{5}{28}}$

$B = \left(3 - \frac{4}{5}\right) \times \left(5 + \frac{3}{4}\right)$

$B = \left(\frac{3}{1} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5}{1} + \frac{3}{4}\right)$

$B = \left(\frac{3 \times 5}{1 \times 5} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5 \times 4}{1 \times 4} + \frac{3}{4}\right)$

$B = \left(\frac{15}{5} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{20}{4} + \frac{3}{4}\right)$

$B = \frac{11}{5} \times \frac{23}{4}$

$B = \frac{11 \times 23}{5 \times 4}$

$\boxed{B = \frac{253}{20}}$

$C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

$C = \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

$C = \left(\frac{2 \times 9}{1 \times 9} + \frac{2 \times 3}{3 \times 3} - \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{1 \times 20}{1 \times 20} + \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{7 \times 5}{4 \times 5}\right)$

$C = \left(\frac{18}{9} + \frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{20}{20} + \frac{12}{20} - \frac{35}{20}\right)$

$C = \frac{19}{9} \div \frac{-3}{20}$

$C = \frac{19}{9} \times \frac{20}{-3}$

$C = \frac{19 \times 20}{9 \times (-3)}$

$\boxed{C = -\frac{380}{27}}$

Exercice n° 3 :

4 points

1. La liste de tous les diviseurs de 144 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 9 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — 48 — 72 — 144

2. La liste de tous les diviseurs de 315 : 1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 15 — 21 — 35 — 45 — 63 — 105 — 315

3. Le plus grand diviseur commun de 315 et 144 est 9.

Exercice n° 3 :

4 + 2 points

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

$$\begin{array}{r|l} 9\,180 & 2 \\ 4\,590 & 2 \\ 2\,295 & 3 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\,131 & 3 \\ 1\,377 & 3 \\ 459 & 3 \\ 153 & 3 \\ 357 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \text{ donc } 9\,180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17}$

$\boxed{4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17 \text{ donc } 4\,131 = 3^5 \times 17}$

2. $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17} = \dfrac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3} = \boxed{\dfrac{20}{9}}$

3. Comme $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{20 \times 459}{9 \times 459}$, $459 = 3 \times 3 \times 3 \times 17$, $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de } 9\,180 \text{ et } 4\,131 \text{ est } 459}$.

BONUS : $Z = \dfrac{1}{4\,131} + \dfrac{1}{9\,180}$

Comme $9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17$ et $4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17$.
Le plus petit multiple commun à ces deux nombres est $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 = 82\,620$
On constate que $82\,620 = 9\,180 \times 9$ et $82\,620 = 4\,131 \times 20$

$$Z = \frac{1}{4\,131} + \frac{1}{9\,180} = \frac{1 \times 20}{4\,131 \times 20} + \frac{1 \times 9}{9\,180 \times 9} = \frac{20}{82\,620} + \frac{9}{82\,620} = \frac{29}{82\,620}$$

EXERCICE N° 4 : *4 points*

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Comme $880 = 16 \times 55$ et que $1\,040 = 18 \times 55 + 50$, il ne peut pas faire 55 bouquets, sinon il resterait 50 narcisses.

Comme $880 = 22 \times 40$ et que $1\,040 = 26 \times 40$, il peut réaliser 40 bouquets.

2. *On peut faire la liste des diviseurs des deux nombres puis trouver le plus grand en commun ou examiner les décompositions en facteurs premiers.*

Liste des diviseurs

Diviseurs de 880 : 1 — 2 — 4 — 5 — 8 — 10 — 11 — 16 — 20 — 22 — 40 — 44 — 55 — 80 — 88 — 110 — 176 — 220 — 440 — 880

Diviseurs de 1 040 : 1 — 2 — 4 — 8 — 10 — 13 — 16 — 20 — 26 — 40 — 52 — 65 — 80 — 104 — 180 — 360 — 720 — 1 440

On constate que le plus grand diviseur commun est 80.

Décomposition en facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 880 & 2 \\ 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,040 & 2 \\ 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$880 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$ donc $880 = 2^4 \times 5 \times 11$

$1\,040 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 13$ donc $1\,040 = 2^4 \times 5 \times 13$

Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres est donc égal à $2^4 \times 5 = 16 \times 5 = 80$.

De plus on a $880 = 80 \times 11$ et $1\,040 = 80 \times 13$.

Il pourra créer 80 bouquets constitués chacun de 11 pivoines et 13 narcisses.

Évaluation
Troisième

Exercice n° 1 : *1 points*

Faire la liste, ci-dessous, de tous les nombres premiers inférieurs à 30.

Exercice n° 2 : *6 points*

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ $\qquad$ $B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

Exercice n° 3 : *4 points*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 144 et 315.

2. Faire la liste de tous les diviseurs de 144.

3. Faire la liste de tous les diviseurs de 315.

4. Quel est le plus grand diviseur commun de 315 et 144 ?

Exercice n° 4 : *6 points*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

2. Simplifier la fraction $\frac{4\,131}{9\,180}$.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 ?

4. Un confiseur d'Aix en Provence vient de réaliser 9180 calissons natures et 4131 calissons napés au chocolat noir.
Il demande à son apprenti de constituer un maximum de sachets, tous identiques, c'est à dire ayant la même répartition de calissons des deux types, de telle manière qu'il ne reste aucune confiserie à la fin.
Combien de sachets peut-il constituer et combien de calissons de chaque type doit-il placer dans chaque sachet ?

Toutes les traces de recherche seront valorisées.

Exercice n° 5 : *4 points*

Alejandro souhaite carreler un des murs de sa salle de bain avec des carreaux carrés.
Ce mur mesure 4368 mm sur 2640 mm.
Pour des raisons pratiques, il ne veux faire aucune découpe.
Il faut absolument que le mur soit entièrement carrelé. Les carreaux sont posés bord à bord.

1. Alejandro peut-il acheter des carreaux de 20 mm ?
Peut-il acheter des carreaux de 24 mm ?

2. Quelle est la taille maximale de carreaux carrés qu'Alejandro peut poser sur ce mur ?
Combien de carreaux doit-il acheter ?

Toutes les traces de recherche seront valorisées.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Question de cours Correction

Nombres premiers

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

$\boxed{2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 — 29 — 31 — 37 — 41 — 43 — 47}$

Exercice n° 2 : Fractions Correction

Fractions

Calculer chacune des expressions suivantes en détaillant vos calculs.

$A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$

$A = \frac{5}{7} - \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$

$A = \frac{5}{7} - \frac{15}{28}$

$A = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} - \frac{15}{28}$

$A = \frac{20}{28} - \frac{15}{28}$

$\boxed{A = \frac{5}{28}}$

$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)$

$B = \left(\frac{3 \times 5}{4 \times 5} - \frac{4 \times 4}{5 \times 4}\right) \times \left(\frac{1 \times 4}{3 \times 4} - \frac{3 \times 3}{4 \times 3}\right)$

$B = \left(\frac{15}{20} - \frac{16}{20}\right) \times \left(\frac{4}{12} - \frac{9}{12}\right)$

$B = -\frac{1}{20} \times \frac{-5}{12}$

$B = \frac{1 \times 5}{5 \times 4 \times 12}$

$\boxed{B = \frac{1}{48}}$

$C = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

$C = \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{5} - \frac{7}{4}\right)$

$C = \left(\frac{2 \times 9}{1 \times 9} + \frac{2 \times 3}{3 \times 3} - \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{1 \times 20}{1 \times 20} + \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{7 \times 5}{4 \times 5}\right)$

$C = \left(\frac{18}{9} + \frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{20}{20} + \frac{12}{20} - \frac{35}{20}\right)$

$C = \frac{19}{9} \times \frac{-3}{20}$

$C = -\frac{19 \times 3}{3 \times 3 \times 20}$

$\boxed{C = -\frac{19}{60}}$

Exercice n° 3 : Liste de diviseurs Correction

Liste de diviseurs

1.

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$\boxed{144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$

$\boxed{315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7}$

2. La liste de tous les diviseurs de 144 : $\boxed{1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 9 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — 48 — 72 — 144}$

3. La liste de tous les diviseurs de 315 : $\boxed{1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 15 — 21 — 35 — 45 — 63 — 105 — 315}$

4. Le plus grand diviseur commun de 315 et 144 est 9.

Exercice n° 4 : Fractions irréductibles et calissons CORRECTION

Fractions irréductibles

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

9 180	2
4 590	2
2 295	3
765	3
255	3
85	5
17	17
1	

4 131	3
1 377	3
459	3
153	3
357	3
51	3
17	17
1	

$\boxed{9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \text{ donc } 9\,180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17}$

$\boxed{4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17 \text{ donc } 4\,131 = 3^5 \times 17}$

2. $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17} = \dfrac{3 \times 3}{2 \times 2 \times 5} = \boxed{\dfrac{9}{20}}$

3. Comme $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{9 \times 459}{20 \times 459}$, $459 = 3 \times 3 \times 3 \times 17$, $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de } 9\,180 \text{ et } 4\,131 \text{ est } 459}$.

4. Nous venons de voir que $4131 = 459 \times 9$ et que $9180 = 459 \times 20$.

$\boxed{\text{L'apprenti du confiseur pourra faire 459 sachets contenant chacun 20 calissons natures et 9 calissons napés au chocolat noir.}}$

Exercice n° 5 : Problème d'arithmétique CORRECTION

Problème de carrelage

1. On a $4368 = 20 \times 218 + 8$ et $2640 = 20 \times 132$. $\boxed{\text{Il ne peut pas utiliser des carreaux de 20 cm.}}$

On a $4368 = 24 \times 182$ et $2640 = 24 \times 110$. $\boxed{\text{Il peut utiliser des carreaux de 24 cm.}}$

2.

4 368	2
2 184	2
1 092	2
546	2
273	3
91	7
13	13
1	

2 640	2
1 320	2
660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$\boxed{4\,368 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 13}$

$\boxed{2\,640 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11}$

On a ainsi :

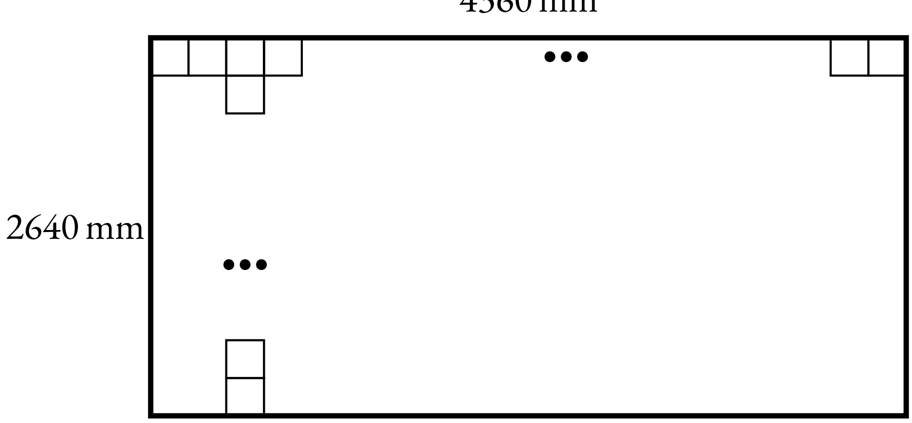
— $4368 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 13$

— $2640 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$

Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres est donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$.

Alejandro va pouvoir acheter des carreaux de 48 mm.

Or, $4368 = 48 \times 91$ et $2640 = 48 \times 55$.



Il lui faudra donc $55 \times 91 = 5005$ carreaux.

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 :

2 points

Faire la liste sur votre copie de tous les nombres premiers inférieurs à 50.

Exercice n° 2 :

3,5 points

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 144.

2. Faire la liste de tous les diviseurs de 315.

3. Quel est le plus grand diviseur commun de 315 et 144 ?

Exercice n° 3 :

3,5 points

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{4\,131}{9\,180}$.

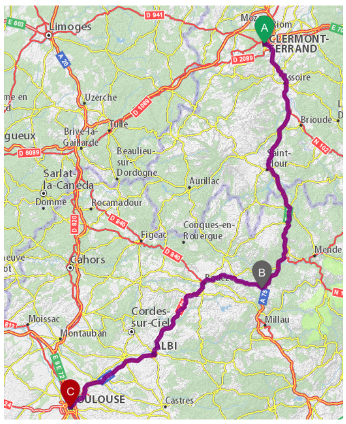
3. Quel est le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 ?

Exercice n° 4 :

7 points

1. Un lapin de garenne peut atteindre la vitesse maximale de $40\,\mathrm{km/h}$. Usain Bolt a couru le 16 août 2009 le $100\,\mathrm{m}$ en $9,58\ s$. Il est détient depuis cette date le record du monde de l'être humain le plus rapide.
En justifiant votre réponse indiquer qui du lapin ou de l'homme est le plus rapide au sprint.

2. Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



2.a. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2.b. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

2.c. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

Exercice n° 5 :

4 points

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Peut-il créer 55 bouquets ? Peut-il créer 40 bouquets ?

2. Combien au maximum pourra-t-il créer de bouquets et dans ce cas combien de pivoines et de narcisses doit-il placer dans chaque bouquet ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : *2 points* Troisième

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

$\boxed{2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 —29 — 31 — 37 — 41 — 43 — 47}$

Exercice n° 2 : *3,5 points* ☆ ☆

1. La liste de tous les diviseurs de 144 : $\boxed{1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 9 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — 48 — 72 — 144}$

2. La liste de tous les diviseurs de 315 : $\boxed{1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 15 — 21 — 35 — 45 — 63 — 105 — 315}$

3. $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de 315 et 144 est 9.}}$

Exercice n° 3 : *3,5 points* ☆ ☆

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 9 180 et 4 131.

$$\begin{array}{r|c} 9\,180 & 2 \\ 4\,590 & 2 \\ 2\,295 & 3 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 4\,131 & 3 \\ 1\,377 & 3 \\ 459 & 3 \\ 153 & 3 \\ 357 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{9\,180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \text{ donc } 9\,180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17}$

$\boxed{4\,131 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17 \text{ donc } 4\,131 = 3^5 \times 17}$

2. $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17} = \dfrac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3 \times} = \boxed{\dfrac{20}{9}}$

3. Comme $\dfrac{4\,131}{9\,180} = \dfrac{20 \times 459}{9 \times 459}$, $459 = 3 \times 3 \times 3 \times 17$, $\boxed{\text{Le plus grand diviseur commun de 9 180 et 4 131 est 459}}$.

Exercice n° 4 :

7 points ☆ ☆

1. *On peut au choix, calculer la vitesse en kilomètre heure d'Usain Bolt ou se demander le temps que ferait le lapin pour courir un* $100\,\text{m}$.

Vitesse d'Usain Bolt

On suppose que le temps et la distance sont proportionnelles.

Distance	$100\,\text{m}$	$\dfrac{100\,\text{m} \times 3\,600\,\text{s}}{9{,}58\,\text{s}} \approx 37\,578\,\text{m} \approx 37{,}6\,\text{km}$
Temps	$9{,}58\,\text{s}$	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$

La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $37{,}6\,\text{km/h}$. Elle est donc inférieure à celle du lapin.

Temps sur $100\,\text{m}$ **du lapin**

Distance	$100\,\text{m}$	$40\,\text{km} = 40\,000\,\text{m}$
Temps	$\dfrac{100\,\text{m} \times 3\,600\,\text{s}}{40\,000\,\text{m}} = 9\,\text{s}$	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$

Le lapin court le $100\,\text{m}$ en $9\,\text{s}$, il est plus rapide qu'Usain Bolt.

2.a.

Distance	$130\,\text{km}$	$200\,\text{km}$
Temps	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$	$\dfrac{3\,600\,\text{s} \times 200\,\text{km}}{130\,\text{km}} \approx 5\,538\,\text{s}$

Or $5\,538\,\text{s} = 92 \times 60\,\text{s} + 18\,\text{s} = 92\,\text{min} + 18\,\text{s}$ soit $\boxed{1\ h\,32\ min\ 18\ s}$

2.b. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\,30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

2.c. Le temps et la distance sont proportionnels.
$150\ min = 9\,000\ s$

Temps	$14\,538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3\,600\ s}{14\,538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice n° 5 :

4 points

Un fleuriste a reçu ce matin 880 pivoines et 1 040 narcisses. Il souhaite créer des bouquets **tous** identiques contenant un mélange de narcisses et de pivoines. Il ne veut pas qu'il reste une seule fleur après avoir fait ses bouquets.

1. Comme $880 = 16 \times 55$ et que $1\,040 = 18 \times 55 + 50$, $\boxed{\text{il ne peut pas faire 55 bouquets, sinon il resterait 50 narcisses.}}$

Comme $880 = 22 \times 40$ et que $1\,040 = 26 \times 40$, $\boxed{\text{il peut réaliser 40 bouquets.}}$

2. *On peut faire la liste des diviseurs des deux nombres puis trouver le plus grand en commun ou examiner les décompositions en facteurs premiers.*

Liste des diviseurs

Diviseurs de 880 : 1 — 2 — 4 — 5 — 8 — 10 — 11 — 16 — 20 — 22 — 40 — 44 — 55 — 80 — 88 — 110 — 176 — 220 — 440 — 880

Diviseurs de 1 040 : 1 — 2 — 4 — 8 — 10 — 13 — 16 — 20 — 26 — 40 — 52 — 65 — 80 — 104 — 180 — 360 — 720 — 1 440

On constate que le plus grand diviseur commun est 80.

Décomposition en facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 880 & 2 \\ 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1\,040 & 2 \\ 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{880 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11 \text{ donc } 880 = 2^4 \times 5 \times 11}$ $\boxed{1\,040 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 13 \text{ donc } 1\,040 = 2^4 \times 5 \times 13}$

Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres est donc égal à $2^4 \times 5 = 16 \times 5 = 80$.

De plus on a $880 = 80 \times 11$ et $1\,040 = 80 \times 13$.

$\boxed{\text{Il pourra créer 80 bouquets constitués chacun de 11 pivoines et 13 narcisses.}}$

Évaluation

Troisième

EXERCICE 1 : Écrire sur votre copie la liste des nombres premiers inférieurs à 50. *(2 points)*

EXERCICE 2 : *(5 points)*

1. Décomposer les nombres 2 320, 2 349 et 203 en produit de nombres premiers.

2. Des archéologues viennent de découvrir dans les ruines du collège Vauquelin un trésor gaulois : 2 320 statères d'or, 2 349 quinaires en argent et 203 deniers en bronze. Les archéologues parviennent ensuite à se partager ses pièces de manière parfaitement équitable.
Combien sont les archéologues inventeurs de ce trésor ?

3. Combien de pièces de chaque sorte un archéologue va-t-il recevoir ?

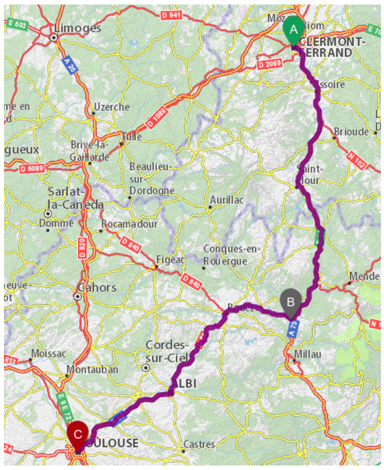
EXERCICE 3 : *(3 points)*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,780}{6\,840}$

EXERCICE 4 : *(5 points)*

Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



1. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

3. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

EXERCICE 5 : *(5 points)*

Un pâtissier a reçu ce matin 840 fraises maralines et 630 framboises Glen Coe. Il souhaite préparer des tartelettes aux fraises et aux framboises toutes identiques, c'est-à-dire ayant chacune la même quantité de fraises et de framboises.

1. Peut-il faire 50 tartelettes ? Peut-il faire 30 tartelettes ?

2. Déterminer le nombre maximal de tartelettes qu'il va pouvoir préparer et indiquer combien de framboises et de fraises il devra utiliser pour chacune d'entre elle.

Toute trace de recherche même non aboutie sera valorisée !

Évaluation — Correction

Exercice 1 :

$2 - -3 - -5 - -7 - -11 - -13 - -17 - -19 - -23 - -29 - -31 - -37 - -41 - -43 - -47$

Exercice 2 :

1. Décomposer les nombres 2 320, 2 349 et 203 en produit de nombres premiers.

$$\begin{array}{r|l} 2\,320 & 2 \\ 1\,160 & 2 \\ 580 & 2 \\ 290 & 2 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,349 & 3 \\ 783 & 3 \\ 261 & 3 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 203 & 7 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{2\,320 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 29}$, $\boxed{2\,349 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 29}$ et $\boxed{203 = 7 \times 29}$.

2. Clairement 29 est le seul diviseur commun à 2 320, 2 349 et 203. Il y a donc $\boxed{\text{29 archéologues}}$.

3. $2\,320 = 29 \times 80$, $2\,349 = 29 \times 81$ et $203 = 29 \times 7$

$\boxed{\text{Chacun recevra 80 statères, 81 quinaires et 7 deniers.}}$

Exercice 3 :

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

$$\begin{array}{r|l} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6\,840 & 2 \\ 3\,420 & 2 \\ 1\,710 & 2 \\ 855 & 3 \\ 285 & 3 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ et $6\,840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 19$

2. $\dfrac{3\,780}{6\,840} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 19} = \dfrac{3 \times 7}{2 \times 19} = \dfrac{21}{38}$

Exercice 4 :

1. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	x
Distance	$130\ km$	$200\ km$

On a $x = \dfrac{3\,600\ s \times 200\ km}{130\ km} \approx 5\,538\ s$

Or $\boxed{5\,538\ s = 92\ min\ 18\ s = 1\ h\ 32\ min\ 18\ s}$

2. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\ 30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

3. Le temps et la distance sont proportionnels.

$150\ min = 9\,000\ s$

Temps	$14\,538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3\,600\ s}{14\,538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice 5 :

1. $840 = 16 \times 50 + 40$ donc il ne peut pas faire 50 tartes.

$840 = 30 \times 28$ et $630 = 30 \times 21$: il peut faire 30 tartes.

2. Décomposons 840 et 630 en facteurs premiers.

$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Le plus grand diviseur commun est donc $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$

Il peut faire 210 tartelettes et comme $840 = 4 \times 210$ et $630 = 210 \times 3$ il y aura 4 fraises et 3 framboises par tartelette.

Évaluation

Troisième

EXERCICE 1 : Écrire sur votre copie la liste des nombres premiers inférieurs à 50. *(3 points)*

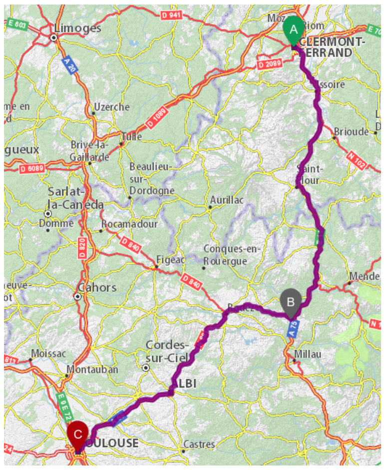
EXERCICE 2 : *(3 points)*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,780}{6\,840}$

EXERCICE 3 : *(5 points)*

Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



1. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

3. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

EXERCICE 4 : *(5 points)*

Un pâtissier a reçu ce matin 840 fraises maralines et 630 framboises Glen Coe. Il souhaite préparer des tartelettes aux fraises et aux framboises toutes identiques, c'est-à-dire ayant chacune la même quantité de fraises et de framboises.

1. Peut-il faire 50 tartelettes ? Peut-il faire 30 tartelettes ?

2. Déterminer le nombre maximal de tartelettes qu'il va pouvoir préparer et indiquer combien de framboises et de fraises il devra utiliser pour chacune d'entre elle.

Toute trace de recherche même non aboutie sera valorisée !

EXERCICE 5 : *(4 points)*

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5x+3 &= 3x+5 \\ 6x-4 &= 2x+7 \\ 4x-11 &= 10-3x \\ 3-7x &= 9-4x \end{aligned}$$

Évaluation — Correction

Exercice 1 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47

Exercice 2 :
1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

$$\begin{array}{r|l}
3780 & 2 \\
1890 & 2 \\
945 & 3 \\
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
6840 & 2 \\
3420 & 2 \\
1710 & 2 \\
855 & 3 \\
285 & 3 \\
95 & 5 \\
19 & 19 \\
1 &
\end{array}$$

Ainsi $3780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ et $6840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 19$

2. $\dfrac{3780}{6840} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 19} = \dfrac{3 \times 7}{2 \times 19} = \dfrac{21}{38}$

Exercice 3 :
1. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$	x
Distance	$130\ km$	$200\ km$

On a $x = \dfrac{3600\ s \times 200\ km}{130\ km} \approx 5538\ s$
Comme $5538 = 60 \times 92 + 18$ et que $92 = 60 \times 1 + 32$, on a $\boxed{5538\ s = 92\ min\ 18\ s = 1\ h\ 32\ min\ 18\ s}$

2. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\ 30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

3. Le temps et la distance sont proportionnels.
$150\ min = 9000\ s$

Temps	$14538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3600\ s}{14538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice 4 :
1. $840 = 16 \times 50 + 40$ donc il ne peut pas faire 50 tartes.
$840 = 30 \times 28$ et $630 = 30 \times 21$: il peut faire 30 tartes.

2. Décomposons 840 et 630 en facteurs premiers.
$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
On peut utiliser ces décompositions pour établir la liste des diviseurs des nombres :
840 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 28 ; 30 ; 35 ; 42 ; 56 ; 70 ; 84 ; 105 ; 120 ; 140 ; 168 ; $\boxed{210}$; 280 ; 420 ; 840
630 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 15 ; 21 ; 30 ; 42 ; 63 ; 70 ; 90 ; 105 ; 126 ; $\boxed{210}$; 315 ; 630

Le plus grand diviseur commun est donc $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
Il peut faire 210 tartelettes et comme $840 = 4 \times 210$ et $630 = 210 \times 3$ il y aura 4 fraises et 3 framboises par tartelette.

Exercice 5 :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
5x+3 &= 3x+5 \\
5x+3-3 &= 3x+5-3 \\
5x &= 3x+2 \\
5x-3x &= 3x+2-3x \\
2x &= 2 \\
x &= \frac{2}{2} \\
x &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6x-4 &= 2x+7 \\
6x-4+4 &= 2x+7+4 \\
6x &= 2x+11 \\
6x-2x &= 2x+11-2x \\
4x &= 11 \\
x &= \frac{11}{4} \\
x &= 2{,}75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x-11 &= 10-3x \\
4x-11+11 &= 10-3x+11 \\
4x+3x &= 21-3x+3x \\
7x &= 21 \\
x &= \frac{21}{3} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3-7x &= 9-4x \\
3-7x-3 &= 9-4x-3 \\
-7x &= 6-4x \\
-7x+4x &= 6-4x+4x \\
-3x &= 6 \\
x &= \frac{6}{-3} \\
x &= -2
\end{aligned}$$

Évaluation

Troisième

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Le SCMaglev est un train japonais. Il a parcouru en 2015 les 240 km séparant Tokyo de Nagoya en 42 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2

En 2004, le colombien Juan Pablo Montoya, pilote de Formule 1, a parcouru les $5,7$ km du circuit de Monza en Italie à la vitesse moyenne de 262 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance ? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3

Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Le lièvre commun d'Europe peut se déplacer à 18 m/s.
Qui est le plus rapide des deux ?

Évaluation

Troisième

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Le TransRapid est un train chinois. Il a parcouru en 2004 370 km en 38 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2

En 2005, le sud africain Alan Van Der Merwe, pilote de Formule 1, a parcouru $3,2$ km à la vitesse moyenne de 397 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance ? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3

Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Un rhinocéros peut se déplacer à la vitesse de 15 m/s.
Qui est le plus rapide des deux ?

Évaluation

Troisième

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Le TGV est un train français. Il a parcouru en 2015 la distance de 325 km en 34 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2

En 2008, le colombien Juan Pablo Montoya a parcouru les $5,7$ km du circuit de Monza en Italie à la vitesse moyenne de 256 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance ? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3

Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Le chat commun peut se déplacer à 13 m/s.
Qui est le plus rapide des deux ?

☞ Évaluation — Correction ☜

Première version

Exercice 1

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$42\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$240\ km$	$\dfrac{240\ km \times 60\ min}{42\ min} \approx 343\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{343\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\dfrac{5,7\ km \times 3\,600\ s}{262\ km} \approx 78\ s$
Distance	$262\ km$	$5,7\ km$

Il a mis $\boxed{78\ s = 1\ min\ 18\ s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37,58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\dfrac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le lièvre !

$18\ m \times 3\,600 = 64\,800\ m = 64,8\ km$
Le lièvre se déplace à $64,8\ km/h$.
Le lièvre est plus rapide qu'Usain Bolt !

Deuxième version

Exercice 1

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$38\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$370\ km$	$\dfrac{370\ km \times 60\ min}{38\ min} \approx 584\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{584\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\dfrac{3,2\ km \times 3\,600\ s}{397\ km} \approx 29\ s$
Distance	$397\ km$	$3,2\ km$

Il a mis $\boxed{29 s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.

$37,58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\dfrac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le rhinocéros !

$15\ m \times 3\,600 = 54\,000\ m = 54\ km$
Le rhinocéros se déplace à $54\ km/h$.
Le rhinocéros est plus rapide qu'Usain Bolt !

Troisième version

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$34\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$325\ km$	$\dfrac{325\ km \times 60\ min}{34\ min} \approx 574\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{574\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\dfrac{5,7\ km \times 3\,600\ s}{256\ km} \approx 80\ s$
Distance	$256\ km$	$5,7\ km$

Il a mis $\boxed{80\ s = 1\ min\ 20\ s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37,58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\dfrac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le chat !

$13\ m \times 3\,600 = 46\,800\ m = 46,8\ km$
Le chat se déplace à $46,8\ km/h$.
Le chat est plus rapide qu'Usain Bolt !

Arithmétique

La division euclidienne

Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$,
Alors il existe un unique couple de nombres entiers naturels q et r tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

a est le **dividende** , b le **diviseur** , q le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** .

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,1 & 1\,5 \\ \cline{2-2} 5\,2 & 1\,3\,4 \\ 7\,1 & \\ 1\,1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,2 & 5\,6 \\ \cline{2-2} 3\,4\,2 & 3\,6 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,1 & 4\,3 \\ \cline{2-2} 3\,0\,1 & 4\,7 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,2 & 6 \\ \cline{2-2} 2\,2 & 3\,3\,7 \\ 4\,2 & \\ 0 & \end{array}$$

$2021 = 15 \times 134 + 11$ $\quad 2022 = 56 \times 36 + 6$ $\quad 2021 = 43 \times 47$ $\quad 2022 = 6 \times 337$

Remarques : un nombre entier est toujours divisible par 1 et par lui-même.
2 est le seul nombre premier pair. Tous les nombres impairs ne sont pas premiers, $9 = 3 \times 3$.

Vocabulaire

Si le reste de la **division euclidienne** est nul, comme quand on divise 2021 par 43, on dit que 2021 est un **multiple** de 43 ou que 2021 est **divisible** par 43 ou encore que 43 est un **diviseur** de 2021.

Exemples :

Un **nombre entier pair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut zéro.
Ainsi tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2 \times n$ où n est un entier naturel.

Un **nombre entier impair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut un.
Ainsi tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2 \times n + 1$ où n est un entier naturel.

Critères de divisibilité

— Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
— Un entier est divisible par **3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
— Un entier est divisible par **4** si le nombre formé par le chiffre de ses dizaines et celui de ses unités est un multiple de 4.
— Un entier est divisible par **5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
— Un entier est divisible par **9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
— Un entier est divisible par **10** si son chiffre des unités est 0.

Nombres premiers

Un nombre entier est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs.
Un nombre entier est **premier** s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même !

Exemple : voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 91 ; 97

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples : $2021 = 43 \times 47$; $2022 = 2 \times 3 \times 337$; $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Fraction irréductible

Une **fraction est irréductible** si elle n'est pas simplifiable. Cela signifie que 1 est le seul diviseur commun à son numérateur et son dénominateur.

Applications :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ $\qquad 540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

Ainsi $2 \times 2 = 4$ est un diviseur de 360; $3 \times 3 \times 5 = 45$ est un diviseur de 540 ...

$\dfrac{360}{540} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5} = \dfrac{2}{3}$. On a simplifié par $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$.

180 est le plus grand diviseur commun à 360 et 540. On a $360 = 2 \times 180$ et $540 = 3 \times 180$.

Si nous avons à notre disposition 360 fleurs rouges et 540 fleurs jaunes, nous pouvons au maximum réaliser 180 bouquets tous identiques composés chacun de 2 fleurs rouges et 3 fleurs jaunes.

Remarques et intentions pédagogiques

[1] Le jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école Juniper-Green. Il a été repris par Ian Stewart qui a décrit les règles dans Pour la science de juillet 1997. Voir aussi le bulletin vert de l'APMEP n° 427. La plus longue suite que j'ai obtenue pour $n = 100$ contient 35 termes, la voici :

20 – 40 – 80 – 16 – 32 – 64 – 1 – 2 – 6 – 3 – 9 – 18 – 36 – 72 – 24 – 48 – 96 – 12 – 60 – 30 – 90 – 15 – 45 – 5 – 25 – 50 – 100 – 10 – 70 – 7 – 14 – 42 – 84 – 21 – 63

[2] En effet pour tout nombre entier positif a on a $a = 0 \times k + a$ où k est un entier positif $0 \leqslant k < a$.

Or $a \geqslant 0$ et en tant que reste de cette division il doit aussi vérifier $a < 0$.

Ces deux conditions sont incompatibles !

[3] Le plus grand nombre premier connu au 7 décembre 2018 est $2^{82\,589\,933} - 1$: il comporte 24 millions de chiffres en écriture décimale.

[4] 1 est égal au produit vide : c'est le résultat du produit d'aucun nombre. On peut ainsi étendre le théorème fondamental de l'arithmétique au nombre 1.

Chapitre II

Les triangles semblables

Sommaire

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ? . . . 56
C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ? . . . 56
I Les cas d'égalité des triangles . . . 57
II Les triangles semblables . . . 58
III Exemples importants . . . 59
Fiche d'exercices : Trigonométrie . . . 73
Fiche de synthèse : Trigonométrie . . . 77

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ?

« Si vous ne pouvez pas expliquer quelque chose à un étudiant de première année, c'est que vous n'avez pas vraiment compris. » — **Richard Feynman**

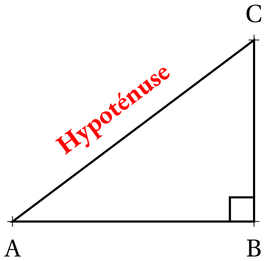
C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ?

I — Les cas d'égalité des triangles

Théorème 2.1 : Hypoténuse d'un triangle rectangle *(Admis)*

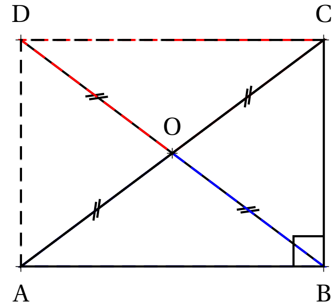
Si un triangle est rectangle **alors** son côté le plus long est opposé à l'angle droit.

Le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle s'appelle l'**hypoténuse** .



Démonstration :

Il suffit de construire le rectangle qui correspond au triangle rectangle ABC, par exemple en considérant la symétrie centrale de centre O où O est le milieu du segment [AC].
On sait que dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur.



Dans le triangle AOB, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $AB < AO + OB$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $AO + OB = AO + OC = AC$
d'où $AB < AC$

Dans le triangle BOC, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $BC < BO + OC$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $BO + OC = AO + OC = AC$
d'où $AC < AC$

Ainsi les deux côtés AB et BC ont des mesures inférieures au côté AC.

Ce résultat est bien lié à l'angle droit. C'est une conséquence des proprités des diagonales du rectangle.

CQFD

Remarque :

Le mot **hypoténuse** est féminin. Il vient du latin *hypotenusa*, lui-même transcrit du grec ancien *hupoteinousa*. Le préfixe *hupo* signifie « sous » et *teino* « tendre ». Hypoténuse signifie donc littéralement « celle qui sous-tend ». Platon, avant Euclide, a utilisé dans le Timée ce terme pour désigner le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.

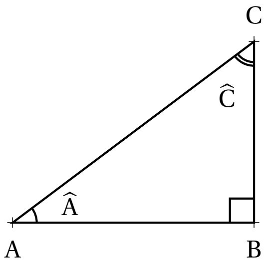
Les deux côtés **adjacent** à l'angle droit sont parfois appelé **cathètes** . Ce terme désigne plus généralement une perpendiculaire et vient du grec ancien *káthetos* qui signifie « mené en bas ».

L'adjectif **adjacent** vient du latin *adjacēre* et signifie « être situé auprès ». Il signifie, ce qui est immédiatement à côté d'un autre. Un côté est adjacent à un angle s'il « touche » l'angle, si c'est un des côtés de l'angle.

Propriété 2.1 : Les angles dans un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en B alors :

— $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles aigus ;
— $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont **complémentaires**
Cela signifie que la somme de leurs mesures est égale à 90°.



Démonstration :

On sait que dans un triangle, la somme des trois angles est égale à 180°.
Comme l'angle droit mesure 90°, il reste 90° pour les deux autres angles.
Par conséquent, les deux autres angles ont une mesure inférieure à 90° et par définition, ils sont **complémentaires** .

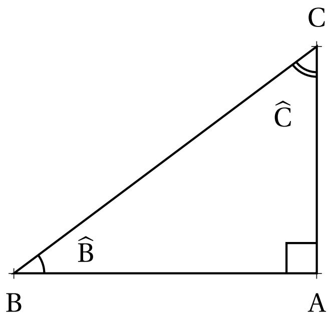
CQFD

Remarque :
On dit que deux angles sont **complémentaires** si leur somme est égale à un angle droit, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

On dit que deux angles sont **supplémentaires** si leur somme est égale à un angle plat, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Définition 2.1 : Vocabulaire dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.



— [BC] est l'hypoténuse ;
— [AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit ;
— [AC] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$;
— [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.

Remarque :
Dans un triangle rectangle,

— Le **côté adjacent** à un angle aigu est le **côté opposé** de l'angle **complémentaire** .
— Le **côté opposé** à un angle aigu est le **côté adjacent** de l'angle **complémentaire** .
— Un **côté adjacent** à un angle est un côté dont l'une des extrémités est le sommet de l'angle.
— Un **côté opposé** à un angle est un côté dont aucune des extrémités est le sommet de l'angle.

II — Les triangles semblables

Propriété 2.2 : Triangles rectangles semblables *(Admise)*

Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils sont semblables.
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils ont des côtés proportionnels.

Démonstration :

Considérons deux triangles rectangles ABC et A′B′C′ rectangle respectivement en A et A′ et tel que $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Comme la somme des angles dans un triangle est égal à 180°, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
Ainsi les trois angles de ces triangles sont égaux. D'après la propriété 3.2, les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables.
Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnels.

CQFD

Remarque :
Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles respectivement en A et A' semblables.
Il existe donc un nombre positif non nul k tel que $A'B' = k \times AB$, $A'C' = k \times AC$ et $B'C' = k \times BC$.

Le quotient $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{k \times AB}{k \times BC} = \dfrac{AB}{BC}$

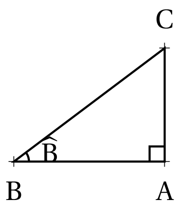
Le quotient $\dfrac{A'C'}{B'C'} = \dfrac{k \times AC}{k \times BC} = \dfrac{AC}{BC}$

Le quotient $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{k \times AC}{k \times AB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ces trois quotients ne dépendent donc pas des mesures des triangles rectangles ABC et $A'B'C'$. Ils ne dépendent donc que d'un des angles aigus de ces triangles, par exemple $\widehat{B}$.
Cela justifie la définition suivante :

Définition 2.2 : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en A.



On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$ de la manière suivante :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}$$

Moyen mnémotechnique :
Ces trois expressions doivent être connues par coeur !
Voici un moyen pour les mémoriser, il suffit de retenir le mot suivant :

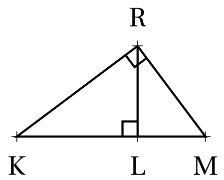
COSINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ TANGENTE ADJACENT
C A H S O H T O A
ADJACENT SINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ

Remarques :
Pour une mesure d'angle aigu donnée, par exemple 75°, $\cos(75°)$, $\sin(75°)$ et $\tan(75°)$ sont des nombres. Ces nombres sont connus, la plupart ne sont pas décimaux mais la calculatrice est capable d'en donner une valeur approchée.
Par exemple $\cos(75°) \approx 0{,}258\,819\,045\,1$ à 10^{-10} près.
Dans les exercices, les cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu doivent être considérés comme des nombres au même titre que π, $\sqrt{2}$, 0,5 ou 2.

III — Exemples importants

Triangles rectangles ayant un angle aigu égaux.
Triangles homothétiques : Thalès dans le triangle

Exercice n° 2.1 : Vocabulaire

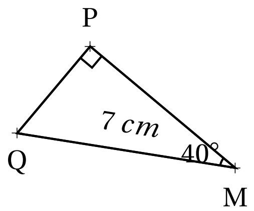


1. Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots :
adjacent, opposé ou hypoténuse
Dans le triangle KRM rectangle en R :

— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$
— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$
— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$
— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$
— [MK] est ....

2. Recommencer la question **1.** avec le triangle RLK puis RLM en faisant pour chacun 5 phrases du même type.
3. Citer tous les couples d'angles complémentaires de cette figure. En déduire tous les angles égaux de cette figure ?
4. Que peut-on dire des triangles KRM, KRL et RLM ?

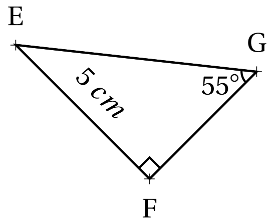
Exercice n° 2.2 : Calcul de deux côtés — Épisode 1



Le triangle QPM est rectangle en P.
On sait que $\widehat{PMQ} = 40°$ et que $QM = 7\ cm$

Calculer les valeurs exactes de PQ et PM.
Donner une valeur approchée au mm près.

Exercice n° 2.3 : Calcul de deux côtés — Épisode 2



Le triangle EFG est rectangle en F.
On sait que $\widehat{FGE} = 40°$ et que $FE = 5\ cm$

Calculer les valeurs exactes de FG et GE.
Donner une valeur approchée au mm près.

Exercice n° 2.4 : Dans quel triangle rectangle ?

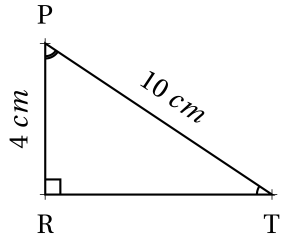
Exercice n° 2.5 : L'angle à 30°

1. Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que :

— $AC = 10\ cm$
— $\widehat{BAC} = 30°$

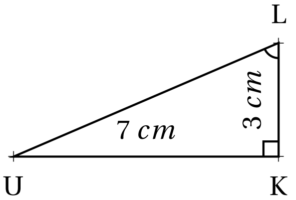
2. Calculer en justifiant votre réponse une valeur approchée au millimètre près des mesures AC et AB
3. Que remarquez-vous pour le côté [BC] ?
4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?
5. En utilisant votre calculatrice calculer $\cos(30°)$, $\sin(30°)$, $\cos(60°)$ et $\sin(60°)$.
Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer cela ?

Exercice n° 2.6 : Calcul d'un angle — Épisode 1



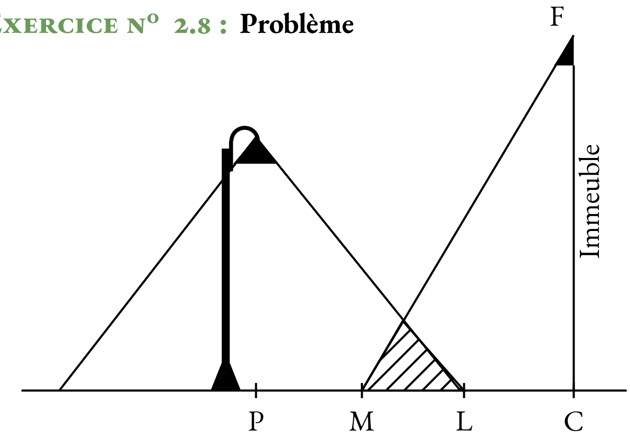
Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{RPT}$ et $\widehat{RTP}$

Exercice n° 2.7 : Calcul d'un angle — Épisode 2

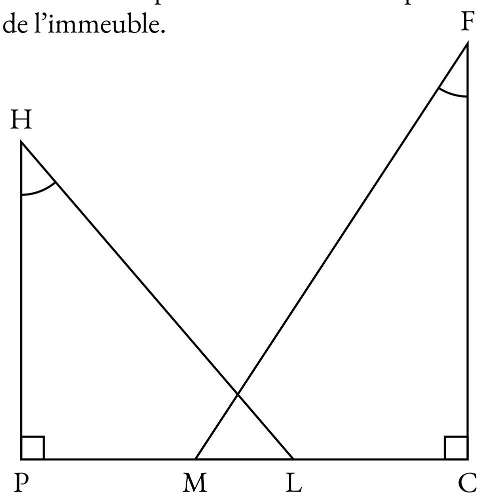


Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{KUL}$ et $\widehat{KLU}$

Exercice n° 2.8 : Problème



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

PC = $5,5\ m$, CF = $5\ m$ et HP = $4\ m$

$\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3,4\ m$.

2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.

3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 :

7 points

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

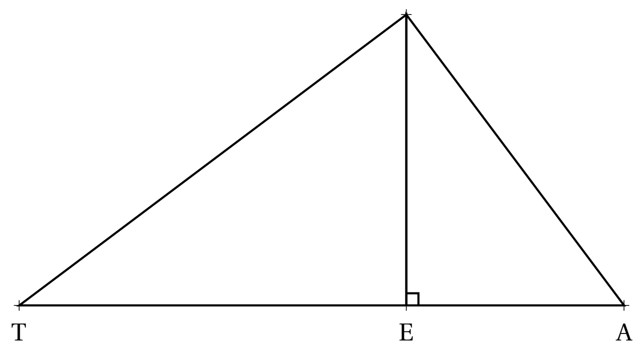
2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

Exercice n° 2 :

6 points



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— $E \in [TA]$;

— $(LE) \perp (EA)$;

— $LT = 16\ cm$, $LA = 12\ cm$ et $TA = 20\ cm$.

1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

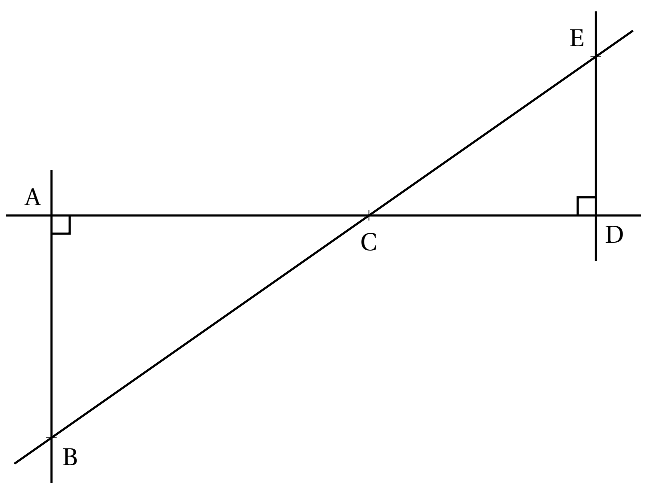
2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

Exercice n° 3 :

7 points



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinées en vraie grandeur, on sait que :

— Les points A, C et D sont alignés ;

— les points B, C et E sont alignés ;

— $(AB) \perp (AD)$ et $(ED) \perp (AD)$;

— $CD = 5\ m$, $CA = 7\ m$ et $\widehat{ECD} = 35°$.

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

4. Déterminer la mesure de $\widehat{ACB}$.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : CORRECTION

Calcul littéral

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = \left(6x^2 + 21x - 10x - 35\right) - \left(3x - 15x^2 - 5 + 25x\right)$

Il vaut mieux protéger les calculs par des parenthèses pour éviter les erreurs causées par le signe moins.

$f(x) = 6x^2 + 21x - 10x - 35 - 3x + 15x^2 + 5 - 25x$

$\boxed{f(x) = 21x^2 - 17x - 30}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

$\boxed{f(0) = -30}$

$f(\frac{1}{3}) = 21\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 17 \times \frac{1}{3} - 30 = 21 \times \frac{1}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{21}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{7}{3} - \frac{17}{3} - \frac{90}{3} = \boxed{-\frac{100}{3}}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$
$f(x) = (3x-5)\,((2x+7) - (1-5x))$
$f(x) = (3x-5)(2x+7-1+5x)$

$\boxed{f(x) = (3x-5)(7x+6)}$

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

$$(3x-5)(7x+6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 0 \\ 3x-5+5 &= 0+5 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x+6 &= 0 \\ 7x+6-6 &= 0-6 \\ 7x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{5}{3} \text{ et } -\frac{6}{7}}$

Exercice n° 2 : CORRECTION

Trigonométrie

1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

Comparons $LT^2 + LA^2$ et TA^2 :

$LT^2 + LA^2$	TA^2
$16^2 + 12^2$	20^2
$256 + 144$	
400	400

Comme

$$LT^2 + LA^2 = TA^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle LTA est rectangle en L}}$.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

Dans le triangle LTA rectangle en L, on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

$\cos\widehat{LTA} = \dfrac{16\ cm}{20\ cm} = 0,8$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\sin\widehat{LTA} = \dfrac{12\ cm}{20\ cm} = 0,6$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\tan\widehat{LTA} = \dfrac{12\ cm}{16\ cm} = 0,75$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{LTA} \approx 36,87°}$

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

Dans le triangle LTE rectangle en E on a :

$\cos 36,87° = \dfrac{TE}{16\ cm}$ donc $\boxed{TE = 16\ cm \times \cos 36,87° \approx 12,8\ cm \text{ au millimètre près.}}$

$\sin 36,87° = \dfrac{LE}{16\ cm}$ donc $\boxed{LE = 16\ cm \times \sin 36,87° \approx 9,6\ cm \text{ au millimètre près.}}$

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

On sait que la somme des angles dans un triangle est égale à 180°.

Dans le triangle TLE :

$\widehat{TLE} + \widehat{LTE} + \widehat{LET} = 180°$ donc $\widehat{TLE} + 36,87° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{TLE} = 180° - 90° - 36,87° = 53,13°}$

Dans le triangle TLA :

$\widehat{TLA} + \widehat{LTA} + \widehat{LAT} = 180°$ donc $\widehat{LAT} + 36,87° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{LAT} = 180° - 90° - 36,87° = 53,13°}$

Dans le triangle LEA :

$\widehat{LEA} + \widehat{LAE} + \widehat{ALE} = 180°$ donc $\widehat{ELA} + 53,13° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{ELA} = 180° - 90° - 53,13° = 36,87°}$

Exercice n° 3 : Correction

Thalès — Trigonométrie

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

Dans le triangle CDE rectangle en D on a :

$\cos 35° = \dfrac{5\ m}{CE}$ donc $\boxed{CE = \dfrac{5\ m}{\cos 35°} \approx 6,11\ m \text{ au centième près.}}$

$\tan 35° = \dfrac{DE}{5\ m}$ donc $\boxed{DE = 5\ m \times \tan 35° \approx 3{,}5\ m \text{ au centième près.}}$

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

Les droites (ED) et (AB) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles.

$\boxed{\text{Les droites (ED) et (AB) sont parallèles.}}$

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C. On sait que (AB)//(ED).
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{5\ m}{7\ m} = \frac{6{,}11\ m}{CB} = \frac{3{,}5\ m}{AB}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$CB = \dfrac{7\ m \times 6{,}11\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{CB \approx 8{,}55\ m}$

$AB = \dfrac{3{,}5\ m \times 7\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{AB \approx 4{,}9\ m}$

4. Déterminer la mesure de $\widehat{ACB}$.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ECD}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux.

$\boxed{\widehat{ACB} = 35°}$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) + (7x-1)(6x+3)$

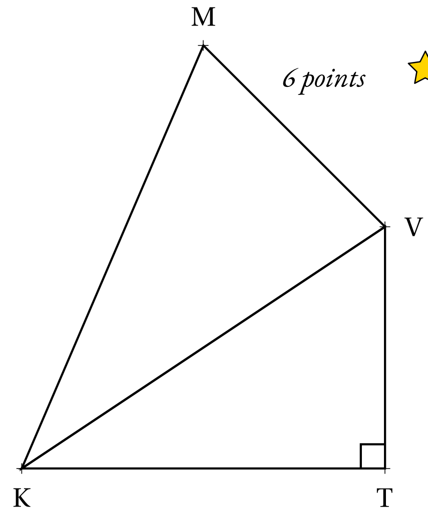
1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

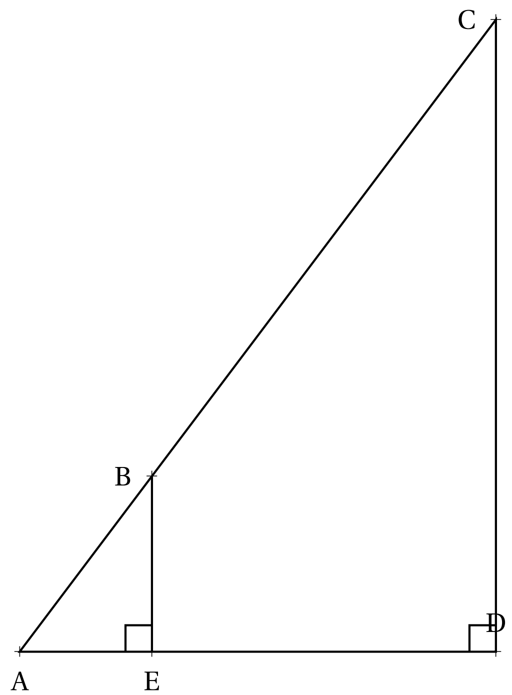
- Le triangle KTV est rectangle en T ;
- $\widehat{VKT} = 39°$;
- KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m

1. Calculer VT et KT. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.

Exercice n° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- E ∈ [AD] et B ∈ [AC] ;
- AEB est rectangle en E ;
- ADC est rectangle en D ;
- $\widehat{BAE} = 53°$;
- AE = 5 cm et ED = 13 cm.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral

Exercice n° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$ et $g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(-3x-1) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points*

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— Le triangle KTV est rectangle en T ;

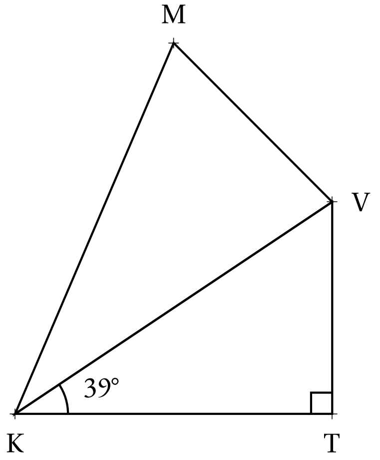
— $\widehat{VKT} = 39°$;

— KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m

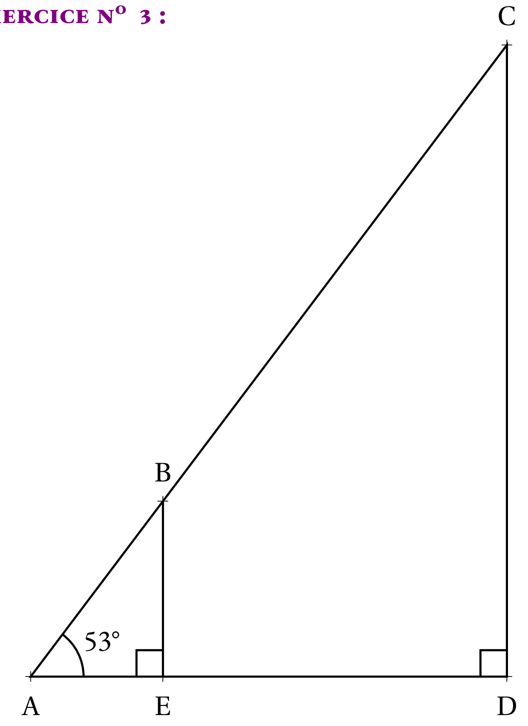
1. Calculer VT et KT.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.



Exercice n° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- $E \in [AD]$ et $B \in [AC]$;
- AEB est rectangle en E ;
- ADC est rectangle en D ;
- $\widehat{BAE} = 53°$;
- $AE = 5\,\text{cm}$ et $ED = 13\,\text{cm}$.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral — CORRECTION

Exercice n° 1 : Calcul littéral CORRECTION

MOYEN

Développer et factoriser

1. $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (21x^2 + 14x - 3x - 2) - (42x^2 + 21x - 6x - 3)$

$f(x) = 21x^2 + 14x - 3x - 2 - 42x^2 - 21x + 6x + 3$

$\boxed{f(x) = -21x^2 - 4x + 1}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = (5x-1)(5x-1) - (4x+3)(4x+3)$

$g(x) = (25x^2 - 5x - 5x + 1) - (16x^2 + 12x + 12x + 9)$

$g(x) = 25x^2 - 5x - 5x + 1 - 16x^2 - 12x - 12x - 9$

$\boxed{g(x) = 9x^2 - 34x - 8}$

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

$f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (7x-1)[(3x+2) - (6x+3)]$

$f(x) = (7x-1)(3x+2-6x-3)$

$\boxed{f(x) = (7x-1)(-3x-1)}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = [(5x-1)+(4x+3)][(5x-1)-(4x+3)]$

$g(x) = (5x-1+4x+3)(5x-1-4x-3)$

$\boxed{g(x) = (9x+2)(x-4)}$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 0 \\ 7x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 7x &= 1 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 5 &= 0 \\ 9x + 5 - 5 &= 0 - 5 \\ 9x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{7} \text{ et } -\frac{5}{9}}$

Exercice n° 2 : Trigonométrie CORRECTION

MOYEN

Calculer un angle ou un côté avec la trigonométrie

1. Dans le triangle VTK, rectangle en T, l'hypoténuse est le côté[VK].

Calcul de VT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté opposé à l'angle à 39°.

$\sin 39° = \dfrac{VT}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{VT = 76\,\text{m} \times \sin 39° \approx 47{,}83\,\text{m} \text{ au centimètre près.}}$

Calcul de KT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté adjacent à l'angle à 39°.

$\cos 39° = \dfrac{KT}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{KT = 76\,\text{m} \times \cos 39° \approx 59{,}06\,\text{m} \text{ au centimètre près.}}$

On pouvait aussi, même si je le déconseille, utiliser le théorème de Pythagore :
Dans le triangle KTV rectangle en T,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TK^2 + TV^2 = KV^2$$

$$\begin{aligned} TK^2 + 47,83^2 &= 76^2 \\ TK^2 + 2287,7089 &= 5776 \\ TK^2 &= 5776 - 2287,7089 \\ TK^2 &= 3488,2911 \\ TK &= \sqrt{3488,2911} \\ TK &\approx 59,06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 59,06^2 + TV^2 &= 76^2 \\ 3488,0836 + TV^2 &= 5776 \\ TV^2 &= 5776 - 3488,0836 \\ TV^2 &= 2287,9164 \\ TV &= \sqrt{2287,9164} \\ TV &\approx 47,83 \end{aligned}$$

2. Comparons $VM^2 + VK^2$ et MK^2 :

$VM^2 + VK^2$	MK^2
$57^2 + 76^2$	95^2
$3249 + 5776$	
9025	9025

Comme $VM^2 + VK^2 = MK^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle VKM est rectangle en V}}$.

3. Dans le triangle VKM rectangle en V, on peut calculer au choix :

$\cos\widehat{MKV} = \dfrac{76\,\text{m}}{95\,\text{m}}$
$\cos\widehat{MKV} = 0,8$

$\sin\widehat{MKV} = \dfrac{57\,\text{m}}{95\,\text{m}}$
$\sin\widehat{MKV} = 0,6$

$\tan\widehat{MKV} = \dfrac{57\,\text{m}}{76\,\text{m}}$
$\tan\widehat{MKV} = 0,75$

Dans tous les cas, à la calculatrice, on arrive à $\boxed{\widehat{MKV} \approx 36,9°}$.

Exercice n° 3 : Trigonométrie, Pythagore et Thalès CORRECTION

MOYEN

Utiliser les grands résultats de la géométrie

1. Dans le triangle AEB, rectangle en E, l'hypoténuse est le côté [AB].

Calcul de EB :

On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{BE}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{BE = 5\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 6{,}6\,\text{cm au millimètre près.}}$

Calcul de AB :

On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{5\,\text{cm}}{AB}$ donc $\boxed{AB = \dfrac{5\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 8{,}3\,\text{cm au millimètre près.}}$

On pouvait aussi utiliser le théorème de Pythagore pour trouver le second côté... mais je le déconseille !

2. Les droites (EB) et (DC) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

$\boxed{\text{Les droites (EB) et (DC) sont parallèles.}}$

3. On pouvait utiliser deux raisonnements :
Avec la trigonométrie :
Dans le triangle ADC, rectangle en D, l'hypoténuse est le côté [AC].

Calcul de CD :

On connaît la mesure du côté adjacent AD = AE + ED = 5 cm + 13 cm = 18 cm et on veut le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{CD}{18\,\text{cm}}$ donc $\boxed{CD = 18\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 23{,}9\,\text{cm au millimètre près.}}$

Calcul de AC :

On connaît la mesure du côté adjacent AD et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{18\,\text{cm}}{AD}$ donc $\boxed{AD = \dfrac{18\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 29{,}9\,\text{cm au millimètre près.}}$

Avec le théorème de Thalès :
Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A, les droites (BE) et (CD) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}$$

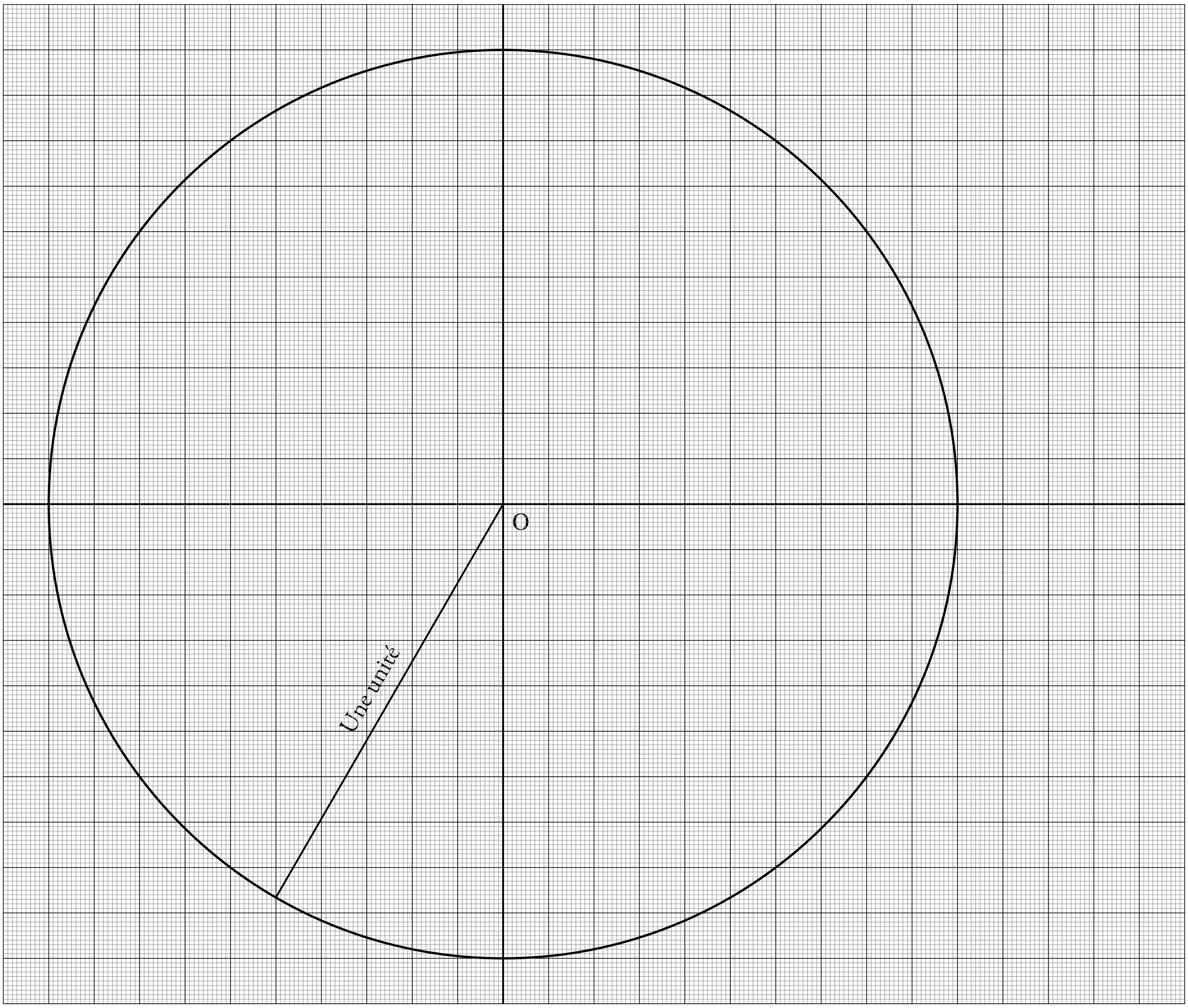
$$\frac{5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} = \frac{8{,}3\,\text{cm}}{AC} = \frac{6{,}6\,\text{cm}}{DC}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AC = \dfrac{8{,}3\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $AC = \dfrac{149{,}4\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $AC \approx 29{,}9\,\text{cm}$

$DC = \dfrac{6{,}6\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $DC = \dfrac{118{,}8\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $DC \approx 23{,}8\,\text{cm}$

Le cercle trigonométrique



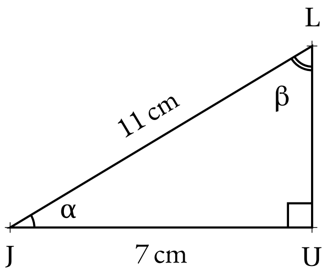
Exercices

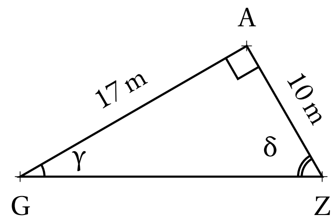
TRIGONOMÉTRIE

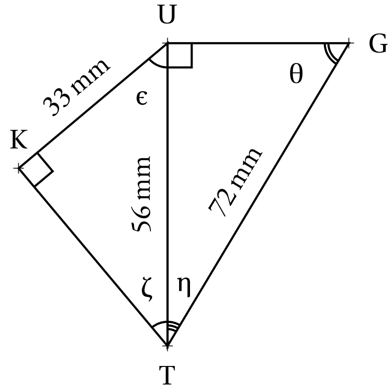
Troisième

EXERCICE N° 1 : Calculer la mesure d'un angle

Pour chacune des figures suivantes, déterminer, en justifiant votre réponse, une valeur approchée des angles marqués par une lettre grecque, au dixième de degré près. (α : alpha — β : beta — γ : gamma — δ : delta — ϵ : epsilon — ζ : zeta — η : eta — θ : theta)

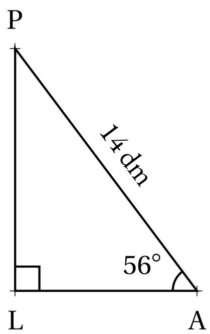


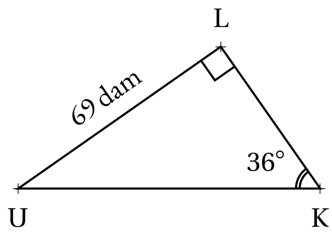


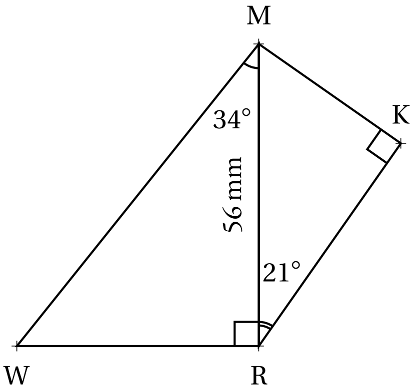


EXERCICE N° 2 : Calculer la mesure d'un côté

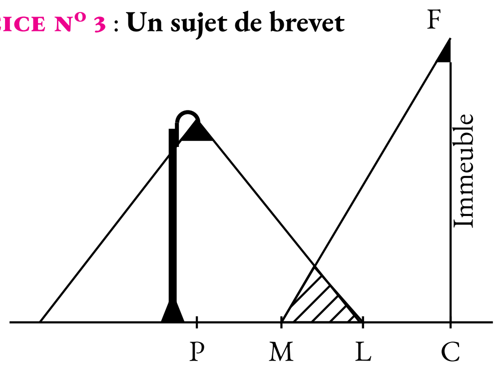
Pour chacune des figures suivantes, déterminer par le calcul, en justifiant votre réponse, la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième d'unité près, de chacune des mesures des côtés des triangles rectangles.



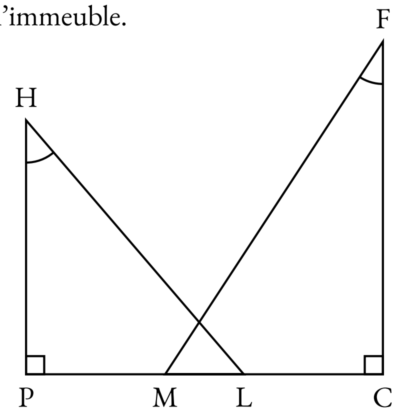




EXERCICE N° 3 : Un sujet de brevet



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

$PC = 5,5\ m$, $CF = 5\ m$, $HP = 4\ m$ et $\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3,4\ m$.
2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.
3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Exercices — Correction

Exercice n° 1 — Correction

Dans le triangle JLU **rectangle en** U.

On connaît le côté adjacent à l'angle α et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\alpha$
$\cos\alpha = \dfrac{7\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\alpha \approx 50,5°}$

On connaît le côté opposé à l'angle β et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\beta$
$\sin\beta = \dfrac{7\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\beta \approx 39,5°}$

Comme attendu, on constate que α et β sont complémentaires, c'est à dire que $50,5° + 39,5° = 90°$.

Dans le triangle GAZ **rectangle en** A.

On connaît le côté adjacent à l'angle γ et le côté opposé, on peut donc calculer $\tan\gamma$
$\tan\gamma = \dfrac{10\,\text{m}}{17\,\text{m}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\gamma \approx 30,5°}$

On connaît le côté opposé à l'angle δ et le côté opposé, on peut donc calculer $\tan\delta$
$\tan\delta = \dfrac{17\,\text{m}}{10\,\text{m}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\delta \approx 59,5°}$

Comme attendu, on constate que γ et δ sont complémentaires, c'est à dire que $30,5° + 59,5° = 90°$.

Dans le triangle KUT **rectangle en** K.

On connaît le côté adjacent à l'angle ϵ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\epsilon$
$\cos\epsilon = \dfrac{33\,\text{mm}}{56\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\epsilon \approx 53,9°}$

On connaît le côté opposé à l'angle ζ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\zeta$
$\sin\zeta = \dfrac{33\,\text{mm}}{56\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\zeta \approx 36,1°}$

Comme attendu, on constate que ϵ et ζ sont complémentaires, c'est à dire que $53,9° + 36,1° = 90°$.

Dans le triangle TUG **rectangle en** U.

On connaît le côté adjacent à l'angle η et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\eta$
$\cos\eta = \dfrac{56\,\text{mm}}{72\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\eta \approx 38,9°}$

On connaît le côté opposé à l'angle θ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\theta$
$\sin\theta = \dfrac{56\,\text{mm}}{72\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\theta \approx 51,1°}$

Comme attendu, on constate que η et θ sont complémentaires, c'est à dire que $38,9° + 51,1° = 90°$.

Dans le triangle PLA **rectangle en** L

Calculons LA

On connaît la mesure de l'hypoténuse PA.
On cherche la mesure de LA le côté adjacent à l'angle à 56°.

$$\cos 56° = \frac{\text{LA}}{14\,\text{dm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{LA} = 14\,\text{dm} \times \cos 56° \approx 7{,}8\,\text{dm}}$

Calculons PL

On connaît la mesure de l'hypoténuse PA.
On cherche la mesure de PL le côté opposé à l'angle à 56°.

$$\sin 56° = \frac{\text{PL}}{14\,\text{dm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{PL} = 14\,\text{dm} \times \sin 56° \approx 11{,}6\,\text{dm}}$

Dans le triangle ULK **rectangle en** L

Calculons LK

On connaît la mesure de LU le côté opposé à l'angle à 36°.
On cherche la mesure de LK le côté adjacent à l'angle à 36°.

$$\tan 36° = \frac{69\,\text{dam}}{\text{LK}}$$

Ainsi $\boxed{\text{LK} = \dfrac{69\,\text{dam}}{\tan 36°} \approx 95\,\text{dam}}$

Calculons UK

On connaît la mesure de LU le côté opposé à l'angle à 36°.
On cherche la mesure de UK, l'hypoténuse du triangle.

$$\sin 36° = \frac{69\,\text{dam}}{\text{UK}}$$

Ainsi $\boxed{\text{UK} = \dfrac{69\,\text{dam}}{\sin 36°} \approx 117{,}4\,\text{dam}}$

Dans le triangle WRM **rectangle en** R

Calculons WM

On connaît la mesure de MR le côté adjacent à l'angle à 34°.
On cherche la mesure de WM l'hypoténuse du triangle.

$$\cos 34° = \frac{56\,\text{mm}}{\text{WM}}$$

Ainsi $\boxed{\text{WM} = \dfrac{56\,\text{mm}}{\cos 34°} \approx 67{,}5\,\text{mm}}$

Calculons WR

On connaît la mesure de MR le côté adjacent à l'angle à 34°.
On cherche la mesure de WR le côté opposé à l'angle à 34°.

$$\tan 34° = \frac{\text{WR}}{56\,\text{mm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{WR} = 56\,\text{mm} \times \tan 34° \approx 37{,}8\,\text{mm}}$

Dans le triangle MKR **rectangle en** K

Calculons MK

On connaît la mesure de MR l'hypoténuse du triangle.
On cherche la mesure de MK le côté opposé à l'angle à 21°.

$$\sin 21° = \frac{\text{MK}}{56\,\text{mm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{MK} = 56\,\text{mm} \times \sin 21° \approx 20\,\text{mm}}$

Calculons RK

On connaît la mesure de MR l'hypoténuse du triangle.
On cherche la mesure de RK, le côté adjacent de l'angle à 21°.

$$\cos 21° = \frac{\text{RK}}{56\,\text{mm}}$$

Ainsi $\boxed{\text{RK} = 56\,\text{mm} \times \cos 21° \approx 52{,}3\,\text{mm}}$

Exercice n° 3 — Correction

1. Dans le triangle HPL rectangle en P.
On connaît la mesure HP du côté adjacent à l'angle $\widehat{PHL}$.
On cherche la mesure PL du côté opposé à l'angle $\widehat{PHL}$.

$\tan\widehat{PHL} = \dfrac{PL}{HP}$, $\tan 40° = \dfrac{PL}{4\,m}$ d'où $\boxed{PL = 4\,m \times \tan 40° \approx 3{,}4\,m}$

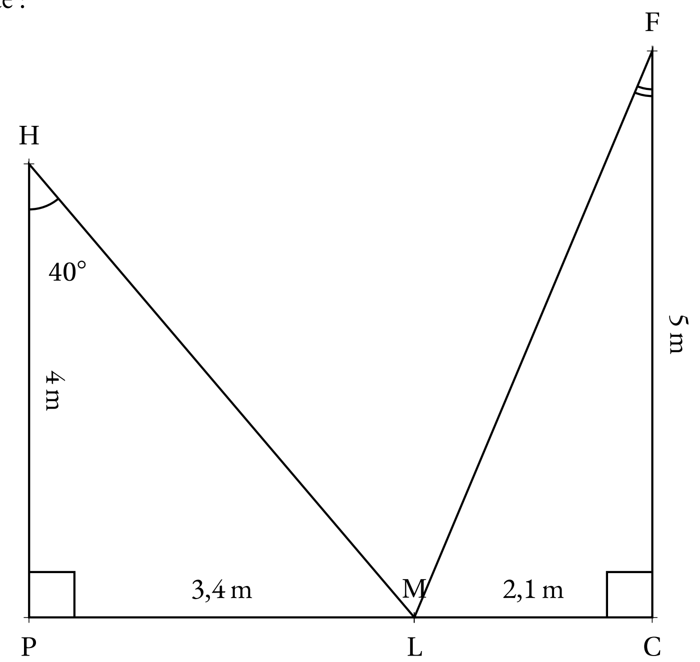
2. On sait que $PC = 5{,}5\,m$ et que $PL \approx 3{,}4\,m$.
On a donc $LC = PC - PL \approx 5{,}5\,m - 3{,}4\,m \approx 2{,}1\,m$.

Il reste à calculer MC.
Dans le triangle FMC rectangle en C.
On connaît la mesure FC du côté adjacent à l'angle $\widehat{MFC}$.
On cherche la mesure MC du côté opposé à l'angle $\widehat{MFC}$.

$\tan\widehat{MFC} = \dfrac{MC}{FC}$, $\tan 33° = \dfrac{MC}{5\,m}$ d'où $\boxed{MC = 5\,m \times \tan 33° \approx 3{,}2\,m}$

Finalement $\boxed{ML = MC - LC \approx 3{,}2\,m - 2{,}1\,m \approx 1{,}1\,m}$

3. On souhaite obtenir la figure suivante :



Dans le triangle FLC rectangle en C.
On connaît la mesure FC du côté adjacent à l'angle $\widehat{MFC}$.
On connaît la mesure LC du côté opposé à l'angle $\widehat{MFC}$.

$\tan\widehat{MFC} = \dfrac{LC}{FC} = \dfrac{2{,}1\,m}{5\,m}$.

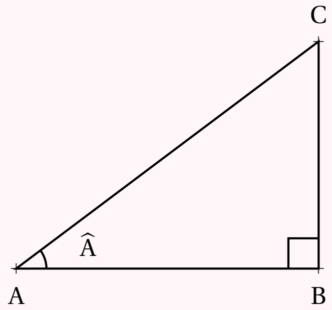
À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{MFC} \approx 23°}$.

Trigonométrie

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en B :

— le plus long côté du triangle, opposé à l'angle droit est l'hypoténuse;
— le côté de l'angle droit étant un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
— le côté de l'angle droit n'étant pas un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$.



— [AC] est l'hypoténuse du triangle;
— [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
— [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$;
— [BC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$;

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en B, il existe trois grandeurs qui ne dépendent que de l'angle $\widehat{A}$ que l'on nomme cosinus, sinus et tangente de l'angle $\widehat{A}$. La connaissance de l'une de ces grandeurs permet de retrouver la mesure de l'angle $\widehat{A}$.
On les définit ainsi :

$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à l'angleă}\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle}\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle}\widehat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle}\widehat{A}}$$

Moyen mnémotechnique :

L'acronyme suivant permet de se souvenir facilement de ces trois définitions :

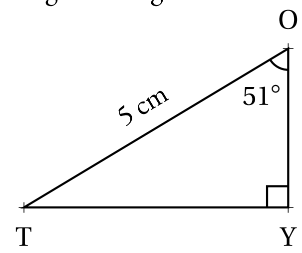
C A H S O H T O A

C pour cosinus, S pour sinus et T pour tangente.
A pour adjacent, O pour opposé et H pour hypoténuse.

Usages :

Pour calculer la longueur d'un côté connaissant un côté et un angle

TOY un triangle rectangle en T.



Calculons la longueur OY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 51°. On utilise donc le **cosinus**.

$\cos 51° = \dfrac{OY}{5\ cm}$ soit $\boxed{OY = 5\ cm \times \cos 51°}$

Finalement $OY \approx 3,15\ cm$

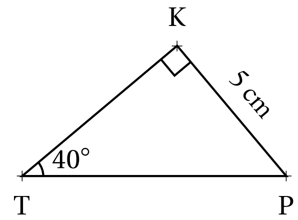
Calculons la longueur TY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté opposé à l'angle à 51°. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 51° = \dfrac{TY}{5\ cm}$ soit $\boxed{TY = 5\ cm \times \sin 51°}$

Finalement $TY \approx 3,89\ cm$

KPT un triangle rectangle en K.



Calculons la longueur TP :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle de l'hypoténuse. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 40° = \dfrac{5\ cm}{TP}$ soit $\boxed{TP = \dfrac{5\ cm}{\sin 40°}}$

Finalement $TP \approx 7,78\ cm$

Calculons la longueur TK :

On connaît la mesure du côté opposé, on veut celle du côté adjacent. On utilise donc la **tangente**.

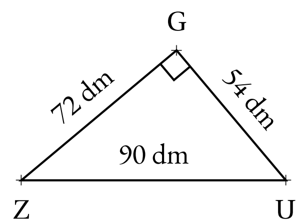
$\tan 40° = \dfrac{5\ cm}{TK}$ soit $\boxed{TK = \dfrac{5\ cm}{\tan 40°}}$

Finalement $TK \approx 5,96\ cm$

Pour résoudre une équation du type $5 = \dfrac{x}{7}$ ou $8 = \dfrac{7}{x}$, on écrit chaque membre comme une fraction, $\dfrac{5}{1} = \dfrac{x}{7}$ et $\dfrac{8}{1} = \dfrac{7}{x}$ puis on utilise la règle de trois !

Pour calculer la mesure d'un angle connaissant deux côtés

ZUG un triangle rectangle en G.



Calculons la mesure des angles $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$.

On peut calculer au choix soit le cosinus, le sinus ou la tangente de chacun de ces angles.

Ainsi $\cos\widehat{UZG} = \dfrac{72\ dm}{90\ dm} = 0,8$.

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{UZG} \approx 36,87°}$

Il faut saisir seconde cos 0,8

Comme $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$ sont complémentaires, $\widehat{GUZ} = 90° - 36,87° = 53,13°$

Chapitre III

Généralités sur les fonctions

Sommaire

Situation initiale : Un programme de calcul pour les nombres premiers ? **80**
Microbit : Programmé pour calculer **81**
I Définition, notation et vocabulaire : image et antécédent **86**
II Tableau des images et représentation graphique **87**
Exercices **90**
Pythagore — Fonctions — Vitesses — 1h 94
Évaluation : Calcul littéral — Programme de calcul — Vitesse — Fonctions **120**
Réactivation **123**
Équations du premier degré 123
Fiche de synthèse : Généralités sur les fonctions **135**
III Annexes **136**
1 Documents pratiques 137

SITUATION INITIALE : Un programme de calcul pour les nombres premiers ?

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre entier ;
— Le multiplier par lui-même ;
— Ajouter 41 ;
— Soustraire le nombre de départ.

1. Montrer qu'en choisissant 3 comme nombre de départ on obtient 47.

2. Calculer les nombres obtenus par ce programme de calcul en choisissant successivement : 1, 5 et 10 comme nombre de départ.

3. En utilisant la fonction Tableau de votre calculatrice compléter le tableau ci-dessous :

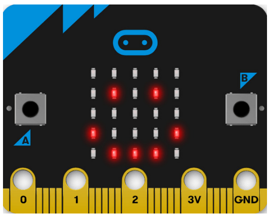
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$																

4. Utiliser la fonction Décomp de la calculatrice pour vérifier que $f(n)$ est premier pour $0 \leqslant n \leqslant 15$.

5. Quelle conjecture peut-on faire sur ces 16 nombres entiers ?

6. Calculer $f(39)$ et $f(40)$ et décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers en vous aidant de la touche Décomp de la calculatrice.

Leonhard Euler (1707–1783), mathématicien suisse, a découvert cette fonction en 1772. Elle donne 40 nombres premiers pour les valeurs de n entières comprises entre 0 et 39.
En 1752, Christian Goldbach démontra qu'il n'existait aucun polynôme à coefficient entier permettant d'obtenir des nombres premiers pour tous les nombres entiers. Adrien-Marie Legendre au début du XIX^e siècle montra ce résultat avec des coefficients fractionnaires. En 2000, Jones, Sato, Wada et Wiens découvrirent un polynôme de degré 25 à 26 variables dont les images des nombres entiers positifs sont exactement les nombres premiers.



micro:bit

Programmé pour calculer

Troisième

Un Microbit a été remis à chaque groupe de la classe. Le Microbit a été programmé pour fonctionner de la manière suivante :

- Il affiche au départ un numéro de niveau sous la forme « Prog 1 » ;
- il attend ensuite la saisie d'un nombre entier compris entre -9 et 9 ;
- le nombre zéro est d'abord affiché, en appuyant sur la touche A le nombre est incrémenté d'une unité. Quand le nombre 9 est atteint, le nombre suivant est -9 ;
- quand le nombre souhaité est affiché, il faut appuyer sur B pour le valider ;
- le Microbit affiche alors un nombre qui est le résultat obtenu en utilisant le nombre choisi dans **un programme secret** que j'ai programmé ;
- vous pouvez faire autant d'essais que vous le souhaitez ;
- pour passer au niveau suivant il faut secouer le Microbit ;
- 8 niveaux ont été programmés ;
- **Vous devez manipuler le Microbit avec soin et précaution.**

En utilisant le Microbit conformément aux consignes ci-dessous, déterminer les différents programmes proposés.
Vous les décrirez sous forme d'un programme de calculs en français puis sous la forme d'une expression littérale.

Programme n° 1

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 2

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 3

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 4

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 5

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 6

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 7

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Programme n° 8

Conjecture

- Choisir un nombre ;
-
-
-
- Afficher le résultat.

Pour chacun des huit programmes ci-dessus, écrire une expression algébrique qui modélise ce programme.
Vous pourrez utilisez la lettre x pour désigner le nombre de choisi au départ.

	Expression		**Expression**		**Expression**		**Expression**
P1		P2		P3		P4	
P5		P6		P7		P8	

Tableaux des valeurs obtenues

Veuillez compléter en groupe les tableaux de valeurs ci-dessous pour chacun des programmes que vous aurez testés.

Programme n° 1

Nombre choisi	Résultat

Programme n° 2

Nombre choisi	Résultat

Programme n° 3

Nombre choisi	Résultat

Programme n° 4

Nombre choisi	Résultat

Programme n° 5

Nombre choisi	Résultat

Programme n° 6

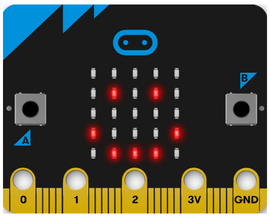
Nombre choisi	Résultat

Programme n° 7

Nombre choisi	Résultat

Programme n° 8

Nombre choisi	Résultat



micro:bit

Programmé pour calculer — Correction

☞ Intentions pédagogiques et éléments de correction : **Microbit — Programmé pour calculer**

L'idée de cette activité est d'illustrer la notion de fonction à l'aide d'un objet connecté programmable.
La présentation habituelle d'une fonction comme un moyen de formaliser la notion de programme de calcul est une approche très abstraite de cette notion. Il arrive souvent en classe de comparer une fonction à une touche programmable de la calculatrice qui ferait un calcul décidé à l'avance. Cela permet d'expliquer la notation f pour désigner une fonction, notation qui désigne un nouvel objet complexe.
L'usage d'un objet programmable comme le Microbit permet aux élèves de manipuler cette idée.
Le programme injecté dans le Microbit contient huit fonctions différentes de type linéaires, affines ou carrées. Le bouton A est prévu pour incrémenter de manière circulaire les nombres entiers de -9 à 9. Le bouton B valide un nombre et permet l'affichage de l'image par la fonction mystérieuse. Le capteur qui détecte les secousses permet le passage d'une fonction à une autre.
Chaque groupe de 3 ou 4 élèves dispose d'un Microbit programmé, d'une fiche tableaux de valeurs et d'une fiche individuelle de présentation.
L'objectif est de tester de nombreux nombres pour chaque fonction, de noter les images obtenues et d'en déduire une conjecture sur la fonction mystérieuse programmée. Le niveau de difficulté des fonctions est croissant.
Un fichier démonstration à utiliser en classe entière sur le site de Microbit permet de montrer les attentes pour cette activité.
L'idée est aussi de montrer plusieurs manières de définir une fonction : un programme de calcul, un algorithme, une expression littérale...

Programme n° 1

Conjecture
- Choisir un nombre;
- le multiplier par 3;
- Afficher le résultat.

Programme n° 2

Conjecture
- Choisir un nombre;
- le multiplier par -2;
- Afficher le résultat.

Programme n° 3

Conjecture
- Choisir un nombre;
- ajouter 7;
- Afficher le résultat.

Programme n° 4

Conjecture
- Choisir un nombre;
- enlever 5
- Afficher le résultat.

Programme n° 5

Conjecture
- Choisir un nombre;
- le multiplier par 5;
- ajouter 8;
- Afficher le résultat.

Programme n° 6

Conjecture
- Choisir un nombre;
- le multiplier par -7;
- enlever 10;
- Afficher le résultat.

Programme n° 7

Conjecture
- Choisir un nombre;
- multiplier le nombre par lui-même;
- ajouter 1;
- Afficher le résultat.

Programme n° 8

Conjecture
- Choisir un nombre;
- multiplier le nombre par lui-même;
- ajouter le nombre;
- Afficher le résultat.

Pour chacun des huit programmes ci-dessus, écrire une expression algébrique qui modélise ce programme.
Vous pourrez utilisez la lettre x pour désigner le nombre de choisi au départ.

	Expression		Expression		Expression		Expression
P1	$3x$	P2	$-2x$	P3	$x+7$	P4	$x-5$
P5	$5x+8$	P6	$-7x-10$	P7	x^2+1	P8	x^2+x

Tableaux des valeurs obtenues

Veuillez compléter en groupe les tableaux de valeurs ci-dessous pour chacun des programmes que vous aurez testés.

Programme n° 1

Nombre choisi	Résultat
-9	-27
-8	-24
-7	-21
-6	-18
-5	-15
-4	-12
-3	-9
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24
9	27

Programme n° 2

Nombre choisi	Résultat
-9	18
-8	16
-7	14
-6	12
-5	10
-4	8
-3	6
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4
3	-6
4	-8
5	-10
6	-12
7	-14
8	-16
9	-18

Programme n° 3

Nombre choisi	Résultat
-9	-2
-8	-1
-7	0
-6	1
-5	2
-4	3
-3	4
-2	5
-1	6
0	7
1	8
2	9
3	10
4	11
5	12
6	13
7	14
8	15
9	16

Programme n° 4

Nombre choisi	Résultat
-9	-14
-8	-13
-7	-12
-6	-11
-5	-10
-4	-9
-3	-8
-2	-7
-1	-6
0	-5
1	-4
2	-3
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4

Programme n° 5

Nombre choisi	Résultat
-9	-37
-8	-32
-7	-27
-6	-22
-5	-17
-4	-12
-3	-7
-2	-2
-1	3
0	8
1	13
2	18
3	23
4	28
5	33
6	38
7	43
8	48
9	53

Programme n° 6

Nombre choisi	Résultat
-9	53
-8	46
-7	39
-6	32
-5	25
-4	18
-3	11
-2	4
-1	-3
0	-10
1	-17
2	-24
3	-31
4	-38
5	-45
6	-52
7	-59
8	-66
9	-73

Programme n° 7

Nombre choisi	Résultat
-9	82
-8	65
-7	50
-6	37
-5	26
-4	17
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82

Programme n° 8

Nombre choisi	Résultat
-9	72
-8	56
-7	42
-6	30
-5	20
-4	12
-3	6
-2	2
-1	0
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90

I — Définition, notation et vocabulaire : image et antécédent

Définition 3.1 : Fonction

Une **fonction** est un programme de calcul permettant de définir un résultat unique à partir d'un nombre de départ.

On note souvent une fonction de la manière suivante :

$$f : x \to f(x)$$

Cela signifie que la fonction f fait correspondre au nombre de départ x le résultat unique $f(x)$.

Remarque :

On utilise souvent les lettres proches de f dans l'alphabet pour désigner une fonction : f, g, h... **Exemples :**

$f : x \to f(x) = x^2 + x + 41$

$g : x \to g(x) = 5x - 9$

$h : x \to h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

$k : x \to k(x) = 2019$

$l : x \to l(x) = x$

Définition 3.2 : Vocabulaire

Étant donnée une fonction $f : x \to f(x)$

Soit a un nombre quelconque alors on dit que le nombre :

- $f(a)$ est l'**image** du nombre a par la fonction f ;
- a a pour **image** $f(a)$ par la fonction f ;
- a est un **antécédent** du nombre $f(a)$ par la fonction f ;
- $f(a)$ a pour **antécédent** a par la fonction f.

Exemples :

En reprenant les fonctions de l'exemple précédent :

$f(10) = 10^2 + 10 + 41$ donc $f(10) = 151$
151 est l'image de 10 et 10 est un antécédent de 151 par la fonction f.

$g(-3) = 5 \times (-3) - 9$ donc $g(-3) = -15 - 9 = -24$
-24 est l'image de -3, -3 a pour image -24, -3 est un antécédent de -24 par g.

$h(1) = \dfrac{1}{1^2 + 2}$ donc $h(1) = \dfrac{1}{3}$
$\dfrac{1}{3}$ est l'image de 1 et 1 est un antécédent de $\dfrac{1}{3}$ par h.

$k(0) = 2019$, $k(5) = 2019$, $k(-10) = 2019$ ...
2019 est l'image de 0, 5, 10. 0, 5 et 10 sont des antécédents de 2019.
k est une **fonction constante** . 2019 est le seul nombre ayant des antécédents.

$l(1) = 1$, $l(-3) = -3$: on dit que l est la **fonction identique ou identité** .
1 a pour image 1, 1 est un antécédent de 1

Remarque importante :
Une fonction étant définie, on peut calculer les images de tous les nombres pour lesquels les calculs sont possibles. [1]
Une fonction étant définie, un nombre peut posséder un ou plusieurs antécédents. Il peut aussi n'en posséder aucun !

Méthode 3.1 : Recherche des antécédents d'un nombre par une fonction
Pour déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction, il est souvent nécessaire de résoudre une équation.

Par exemple, posons $f : x \to f(x) = 3x + 5$ et cherchons le ou les antécédents de -4.
On cherche donc tous les nombres x solutions de l'équation :

$$f(x) = -4$$

$$3x + 5 = -4$$

$$3x + 5 - 5 = -4 - 5$$

$$3x = -9$$

$$x = \frac{-9}{3}$$

$$x = -3$$

Ainsi comme $f(-3) = -4$, -3 est l'unique antécédent de -4 par f.

II — Tableau des images et représentation graphique

Définition 3.3 : Tableau des images pour une fonction

f une fonction définie. On peut construire un **tableau des images** contenant une sélection de nombres et leurs images par la fonction f.

x	a	b	c
$f(x)$	$f(x)$	$f(b)$	$f(c)$

Remarque :

Certaines fonctions dont on ne connaît pas l'expression algébrique (le programme de calcul) ne sont connue que par un tableau des images. On a dans ce cas qu'une connaissance partielle de la fonction. **Exemples :**
Voici trois fonctions :
$f : x \to f(x) = 2x - 4$ — $g : x \to g(x) = 6 - x$ — $h : x \to h(x) = x^2 + 2x - 3$

On peut utiliser la calculatrice pour tabuler ces fonctions. Il suffit d'utiliser le mode Table .
Voici ce que l'on obtient :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

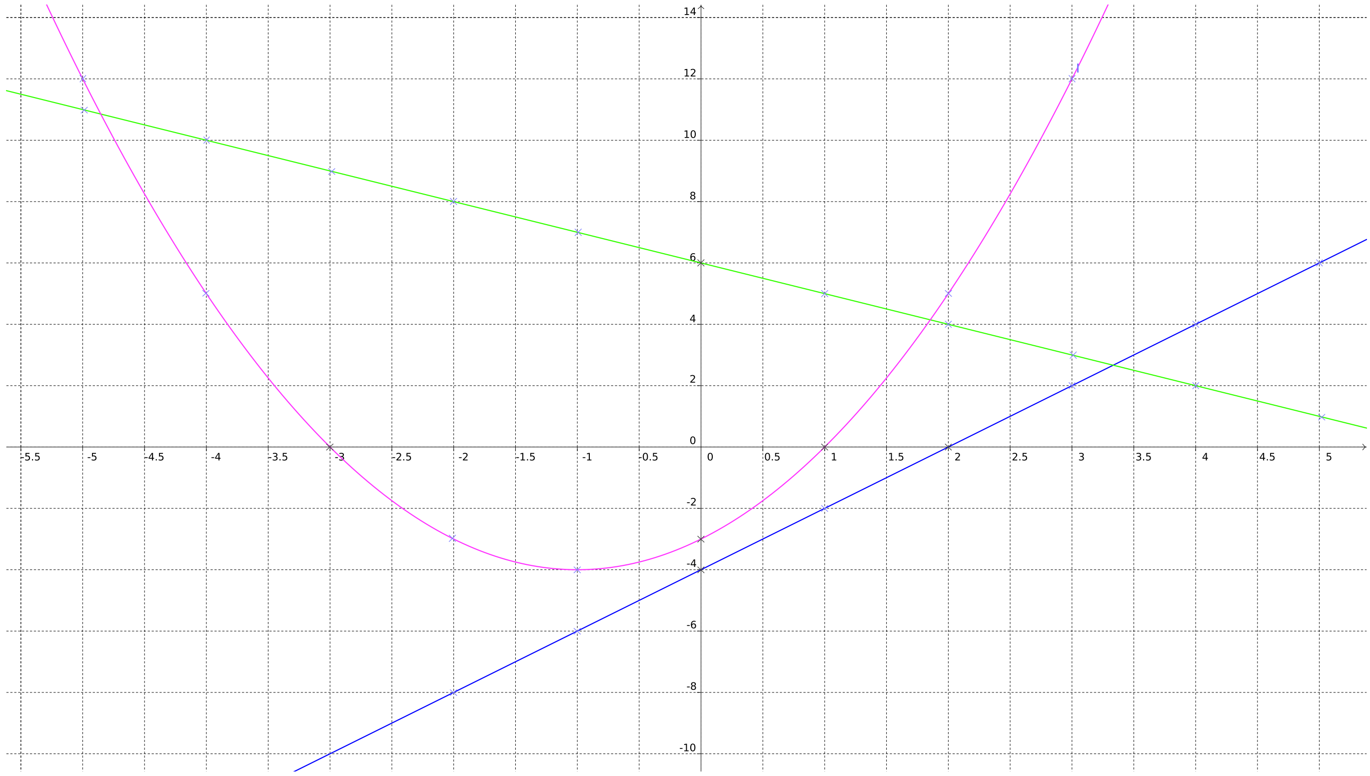
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21	32

Définition 3.4 : Représentation graphique d'une fonction

f une fonction définie. La **représentation graphique** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points dont les coordonnées sont $(x; f(x))$ où x est un nombre quelconque.

Remarque :

Il faut veiller au vocabulaire et ne pas confondre la fonction f, le nombre $f(x)$ image de x par f et la représentation graphique $\mathscr{C}_{\{}$ qui est un objet géométrique. **Exemples :**
Voici les représentations graphiques des fonctions tabulées ci-dessus :



Question du jour n° 1 : Vitesse

Je suis parti de chez moi ce matin à $06h55$ et je suis arrivé au collège à $07h17$. Ce soir je suis parti à $17h12$ et je suis arrivé à $17h54$. J'habite à $28\ km$ du collège.
Quelle a été ma vitesse moyenne ce matin ? Quelle a été ma vitesse moyenne le soir ? Quelle a été ma vitesse moyenne sur l'aller-retour ? (On exprimera les vitesses arrondies au km/h près).

Question du jour n° 2 : Vitesse – Épisode 2

La Terre a un rayon d'environ $6\,371\ km$. Elle fait un tour sur elle-même en une journée. Quelle est sa vitesse de rotation exprimée en km/h ?
La Terre parcoure en un an, une orbite à peu près circulaire autour du soleil dont le rayon est environ $150\,000\,000\ km$. Quelle est la vitesse de rotation de la Terre autour du soleil exprimée en km/h ?1

Question du jour n° 3 : Vitesse – Épisode 3

Un cycliste vient de monter le col du Tourmalet. C'est une montée de $17\ km$ pour atteindre le sommet à $2\,215\ m$ d'altitude. Il est monté à la vitesse moyenne de $12\ km/h$ puis il est redescendu à $78\ km/h$.
Quelle est sa vitesse moyenne sur le trajet complet, montée puis descente ?

Question du jour n° 4 : Fonctions vocabulaire

On pose $f : x \to f(x) = x^2 - 2x + 8$

Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(-1)$

Question du jour n° 5 : Fonctions vocabulaire – Épisode 2

On pose $g : x \to g(x) = -5x + 3$

1. Calculer les images de 0, 1 et -3 par la fonction g.
2. Calculer les antécédents 0 par g.

Question du jour n° 6 : Fonctions vocabulaire – Épisode 3

On pose $h : x \to 7 - 3x^2$
Les affirmations suivantes sont-elles vraies :

— 7 est l'image de 0 par la fonction h ;

— 7 est un antécédent de 0 par la fonction h ;

— 0 a pour image 7 par la fonction h ;

— -2 et 2 sont les antécédents de -5 par la fonction h ;

— 4 a un seul antécédent par la fonction h.

Question du jour n° 7 : Équation du premier degré

Résoudre les quatre équations suivantes :

$$5x+3=3x+1$$

$$7x-4=3x-5$$

$$6-3x=2x+7$$

$$1-3x=-4-5x$$

Exercices

Exercice n° 3.1 : Résolution d'équations du premier degré

Résoudre chacune des équations suivantes en vérifiant à chaque fois votre solution :

(1) $5x+3=4x+7$

(2) $7x+4=5x+10$

(3) $8x-3=3x-5$

(4) $x-8=3x-4$

(5) $1-7x=2-3x$

(6) $5-3x=5x-3$

Exercice n° 3.2 : Calcul d'images et d'antécédents

On pose $f : x \to f(x) = 3x+4$ et $g : x \to g(x) = 1-5x$

1. Calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(10)$.

2. Calculer les images de 2 et -3 par g.

3. Quel est l'antécédent de -5 par f ?

4. Quel est l'antécédent de 4 par g ?

5. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

Exercice n° 3.3 : Programme de calcul et fonction

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre;
- ajouter 6;
- multiplier par le nombre de départ;
- enlever 5.

1. Vérifier qu'en prenant -2 comme nombre de départ, ce programme donne -13

2. En notant x le nombre de départ et g la fonction qui à x associe le résultat donné par le programme, déterminer l'expression de g.

3. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau suivant :

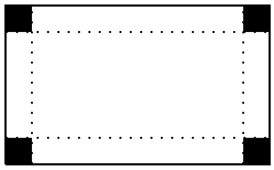
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$											

4. Quels sont les antécédents de -13 par g ?

5. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les antécédents de -15 par g ?

Exercice n° 3.4 : La boite parallélépipédique

On décide de construire une boite parallélépipédique sans couvercle dans une feuille A4 ($21\ cm \times 29,7\ cm$) en enlevant le même carré aux quatre coins de la feuille.



Le but de cette activité est de trouver la mesure du carré optimale de telle manière que le volume du pavé droit soit le plus grand possible.

1. Choisir une mesure pour le côté du carré puis dans une feuille A4 construire le pavé droit correspondant. Quel est le volume de ce pavé droit ?

2. Notons x la mesure du côté de ce carré en centimètre. Quelles sont les valeurs minimales et maximales de x ?

3. $f : x \to f(x)$ la fonction qui à une valeur de x en centimètre associe le volume du pavé en centimètre cube. Quelle est l'expression de $f(x)$?

4. Compléter à la calculatrice le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

x	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5
$f(x)$											

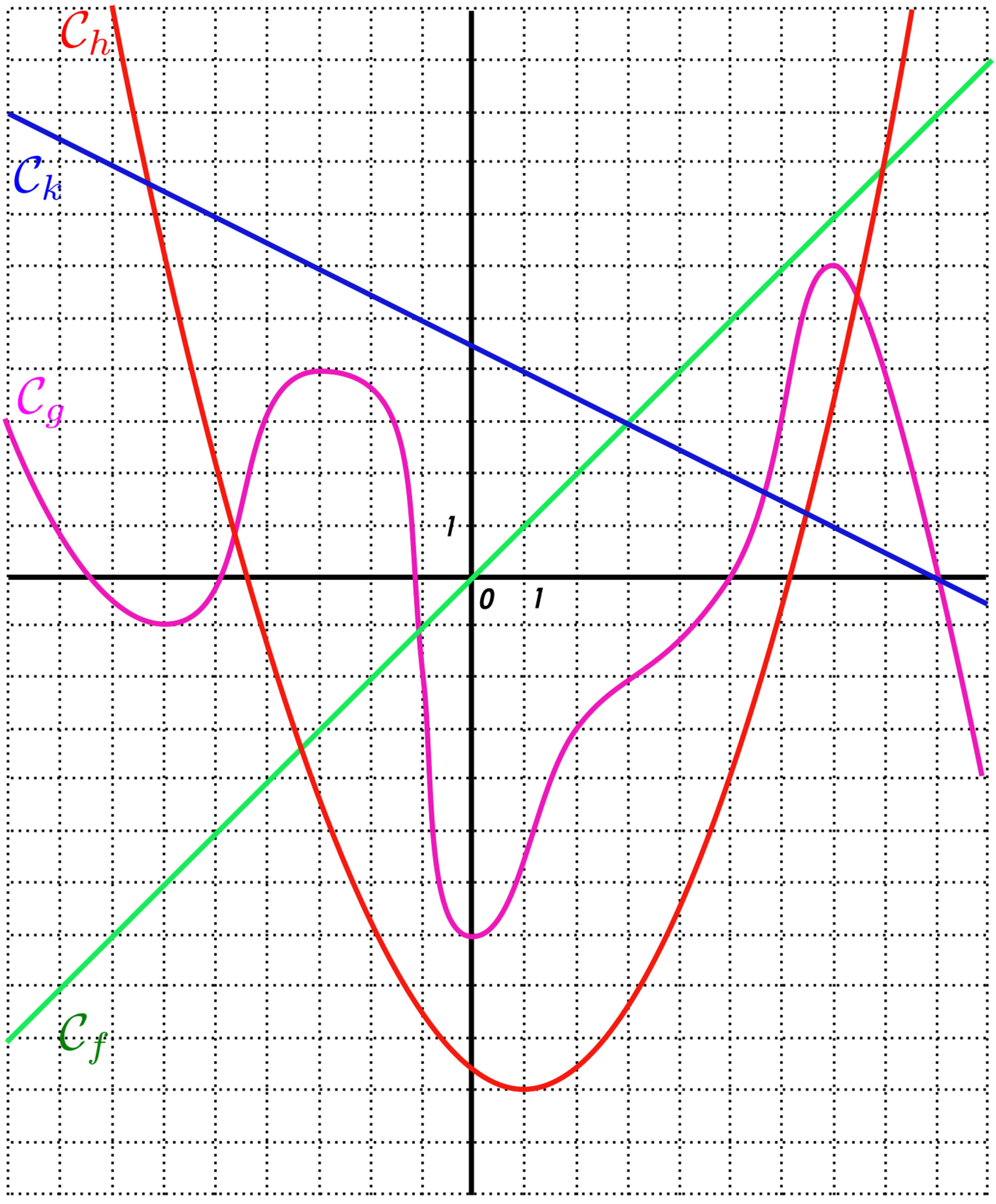
5. En utilisant le tableau ci-dessus, tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère fourni.

6. Compléter le tableau ci-dessous pour répondre à la question posée au départ.

x	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
$f(x)$											

Exercice n° 3.5 : Lecture graphique

Sur le graphique ci-dessous se trouvent les représentations graphiques de quatre fonctions : f, g, h et k.



1. Lire sur le graphique : $f(-5)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quelle pourrait être l'expression de f ?
3. Lire sur le graphique : $g(-3)$, $g(0)$ et $g(7)$
4. Quels sont les antécédents de O par g.
5. Lire sur la graphique : $h(-6)$, $h(1)$ et $h(8)$
6. Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = k(x)$
7. Quels sont les antécédents de 1 par g ?
8. Quels sont les antécédents de 7 par g ?
9. Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = h(x)$

Exercice n° 3.1 : Résolution d'équations du premier degré

Correction

$$5x+3=4x+7$$
$$5x+3-4x=4x+7-4x$$
$$x+3=7$$
$$x+3-3=7-3$$
$$\boxed{x=4}$$

$$8x-3=3x-5$$
$$8x-3+3=3x-5+3$$
$$8x=3x-2$$
$$8x-3x=3x-2-3x$$
$$5x=-2$$
$$\boxed{x=\frac{-2}{5}}$$

$$1-7x=2-3x$$
$$1-7x-1=2-3x-1$$
$$-7x=1-3x$$
$$-7x+3x=1-3x+3x$$
$$-4x=1$$
$$\boxed{x=\frac{-1}{4}}$$

$$7x+4=5x+10$$
$$7x+4-4=5x+10-4$$
$$7x=5x+6$$
$$7x-5x=5x+6-5x$$
$$2x=6$$
$$\boxed{x=\frac{6}{2}=3}$$

$$x-8=3x-4$$
$$x-8+8=3x-4+8$$
$$x=3x+4$$
$$x-3x=3x+4-3x$$
$$-2x=4$$
$$\boxed{x=\frac{4}{-2}=-2}$$

$$5-3x=5x-3$$
$$5-3x-5=5x-3-5$$
$$-3x=5x-8$$
$$-3x-5x=5x-8-5x$$
$$-8x=-8$$
$$\boxed{x=\frac{-8}{-8}=1}$$

Exercice n° 3.2 : Calcul d'images et d'antécédents

Correction

1. $f(-3)=3\times(-3)+4=-9+4=\boxed{-5}$, $f(-1)=3\times(-1)+4=-3+4=\boxed{1}$, $f(0)=3\times 0+4=\boxed{4}$ et $f(10)=3\times 10+4=\boxed{34}$.

2. $g(2)=1-5\times 2=1-10=\boxed{-9}$ et $g(-3)=1-5\times(-3)=1+15=\boxed{16}$

3. Il faut résoudre :

$$3x+4=-5$$
$$3x+4-4=-4-4$$
$$3x=-8$$
$$\boxed{x=\frac{-8}{3}}$$

$\boxed{-\frac{8}{3} \text{ est l'antécédent de } -5 \text{ par } f}$

4. Il faut résoudre :

$$1-5x=4$$
$$1-5x-1=4-1$$
$$-5x=3$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{5}}$$

$\boxed{-\frac{3}{5} \text{ est l'antécédent de 4 par } g}$

5. Il faut résoudre

$$3x + 4 = 1 - 5x$$

$$3x + 4 {\color{red}-4} = 1 - 5x {\color{red}-4}$$

$$3x = -3 - 5x$$

$$3x {\color{red}+5x} = -3 - 5x {\color{red}+5x}$$

$$8x = -3$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{8}}$$

$\boxed{\text{Pour } x = -\frac{3}{8} \text{ les fonctions } f \text{ et } g \text{ ont la même image.}}$

Exercice n° 3.3 : Programme de calcul et fonction

Correction

1. Pour -2 on obtient successivement : $-2 + 6 = 4$ puis $4 \times (-2) = -8$ et enfin $-8 - 5 = \boxed{-13}$

2. Prenons x un nombre de départ on obtient successivement : $x + 6$ puis $x(x+6)$ et enfin $\boxed{x(x+6) - 5}$

3.

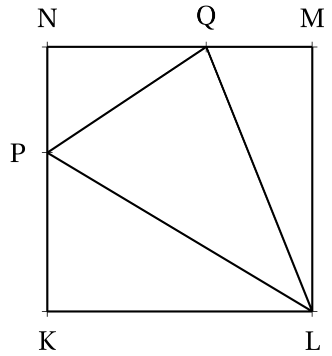
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-10	-13	-14	-13	-10	-5	2	11	22	35	55

4. D'après le tableau $\boxed{\text{les antécédents de } -13 \text{ sont } -4 \text{ et } -2.}$

5. Il semble que la valeur minimale de la fonction g soit -14. $\boxed{-15 \text{ n'a donc pas d'antécédent.}}$

Évaluation de mathématiques

Exercice 1



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

KLMN est un carré de côté 5 cm

P ∈ [KN] tel que KP = 3 cm
Q ∈ [NM] tel que QM = 2 cm

1. Calculer en justifiant votre raisonnement les longueurs QP, PL et LQ

2. Le triangle PLQ est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

Exercice 2

On pose $f : x \to 3x-7$, $g : x \to -5x+3$ et $h : x \to x^2+x-6$

1. Calculer les images de 6 et -3 par la fonction f.

2. Calculer $g(0)$ et $g(-5)$.

3. Déterminer l'antécédent de 10 par la fonction f.

4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

5. Compléter le tableau suivant à la calculatrice :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							

6. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction h.

Exercice 3

Le record du monde de marathon masculin est détenu par le kenyan Eliud Kipchoge. Il a parcouru $42,195$ km en 2 h 1 min 39 s.

1. Calculer la vitesse moyenne en kilomètre heure d'Eliud Kipchoge. Arrondir au mètre près.

Le record du monde de marathon féminin est détenu par la kenyane Brigid Kosgei. Elle a parcouru $42,195$ km à la vitesse de $18,884$ km/h.

2. Combien de temps Brigid Kosgei a-t-elle mis pour courir ce marathon ? Arrondir à la seconde près.

3. Imaginons que ces deux coureurs aient fait ces temps records sur le même marathon.
Quelle distance séparerait ces deux coureurs à l'arrivée ?

Correction

Exercice 1

1. Comme KLMN est un carré, les triangles NPQ, QML et PKL sont rectangles respectivement en N, M et K.

Dans le triangle NPQ rectangle en N, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$\mathrm{NQ}^2 + \mathrm{NP}^2 = \mathrm{QP}^2$$
$$3^2 + 2^2 = \mathrm{QP}^2$$
$$\mathrm{QP}^2 = 9 + 4$$
$$\mathrm{QP}^2 = 13$$
$$\mathrm{QP} = \sqrt{13}$$

Dans le triangle QLM rectangle en M, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$\mathrm{MQ}^2 + \mathrm{ML}^2 = \mathrm{QL}^2$$
$$2^2 + 5^2 = \mathrm{QL}^2$$
$$\mathrm{QL}^2 = 4 + 25$$
$$\mathrm{QL}^2 = 29$$
$$\mathrm{QL} = \sqrt{29}$$

Dans le triangle PKL rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$\mathrm{KL}^2 + \mathrm{KP}^2 = \mathrm{PL}^2$$
$$5^2 + 3^2 = \mathrm{PL}^2$$
$$\mathrm{PL}^2 = 25 + 9$$
$$\mathrm{PL}^2 = 34$$
$$\mathrm{PL} = \sqrt{34}$$

2. Comparons $\mathrm{QP}^2 + \mathrm{QL}^2$ et PL^2

$$\mathrm{QP}^2 + \mathrm{QL}^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{29})^2$$
$$\mathrm{QP}^2 + \mathrm{QL}^2 = 13 + 29$$
$$\mathrm{QP}^2 + \mathrm{QL}^2 = 42$$

$$\mathrm{P}l^2 = (\sqrt{34})^2$$
$$\mathrm{PL}^2 = 34$$

Comme $\mathrm{QP}^2 + \mathrm{QL}^2 \neq \mathrm{PL}^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, le triangle PQL n'est pas rectangle.

Exercice 2

1. $f(6) = 3 \times 6 - 7 = 18 - 7 = 11$ et $f(-3) = 3 \times (-3) - 7 = -9 - 7 = -16$
2. $g(0) = -5 \times 0 + 3 = 3$ et $g(-5) = -5 \times (-5) + 3 = 25 + 3 = 28$
3. Il faut résoudre : $f(x) = 10$

$$3x - 7 = 10$$
$$3x - 7 + 7 = 10 + 7$$
$$3x = 17$$
$$x = \frac{17}{3}$$

4. Résolvons $f(x) = g(x)$

$$3x - 7 = -5x + 3$$
$$3x - 7 + 7 = -5x + 3 + 7$$
$$3x = -5x + 10$$
$$3x + 5x = -5x + 5x + 10$$
$$8x = 10$$
$$x = \frac{10}{8}$$
$$x = 1,25$$

5.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	0	-4	-6	1	-4	0	6

6. -3 et 2 sont les antécédents de 0 par h

Exercice 3

1. $2\ h\ 1\ min\ 39\ s = 2 \times 3600\ s + 1 \times 60\ s + 39\ s = 7299\ s$

Temps	$7299\ s$	$3600\ s$
Distance	$42,195\ km$	$\frac{42,195\ km \times 3600\ s}{7299\ s} \approx 20,811\ km$

Il court à $20,811\ km/h$.

2.

Temps	$\frac{3600\ s \times 42,195\ km}{18,884\ km} \approx 8044\ s$	$3600\ s$
Distance	$42,195\ km$	$18,884\ km$

$8044\ s = 60 \times 134 \times 60\ s + 4\ s = 134\ min\ 4\ s = 2\ h\ 14\ min\ 4\ s$.

3. Le premiers court le marathon en $7299\ s$, la seconde en $8044\ s$.
L'écart entre les deux coureurs est $8044\ s - 7299\ s = 745\ s$.
Calculons la distance parcourue par le premier coureur en $745\ s$.

Temps	$7299\ s$	$745\ s$
Distance	$42,195\ km$	$\frac{745\ s \times 42,195\ km}{7299\ s} \approx 4,306\ km$

L'écart entre les deux est $4306\ m$.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation de mathématiques

On pose $f(x) = (3x-1)(-2x-3) + (-5+2x)(1-3x)$

1. Développer et réduire $f(x)$

2. Développer et réduire $g(x) = (3x-1)(-4x+2)$

On pose $h(x) = -12x^2 + 10x - 2$.

3. Calculer $h(0)$, $h(-1)$ et $h(3)$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation de mathématiques

On pose $f(x) = (5x-1)(-4x-3) + (-5+2x)(1-5x)$

1. Développer et réduire $f(x)$

2. Développer et réduire $g(x) = (5x-1)(-6x-4)$

On pose $h(x) = -30x^2 - 14x + 4$.

3. Calculer $h(0)$, $h(-1)$ et $h(3)$

Évaluation sur les équations

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$5x+9=3x+5$$

$$6x-7=3x+5$$

$$7x-3=4x-9$$

$$5-6x=3-3x$$

$$4x+7-8x-1=2x+3-12x+4$$

Évaluation sur les équations — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
5x+9 &= 3x+5\\
5x+9-9 &= 3x+5-9\\
5x &= 3x-4\\
5x-3x &= 3x-4-3x\\
2x &= -4\\
x &= \frac{-4}{2}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6x-7 &= 3x+5\\
6x-7+7 &= 3x+5+7\\
6x &= 3x+12\\
6x-3x &= 3x+12-3x\\
3x &= 12\\
x &= \frac{12}{3}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7x-3 &= 4x-9\\
7x-3+3 &= 4x-9+3\\
7x &= 4x-6\\
7x-4x &= 4x-6-4x\\
3x &= -6\\
x &= \frac{-6}{3}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5-6x &= 3-3x\\
5-6x-5 &= 3-3x-5\\
-6x &= -3x-2\\
-6x+3x &= -3x-2+3x\\
-3x &= -2\\
x &= \frac{-2}{-3}\\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x+7-8x-1 &= 2x+3-12x+4\\
-4x+6 &= -10x+7\\
-4x+6-6 &= -10x+7-6\\
-4x &= -10x+1\\
-4x+10x &= -10x+1+10x\\
6x &= 1\\
x &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Évaluation sur les équations

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$6x + 10 = 4x + 6$$

$$5x - 7 = 2x + 5$$

$$8x - 3 = 5x - 12$$

$$5 - 7x = 3 - 4x$$

$$3x + 7 - 5x - 1 = 3x + 3 - 8x + 4$$

Évaluation sur les équations — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
6x+10 &= 4x+6\\
6x+10-10 &= 4x+6-10\\
6x &= 4x-4\\
6x-4x &= 4x-4-4x\\
2x &= -4\\
x &= \frac{-4}{2}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5x-7 &= 2x+5\\
5x-7+7 &= 2x+5+7\\
5x &= 2x+12\\
5x-2x &= 2x+12-2x\\
3x &= 12\\
x &= \frac{12}{3}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8x-3 &= 5x-12\\
8x-3+3 &= 5x-12+3\\
8x &= 5x-9\\
8x-5x &= 5x-9-5x\\
3x &= -9\\
x &= \frac{-9}{3}\\
x &= -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5-7x &= 3-4x\\
5-7x-5 &= 3-4x-5\\
-7x &= -4x-2\\
-7x+4x &= -4x-2+4x\\
-3x &= -2\\
x &= \frac{-2}{-3}\\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x+7-5x-1 &= 3x+3-8x+4\\
-2x+6 &= -5x+7\\
-2x+6-6 &= -5x+7-6\\
-2x &= -5x+1\\
-2x+5x &= -5x+1+5x\\
3x &= 1\\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Évaluation sur les équations

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$6x + 11 = 4x + 5$$

$$7x - 9 = 4x + 5$$

$$11x - 3 = 5x - 9$$

$$9 - 5x = 7 - 3x$$

$$5x + 7 - 8x - 1 = 2x + 3 - 15x + 4$$

Évaluation sur les équations — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
6x+11 &= 4x+5\\
6x+11-11 &= 4x+5-11\\
6x &= 4x-6\\
6x-4x &= 4x-6-4x\\
2x &= -6\\
x &= \frac{-6}{2}\\
x &= -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7x-9 &= 4x+5\\
7x-9+9 &= 4x+5+9\\
7x &= 4x+14\\
7x-4x &= 4x+14-4x\\
3x &= 14\\
x &= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11x-3 &= 5x-9\\
11x-3+3 &= 5x-9+3\\
11x &= 5x-6\\
11x-5x &= 5x-6-5x\\
6x &= -6\\
x &= \frac{-6}{6}\\
x &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9-5x &= 7-3x\\
9-5x-9 &= 7-3x-9\\
-5x &= -3x-2\\
-5x+3x &= -3x-2+3x\\
-2x &= -2\\
x &= \frac{-2}{-2}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5x+7-8x-1 &= 2x+3-15x+4\\
-3x+6 &= -13x+7\\
-3x+6-6 &= -13x+7-6\\
-3x &= -13x+1\\
-3x+13x &= -13x+1+13x\\
10x &= 1\\
x &= \frac{1}{10}\\
x &= 0,1
\end{aligned}$$

Évaluation sur les équations

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$8x + 12 = 6x + 8$$

$$7x - 7 = 4x + 15$$

$$9x - 3 = 6x - 15$$

$$5 - 9x = 6 - 3x$$

$$8x + 7 - 2x - 1 = 3x + 3 - 21x + 4$$

Évaluation sur les équations — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$8x+12=6x+8$$

$$\begin{aligned}
8x+12 &= 6x+8\\
8x+12-12 &= 6x+8-12\\
8x &= 6x-4\\
8x-6x &= 6x-4-6x\\
2x &= -4\\
x &= \frac{-4}{2}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7x-7 &= 4x+15\\
7x-7+7 &= 4x+15+7\\
7x &= 4x+22\\
7x-4x &= 4x+22-4x\\
3x &= 22\\
x &= \frac{22}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9x-3 &= 6x-15\\
9x-3+3 &= 6x-15+3\\
9x &= 6x-12\\
9x-6x &= 6x-12-6x\\
3x &= -12\\
x &= \frac{-12}{3}\\
x &= -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5-9x &= 6-3x\\
5-9x-5 &= 6-3x-5\\
-9x &= -3x+1\\
-9x+3x &= -3x+1+3x\\
-6x &= 1\\
x &= \frac{1}{-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8x+7-2x-1 &= 3x+3-21x+4\\
6x+6 &= -18x+7\\
6x+6-6 &= -18x+7-6\\
6x &= -18x+1\\
6x+18x &= -18x+1+18x\\
24x &= 1\\
x &= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Évaluation

Exercice n° 1 : On pose $f : x \to 3x - 5$ et $g : x \to 7 - 4x$

1. Calculer les images de 0 et -7 par la fonction f.
2. Calculer $g(-3)$ et $g(3)$.
3. Calculer un antécédent de 10 par f puis un antécédent de -5 par g.
4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice n° 2 : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par 2 ;
- Enlever 15 au résultat précédent ;
- Multiplier le tout par le nombre de départ ;
- Ajouter 7 au résultat précédent.

1. Montrer qu'en prenant -3 comme nombre de départ on obtient 70ă.

2. En posant x pour le nombre de départ donner l'expression de ce programme de calcul. On notera $P(x)$ cette expression.

3. Compléter à la calculatrice le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x)$									

4. On pose $Q(x) = (2x - 1)(x - 7)$.
Développer $P(x)$ et $Q(x)$ et démontrer que $P(x) = Q(x)$.

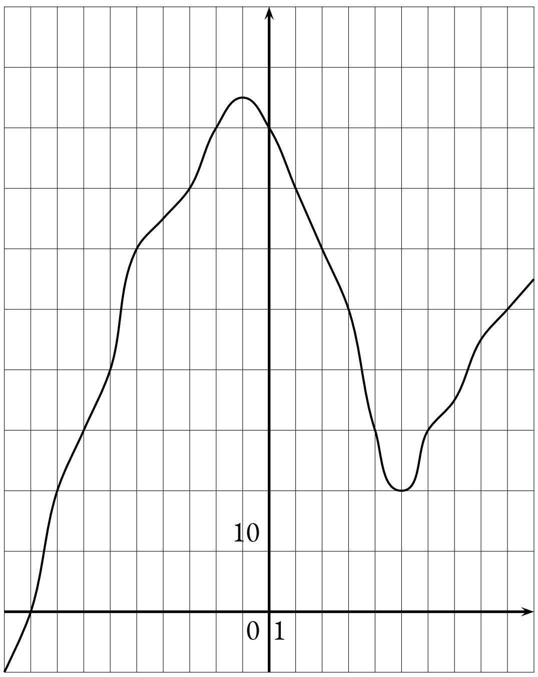
5. Démontrer par le calcul que 7 est un antécédent de 0 pour la fonction P.

Exercice n° 3

Dans cette exercice vous justifierez vos réponses en positionnant les points correspondants sur le graphique.

La courbe représente une fonction h.

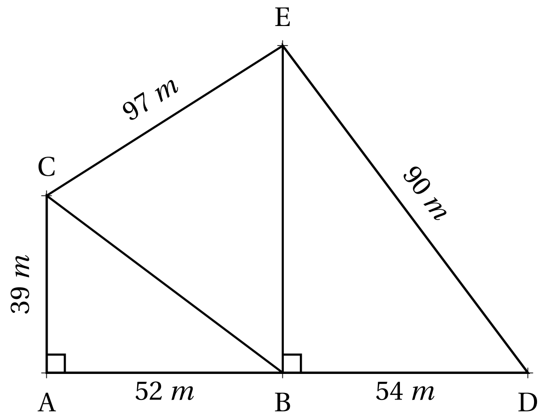
1. Quelle sont les images de -7 et 8 ;
2. Quels sont les antécédents de 60 ;
3. Combien 40 a-t-il d'antécédents ;
4. Combien 90 a-t-il d'antécédent.



Exercice n° 4

Sur la figure ci-après nous savons que :

- ABC est un triangle rectangle en A;
- BDE est un triangle rectangle en B.



1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de BE.
3. Le triangle BCE est-il rectangle ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1

1. L'image de 0 consiste à calculer $f(0)$, c'est à dire remplacer x par 0 dans l'expression.
$f(0) = 3 \times 0 - 5$ donc $\boxed{f(0) = -5}$. $f(-7) = 3 \times (-7) - 5$ donc $f(-7) = -21 - 5$ soit $\boxed{f(-7) = -26}$

2. $g(-3) = 7 - 4 \times (-3)$ donc $g(-3) = 7 + 12$ et $\boxed{g(-3) = 19}$. $g(3) = 7 - 4 \times 3$ donc $g(3) = 7 - 12$ et $\boxed{g(3) = -5}$

3. Pour calculer un antécédent de 10 par f il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 10\\
3x - 5 &= 10\\
3x - 5 \color{red}{+5} &= 10 \color{red}{+5}\\
3x &= 15\\
x &= \frac{15}{3}\\
x &= 5
\end{aligned}$$

Vérifions : $f(5) = 3 \times 5 - 5 = 15 - 5 = 10$ donc $\boxed{\text{5 est l'antécédent de 10}}$

Pour calculer un antécédent de -5 par g il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
g(x) &= -5\\
7 - 4x &= -5\\
7 - 4x \color{red}{-7} &= -5 \color{red}{-7}\\
-4x &= -12\\
x &= \frac{-12}{-4}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Nous avions trouver cette valeur à la question **2.**.

4. Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
3x - 5 &= 7 - 4x\\
3x - 5 \color{red}{+5} &= 7 - 4x \color{red}{+5}\\
3x &= 12 - 4x\\
3x \color{red}{+4x} &= 12 - 4x \color{red}{+4x}\\
7x &= 12\\
x &= \frac{12}{7}
\end{aligned}$$

$\boxed{\frac{12}{7} \text{ est la solution de l'équation } f(x) = g(x)}$

Exercice n° 2

1. En prenant -3 comme nombre de départ on obtient successivement :
-3 puis $2\times(-3)=-6$ et $-6-15=-21$ et $(-3)\times(-21)=63$ et finalement $63+7=70$.

$\boxed{\text{En prenant } -3 \text{ comme nombre de départ on obtient bien } 70.}$

2. x le nombre de départ. En suivant le programme de calcul on obtient successivement :
$2\times x=2x$ puis $2x-15$ et $x(2x-15)$ et finalement $x(2x-15)+7$.

$\boxed{\text{L'expression cherchée est } x(2x-15)+7.}$

3. On utilise le mode tableau de la calculatrice :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x)$	99	70	45	24	7	-6	-15	-20	-21

4. Développons $P(x)$.
$P(x)=x(2x-15)+7$

$\boxed{P(x)=2x^2-15x+7}$

Développons $Q(x)$.
$Q(x)=(2x-1)(x-7)$
$Q(x)=2x^2-14x-x+7$

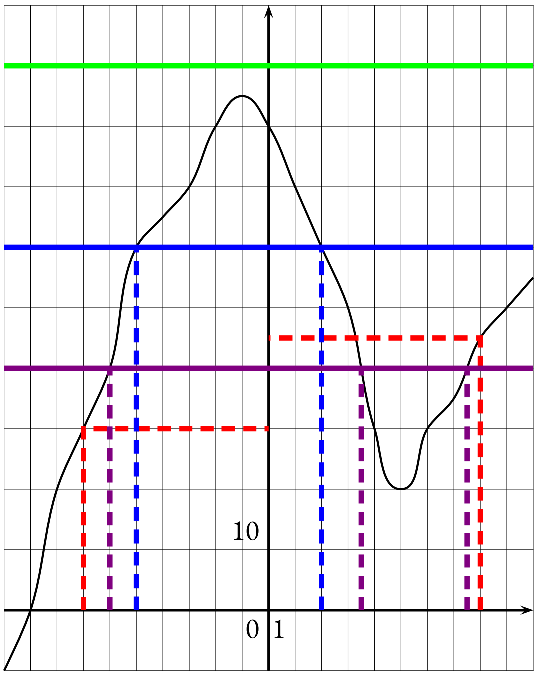
$\boxed{Q(x)=2x^2-15x+7}$

$\boxed{\text{On constate que pour tous nombres } x \text{ on a } Q(x)=P(x)}$.

5. Il faut calculer $P(7)$.
$P(7)=7\times(2\times7-15)+7$ donc $P(7)=7\times(14-15)+7$ et $P(7)=7\times(-1)+7$ d'où $P(7)=0$.

$\boxed{\text{On constate que 7 est un antécédent de 0 par la fonction P.}}$

Exercice n° 3



1. $\boxed{\text{L'image de } -7 \text{ est } 30.}$

$\boxed{\text{L'image de 8 est 45.}}$

2. $\boxed{\text{Les antécédents de 60 sont } -5 \text{ et } 2.}$

3. $\boxed{\text{40 a trois antécédents}}$

4. $\boxed{\text{90 n'a aucun antécédent.}}$

Exercice n° 4

1. Dans le triangle ABC rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
$$52^2 + 39^2 = BC^2$$
$$2\,704 + 1\,521 = BC^2$$
$$BC^2 = 4\,225$$
$$BC = \sqrt{4\,225}$$
$$BC = 65$$

$\boxed{BC = 65\ cm}$

2. Dans le triangle EBD rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BD^2 + BE^2 = DE^2$$
$$54^2 + BE^2 = 90^2$$
$$2\,916 + BE^2 = 8\,100$$
$$BE^2 = 8\,100 - 2\,916$$
$$BE^2 = 5\,184$$
$$BE = \sqrt{5\,184}$$
$$BE = 72$$

$\boxed{BE = 72\ cm}$

3. Comme CE est le plus long côté, comparons $BC^2 + BE^2$ et CE^2 :

$BC^2 + BE^2$	CE^2
$65^2 + 72^2$	97^2
$4\,225 + 5\,184$	
$9\,409$	$9\,409$

Comme $BC^2 + BE^2 = CE^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle BCE est rectangle en B}}$.

Évaluation

Exercice n° 1 : *8 points*

On pose $f(x) = 6x - 7$ et $g(x) = x^2 - x - 6$.

1. Calculer les images de 0, -2 et 3 par la fonction f.

2. En résolvant une équation, déterminer l'antécédent de 8 par f.

3. Calculer $g(0)$, $g(3)$ et $g(-1)$.

4. Compléter le tableau suivant à la calculatrice :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$											

5. Quels sont les antécédents de 0 par g ?

Exercice n° 2 : *6 points*

Résoudre sur votre copie chacune des équations suivantes :

$$(1) \qquad 6x + 3 = 4x + 9$$

$$(2) \qquad 7x - 8 = 4x - 7$$

$$(3) \qquad 1 - 6x = 4 - 11x$$

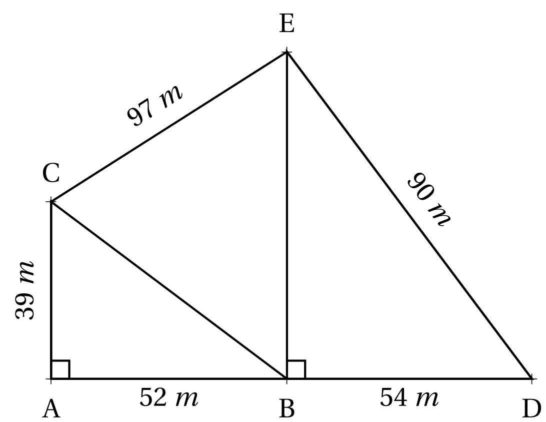
$$(4) \qquad 5x - 3 + 2x - 1 = 1 - 7x - 3x - 9$$

Exercice n° 3 : *6 points*

Sur la figure ci-après nous savons que :

- ABC est un triangle rectangle en A;
- BDE est un triangle rectangle en B.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de BE.
3. Le triangle BCE est-il rectangle ?



Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Calcul d'image et d'antécédent

Correction

Généralités sur les fonctions

On pose $f(x) = 6x - 7$ et $g(x) = x^2 - x - 6$.

1. $f(0) = 6 \times 0 - 7$ donc $\boxed{f(0) = -7}$.

$f(-2) = 6 \times (-2) - 7 = -12 - 7$ donc $\boxed{f(-2) = -19}$.

$f(3) = 6 \times 3 - 7 = 18 - 7$ donc $\boxed{f(3) = 11}$

2. Il faut résoudre l'équation $g(x) = 8$.

$$\begin{aligned}
6x - 7 &= 8 \\
6x - 7 + 7 &= 8 + 7 \\
6x &= 15 \\
x &= \frac{15}{6} \\
x &= \frac{5}{2} \\
x &= 2,5
\end{aligned}$$

$\boxed{\frac{5}{3} \text{ est l'antécédent de } 8 \text{ par la fonction } f}$

3. $g(0) = 0^2 - 0 - 6$ donc $\boxed{g(0) = -6}$.

$g(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6$ donc $\boxed{g(3) = 0}$.

$g(-1) = (-1)^2 - (-1) - 6 = 1 + 1 - 6$ donc $\boxed{g(-1) = -4}$.

4. Compléter le tableau suivant à la calculatrice :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	24	14	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14

5. Quels sont les antécédents de 0 par g ?

$\boxed{\text{On voit dans le tableau que les antécédents de } 0 \text{ par } g \text{ sont } -2 \text{ et } -3}$

Exercice n° 2 : Équation du premier degré

Correction

Résolution des équations du premier degré

Résoudre sur votre copie chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
6x+3&=4x+9\\
6x+3{\color{red}-3}&=4x+9{\color{red}-3}\\
6x&=4x+6\\
6x{\color{red}-4x}&=4x+6{\color{red}-4x}\\
2x&=6\\
x&=\frac{6}{2}\\
x&=3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7x-8&=4x-7\\
7x-8{\color{red}+8}&=4x-7{\color{red}+8}\\
7x&=4x+1\\
7x{\color{red}-4x}&=4x+1{\color{red}-4x}\\
3x&=1\\
x&=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1-6x&=4-11x\\
1-6x{\color{red}-1}&=4-11x{\color{red}-1}\\
-6x&=3-11x\\
-6x{\color{red}+11x}&=3-11x{\color{red}+11x}\\
5x&=3\\
x&=\frac{3}{5}\\
x&=0,6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5x-3+2x-1&=1-7x-3x-9\\
7x-4&=-8-10x\\
7x-4{\color{red}+4}&=-8-10x{\color{red}+4}\\
7x&=-4-10x\\
7x{\color{red}+10x}&=-4-10x{\color{red}+10x}\\
17x&=-14\\
x&=-\frac{14}{7}
\end{aligned}$$

Exercice n° 3 : Théorème de Pythagore Correction

Théorème de Pythagore et sa réciproque

1. Calculer la valeur exacte de BC.

Dans le triangle ABC rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
$$52^2 + 39^2 = BC^2$$
$$2\,704 + 1\,521 = BC^2$$
$$BC^2 = 4\,225$$
$$BC = \sqrt{4\,225}$$
$$BC = 65$$

$\boxed{BC = 65\,\text{m}}$

2. Calculer la valeur exacte de BE.

Dans le triangle BDE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BD^2 + BE^2 = DE^2$$
$$54^2 + BE^2 = 90^2$$
$$2\,916 + BE^2 = 8\,100$$
$$BE^2 = 8\,100 - 2\,916$$
$$BE^2 = 5\,184$$
$$BE^2 = \sqrt{5\,184}$$
$$BE = 72$$

$\boxed{BE = 72\,\text{m}}$

3. Le triangle BCE est-il rectangle ?
Comparons $BC^2 + BE^2$ et CE^2 :

$$BC^2 + BE^2$$
$$65^2 + 72^2$$
$$4\,255 + 5\,184$$
$$9\,409$$

$$CE^2$$
$$97^2$$
$$9\,409$$

Comme $BC^2 + BE^2 = CE^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle BCE est rectangle en B}}$.

Évaluation

Exercice n° 1 :

4 points

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A = 7(5x - 1) + 3(2x - 1)$

$B = -6(3x - 1) + 2x(3x - 1)$

$C = 7 - 7x(2x - 1) - 4(3x + 1) + 2x^2$

Exercice n° 2 :

6 points

On pose $f(x) = 6x - 7$ et $g(x) = x^2 - x - 6$.

1 Calculer les images de 0, -2 et 3 par la fonction f.
2. En résolvant une équation, déterminer l'antécédent de 8 par f.
3. Calculer $g(0)$, $g(3)$ et $g(-1)$.
4. Compléter le tableau suivant à la calculatrice :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$											

5. En observant le tableau, indiquer quels sont les antécédents de 0 par g ?

Exercice n° 3 :

4 points

Résoudre sur votre copie chacune des équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & 6x + 3 = 4x + 9 \\ (2) & 7x - 8 = 4x - 7 \\ (3) & 1 - 6x = 4 - 11x \\ (4) & 5(3x + 1) = 7(1 - 5x) \end{array}$$

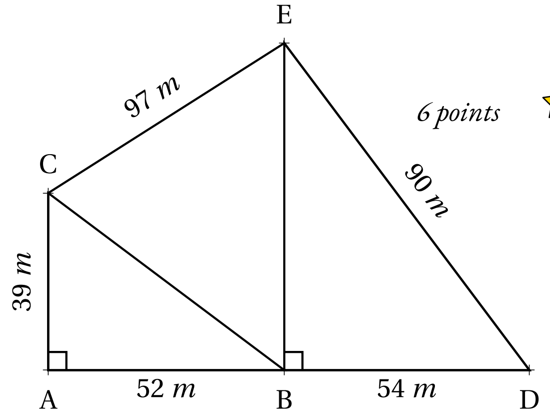
Exercice n° 4 :

6 points

Sur la figure ci-après nous savons que :

- ABC est un triangle rectangle en A;
- BDE est un triangle rectangle en B.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de BE.
3. Le triangle BCE est-il rectangle ?



Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Développer et réduire une expression Correction

Calcul littéral

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A = 7(5x-1)+3(2x-1)$
$A = 35x-7+6x-3$

$\boxed{A = 41x-10}$

$B = -6(3x-1)+2x(3x-1)$
$B = -18x+6+6x^2-2x$

$\boxed{B = 6x^2-20x+6}$

$C = 7-7x(2x-1)-4(3x+1)+2x^2$
$C = 7-14x^2+7-12x-4+2x^2$

$\boxed{C = -12x^2-12x+10}$

Exercice n° 2 : Calcul d'image et d'antécédent Correction

Généralités sur les fonctions

On pose $f(x) = 6x-7$ et $g(x) = x^2-x-6$.

1. $f(0) = 6\times 0-7 = -7$; $f(-2) = 6\times(-2)-7 = -12-7 = -19$ et $f(3) = 6\times 3-7 = 18-7 = 11$

2. Résolvons : $f(x) = 8$

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 \\ 6x-7 &= 8 \\ 6x-7+7 &= 8+7 \\ 6x &= 15 \\ x &= \frac{15}{6} \\ x &= \frac{5}{2} \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

$\boxed{2,5 \text{ est l'antécédent de 8 par la fonction } f.}$

3. $g(0) = 0^2-0-6 = -6$; $g(3) = 3^2-3-6 = 9-3-6 = 0$ et $g(-1) = (-1)^2-(-1)-6 = 1+1-6 = -4$.

4. Compléter le tableau suivant à la calculatrice :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	24	14	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14

5. $\boxed{-2 \text{ et } 3 \text{ sont les antécédents de } 0 \text{ par } g.}$

Exercice n° 3 : Équation du premier degré CORRECTION

Résolution des équations du premier degré

$$\begin{aligned} 6x+3 &= 4x+9 \\ 6x+3-3 &= 4x+9-3 \\ 6x &= 4x+6 \\ 6x-4x &= 4x+6-4x \\ 2x &= 6 \\ x &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x-8 &= 4x-7 \\ 7x-8+8 &= 4x-7+8 \\ 7x &= 4x+1 \\ 7x-4x &= 4x+1-4x \\ 3x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-6x &= 4-11x \\ 1-6x-1 &= 4-11x-1 \\ -6x &= 3-11x \\ -6x+11x &= 3-11x+11x \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} \\ x &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(3x+1) &= 7(1-5x) \\ 15x+5 &= 7-35x \\ 15x+5-5 &= 7-35x-5 \\ 15x &= 2-35x \\ 15x+35x &= 2-35x+35x \\ 50x &= 2 \\ x &= \frac{2}{50} \\ x &= \frac{1}{25} \\ x &= 0,04 \end{aligned}$$

Exercice n° 4 : Théorème de Pythagore CORRECTION

Théorème de Pythagore et sa réciproque

1. Calculer la valeur exacte de BC.

Dans le triangle ABC rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= BC^2 \\ 52^2+39^2 &= BC^2 \\ 2\,704+1\,521 &= BC^2 \\ BC^2 &= 4\,225 \\ BC &= \sqrt{4\,225} \\ BC &= 65 \end{aligned}$$

$\boxed{BC = 65\,\text{m}}$

2. Calculer la valeur exacte de BE.

Dans le triangle BDE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned} BD^2+BE^2 &= DE^2 \\ 54^2+BE^2 &= 90^2 \\ 2\,916+BE^2 &= 8\,100 \\ BE^2 &= 8\,100-2\,916 \end{aligned}$$

$$BE^2 = 5\,184$$

$$BE^2 = \sqrt{5\,184}$$

$$BE = 72$$

$\boxed{BE = 72\,\text{m}}$

3. Le triangle BCE est-il rectangle ?
Comparons $BC^2 + BE^2$ et CE^2 :

$BC^2 + BE^2$	CE^2
$65^2 + 72^2$	97^2
$4\,255 + 5\,184$	
$9\,409$	$9\,409$

Comme $BC^2 + BE^2 = CE^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle BCE est rectangle en B}}$.

☞ Évaluation — Correction ☜

Exercice n° 1 — Correction

1.a. En prenant 5 avec le **Programme n° 1** on obtient succesivement :
5 puis $5+7=12$ et enfin $6\times 12=72$

En prenant 5 avec le **Programme n° 2** on obtient successivement :
5 puis $5^2=25$, $25+3=28$ et enfin $28\times 2=56$.

$\boxed{\text{En prenant 5 on obtient 72 avec le } \textbf{Programme n° 1} \text{ et 56 avec le } \textbf{Programme n° 2}}$

1.b. En prenant -3 avec le **Programme n° 1** on obtient succesivement :
-3 puis $-3+7=4$ et enfin $6\times 4=24$

En prenant -3 avec le **Programme n° 2** on obtient successivement :
-3 puis $(-3)^2=9$, $9+3=12$ et enfin $12\times 2=24$.

$\boxed{\text{En prenant } -3 \text{ on obtient 24 avec le } \textbf{Programme n° 1} \text{ et 24 avec le } \textbf{Programme n° 2}}$

2.a. En prenant le nombre générique x avec le **Programme n° 1** on obtient succesivement :
x puis $x+7$ et enfin $6\times(x+7)=6(x+7)=6x+42$

En prenant le nombre générique x avec le **Programme n° 2** on obtient successivement :
x puis x^2, x^2+3 et enfin $2\times(x^2+3)=2(x^2+3)=2x^2+6$.

$\boxed{\text{En prenant le nombre générique } x \text{ on obtient } 6x+42 \text{ avec le } \textbf{Programme n° 1} \text{ et } 2x^2+6 \text{ avec le } \textbf{Programme n° 2}}$

3.a. $f(6)=6\times 6+42=36+42=78$, $\boxed{f(6)=78}$

$g(6)=2\times 6^2+6=2\times 36+6=72+6=78$, $\boxed{g(6)=78}$

$f(-3)=6\times(-3)+42=-18+42=24$, $\boxed{f(-3)=24}$

$g(-3)=2\times(-3)^2+6=2\times 9+6=18+6=24$, $\boxed{g(-3)=24}$

3.b. $f(0)=6\times 0+42=42$, $\boxed{f(0)=42}$

$g(-5)=6\times(-5)^2+2=6\times 25+6=150+6=156$, $\boxed{g(-5)=156}$

4.a. D'après la question **1.a.**, $\boxed{\text{5 est un antécédent de 72 par } f.}$

4.b. D'après la questions **3.a.**, $\boxed{\text{6 et } -3 \text{ sont des antécédents de 24 par } g.}$

5. $\boxed{f(6)=g(6)=78 \text{ et } f(-3)=g(-3)=24\text{, donc 6 et } -3 \text{ ont les mêmes images par } f \text{ et } g.}$

Exercice n° 2 — Correction

Développer et réduire chacune des expressions littérales suivantes :

$f(x)=3(2x+3)+5(4x+7)$
$f(x)=6x+9+20x+35$

$\boxed{f(x)=29x+44}$

$g(x)=5x(x-7)-3(2x-9)$
$g(x)=5x^2-35x-6x+27$

$\boxed{g(x)=5x^2-41x+27}$

$h(x)=7(x-4)-3x(4x-3)$
$h(x)=7x-28-12x^2+9x$

$\boxed{h(x)=12x^2+16x-28}$

$l(x)=5x^2-2(2x-1)-3x+3x(6x-1)$
$l(x)=5x^2-4x+2-3x+18x^2-3x$

$\boxed{l(x)=23x^2-10x+2}$

$k(x)=1-5(4x-1)+3x(2x-1)-x^2-2x+1$
$k(x)=1-20x+5+6x^2-3x-x^2-2x+1$

$\boxed{k(x)=5x^2-25x+2}$

Exercice n° 3 — Correction

1. Il a parcouru 171 km en 19 h 37 min 43 s.

Temps	19 h 37 min 43 s$19 \times 3600\,\text{s} + 37 \times 60\,\text{s} + 43\,\text{s} = 70\,663\,\text{s}$	3600 s
Distance	171 km	$\dfrac{171\,\text{km} \times 3600\,\text{s}}{70\,663\,\text{s}} \approx 8{,}71\,\text{km}$

$\boxed{\text{Jim Walmsley a couru 171 km à la vitesse moyenne de 8,71 km/h.}}$

2. Il a parcouru la distance en 6 h 57 min 16 s à la vitesse moyenne de 6,32 km/h.

Temps	6 h 57 min 16 s$6 \times 3600\,\text{s} + 57 \times 60\,\text{s} + 16\,\text{s} = 25\,036\,\text{s}$	3600 s
Distance	$\dfrac{25\,036\,\text{s} \times 6{,}32\,\text{km}}{3600\,\text{s}} \approx 43{,}842\,\text{km}$	$6{,}32\,\text{km}$

$\boxed{\text{Etienne Klein a couru 43,842 km.}}$

3. Elle a parcouru 171 km à la vitesse moyenne de 7,27 km/h.

Temps	$\dfrac{171\,\text{km} \times 3600\,\text{s}}{7{,}27\,\text{km}} \approx 84\,677\,\text{s}$	3600 s
Distance	$171\,\text{km}$	$7{,}27\,\text{km}$

Comme $84\,677\,\text{s} = 1411 \times 60\,\text{s} + 17\,\text{s}$ et que $1411\,\text{min} = 23 \times 60\,\text{min} + 31\,\text{min}$

$\boxed{\text{Elle a couru l'UTMB en 23 h 31 min 17 s.}}$

Bonus

Jim Walmsley a couru l'UTMB en 19 h 37 min 43 s soit 70 663 s.
Dauwalter Courtney en 23 h 31 min 17 s soit 84 677 s.
Il y a donc un écart de $84\,677\,\text{s} - 70\,663\,\text{s} = 14\,014\,\text{s}$.

Dauwalter Courtney a parcouru l'UTMB à la vitesse moyenne de 7,27 km/h.

Temps	$14\,014\,\text{s}$	3600 s
Distance	$\dfrac{7{,}27\,\text{km} \times 14\,014\,\text{s}}{3600\,\text{s}} \approx 28{,}3\,\text{km}$	$7{,}27\,\text{km}$

$\boxed{\text{Il lui restait encore 28,3 km a courrir quand Jim est arrivé !}}$

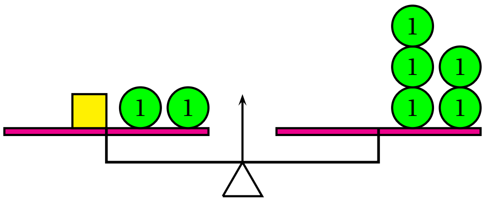
Réactivation — Équations : résolution et problèmes

Exercice n° 1 : Les balances

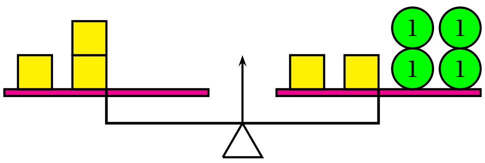
Voici des « balances Roberval »dont les deux plateaux sont en équilibre. Un cercle représente une masse unité. Un carré a une masse inconnue.
Pour chaque situation, vous devez déterminer la masse d'un carré jaune.

Dans certains cas, le carré peut avoir une masse négative…

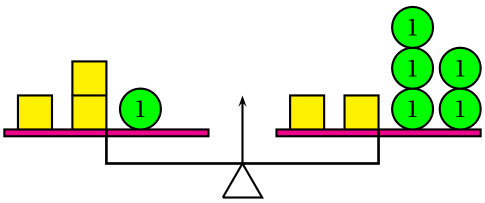
1.



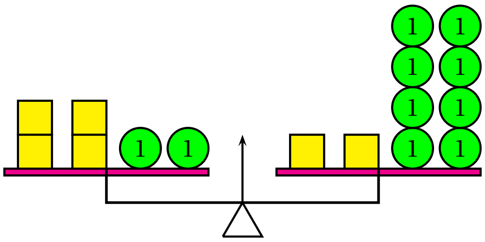
2.



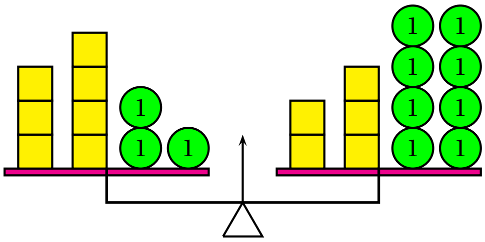
3.



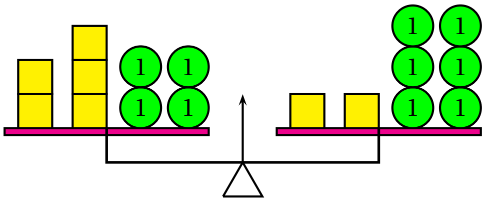
4.



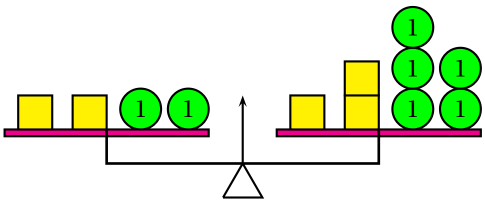
5.



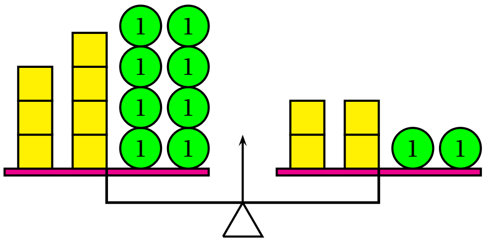
6.



7.



8.



Exercice n° 2 : Des balances aux équation

Reprendre l'exercice n° 1 en modélisant chaque situation par une équation.
On choisira la lettre x pour désigner la masse du carré.
Résoudre ensuite chacune de ces équations et vérifier votre réponse.
Par exemple pour la situation **1.**

$$x+2=5$$

$$x+2-2=5-2$$

$$x=3$$

Et on a bien le plateau n° 1 qui porte $2+3=5$ comme le plateau n° 2.

Exercice n° 3 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

Affirmation n° 1 : -3 est une solution de l'équation : $3x+1=2x-1$

Affirmation n° 2 : -1 est une solution de l'équation : $5x-7=3x-9$

Affirmation n° 3 : 2 est une solution de l'équation : $5(3x+1)=3(2x-1)$

Affirmation n° 4 : $\frac{5}{3}$ est une solution de l'équation : $6x-7=3x-2$

Affirmation n° 5 : $\frac{3}{4}$ est une solution de l'équation : $5x-8=2x-4$

Affirmation n° 6 : -3 est une solution de l'équation : $3x^2-21=2x^2+4x$

Exercice n° 4 : Résoudre des équations du premier degré

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$(1) \quad 5x+3=3x+9$$

$$(2) \quad 3x-2=x+11$$

$$(3) \quad 7x-8=10x-7$$

$$(4) \quad 7-2x=9-5x$$

$$(5) \quad -3x-9=-1+7x$$

$$(6) \quad 10x-1=1-3x$$

$$(7) \quad 9x-5=8-7x$$

$$(8) \quad 4+8x=1-4x$$

Exercice n° 5 : Problème et équation

Deux élèves ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leurs calculatrices.
Juliette multiplie le nombre par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Clément multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils constatent que leurs calculatrices affichent les mêmes nombres.

1. En notant x le nombre de départ, exprimer à l'aide de x les calculs effectués par Juliette.
2. Exprimer en utilisant la lettre x les calculs effectués par Clément.
3. En résolvant une équation qui utilise les expressions des questions **1.** et **2.**, trouver quel était le nombre affiché au départ sur les deux calculatrices.
4. Vérifier le résultat obtenu en reprenant les étapes de l'énoncé.

Exercice n° 6 : Problème et équation — Épisode 2

Deux élèves ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leurs calculatrices.
Alice multiplie le nombre par 6 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Adrien multiplie le nombre par 2 puis ajoute 10.
Quand ils ont terminé, ils constatent que leurs calculatrices affichent les mêmes nombres.

Quel était le nombre affiché au départ ?

Exercice n° 7 : Problème et équation — Épisode 3

Je pense à un nombre. Son double augmenté de 16 est égal à son triple diminué de 21.

Quel est ce nombre ?

Exercice n° 8 : Problème et équation — Épisode 4

Trois personnes se partagent un héritage de 1 900 € .
La seconde personne reçoit 70 € de plus que la première.
La troisième personne reçoit le double de la part de la première moins 150 €.

Calculer la part de chaque personne.

Exercice n° 9 : Problème et équation — Épisode 5

a. Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 129.

b. Trouver cinq nombres entiers consécutifs dont la somme est 455.

c. Trouver trois nombres entiers pairs consécutifs dont la somme est 144.

d. Trouver trois nombres entiers impairs consécutifs dont la somme est 633.

Deux nombres entiers sont consécutifs « s'ils se suivent » comme 10 *et* 11 *ou* 101 *et* 102.

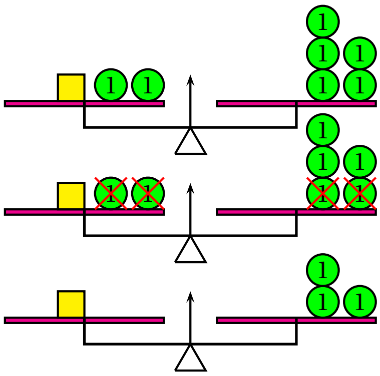
Exercice n° 10 : Trop difficile !!

Un père a 42 ans. Il a trois enfants qui ont respectivement 4 ans, 9 ans et 11 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera exactement égal à la somme des âges de ses trois enfants ?

Réactivation — **Équations : résolution et problèmes** — Correction

Exercice n° 1 et 2 : Les balances Correction

1.

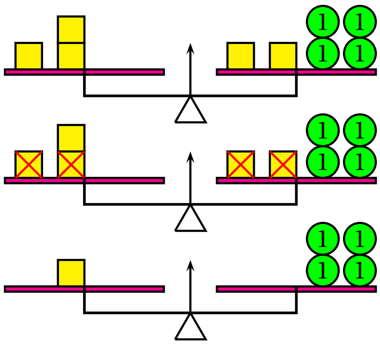


$$x+2=5$$

$$x+2{\color{red}-2}=5{\color{red}-2}$$

$$x=3$$

2.

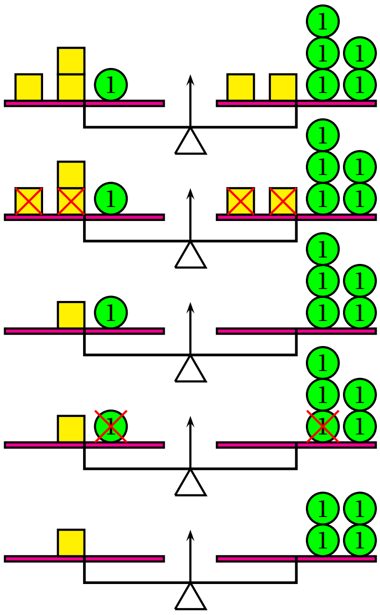


$$3x=2x+4$$

$$3x{\color{red}-2x}=2x+4{\color{red}-2x}$$

$$x=4$$

3.



$$3x+1=2x+5$$

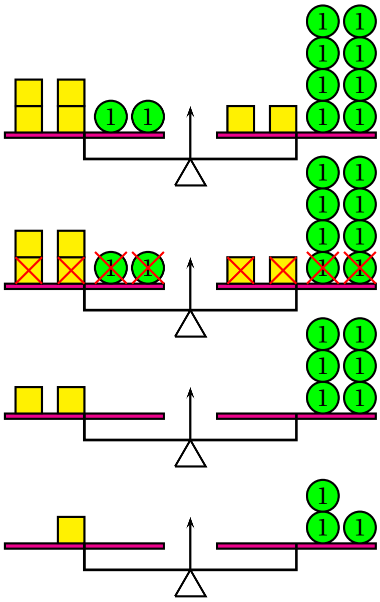
$$3x+1{\color{red}-2x}=2x+5{\color{red}-2x}$$

$$x+1=5$$

$$x+1{\color{red}-1}=5{\color{red}-1}$$

$$x=4$$

4.



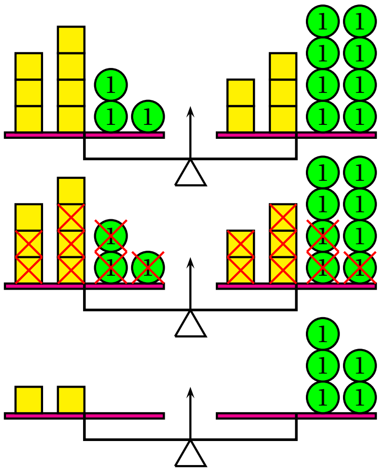
$$4x+2=2x+8$$

$$4x+2-2x-2=2x+8-2x-2$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

5.



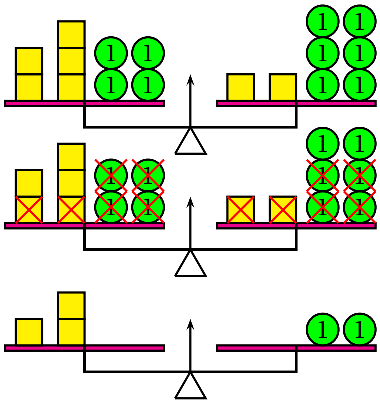
$$7x+3=5x+8$$

$$7x+3-5x-3=5x+8-5x-3$$

$$2x=5$$

$$x=2,5$$

6.



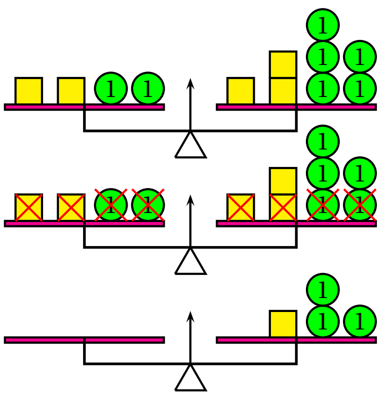
$$5x+4=2x+6$$

$$5x+4-2x-4=2x+6-2x-4$$

$$3x=2$$

$$x=\frac{2}{3}$$

7.



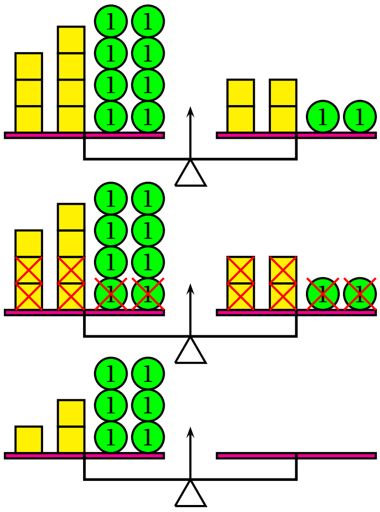
$$2x+2=3x+5$$

$$2x+2-2x-2=3x+5-2x-2$$

$$0=x+3$$

$$x=-3$$

8.



$$7x+8=4x+2$$

$$7x+8-4x-2=4x+2-4x-2$$

$$3x+6=0$$

$$3x=-6$$

$$x=-2$$

Exercice n° 3 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation

Correction

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

Affirmation n° 1 : -3 est une solution de l'équation : $3x+1=2x-1$

Pour $x=-3$,
$3x+1=3\times(-3)+1=-9+1=-8$
$2x-1=2\times(-3)-1=-6-1=-7$

$\boxed{-3 \text{ n'est pas une solution de l'équation}}$

Affirmation n° 2 : -1 est une solution de l'équation : $5x-7=3x-9$

Pour $x=-1$,
$5x-7=5\times(-1)-7=-5-7=-12$
$3x-9=3\times(-1)-9=-3-9=-12$

$\boxed{-1 \text{ est une solution de l'équation.}}$

Affirmation n° 3 : 2 est une solution de l'équation : $5(3x+1)=3(2x-1)$

Pour $x=2$,
$5(3x+1)=5(3\times2+1)=5(6+1)=5\times7=35$
$3(2x-1)=3(2\times2-1)=3(4-1)=3\times3=9$

$\boxed{2 \text{ n'est pas une solution de l'équation ;}}$

Affirmation n° 4 : $\dfrac{5}{3}$ est une solution de l'équation : $6x-7=3x-2$

Pour $x=\dfrac{5}{3}$,

$6x-7=6\times\dfrac{5}{3}-7=\dfrac{30}{3}-7=10-7=3$

$3x-2=3\times\dfrac{5}{3}-2=5-2=3$

$\boxed{\dfrac{5}{3} \text{ est une solution de l'équation.}}$

Affirmation n° 5 : $\dfrac{3}{4}$ est une solution de l'équation : $5x-8=2x-4$

Pour $x = \frac{3}{4}$,

$5x - 8 = 5 \times \frac{3}{4} - 8 = \frac{15}{4} - \frac{32}{4} = -\frac{17}{4}$

$2x - 4 = 2 \times \frac{3}{4} - 4 = \frac{6}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{18}{4}$

$\boxed{\frac{3}{4} \text{ n'est pas une solution de l'équation.}}$

Affirmation n° 6 : -3 est une solution de l'équation : $3x^2 - 21 = 2x^2 + 4x$

Pour $x = -3$,
$3x^2 - 21 = 3 \times 3 \times (-3)^2 - 21 = 3 \times 9 - 21 = 27 - 21 = 6$
$2x^2 + 4x = 2 \times (-3)^2 + 4 \times (-3) = 2 \times 9 - 12 = 18 - 12 = 6$

$\boxed{-3 \text{ est une solution de l'équation.}}$

Exercice n° 4 : Résoudre des équations du premier degré — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
5x + 3 &= 3x + 9 \\
5x + 3 {\color{red}-3x} &= 3x + 9 {\color{red}-3x} \\
2x + 3 &= 9 \\
2x + 3 {\color{red}-3} &= 9 {\color{red}-3} \\
2x &= 6 \\
x &= \frac{6}{2} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$\boxed{3 \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
7x - 8 &= 10x - 7 \\
7x - 8 {\color{red}-10x} &= 10x - 7 {\color{red}-10x} \\
-3x - 8 &= -7 \\
-3x - 8 {\color{red}+8} &= -7 {\color{red}+8} \\
-3x &= 1 \\
x &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{-\frac{1}{3} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
3x - 2 &= x + 11 \\
3x - 2 {\color{red}-x} &= x + 11 {\color{red}-x} \\
2x - 2 &= 11 \\
2x - 2 {\color{red}+2} &= 11 {\color{red}+2} \\
2x &= 13 \\
x &= \frac{13}{2} \\
x &= 6,5
\end{aligned}$$

$\boxed{6,5 \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
7 - 2x &= 9 - 5x \\
7 - 2x {\color{red}+5x} &= 9 - 5x {\color{red}+5x} \\
7 + 3x &= 9 \\
7 + 3x {\color{red}-7} &= 9 {\color{red}-7} \\
3x &= 2 \\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\frac{2}{3} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}-3x-9&=-1+7x\\-3x-9-7x&=-1+7x-7x\\-10x-9&=-1\\-10x-9+9&=-1+9\\-10x&=8\\x&=-\frac{8}{10}\\x&=-0,8\end{aligned}$$

$\boxed{-0,8 \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}9x-5&=8-7x\\9x-5+7x&=8-7x+7x\\16x-5&=8\\16x-5+5&=8+5\\16x&=13\\x&=\frac{13}{16}\end{aligned}$$

$\boxed{\frac{13}{16} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}10x-1&=1-3x\\10x-1+3x&=1-3x+3x\\13x-1&=1\\13x-1+1&=1+1\\13x&=2\\x&=\frac{2}{13}\end{aligned}$$

$\boxed{\frac{2}{13} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}4+8x&=1-4x\\4+8x+4x&=1-4x+4x\\4+12x&=1\\4+12x-4&=1-4\\12x&=-3\\x&=-\frac{3}{12}\\x&=-0,25\end{aligned}$$

Exercice n° 5 : Problème et équation

Correction

1. Juliette effectue $3 \times x = 3x$ puis $3x + 4$.
2. Clément effectue $2x$ puis $2x + 7$.
3. Il faut résoudre :

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 2x + 7 \\ 3x + 4 - 4 &= 2x + 7 - 4 \\ 3x &= 2x + 3 \\ 3x - 2x &= 2x + 3 - 2x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

4. Vérifions :
Juliette a effectué : $3 \times 3 = 9$ puis $9 + 4 = 13$
Clément a effectué : $2 \times 3 = 6$ puis $6 + 7 = 13$
Il s'agit bien de la réponse au problème !

Exercice n° 6 : Problème et équation — Épisode 2

Correction

Notons z le nombre affiché sur la calculatrice.
Alice effectue $6z$ puis $6z + 7$.
Adrien effectue $2z$ puis $2z + 10$
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 6z + 7 &= 2z + 10 \\ 6z + 7 - 7 &= 2z + 10 - 7 \\ 6z &= 2z + 3 \\ 6z - 2z &= 2z + 3 - 2z \\ 4z &= 3 \\ z &= \frac{3}{4} \\ z &= 0,75 \end{aligned}$$

Vérifions :
Alice effectue $6 \times 0,75 = 4,5$ puis $4,5 + 7 = 11,5$.
Adrien effectue $2 \times 0,75 = 1,5$ puis $1,5 + 10 = 11,5$.
Il s'agit donc bien du nombre cherché !

Exercice n° 7 : Problème et équation — Épisode 3

Correction

Notons x le nombre auquel je pense.
Son double est $2x$. On augmente de 16 soit $2x+16$.
Son triple est $3x$. On diminue de 21 soit $3x-21$
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
2x+16&=3x-21\\
2x+16-3x&=3x-21-3x\\
-x+16&=-21\\
-x+16-16&=-21-16\\
-x&=-37\\
x&=37
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat :
$37\times 2=74$ puis $74+16=90$
$37\times 3=111$ puis $111-21=90$
Il s'agit bien du nombre cherché !

Exercice n° 8 : Problème et équation — Épisode 4

Correction

Notons x le montant de l'héritage reçu par la première personne en euros.
La seconde personne reçoit donc $x+70$ euros.
La troisième personne reçoit $2x-150$ euros.
Finalement en faisant la somme des trois parts on arrive à l'équation :

$$\begin{aligned}
x+x+70+2x-150&=1\,900\\
4x-80&=1\,900\\
4x-80+80&=1\,900+80\\
4x&=1\,980\\
x&=\frac{1\,980}{4}\\
x&=495
\end{aligned}$$

Vérifions :
La première personne reçoit 495 €.
La seconde reçoit 495 € +70 € = 565 €.
La troisième reçoit 2×495 € $-150=990$ € -150 € 840 €.
La somme des trois héritages est : 495 € +565 € +840 € = 1 900.
Il s'agit bien de la réponse attendue !

a. Notons a le premier nombre entier cherché.
$a+1$ et $a+2$ sont les deux autres entiers consécutifs.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
a+a+1+a+2 &= 129\\
3a+3 &= 129\\
3a+3-3 &= 129-3\\
3a &= 126\\
a &= \frac{126}{3}\\
a &= 42
\end{aligned}$$

Le premier nombre est 42, le second 43 et le troisièmes 44.
On a bien $42+43+44=129$!

b. Notons b le premier nombre entier cherché.
$b+1$, $b+2$, $b+3$ et $b+4$ sont les quatre autres entiers consécutifs.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
b+b+1+b+2+b+3+b+4 &= 455\\
5b+10 &= 455\\
5b+10-10 &= 455-10\\
5b &= 445\\
b &= \frac{445}{5}\\
b &= 89
\end{aligned}$$

Le premier nombre est 89, le second 90, le troisièmes 91, le quatrième 92 et le cinquième 93.
On a bien $89+90+91+92+93=455$!

c. Notons c le premier nombre entier pair cherché.
Le suivant est $c+2$ et le dernier $c+4$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
c+c+2+c+4 &= 144\\
3c+6 &= 144\\
3c+6-6 &= 144-6\\
3c &= 138\\
c &= \frac{138}{3}\\
c &= 46
\end{aligned}$$

Le premier nombre est 46, le second 48 et le troisièmes 30.
On a bien $46+48+50=144$!

d. Notons d le premier nombre entier impair cherché.
$d+2$ est le suivant et $d+4$ le dernier.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
d+d+2+d+4 &= 633\\
3d+6 &= 633\\
3d+6-6 &= 633-6\\
3d &= 627\\
d &= \frac{627}{3}\\
d &= 209
\end{aligned}$$

Le premier nombre est 209, le second 211 et le troisièmes 213.
On a bien $209+211+213=633$!

Exercice n° 10 : Trop difficile !! Correction

Notons n le nombre d'années que l'on cherche.
Dans n années le père aura $42+n$ ans.
Le benjamin aura $4+n$ ans, le cadet $9+n$ ans et l'aîné $11+n$ ans.
Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
4+n+9+n+11+n &= 42+n\\
3n+24 &= 42+n\\
3n+24-24 &= 42+n-24\\
3n &= 18+n\\
3n-n &= 18-n\\
2n &= 18\\
n &= 9
\end{aligned}$$

Dans 9 ans le père aura 51 ans, le benjamin 13 ans, le cadet 18 ans et l'aîné 20 ans.
On constate que $13+18+20=51$.
Cet événement aura bien lieu dans 9 ans !

Généralités sur les fonctions

Définition et vocabulaire

Une **fonction** est un programme de calcul qui à un nombre de départ associe un unique résultat.

On note $f : x \to f(x)$ la fonction f qui à un nombre de départ x associe $f(x)$.

On dit que :

— $f(x)$ est l'**image** du nombre x par la fonction f ;

— x a pour **image** le nombre $f(x)$ par la fonction f ;

— x est un **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f ;

— $f(x)$ a pour **antécédent** x par la fonction f.

Exemple :

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre ;

— ajouter 1 ;

— multiplier par le nombre de départ ;

— enlever 23 ;

— écrire le résultat.

On note x le nombre de départ.
On obtient successivement :

— x ;

— $x+1$;

— $x(x+1)$;

— $x(x+1)-23$.

f la fonction correspondante :

$$f : x \to f(x) = x(x+1)-23$$

En prenant $x = 5$ au départ, on obtient $5 \times (5+1) - 23 = 5 \times 6 - 23 = 30 - 23 = 7$.

On note $f(5) = 7$.

On dit que :

— 7 est l'image de 5 par la fonction f ;

— 5 a pour image 7 par la fonction f ;

— 5 est un antécédent de 7 par la fonction f ;

— 7 a pour antécédent 5 par la fonction f.

Remarque :
Un nombre peut posséder plusieurs antécédents par une fonction.
Par exemple, $f(-6) = (-6) \times ((-6)+1) - 23 = (-6) \times (-5) - 23 = 30 - 23 = 7$.
5 et -6 sont deux antécédents de 7 par la fonction f.

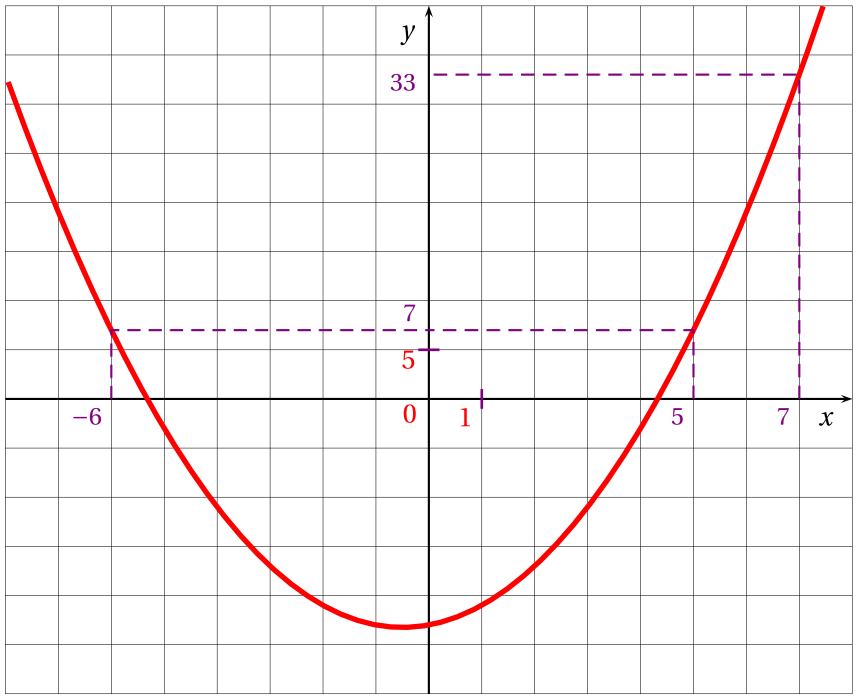
On représente souvent une fonction par un tableau contenant certaines de ses valeurs.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	19	7	-3	-11	-17	-21	-23	-23	-21	-17	-11	-3	7	19	33

On voit par exemple que 33 est l'image de 7, que -1 et 0 sont deux antécédents de -23.

Représentation graphique d'une fonction

La représentation graphique de la fonction f est la figure de géométrie constituée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ où x est un nombre quelconque.



Remarque :

Une fonction peut-être définie sous plusieurs formes :

— Un programme de calcul ;

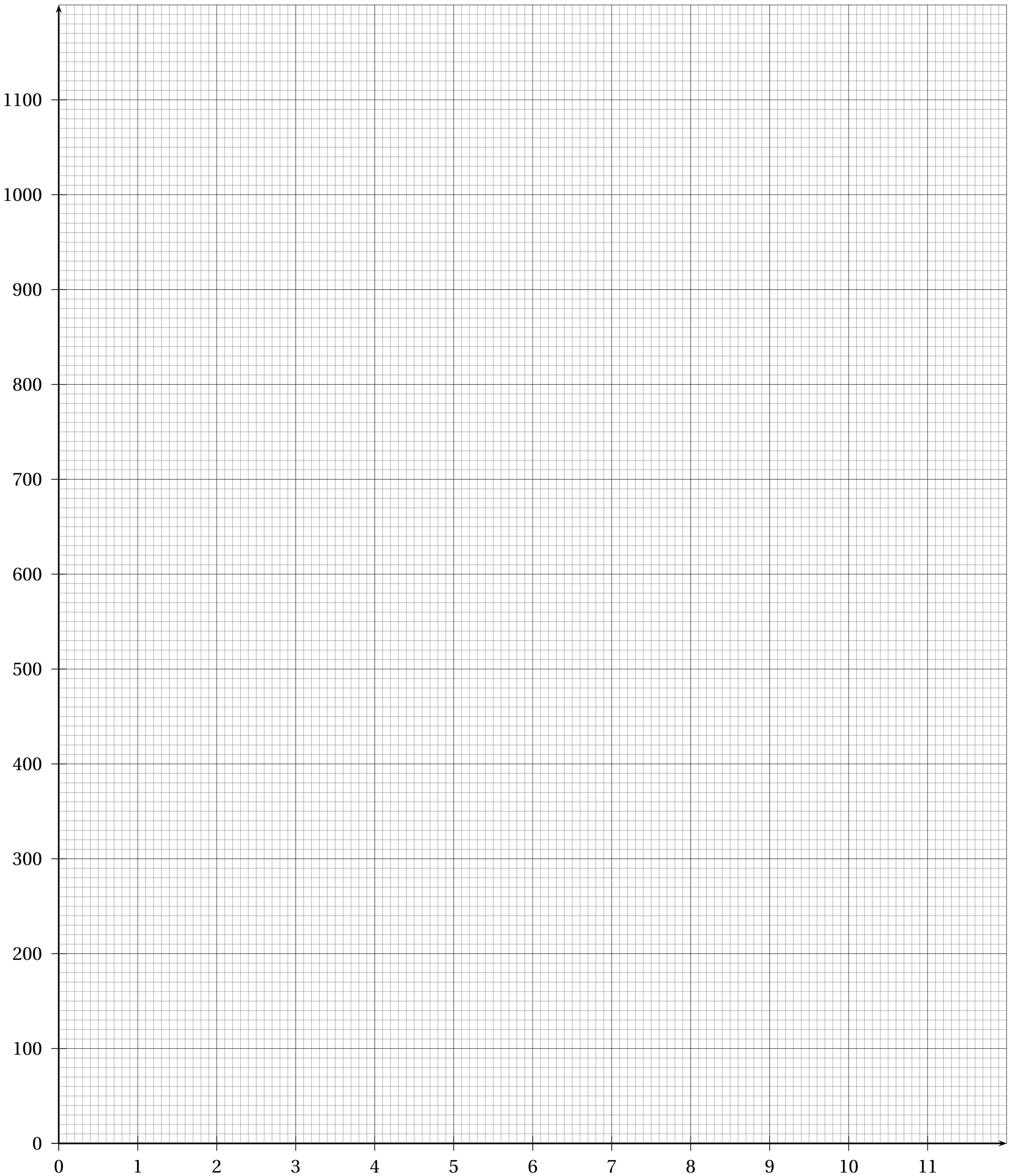
— Une expression littérale ;

— Un tableau de valeurs ;

— Une représentation graphique.

III — Annexes

1 Documents pratiques



Chapitre IV

Le théorème de Thalès

Sommaire

Situation initiale : La tour Eiffel 140
I Le théorème de Thalès – Version triangle 141
II Le théorème de Thalès – Version générale 143
III La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès 144
IV Application aux triangles semblables 144
Exercices 146
Réactivation 151
Exercices 151
Exercices 155
Exercices 159
Évaluation : Arithmétique, développement, Thalès et vitesse 163
Évaluation : Pythagore et lecture graphique 167
Évaluation : Pythagore et lecture graphique 170
Évaluation : Calcul littéral, Pythagore et Thalès 174
Évaluations 178
Théorème de Thalès — 20 min 178
Théorème de Thalès — Fonctions — 1 h 180
Théorème de Thalès — Développement — 1 h 183
Fiche de synthèse : Le théorème de Thalès 223

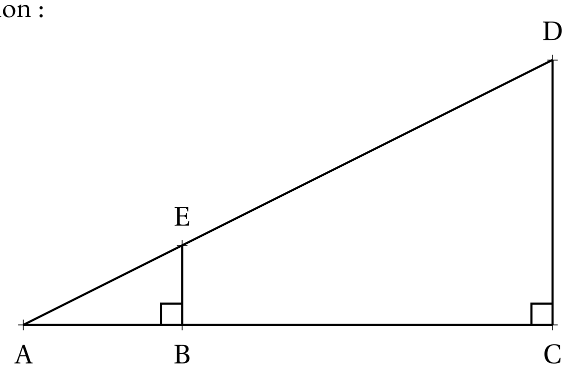
Situation initiale : La tour Eiffel

À quelle distance de la Tour Eiffel cette photo a-t-elle été prise ?

1. On estime les grandeurs de cette situation :

- La Tour Eiffel mesure 324 m;
- l'ouverture entre les doigts mesure 18 cm;
- le téléphone prenant la photo se situe à 80 cm de la main.

Voici une proposition de modélisation :



Compléter cette figure avec les grandeurs estimées.

On cherche à évaluer la grandeur BC. On pose BC = x

2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles ABE, ACD et du quadrilatère BCDE.

3. Montrer que x est la solution de l'équation :

$$162(0,8+x) = 0,072 + 162,09x$$

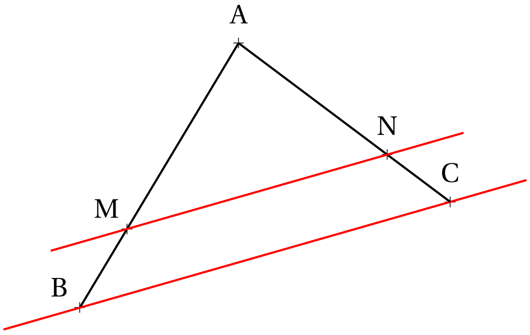
4. Résoudre cette équation et en déduire AC

5. Calculer AE et AD.

6. Montrer que les mesures du triangle ABE sont proportionnelles à celles du triangle ACD.

I — Le théorème de Thalès – Version triangle

Théorème 4.1 : Théorème de Thalès

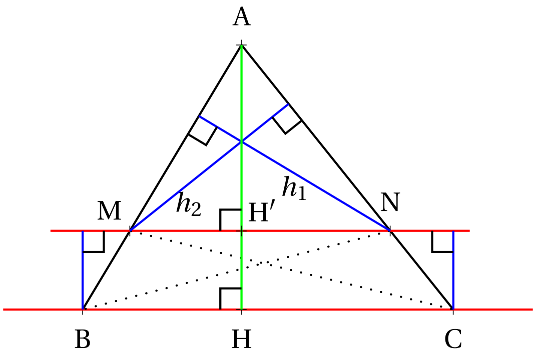


Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

Démonstration :

Voici un première démonstration :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.
$Aire(\mathrm{MNB}) = Aire(\mathrm{MNC})$

$Aire(\mathrm{AMN}) = \mathrm{AM} \times h_1$ et $Aire(\mathrm{ABN}) = \mathrm{AB} \times h_1$ ainsi $\dfrac{Aire(\mathrm{AMN})}{Aire(\mathrm{ABN})} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

$Aire(\mathrm{AMN}) = \mathrm{AN} \times h_2$ et $Aire(\mathrm{ACM}) = \mathrm{AC} \times h_2$ ainsi $\dfrac{Aire(\mathrm{AMN})}{Aire(\mathrm{ACM})} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

On constate que $Aire(\mathrm{ABN}) = Aire(\mathrm{AMN}) + Aire(\mathrm{MNB})$ et que $Aire(\mathrm{ACM}) = Aire(\mathrm{AMN}) + \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNC})$
Comme $Aire(\mathrm{MNB}) = Aire(\mathrm{MNC})$ on prouve ainsi que $Aire(\mathrm{ABN}) = Aire(\mathrm{ACM})$

Finalement $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.
On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}}$
De même dans le triangle AHC, on obtient $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc $Aire(\mathrm{NH'C}) = Aire(\mathrm{NH'H})$

Ainsi $Aire(\mathrm{AH'C}) = Aire(\mathrm{AHN})$ c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{AH'} \times \mathrm{HC}}{2} = \dfrac{\mathrm{AH} \times \mathrm{H'N}}{2}$.

On prouve ainsi que $\mathrm{AH'} \times \mathrm{HC} = \mathrm{AH} \times \mathrm{H'N}$ et d'après l'égalité des produits en croix $\dfrac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$

On prouve de même que $\dfrac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}}$.

Nous avons donc $\dfrac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \dfrac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$ or on sait que $\mathrm{H'M} + \mathrm{H'N} = \mathrm{MN}$ et que $\mathrm{HB} + \mathrm{HC} = \mathrm{BC}$

Comme $\dfrac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \dfrac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$ on a :

$$\mathrm{H'M} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{HB}$$

Ajoutons $\mathrm{H'N} \times \mathrm{HC}$ à chaque membre de l'égalité :

$$\begin{gathered}
\mathrm{H'M} \times \mathrm{HC} + \mathrm{H'N} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{HB} + \mathrm{H'N} \times \mathrm{HC} \\
(\mathrm{H'M} + \mathrm{H'N}) \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times (\mathrm{HB} + \mathrm{HC}) \\
\mathrm{MN} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{BC}
\end{gathered}$$

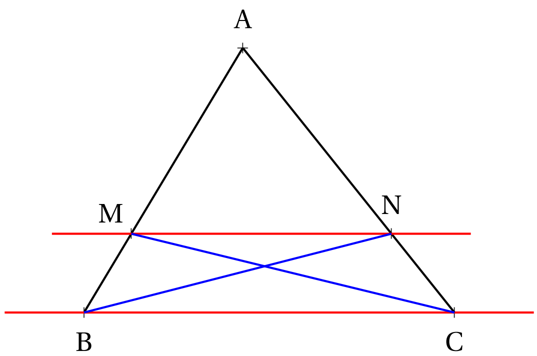
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\dfrac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \dfrac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}} = \dfrac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

CQFD

Démonstration :

Une deuxième version qui utilise les céviennes comme dans les exercices 3.1 à 3.7 :



Dans le triangle ABC, [MC] est une cévienne.
Les triangles ABC et AMC ont la même hauteur dont on peut noter h la mesure.

Ainsi $Aire(\mathrm{AMC}) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AM} \times h$ et $Aire(\mathrm{ABC}) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times h$.

On en déduit que $\dfrac{Aire(\mathrm{AMC})}{Aire(\mathrm{ABC})} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \mathrm{AM} \times h}{\frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times h} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

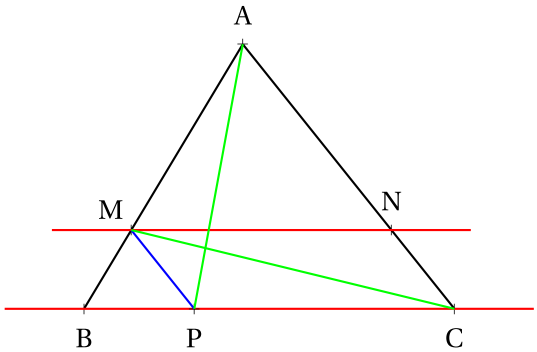
De même dans le triangle ABC, [NB] est une cévienne.

On en déduit que $\dfrac{Aire(\mathrm{ANB})}{Aire(\mathrm{ABC})} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

On constate aussi que $Aire(\mathrm{AMC}) = Aire(\mathrm{AMN}) + Aire(\mathrm{MNB})$ et que $Aire(\mathrm{ANB}) = Aire(\mathrm{AMN}) + Aire(\mathrm{MNC})$.

Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, les triangles MNB et MNC ont la même hauteur et la même base. Leurs aires sont donc égales.

On en déduit que $Aire(\mathrm{AMC}) = Aire(\mathrm{ANB})$ et finalement que $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$.



On trace la parallèle à (AC) passant par M, elle coupe [BC] en P.

Les triangles AMC et APC ont la même base et la même hauteur puisque les droites (AC) et (MP) sont parallèles. Ces deux triangles ont donc la même aire.

Dans le triangle ABC, [MC] est une cévienne. On a donc $\dfrac{\mathit{Aire}(\mathrm{AMC})}{\mathit{Aire}(\mathrm{ABC})} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$.

Dans le triangle ABC, [PA] est une cévienne. On a donc $\dfrac{\mathit{Aire}(\mathrm{APC})}{\mathit{Aire}(\mathrm{ABC})} = \dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}}$.

Le quadrilatère MNPC a ses côtés parallèles deux à deux, il s'agit donc d'un parallèlogramme.
Ainsi MN = PC.

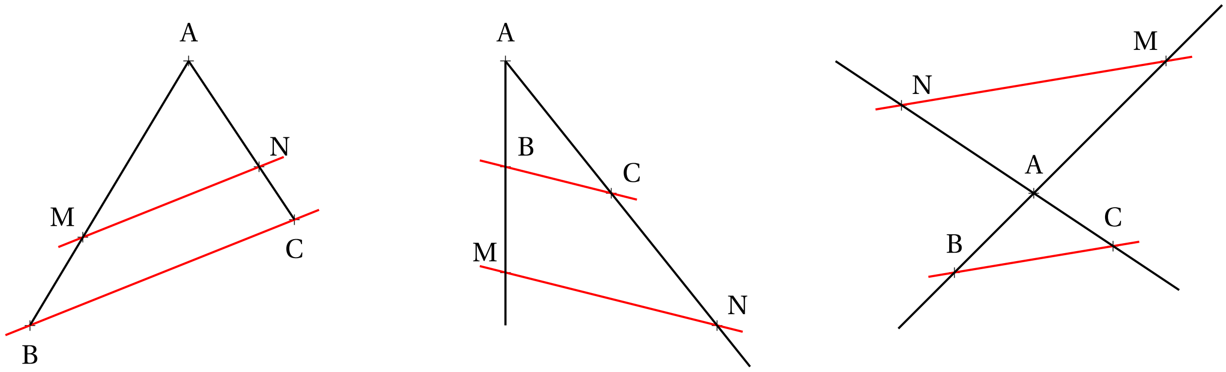
On arrive ainsi à $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{PC}}$.

Finalement, $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

CQFD

II — Le théorème de Thalès – Version générale

Théorème 4.2 : Théorème de Thalès



Si deux droites (MB) et (NC) sont sécantes en A et (MN)//(BC)
alors les mesures des triangles AMN et ABC sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

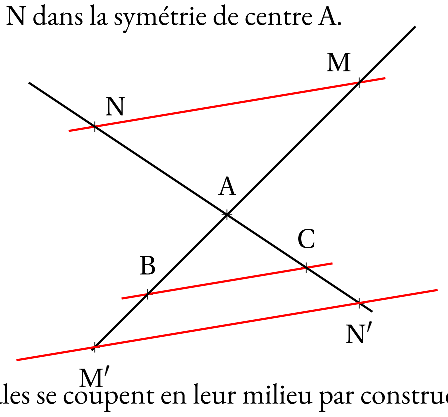
Démonstration :

Il y a trois possibilités liées à l'ordre des points :

Premier cas : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$
Il s'agit de la situation étudiée en première partie, on applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

Second cas : $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$
Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AMN. Comme $(BC)//(MN)$ on a $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$
Comme ces trois quotients sont égaux, leurs inverses le sont aussi. D'où le résultat.

Troisième cas : $M \in (AB)$ et $N \in [AC)$ mais $M \notin [AB)$ et $N \notin [AC)$
Considérons les symétriques M' et N' de M et N dans la symétrie de centre A.



$MNN'M'$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu par construction, il s'agit donc d'un parallélogramme.
Nous avons donc $MN = M'N'$ et $(MN)//(M'N')$.
Or $(MN)//(BC)$. On sait que si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Ainsi $(M'N')//(BC)$.
Comme dorénavant $M' \in [AB)$ et $N' \in [AC)$ on peut appliquer le théorème de Thalès et on a $\dfrac{AM'}{AB} = \dfrac{AN'}{AC} = \dfrac{M'N'}{BC}$
Et comme $M'N' = MN$, $AM' = AM$ et $AN' = AN$ on obtient le résultat attendu.

CQFD

III — La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

IV — Application aux triangles semblables

Définition 4.1 :

Triangles semblables

On dit que deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels.

Propriété 4.1 : Agrandissement ou réduction *(Admise)*

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si il existe un nombre positif non nul k tel que $A'B' = k AB$, $A'C' = k AC$ et $B'C' = k BC$

k est un coefficient d'agrandissement/réduction.
Si $0 < k < 1$ alors $A'B'C'$ est une réduction du triangle ABC.
Si $k > 1$ alors $A'B'C'$ est un agrandissement du triangle ABC.
Si $k = 1$ alors ABC et $A'B'C'$ sont des triangles égaux.

Démonstration :

À rédiger !

CQFD

Propriété 4.2 : Triangles semblables et angles *(Admise)*

Deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles égaux.

Démonstration :

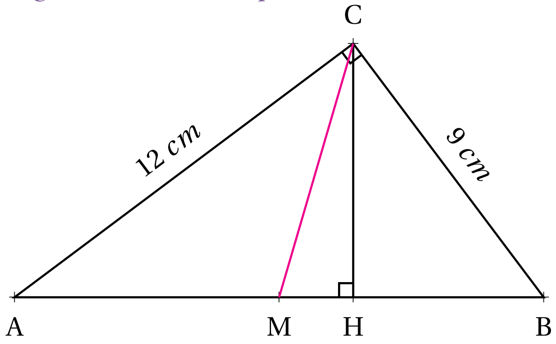
À rédiger !

CQFD

❋ Exercices ❋

Exercice n° 4.1 : Une histoire de cévienne — Épisode 1

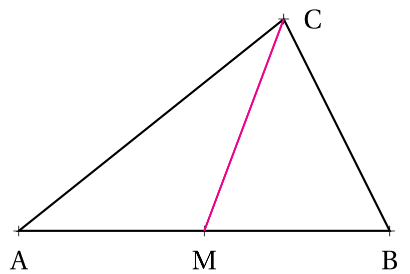
Dans un triangle, une cévienne est un segment joignant un sommet et un côté opposé. Les hauteurs, médianes et bissectrices d'un triangle sont des céviennes particulières. Le mot cévienne vient de Giovanni Céva (1647-1734) un mathématicien italien.



Le triangle ABC est rectangle en C.
H est le pied de la hauteur [HC].
M est le milieu du segment [AB].

1. Calculer *Aire*(ABC), l'aire du triangle ABC.
2. Calculer la longueur AB.
3. En déduire la longueur de la hauteur [HC].
4. Calculer *Aire*(AMC) l'aire du triangle AMC.
5. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 4.2 : Une histoire de cévienne — Épisode 2



ABC est un triangle quelconque.
M est le milieu du segment [AB]

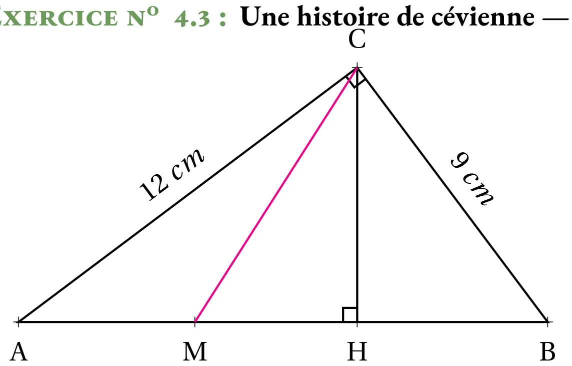
1. Tracer la hauteur issue du sommet C. On note h la longueur de ce segment.

2. Déterminer la fraction $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}}$.

3. Exprimer en fonction de h les aires *Aire*(AMC) et *Aire*(ABC).

4. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 4.3 : Une histoire de cévienne — Épisode 3

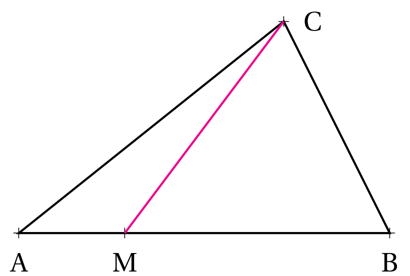


Le triangle ABC est rectangle en C.
H est le pied de la hauteur [HC].
M ∈ [AB] et AM = 5 cm.

1. En utilisant l'**Exercice 3.1**, calculer *Aire*(AMC) l'aire du triangle AMC.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 4.4 : Une histoire de cévienne — Épisode 4



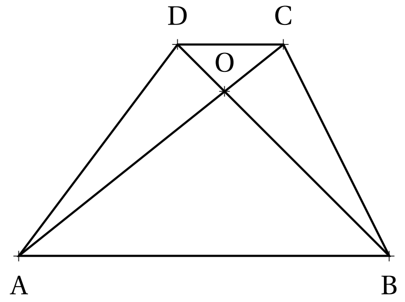
ABC est un triangle quelconque.
M est le milieu du segment [AB]

1. Tracer la hauteur issue du sommet C. On note h la longueur de ce segment.

2. Exprimer en fonction de h les aires *Aire*(AMC) et *Aire*(ABC).

3. Simplifier la fraction $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})}$

Exercice n° 4.5 : Thalès et les aires — Épisode 1



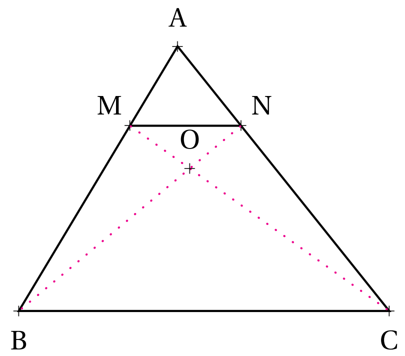
ABCD est un trapèze

1. Tracer la hauteur issue du sommet A du triangle ADC puis tracer la hauteur issue du sommet B du triangle BDC.

2. Démontrer que les aires *Aire*(ADC) et *Aire*(BDC) sont égales.

3. En déduire que les aires *Aire*(ODA) et *Aire*(BOC) sont égales.

Exercice n° 4.6 : Thalès et les aires — Épisode 2



ABC est un triangle
M ∈ [AB] et N ∈ [AC]
(MN)//(BC)

1. En utilisant l'**Exercice 3.5** indiquer deux triangles dont les aires sont égales.

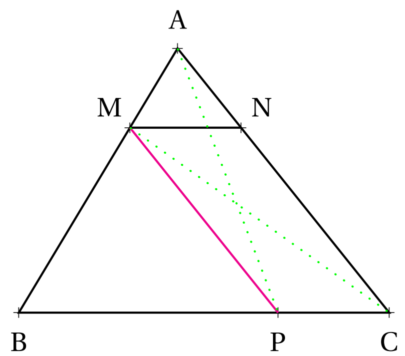
2. Démontrer que les aires *Aire*(AMC) et *Aire*(ANB) sont égales.

3. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{Aire(AMN)}{Aire(ANB)}$.

4. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{Aire(AMN)}{Aire(AMC)}$.

5. Conclure en montrant que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Exercice n° 4.7 : Thalès et les aires — Épisode 3



ABC est un triangle
M ∈ [AB] et N ∈ [AC]
(MN)//(BC)
P ∈ [BC] et (MP)//(AC)

1. En utilisant l'**Exercice 3.5**, comparer les aires *Aire*(APC) et *Aire*(AMC)

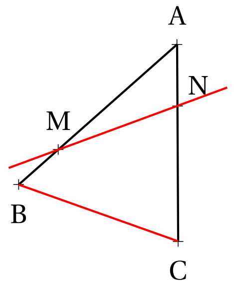
2. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{Aire(AMC)}{Aire(ABC)}$.

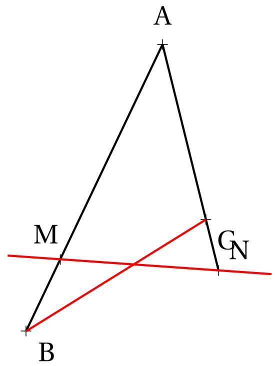
3. En utilisant l'**Exercice 3.4** montrer que $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{Aire(APC)}{Aire(ABC)}$.

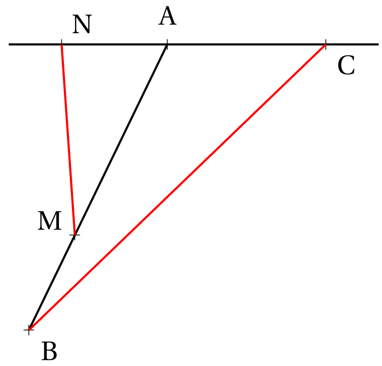
4. Montrer que PC = MN.

5. Conclure en montrant que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$

Exercice n° 4.8 : Collection de cas pathologiques







1. Pour chacune des figures suivantes :

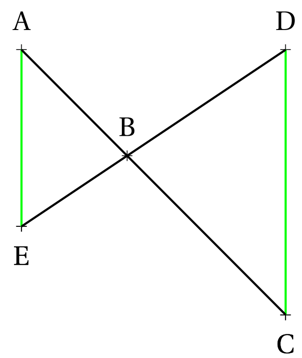
— mesurer les longueurs AB, AC, BC, AM, AN et MN;

— calculer les quotients $\frac{\text{AM}}{\text{AB}}$, $\frac{\text{AN}}{\text{AC}}$ et $\frac{\text{MN}}{\text{BC}}$

2. Que constatez-vous pour chaque figure ? Quelles explications pouvez-vous donner ?

3. Corriger chacune des figures en déterminant une nouvelle position pour le point N.

Exercice n° 4.9 : Un cas singulier



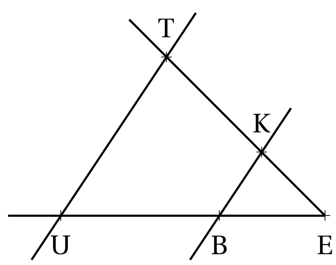
Sur la figure ci-après, les droites (AC) et (DE) sont sécantes en B.

On sait que :

— BA = 55 m
— BC = 89 m
— BE = 34 m
— BD = 55 m

Les droites (AE) et (DC) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 4.10 : Thalès triangle



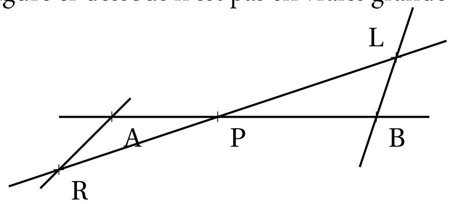
Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

— (TK) et (UB) sont sécantes en E;
— BE = 5 m, UE = 12 m, BK = 4 m et TE = 10 m;
— (UT)//(BK)

Calculer les valeurs exactes de UT et KE et,le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

Exercice n° 4.11 : Thalès papillon

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;

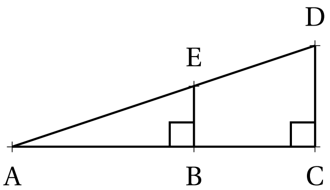
— LB = 2 cm, AR = 3 cm, PB = 1 cm et PR = 5 cm;

— (AR)//(LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AP et,le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

Exercice n° 4.12 : Thalès ou Pythagore ?

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— ABE est rectangle en B ;

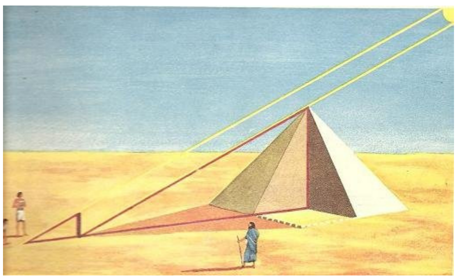
— ACD est rectangle en C ;

— AB = 36 m, AE = 60 m, DC = 72 m.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

Exercice n° 4.13 : La légende de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.
Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :
« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».



Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

— la canne de Thalès mesurait 3 coudées ;

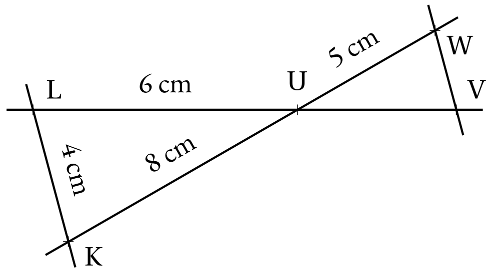
— l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées ;

— la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide ;

— une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer ?

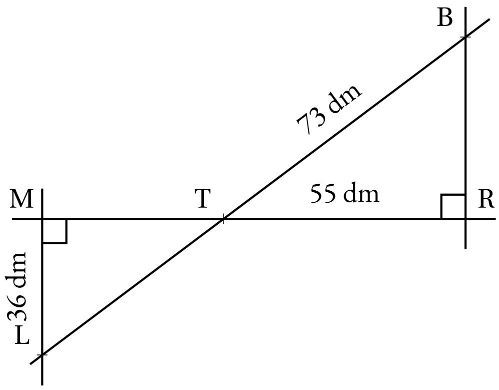
Exercice n° 4.14 : Thalès Papillon



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que (VW)//(LK) et que les droites (LV) et (KW) sont sécantes en U.

Donner les valeurs exactes des longueurs UV et WV puis une valeur approchée au dixième près.

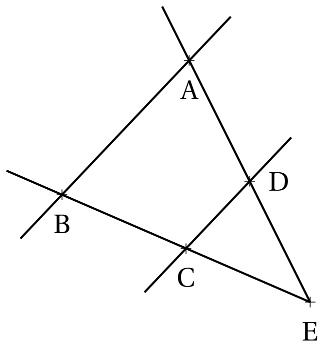
Exercice n° 4.15 : Thalès et Pythagore



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeurs, on sait que (BL) et (MR) sont sécantes en T et que les droites (BR) et (ML) sont perpendiculaires à la droite (MR).

Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au centième près des longueurs : BR puis TM et TL.

Exercice n° 4.16 : Parallèle ou pas ?

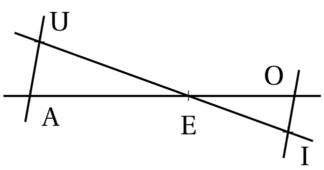


Sur la figure ci-contre on sait que les droites (BC) et (AD) sont sécantes en E de plus on a :

- EC = 55 m, EB = 89 m
- ED = 34 m, EA = 55 m
- DC = 48 m, AB = 77 m

Les droites DC) et (AB) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 4.17 : Parallèle ou pas ? — Épisode 2



Sur la figure ci-après on sait que les droites (UI) et (AO) sont sécantes en E. De plus :

- EO = 6 mm
- EA = 12 mm
- EI = 8 mm
- EU = 12 mm

Les droites (OI) et (AU) sont-elles parallèles ?

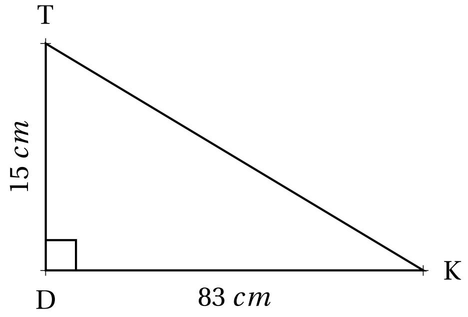
Exercices

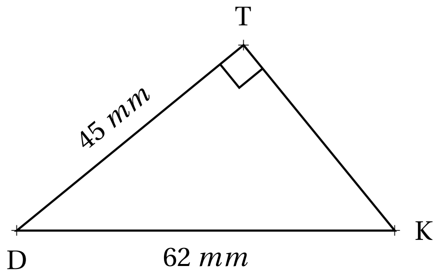
Égalité de Pythagore

Troisième

Exercice n° 1 : Calculer un côté

Pour chacune des figures suivantes, (qui ne sont pas reproduites en vraies grandeurs), calculer la valeur exacte de la mesure du côté TK puis donner une valeur approchée au millième près.

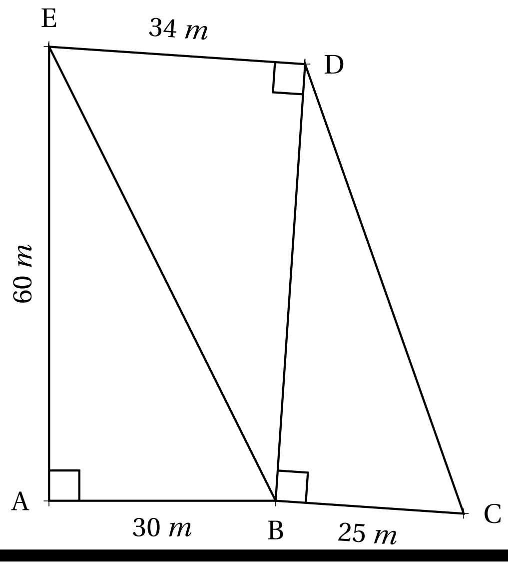




Exercice n° 2 : Trois à la suite !

La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs !

Calculer la mesure du segment [CD].



Exercice n° 3 : Rectangle ou pas ?

Tracer le triangle ZOE tel que ZO = 48 mm, ZE = 55 mm et OE = 73 mm. ZOE est-il rectangle ?

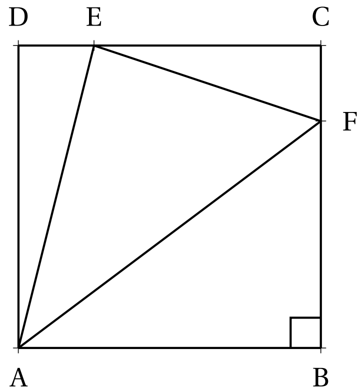
Exercice n° 4 : Rectangle ou pas ? – Épisode 2

Tracer le triangle KAE tel que KE = 36 mm, KA = 77 mm et AE = 84 mm. KAE est-il rectangle ?

Exercice n° 5 : Rectangle ou pas ? – Épisode 3

Le carré ABCD a des côtés de 4 cm.
E ∈ [CD] tel que CE = 3 cm
F ∈ [BC] tel que BF = 3 cm

Le triangle AEF est-il rectangle ?



Exercices — Correction

Exercice nº 1 :

1. Le triangle DTK est rectangle en D.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DT^2 + DK^2 = TK^2$$
$$15^2 + 83^2 = TK^2$$
$$225 + 6\,889 = TK^2$$
$$TK^2 = 7\,114$$
$$TK = \sqrt{7\,114}$$
$$TK \approx 84,345$$

$\boxed{\text{Au millième près, TK} \approx 34,345\ mm}$

2. Le triangle DTK est rectangle en T.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$TD^2 + TK^2 = DK^2$$
$$45^2 + TK^2 = 62^2$$
$$2\,025 + TK^2 = 3\,844$$
$$TK^2 = 3\,844 - 2\,025$$
$$TK^2 = 1\,819$$
$$TK = \sqrt{1\,819}$$
$$TK \approx 42,65$$

$\boxed{\text{Au millième près, TK} \approx 42,64\ mm}$

Exercice nº 2 :

Dans le triangle ABE rectangle en A.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AE^2 = BE^2$$
$$30^2 + 60^2 = BE^2$$
$$900 + 3\,600 = BE^2$$
$$BE^2 = 4\,500$$
$$BE = \sqrt{4\,500}$$
$$BE \approx 67$$

Dans le triangle EDB rectangle en D.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DE^2 + DB^2 = EB^2$$
$$34^2 + DB^2 = 4\,500$$
$$1\,156 + DB^2 = 4\,500$$
$$DB^2 = 4\,500 - 1\,156$$
$$DB^2 = 3\,344$$
$$DB \approx 58$$

Il est conseillé d'utiliser la valeur exacte de EB^2 obtenue précédemment. Sinon on obtient :

$$DB^2 = 67^2 - 1\,156 \approx 3\,333$$

$$DB = \sqrt{3333} \approx 58$$

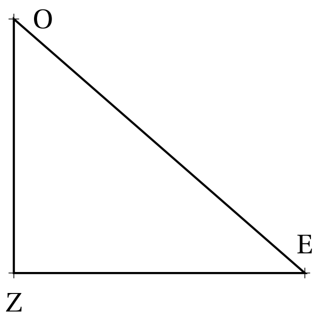
Dans le triangle DBC rectangle en B
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$BD^2 + BC^2 = DC^2$$
$$3344 + 25^2 = DC^2$$
$$DC^2 = 3969$$
$$DC = \sqrt{3969}$$
$$DC = 63$$

En valeur approchée on arrive à :

$$DC^2 = 58^2 + 25^2 \approx 3989$$
$$DC \approx 63$$

Exercice n° 3



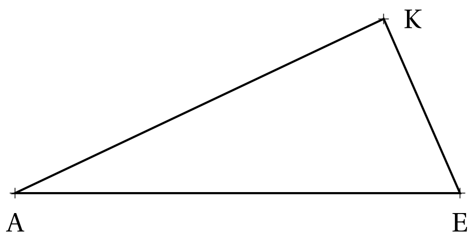
Comparons OE^2 et $ZO^2 + ZE^2$

$OE^2 = 73^2$ donc $OE^2 = 5329$
$ZO^2 + ZE^2 = 48^2 + 55^2$ donc $ZO^2 + ZE^2 = 5329$

Ainsi $ZO^2 + ZE^2 = OE^2$,

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ZOE est rectangle en Z.

Exercice n° 4



Comparons AE^2 et $KA^2 + KE^2$

$AE^2 = 84^2$ donc $AE^2 = 7056$
$KA^2 + KE^2 = 77^2 + 36^2$ donc $KA^2 + KE^2 = 7225$

Ainsi $KA^2 + KE^2 \neq AE^2$,

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle KAE n'est pas rectangle.

Exercice n° 5

Calculons AE.
Dans le triangle ADE rectangle en D.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{DA}^2 + \mathrm{DE}^2 = \mathrm{AE}^2$$

$$4^2 + 1^2 = \mathrm{AE}^2$$

$$16 + 1 = \mathrm{AE}^2$$

$$\mathrm{AE}^2 = 17$$

$$\mathrm{AE} = \sqrt{17}$$

Calculons EF.
Dans le triangle ECF rectangle en C.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{CE}^2 + \mathrm{CF}^2 = \mathrm{EF}^2$$

$$3^2 + 1^2 = \mathrm{EF}^2$$

$$9 + 1 = \mathrm{EF}^2$$

$$\mathrm{EF}^2 = 10$$

$$\mathrm{EF} = \sqrt{10}$$

Calculons AF
Dans le triangle ABF rectangle en B.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BF}^2 = \mathrm{AF}^2$$

$$4^2 + 3^2 = \mathrm{AF}^2$$

$$16 + 9 = \mathrm{AF}^2$$

$$\mathrm{AF}^2 = 25$$

$$\mathrm{AF} = 5$$

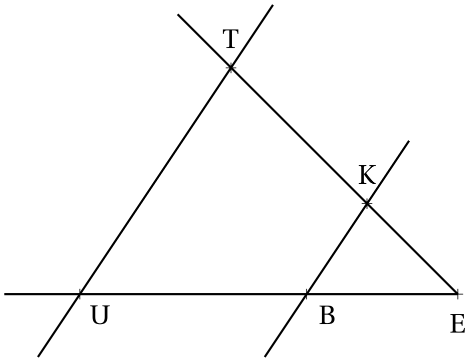
Comparons AF^2 et $\mathrm{EA}^2 + \mathrm{EF}^2$
$\mathrm{AF}^2 = 5^2 = 25$
$\mathrm{EA}^2 + \mathrm{EF}^2 = 17 + 10 = 27$
Comme $\mathrm{EA}^2 + \mathrm{EF}^2 \neq \mathrm{AF}^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle AEF n'est pas rectangle.

Exercices

Égalité de Thalès dans le triangle

Troisième

Exercice n° 1 : Thalès triangle



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

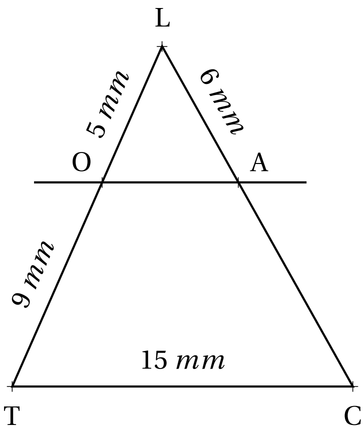
— (TK) et (UB) sont sécantes en E;

— BE = 5 m, UE = 12 m, BK = 4 m et TE = 10 m;

— (UT)//(BK)

Calculer les valeurs exactes de UT et KE et,le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

Exercice n° 2 : Thalès triangle — Épisode 2



Sur la figure ci-après qui n'est pas en vraies grandeurs nous avons :

— les points L, O et T sont alignés;

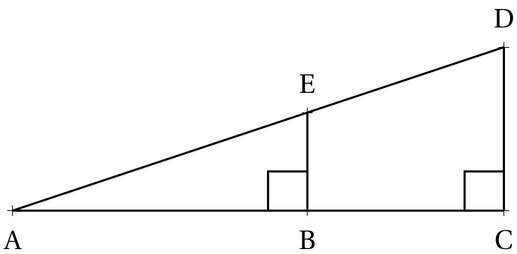
— les points L, A et C sont alignés;

— les droites (OA) et (TC) sont parallèles.

Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millième près des longueurs OA et AC.

Exercice n° 3 : Thalès ou Pythagore?

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— ABE est rectangle en B;

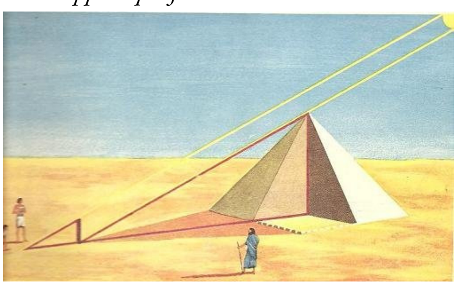
— ACD est rectangle en C;

— AB = 36 m, AE = 60 m, DC = 72 m.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

Exercice n° 4 : La légende de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.
Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :
« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».



Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

— la canne de Thalès mesurait 3 coudées;

— l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées;

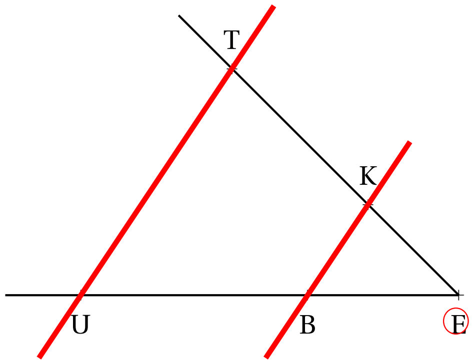
— la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide;

— une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer?

☞ Exercices — Correction ☜

Exercice n° 1 **Correction**



Dans le triangle EUT, B ∈ [UE] et K ∈ [TE]
Les droites (KB) et (TU) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

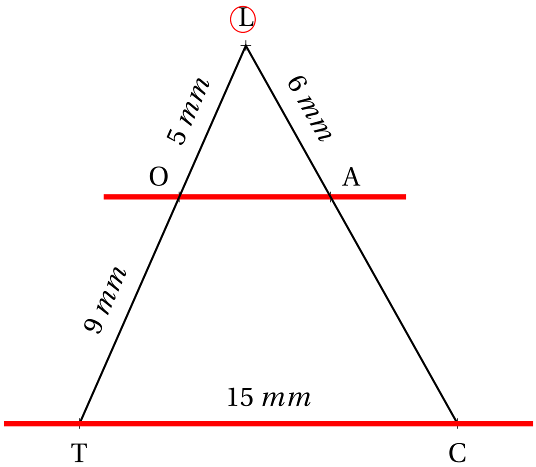
$$\frac{\text{EB}}{\text{EU}} = \frac{\text{EK}}{\text{ET}} = \frac{\text{BK}}{\text{UT}}$$

$$\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{\text{EK}}{10\ m} = \frac{4\ m}{\text{UT}}$$

Comme $\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{\text{EK}}{10\ m}$ donc $\text{EK} = \frac{10\ m \times 5\ m}{12\ m} = \frac{50}{12}\ m \approx 4,17\ m$ à $1\ cm$ près.

Comme $\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{4\ m}{\text{UT}}$ donc $\text{UT} = \frac{4\ m \times 12\ m}{5\ m} = \frac{48}{5}\ m = 9,6\ m$

Exercice n° 2 **Correction**



Les droites (OT) et (AC) sont sécantes en L, les droites (OA) et (TC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{LO}}{\text{LT}} = \frac{\text{LA}}{\text{LC}} = \frac{\text{OA}}{\text{TC}}$$

$$\frac{5\ mm}{5\ mm + 9\ mm} = \frac{6\ mm}{\text{LC}} = \frac{\text{OA}}{15\ mm}$$

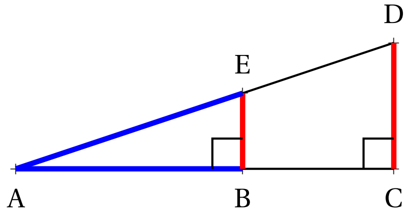
$$\frac{5\ mm}{14\ mm} = \frac{6\ mm}{\text{LC}} = \frac{\text{OA}}{15\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{LC} = \frac{6\ mm \times 14\ mm}{5\ mm}$ d'où $\text{LC} = \frac{84\ mm^2}{5\ mm}$ et $\text{LC} = 16,8\ mm$

$\text{OA} = \frac{15\ mm \times 5\ mm}{14\ mm}$ d'où $\text{OA} = \frac{75\ mm^2}{14\ mm}$ et $\text{OA} \approx 5,357\ mm$

Exercice n° 3 **Correction**



Dans le triangle rectangle ABE *on connait deux mesures sur trois : on peut donc utiliser le théorème de Pythagore.*

Dans le triangle ABE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{AE}^2$$
$$36^2 + \mathrm{BE}^2 = 60^2$$
$$1\,296 + \mathrm{BE}^2 = 3\,600$$
$$\mathrm{BE}^2 = 3\,600 - 1\,296$$
$$\mathrm{BE}^2 = 2\,304$$
$$\mathrm{BE} = \sqrt{2\,304}$$
$$\mathrm{BE} = 48$$

Pour calculer BC *il faut calculer* AC *car* BC = AC − AB. *Pareil pour* ED *il faut d'abord calculer* AD.

(EB) ⊥ (AC) et (DC) ⊥ (AC)
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (EB)//(DC)

Dans le triangle ADC, B ∈ [AC] et E ∈ [AD],
Les droites (EB) et (DC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CD}}$$

$$\frac{36\ m}{\mathrm{AC}} = \frac{60\ m}{\mathrm{AD}} = \frac{48\ m}{72\ m}$$

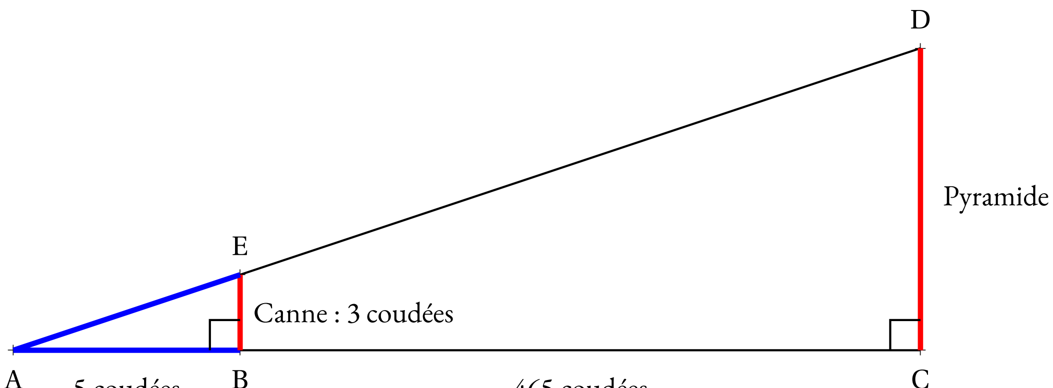
Comme $\dfrac{36\ m}{\mathrm{AC}} = \dfrac{48\ m}{72\ m}$ on a $\mathrm{AC} = \dfrac{36\ m \times 72\ m}{48\ m} = \dfrac{2\,592}{48}\ m = 54\ m$.

Comme $\dfrac{60\ m}{\mathrm{AD}} = \dfrac{48\ m}{72\ m}$ on a $\mathrm{AD} = \dfrac{60\ m \times 72\ m}{48\ m} = \dfrac{4\,320}{48}\ m = 90\ m$.

Donc $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB} = 54\ m - 36\ m = \boxed{18\ m}$ et $\mathrm{ED} = \mathrm{AD} - \mathrm{AE} = 90\ m - 60\ m = \boxed{30\ m}$.

Exercice n° 4 — Correction

Il faut modéliser la situation en faisant un schéma !



Comme la canne et la pyramide sont perpendiculaires au sol, on peut dire que la canne et la pyramide sont parallèles.

Dans le triangle ACD, $B \in [AC]$ et $E \in [AD]$ et $(EB)//(DC)$,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{CD}$$

$$\frac{5}{5+465} = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{CD}$$

Donc $\frac{3}{CD} = \frac{5}{470}$ donc $CD = \frac{3 \times 470}{5} = \frac{1\,410}{5} = 282$

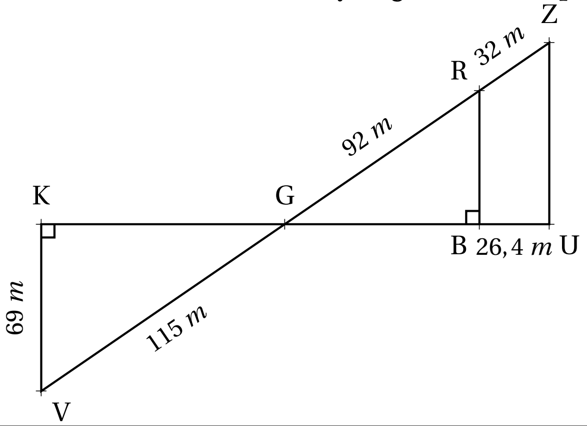
Or une coudée mesure 52 cm. La pyramide mesure donc $282 \times 52\ cm = 14\,664\ cm = \boxed{146,64\ m}$

Exercices

Thalès et Pythagore au brevet

Troisième

Exercice n° 1 : Thalès, Pythagore et contraposé



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— Les points K, G, B et U sont alignés ;

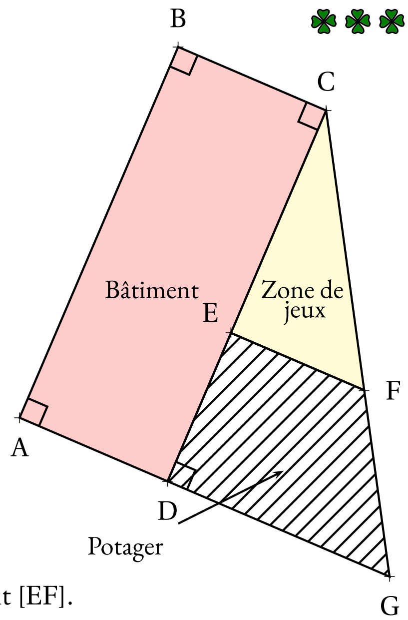
— les points V, G, R et Z sont alignés ;

— (KV) ⊥ (KU) et (BR) ⊥ (KU) ;

1. Montrer que KG = 92 m.
2. Expliquer pourquoi (KV)//(RB).
3. Calculer GB et RB.
4. Sachant que GB = 73,6 m, les droites (RB) et (ZU) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 2 : Asie Pacifique — Juin 2023

Un centre de loisir dispose d'un bâtiment et d'un espace extérieur pour accueillir des enfants.
L'espace extérieur, modélise par un triangle, est partagé en deux parties : un potager (quadrilatère DEFG hachuré) et une zone de jeux (triangle EFC), comme représenté par la figure ci-contre.



Données :

— Les points C, E et D sont alignés ;

— Les points C, F et G sont alignés ;

— Les droites (EF) et (DG) sont parallèles ;

— Les droites (DG) et (CD) sont perpendiculaires ;

— CE = 30 m ; ED = 10 m et DG = 24 m.

1. Déterminer la longueur CD.
2. Calculer la longueur CG. Arrondir au dixième de mètre près.
3. L'équipe veut séparer la zone de jeux et le potager par une clôture représentée par le segment [EF].
Montrer que la clôture doit mesurer 18 m.
4. Pour semer du gazon sur la zone de jeux, l'équipe décide d'acheter des sacs de 5 kg de graines à 22,90 € l'unité.
Chaque sac permet de couvrir une surface d'environ 140 m^2.
Quel budget doit-on prévoir pour semer du gazon sur la totalité de l'aire de jeux ?
5. La directrice du centre affirme que la surface du potager est plus grande que celle de la zone de jeux. A-t-elle raison ?

Exercice n° 3 : Thalès papillon et Pythagore, construction

1. Construire avec précision sur votre copie la figure suivante :

— Tracer un triangle KUG rectangle en G tel que KU = 8 cm et GU = 4,8 cm ;

— Placer sur la droite (KG), le point R vérifiant les deux conditions suivantes :

  — KR = 5,2 cm ;

  — K n'appartient pas à [KG].

— Tracer la droite perpendiculaire à la droite (KR) passant par R. Cette droite coupe la droite (KU) en S.

2. Expliquez pour quelle raison les droites (GU) et (RS) sont parallèles.

3. Calculer KG.

4. Calculer RS et SK.

Exercices — Correction

Exercice n° 1 **Correction**

1. Dans le triangle KGV rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{KG}^2+\mathrm{KV}^2=\mathrm{GV}^2$$

$$\mathrm{KG}^2+69^2=115^2$$

$$\mathrm{KG}^2+4761=13\,225$$

$$\mathrm{KG}^2=13\,225-4761$$

$$\mathrm{KG}^2=8464$$

$$\mathrm{KG}=\sqrt{8464}$$

$$\mathrm{KG}=92$$

$\boxed{\mathrm{KG}=92\,\mathrm{cm}}$

2. On remarque que les droites (KV) et (RB) sont l'une et l'autre perpendiculaire à la droite (KB)
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{On en déduit que (KV)(RB).}}$

3. Les droites (KB) et (RV) sont sécantes en G, les droites (KV) et (RB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{GB}}=\frac{\mathrm{GV}}{\mathrm{GR}}=\frac{\mathrm{KV}}{\mathrm{BR}}$$

$$\frac{92\ m}{\mathrm{GB}}=\frac{115\ m}{92\ m}=\frac{69\ m}{\mathrm{BR}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{GB}=\dfrac{92\ m\times 92\ m}{115\ m}$ d'où $\mathrm{GB}=\dfrac{8\,464\ m^2}{115\ m}$ et $\mathrm{GB}=73,6m$
$\mathrm{BR}=\dfrac{69\ m\times 92\ m}{115\ m}$ d'où $\mathrm{BR}=\dfrac{6\,348\ m^2}{115\ m}$ et $\mathrm{BR}=55,2\ m$

$\boxed{\mathrm{GB}=73,6\ m \text{ et } \mathrm{BR}=55,2\ m}$

4.
Comparons $\dfrac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}}$ et $\dfrac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}}$:

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}}=\frac{73,6\ m}{73,6\ m+26,4\ m}$$

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}}=\frac{73,6}{100}$$

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}}=0,736$$

$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}}=\frac{92\ m}{92\ m+32\ m}$$

$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{G2}}=\frac{92}{124}$$

$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}}\approx 0,742$$

Comme $\dfrac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}}\neq\dfrac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}}$ d'après le **théorème contraposé de Thalès**, les droites (RB) et (ZU) ne sont pas parallèles.

Exercice n° 2 Correction

1. Comme les points C, E et D sont alignés, $\boxed{\text{CD} = \text{CE} + \text{ED} = 30\,\text{m} + 10\,\text{m} = 40\,\text{m.}}$

2. Dans le triangle CDG rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned}\text{DC}^2 + \text{DG}^2 &= \text{CG}^2\\ 30^2 + 24^2 &= \text{CG}^2\\ 900 + 576 &= \text{CG}^2\\ \text{CG}^2 &= 1476\\ \text{CG} &= \sqrt{1476}\\ \text{CG} &\approx 38,42\end{aligned}$$

$\boxed{\text{CG} \approx 38{,}4\,\text{m au dixième de mètre près.}}$

3. Les droites (ED) et (FG) sont sécantes en C, les droites (EF) et (DG) sont parallèles,
'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{CE}}{\text{CD}} = \frac{\text{CF}}{\text{CG}} = \frac{\text{EF}}{\text{DG}}$$

$$\frac{30\,\text{m}}{40\,\text{m}} = \frac{\text{CF}}{\text{CG}} = \frac{\text{EF}}{24\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{EF} = \dfrac{24\,\text{m} \times 30\,\text{m}}{40\,\text{m}}$ d'où $\text{EF} = \dfrac{720\,\text{m}^2}{40\,\text{m}}$ et $\text{EF} = 18\,\text{m}$

$\boxed{\text{EF} = 18\,\text{m}}$

4. La zone de jeux est un triangle rectangle. $\text{Aire}_{\text{CEF}} = \dfrac{30\,\text{m} \times 18\,\text{m}}{2} = 270\,\text{m}^2$.

Un sac permet de recouvrir $140\,\text{m}^2$. Comme $270\,\text{m}^2 \div 140\,\text{m}^2 \approx 1,92$, il faut 2 sacs.

$\boxed{\text{Le coût du gazon est de } 2 \times 22,90\,€ = 45,80\,€}$

5. $\text{Aire}_{\text{DEFG}} = \text{Aire}_{\text{CDG}} - \text{Aire}_{\text{CEF}}$

On a vu que $\text{Aire}_{\text{CEF}} = 270\,\text{m}^2$.

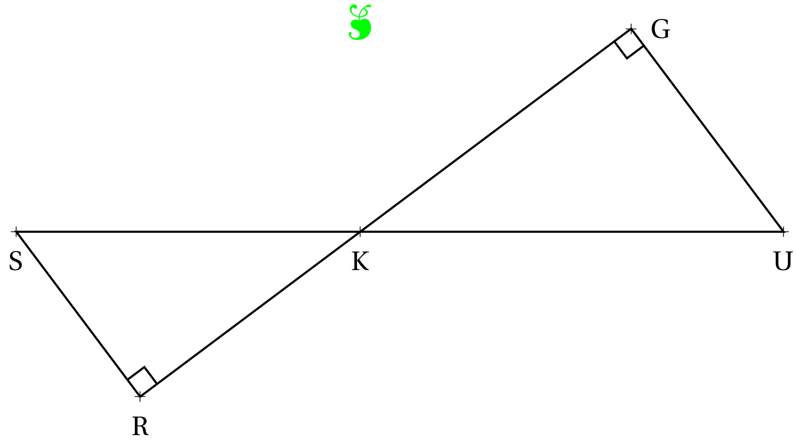
CDG est un triangle rectangle. $\text{Aire}_{\text{CDG}} = \dfrac{40\,\text{m} \times 24\,\text{m}}{2} = 480\,\text{m}^2$.

Ainsi $\text{Aire}_{\text{DEFG}} = 480\,\text{m}^2 - 270\,\text{m}^2 = 210\,\text{m}^2$.

$\boxed{\text{C'est faux, l'aire du potager qui mesure } 210\,\text{m}^2 \text{ est plus petite que celle de l'aire de jeux qui mesure } 270\,\text{m}^2.}$

Exercice n° 3 Correction

1.



2. Les droites (GU) et (RS) sont l'une et l'autre perpendiculaire à la droite (GR).
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (GU) et (RS) sont parallèles.}}$

3.
Dans le triangle KUG rectangle en G,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{GK}^2 + \mathrm{GU}^2 = \mathrm{KU}^2$$
$$\mathrm{GK}^2 + 4,8^2 = 8^2$$
$$\mathrm{GK}^2 + 23,04 = 64$$
$$\mathrm{GK}^2 = 64 - 23,04$$
$$\mathrm{GK}^2 = 40,96$$
$$\mathrm{GK} = \sqrt{40,96}$$
$$\mathrm{GK} = 6,4$$

$\boxed{\mathrm{GK} = 6,4\ cm}$

4.
Les droites (GR) et (SU) sont sécantes en K, les droites (GU) et (SR) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{KG}}{\mathrm{KR}} = \frac{\mathrm{KU}}{\mathrm{KS}} = \frac{\mathrm{GU}}{\mathrm{RS}}$$

$$\frac{6,4\ cm}{5,2\ cm} = \frac{8\ cm}{\mathrm{KS}} = \frac{4,8\ cm}{\mathrm{RS}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{KS} = \dfrac{8\ cm \times 5,2\ cm}{6,4\ cm}$ d'où $\mathrm{KS} = \dfrac{41,6\ cm^2}{6,4\ cm}$ et $\mathrm{KS} = 6,5\ cm$
$\mathrm{RS} = \dfrac{4,8\ cm \times 5,2\ cm}{6,4\ cm}$ d'où $\mathrm{RS} = \dfrac{24,96\ cm^2}{6,4\ cm}$ et $\mathrm{RS} = 3,9\ cm$

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1 :
(5 points)

Pour Noël, une artisane verrier a préparé 1 386 boules de Nöel en verre bleu et 1 638 boules de Noël en verre rouge. Elle souhaite faire un maximum de lots de boules bleues et rouges, lots tous identiques.

1. Décomposer 1 386 et 1 638 en produits de facteurs premiers.

2. Faire la liste des tous les diviseurs communs de 1 386 et 1 638.

3. Combien de lots au maximum pourra-t-elle constituer ?
Combien de boules rouges et de boules bleues contient chaque lot ?

Exercice n° 2 :
(4 points)

1. Développer et réduire $f(x) = (1-3x)(4x-6) + (5x-1)(3x-7)$

2. Développer et réduire $g(x) = 1 - 3x^2 + 3x(5x-1) + 6 + (5x-1)(2x+1)$

3. Résoudre :

$$8x - 3 = 7 - 11x$$

Exercice n° 3 :
(5 points)

Pour les vacances de Toussaint, je suis allé de Paris à Marseille en train.
À l'aller, j'ai pris le TGV et j'ai parcouru 660 km en 3 h 23 min.

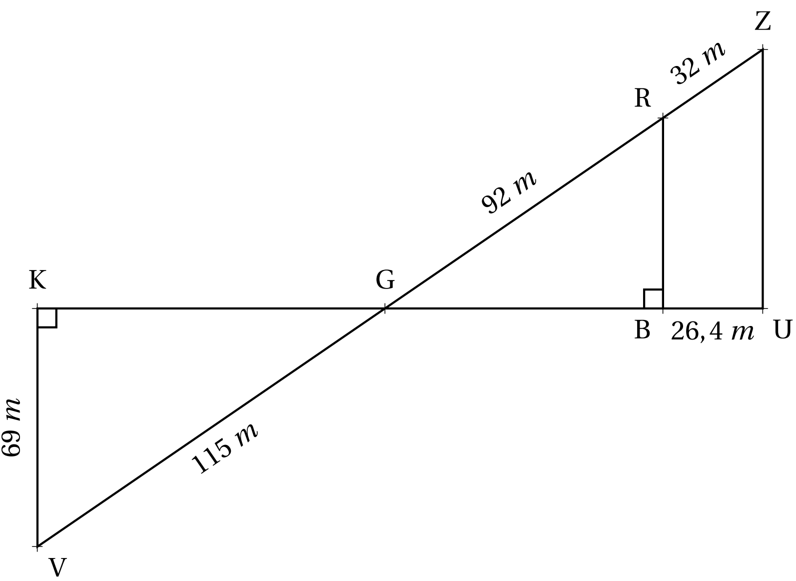
1. Quelle a été ma vitesse moyenne sur ce trajet. Arrondir le résultat au centième de kilomètre par heure près.

Au retour, je suis rentré en voiture. Le trajet est plus long, 776 km. J'ai roulé en moyenne à 88 km/h.

2. Combien de temps, à la minute près, ai-je mis pour rentrer à Paris.

3. Quelle a été ma vitesse moyenne sur cet aller-retour ?

Exercice n° 4 :
(6 points)



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- Les points K, G, B et U sont alignés ;
- les points V, G, R et Z sont alignés ;
- (KV) ⊥ (KU) et (BR) ⊥ (KU) ;

1. Montrer que KG = 92 m.

2. Expliquer pourquoi (KV)//(RB).

3. Calculer GB et RB.

4. Sachant que GB = 73,6 m, les droites (RB) et (ZU) sont-elles parallèles ?

☞ Évaluation — Correction ☜

Exercice n° 1 : L'artisane verrier

Correction

Arithmétique

1.

$$\begin{array}{c|c} 1\,386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{1\,386 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11}$

$$\begin{array}{c|c} 1\,638 & 2 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{1\,638 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13}$

2. Les diviseurs de 1 386 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 9 ; 11 ; 14 ; 18 ; 21 ; 22 ; 33 ; 42 ; 63 ; 66 ; 77 ; 99 ; 126 ; 154 ; 198 ; 231 ; 462 ; 693 ; 1 386
Les diviseur de 1 638 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 9 ; 13 ; 14 ; 18 ; 21 ; 26 ; 42 ; 63 ; 78 ; 91 ; 117 ; 126 ; 182 ; 234 ; 273 ; 549 ; 819 ; 1 638

Les diviseurs communs de 1 386 et 1 638 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 9 ; 14 ; 18 ; 21 ; 42 ; 63 ; 126

3. Le plus grand diviseur commun de 1 386 et 1 638 est 126.
Or $1\,386 = 126 \times 11$ et $1\,638 = 126 \times 13$, elle fera 126 lots contenant chacun 11 boules bleues et 13 boules rouges.

Exercice n° 2 : Développement

Correction

Développer, réduire et résoudre

1. $f(x) = (1-3x)(4x-6) + (5x-1)(3x-7)$
$f(x) = 4x - 6 - 12x^2 + 18x + 15x^2 - 35x - 3x + 7$

$\boxed{f(x) = 3x^2 - 16x + 1}$

2. $g(x) = 1 - 3x^2 + 3x(5x-1) + 6 + (5x-1)(2x+1)$
$g(x) = 1 - 3x^2 + 15x^2 - 3x + 6 + 10x^2 + 5x - 2x - 1$

$\boxed{g(x) = 22x^2 + 3x + 6}$

3. Résoudre :

$$\begin{aligned} 8x - 3 &= 7 - 11x \\ 8x - 3 + 3 &= 7 - 11x + 3 \\ 8x &= 10 - 11x \\ 8x + 11x &= 10 - 11x + 11x \\ 19x &= 10 \\ x &= \frac{10}{19} \end{aligned}$$

Exercice n° 3 : Vitesse Correction

Vitesse

1.

Distance	$660\ km$	$\dfrac{660\ km \times 60\ min}{203\ min} \approx 195,07\ km$
Temps	3 h 23 min = 180 min+23 min=203 min	1 h = 60 min

$\boxed{\text{La vitesse moyenne en TGV est d'environ } 195,07\ km/h}$

2.

Distance	$776\ km$	$88\ km$
Temps	$\dfrac{776\ km \times 60\ min}{88\ km} \approx 529,09\ min$	1 h = 60 min

Comme $529\ min = 8 \times 60\ min + 49\ min$

$\boxed{\text{Le temps de mon trajet est } 8\ h\ 49\ min}$

3.

Sur l'aller-retour, j'ai parcouru $660\ kl + 776\ km = 1\,436\ km$ en 3 h 23 min + 8 h 49 min = 12 h 12 min.

Distance	$1\,436\ km$	$\dfrac{1\,436\ km \times 60\ min}{732\ min} \approx 117,70\ km$
Temps	12 h 12 min = 12 × 60 min+12 min=720 min+12 min=732 min	1 h = 60 min

$\boxed{\text{Ma vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est } 117,70\ km/h}$

Exercice n° 4 : Thalès, Pythagore et contraposée Correction

Géométrie

1.

Dans le triangle VKG rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{KV}^2 + \mathrm{KG}^2 = \mathrm{VG}^2$$
$$69^2 + \mathrm{KG}^2 = 115^2$$
$$3\,969 + \mathrm{KG}^2 = 13\,225$$
$$\mathrm{KG}^2 = 13\,225 - 4\,761$$
$$\mathrm{KG}^2 = 8\,464$$
$$\mathrm{KG} = \sqrt{8\,464}$$
$$\mathrm{KG} = 92$$

$\boxed{\mathrm{BG} = 92\ m}$

2. Les droites (RB) et (KV) sont perpendiculaires à la droite (KU).
On sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{(RB)//(KV)}$

3.
Les droites (KB) et (RV) sont sécantes en G, les droites (KV) et (RB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{GK}{GB} = \frac{GV}{GR} = \frac{KV}{BR}$$

$$\frac{92\ m}{GB} = \frac{115\ m}{92\ m} = \frac{69\ m}{BR}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$GB = \dfrac{92\ m \times 92\ m}{115\ m}$ d'où $GB = \dfrac{8\,464\ m^2}{115\ m}$ et $GB = 73,6m$
$BR = \dfrac{69\ m \times 92\ m}{115\ m}$ d'où $BR = \dfrac{6\,348\ m^2}{115\ m}$ et $BR = 55,2\ m$

$\boxed{GB = 73,6\ m \text{ et } BR = 55,2\ m}$

4.
Comparons $\dfrac{GB}{GU}$ et $\dfrac{GR}{GZ}$:

$$\frac{GB}{GU} = \frac{73,6\ m}{73,6\ m + 26,4\ m}$$

$$\frac{GB}{GU} = \frac{73,6}{100}$$

$$\frac{GB}{GU} = 0,736$$

$$\frac{GR}{GZ} = \frac{92\ m}{92\ m + 32\ m}$$

$$\frac{GR}{G2} = \frac{92}{124}$$

$$\frac{GR}{GZ} \approx 0,742$$

Comme $\dfrac{GB}{GU} \neq \dfrac{GR}{GZ}$ d'après le **théorème contraposé de Thalès**, les droites (RB) et (ZU) ne sont pas parallèles.

Évaluation

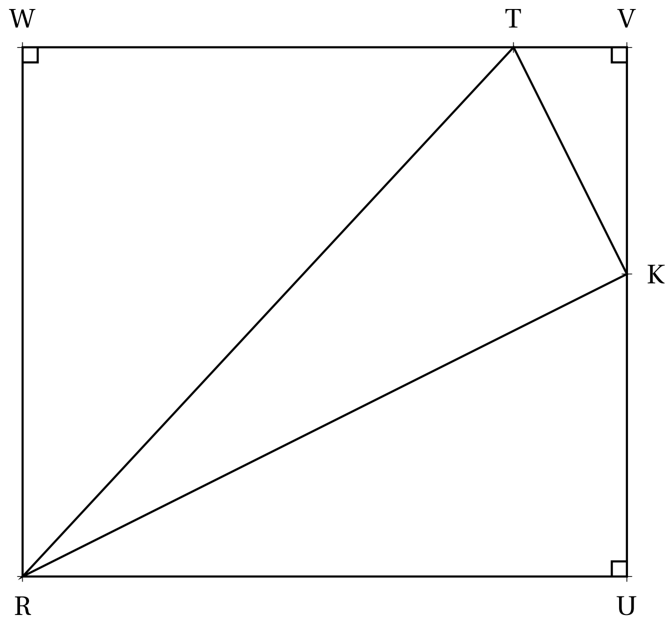
Troisième

Exercice n° 1

(5 points)

Le quadrilatère RUVT est un rectangle.
On sait que :

- RU = 48 m
- WR = 42 m
- WT = 39 m
- VK = 18 m

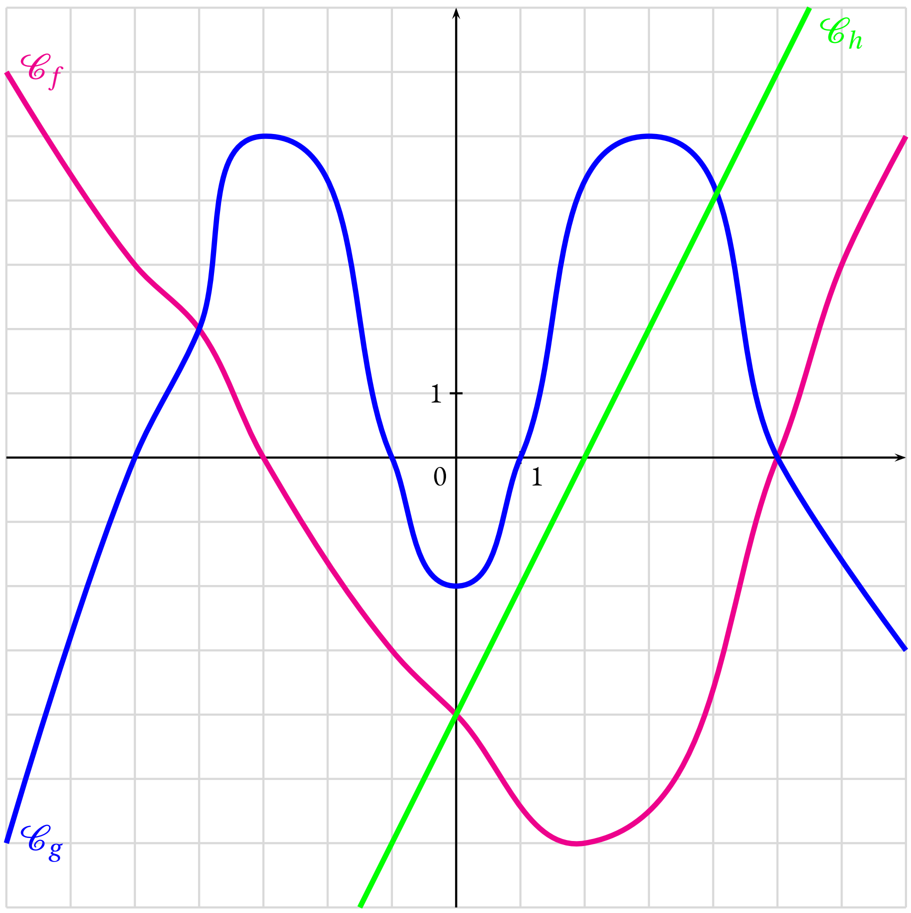


Le triangle RTK est-il rectangle ?

Rédiger soigneusement votre raisonnement.

Exercice n° 2

(5 points)



f, g et h sont des fonctions.

$\mathscr{C}_f$ représente graphiquement f
$\mathscr{C}_g$ représente graphiquement g
$\mathscr{C}_h$ représente graphiquement h

Déterminer graphiquement :

1. L'image de -5 par f
2. $g(-4)$, $g(0)$ et $g(7)$
3. $h(1)$, $h(0)$ et $h(2)$
4. Les antécédents de 0 par f
5. Les antécédents de 3 par f
6. Les antécédents de 0 par g
7. Combien y-a-t-il d'antécédent de -1 par g ?
8. Les antécédents de 5 par g
9. Les antécédents de 6 par g
10. Les solution de l'équation $f(x) = g(x)$

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 — Correction

Dans le triangle RWT rectangle en W,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$WR^2 + WT^2 = RT^2$$
$$42^2 + 39^2 = RT^2$$
$$1764 + 1521 = RT^2$$
$$RT^2 = 3285$$
$$RT = \sqrt{3285}$$

Dans le triangle TVK rectangle en V,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$VT^2 + VK^2 = TK^2$$
$$9^2 + 18^2 = TK^2$$
$$81 + 324 = TK^2$$
$$TK^2 = 405$$
$$TK = \sqrt{405}$$

Dans le triangle RKU rectangle en U,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$UR^2 + UK^2 = RK^2$$
$$48^2 + 24^2 = RK^2$$
$$2304 + 576 = RK^2$$
$$RK^2 = 2880$$
$$RK = \sqrt{2880}$$

Comparons $KR^2 + KT^2$ et RT^2 :

$KR^2 + KT^2$	RT^2
$2880 + 405$	
3285	3285

Comme

$$KR^2 + KT^2 = RT^2$$

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**

$\boxed{\text{le triangle KRT est rectangle en K}}$.

EXERCICE Nº 2 **CORRECTION**

Déterminer graphiquement :

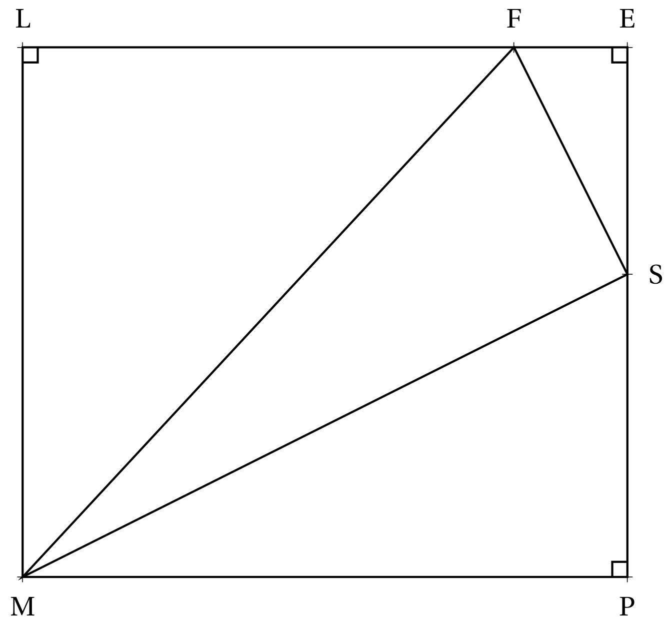
1. L'image de -5 par f : $f(-5) = 3$
2. $g(-4)$, $g(0)$ et $g(7)$: $g(-4) = 2$, $g(0) = -2$ et $g(7) = -3$
3. $h(1)$, $h(0)$ et $h(2)$: $h(1) = -2$, $h(0) = -4$ et $h(2) = 0$
4. Les antécédents de 0 par f : -3 et 5 sont des antécédents de 0 par f
5. Les antécédents de 3 par f : -5 et 6 sont des antécédents de 3 par f
6. Les antécédents de 0 par g : -5, -1, 1 et 5 sont des antécédents de 0 par g
7. Combien y-a-t-il d'antécédent de -1 par g ? : -1 a 4 antécédents par g
8. Les antécédents de 5 par g -3 et 3 sont des antécédents de 5 par g
9. Les antécédents de 6 par g 6 n'a pas d'antécédent par g
10. Les solution de l'équation $f(x) = g(x)$ -4 et 5 sont des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1

(5 points)



Le quadrilatère MPEL est un rectangle.
On sait que :

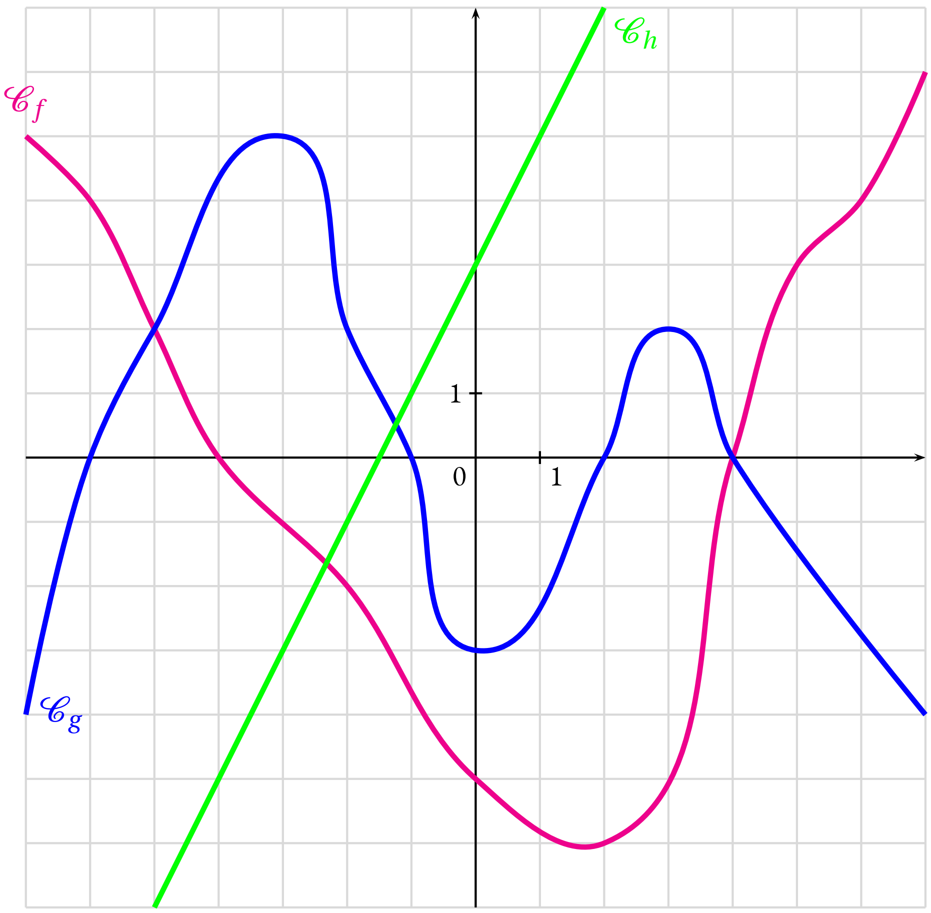
— MP = 64 m
— LM = 56 m
— LF = 52 m
— ES = 24 m

Le triangle MFS est-il rectangle ?

Rédiger soigneusement votre raisonnement.

Exercice n° 2

(5 points)



f, g et h sont des fonctions.

$\mathscr{C}_f$ représente graphiquement f
$\mathscr{C}_g$ représente graphiquement g
$\mathscr{C}_h$ représente graphiquement h

Déterminer graphiquement :

1. L'image de -6 par f
2. $g(-5)$, $g(-2)$ et $g(0)$
3. $h(1)$, $h(-4)$ et $h(0)$
4. Les antécédents de 0 par f
5. Les antécédents de 4 par f
6. Les antécédents de 0 par g
7. Combien y-a-t-il d'antécédent de -1 par g ?
8. Les antécédents de 2 par g
9. Les antécédents de 6 par g
10. Les solution de l'équation $f(x) = g(x)$

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 **Correction**

Dans le triangle LFM rectangle en L,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$LF^2 + LM^2 = FM^2$$
$$52^2 + 56^2 = FM^2$$
$$2704 + 3136 = FM^2$$
$$FM^2 = 5840$$
$$FM = \sqrt{5840}$$

Dans le triangle FES rectangle en E,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$EF^2 + ES^2 = FS^2$$
$$12^2 + 24^2 = FS^2$$
$$144 + 576 = FS^2$$
$$FS^2 = 720$$
$$FS = \sqrt{720}$$

Dans le triangle SMP rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PS^2 + PM^2 = SM^2$$
$$32^2 + 64^2 = SM^2$$
$$1024 + 4096 = SM^2$$
$$SM^2 = 5120$$
$$SM = \sqrt{5120}$$

Comparons $SM^2 + SF^2$ et MF^2 :

$SM^2 + SF^2$	MF^2
$5120 + 720$	
5840	5840

Comme

$$SM^2 + SF^2 = MF^2$$

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**

$\boxed{\text{le triangle SMF est rectangle en S}}$.

Exercice n° 2

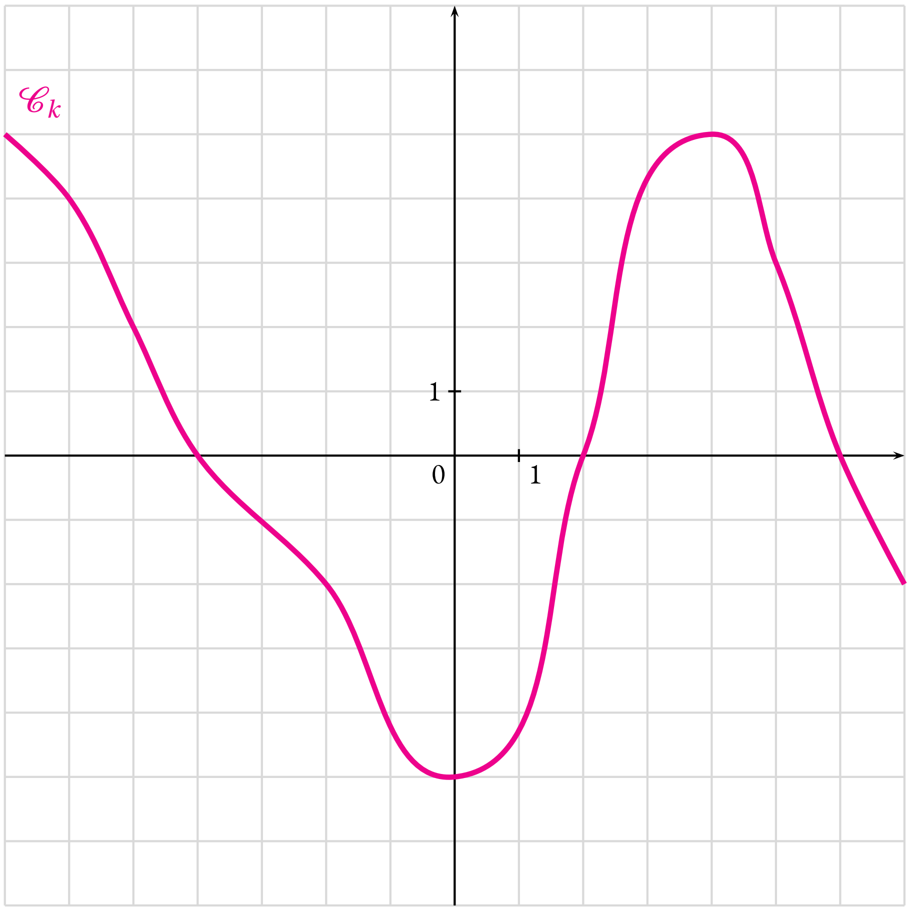
Correction

Déterminer graphiquement :

1. L'image de -6 par f : $f(-6) = 4$
2. $g(-5)$, $g(-2)$ et $g(0)$: $g(-5) = 2$, $g(-2) = 2$ et $g(0) = -3$
3. $h(1)$, $h(-4)$ et $h(0)$: $h(1) = 5$, $h(-4) = -5$ et $h(0) = 3$
4. Les antécédents de 0 par f : -4 et 4 sont des antécédents de 0 par f
5. Les antécédents de 4 par f : -6 et 6 sont des antécédents de 3 par f
6. Les antécédents de 0 par g : -6, -1, 2 et 4 sont des antécédents de 0 par g
7. Combien y-a-t-il d'antécédent de -1 par g ? : -1 a 4 antécédents par g
8. Les antécédents de 2 par g -5, 2 et 3 sont des antécédents de 2 par g
9. Les antécédents de 6 par g 6 n'a pas d'antécédent par g
10. Les solution de l'équation $f(x) = g(x)$ -5 et 4 sont des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Exercice n° 2

(5 points)



f, g et h sont des fonctions.

$\mathscr{C}_f$ représente graphiquement f
$\mathscr{C}_g$ représente graphiquement g
$\mathscr{C}_h$ représente graphiquement h

Déterminer graphiquement :

1. L'image de -6 par f
2. $g(-5)$, $g(-2)$ et $g(0)$
3. $h(1)$, $h(-4)$ et $h(0)$
4. Les antécédents de 0 par f
5. Les antécédents de 4 par f
6. Les antécédents de 0 par g
7. Combien y-a-t-il d'antécédent de -1 par g ?
8. Les antécédents de 2 par g
9. Les antécédents de 6 par g
10. Les solution de l'équation $f(x) = g(x)$

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1

(6 points)

On pose :

$$f(x) = 3x(1-x) + 5(7x-1) + 3$$
$$g(x) = 1 - 5x(1-x) + 3(2x-1) - 8x^2 + 37x$$
$$h(x) = 3x^2 - 3(1-x^2) - 9x(3x-5) + 5x + 18x^2 - 12x + 1$$

Développer et réduire au maximum f, g et h.

Que remarquez-vous ?

Exercice n° 2

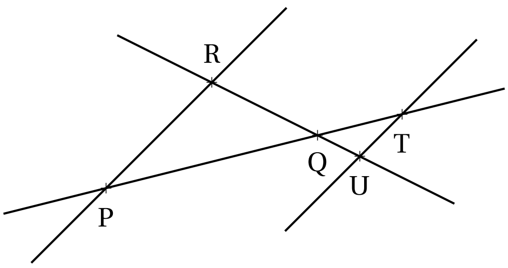
(9 points)

Situation n° 1

La figure n'est pas en vraie grandeur.

On sait que :

— (PT) et (RU) sont sécantes en Q
— (RP)//(TU)
— PQ = 56 m, RQ = 35 m
— QU = 10 m et TU = 21 m



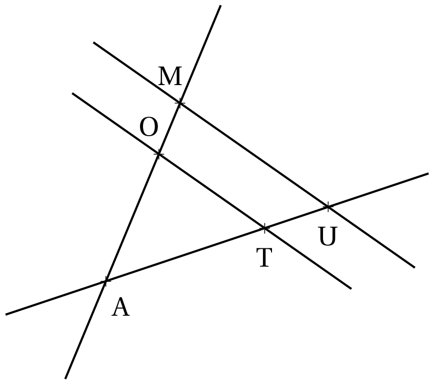
Calculer QT et RP.

Situation n° 2

La figure n'est pas en vraie grandeur.

On sait que :

— (MO) et (UT sont sécantes en A
— AO = 34 mm, AU = 34 mm
— AM = 55 mm et AT = 21 mm



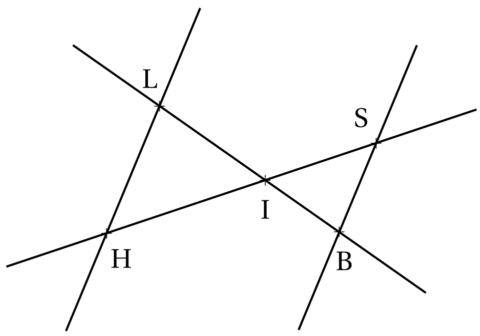
(OT) et (MU) sont-elles parallèles ?

Situation n° 3

La figure n'est pas en vraie grandeur.

On sait que :

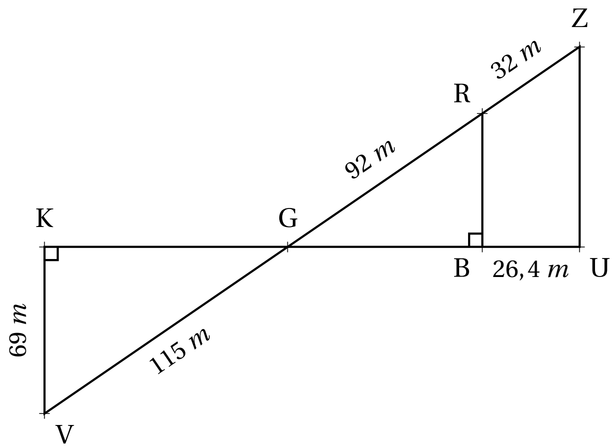
— (HS) et (LB sont sécantes en I
— LI = 21,6 dm, HI = 15,3 dm
— IS = 11,9 dm et BI = 16,8 dm



(HL) et (SB) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 3

(7 points)



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— Les points K, G, B et U sont alignés ;
— les points V, G, R et Z sont alignés ;
— (KV) $\perp$ (KU) et (BR) $\perp$ (KU) ;

1. Montrer que KG = 92 m.

2. Expliquer pourquoi (KV)//(RB).

3. Calculer GB et RB.

4. Sachant que GB = 73,6 m, (RB) et (ZU) sont-elles parallèles ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 — Correction

$f(x) = 3x(1-x) + 5(7x-1) + 3$
$f(x) = 3x - 3x^2 + 35x - 5 + 3$

$\boxed{f(x) = -3x^2 + 38x - 2}$

$g(x) = 1 - 5x(1-x) + 3(2x-1) - 8x^2 + 37x$

$g(x) = 1 - 5x + 5x^2 + 6x - 3 - 8x^2 + 37x$

$\boxed{g(x) = -3x^2 + 35x - 2}$

$h(x) = 3x^2 - 3(1-x^2) - 9x(3x-5) + 5x + 18x^2 - 12x + 1$

$h(x) = 3x^2 - 3 + 3x^2 - 27x^2 + 45x + 5x + 18x^2 - 12x + 1$

$\boxed{h(x) = -3x^2 + 38x - 2}$

Exercice n° 2 — Correction

Situation n° 1

Les droites (RU) et (PT) sont sécantes en Q, les droites (RP) et (TU) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{QP}{QT} = \frac{QR}{QU} = \frac{PR}{TU}$$

$$\frac{56\,\text{m}}{QT} = \frac{35\,\text{m}}{10\,\text{m}} = \frac{PR}{21\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$QT = \dfrac{56\,\text{m} \times 10\,\text{m}}{35\,\text{m}}$ d'où $QT = \dfrac{560\,\text{m}^2}{35\,\text{m}}$ et $QT = 16\,\text{m}$

$PR = \dfrac{21\,\text{m} \times 35\,\text{m}}{10\,\text{m}}$ d'où $PR = \dfrac{735\,\text{m}^2}{10\,\text{m}}$ et $PR = 73{,}5\,\text{m}$

Situation n° 2

Comparons $\dfrac{AO}{AM}$ et $\dfrac{AT}{AU}$.

$\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{34\,\text{mm}}{55\,\text{mm}} \approx 0{,}6181$

$\dfrac{AT}{AU} = \dfrac{21\,\text{mm}}{34\,\text{mm}} \approx 0{,}6176$

Ou encore, $21 \times 55 = 1155$ et $34 \times 34 = 1156$

Comme $\dfrac{AO}{AM} \neq \dfrac{AT}{AU}$, d'après **la contraposée du théorème de Thalès**, les droites ne sont pas parallèles.

Situation n° 3

Comparons $\frac{\text{IH}}{\text{IS}}$ et $\frac{\text{IL}}{\text{IB}}$.

$\frac{\text{IH}}{\text{IS}} = \frac{15{,}3\,\text{dm}}{11{,}9\,\text{dm}} \approx 1{,}286$

$\frac{\text{IL}}{\text{IB}} = \frac{21{,}6\,\text{dm}}{16{,}8\,\text{dm}} \approx 1{,}286$

Ou encore, $16,8 \times 15,3 = 257{,}04$ et $21,6 \times 11,9 = 257{,}04$

Comme $\frac{\text{IH}}{\text{IS}} = \frac{\text{IL}}{\text{IB}}$, et comme les points I, H et S sont alignés et dans le même ordre que les points alignés I, L et B, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (HL) et (SB) sont parallèles.

Exercice n° 3

Correction

1. Dans le triangle KGV rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{KG}^2 + \text{KV}^2 = \text{GV}^2$$
$$\text{KG}^2 + 69^2 = 115^2$$
$$\text{KG}^2 + 4761 = 13\,225$$
$$\text{KG}^2 = 13\,225 - 4761$$
$$\text{KG}^2 = 8464$$
$$\text{KG} = \sqrt{8464}$$
$$\text{KG} = 92$$

$\boxed{\text{KG} = 92\,\text{cm}}$

2. On remarque que les droites (KV) et (RB) sont l'une et l'autre perpendiculaire à la droite (KB)
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{On en déduit que (KV)(RB).}}$

3. Les droites (KB) et (RV) sont sécantes en G, les droites (KV) et (RB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{GK}}{\text{GB}} = \frac{\text{GV}}{\text{GR}} = \frac{\text{KV}}{\text{BR}}$$

$$\frac{92\ m}{\text{GB}} = \frac{115\ m}{92\ m} = \frac{69\ m}{\text{BR}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{GB} = \frac{92\ m \times 92\ m}{115\ m}$ d'où $\text{GB} = \frac{8\,464\ m^2}{115\ m}$ et $\text{GB} = 73,6m$
$\text{BR} = \frac{69\ m \times 92\ m}{115\ m}$ d'où $\text{BR} = \frac{6\,348\ m^2}{115\ m}$ et $\text{BR} = 55,2\ m$

$\boxed{\text{GB} = 73,6\ m \text{ et } \text{BR} = 55,2\ m}$

4.

Comparons $\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}}$ et $\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}}$:

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}} = \frac{73,6\ m}{73,6\ m + 26,4\ m}$$

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}} = \frac{73,6}{100}$$

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}} = 0,736$$

$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}} = \frac{92\ m}{92\ m + 32\ m}$$

$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{G2}} = \frac{92}{124}$$

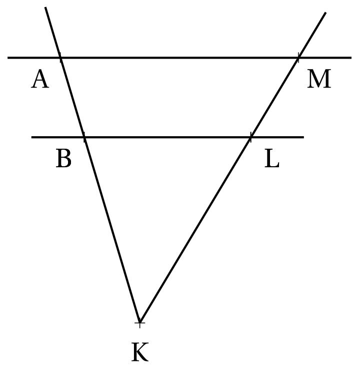
$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}} \approx 0,742$$

Comme $\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GU}} \neq \frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{GZ}}$ d'après le **théorème contraposé de Thalès**, les droites (RB) et (ZU) ne sont pas parallèles.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



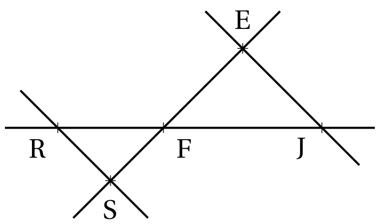
Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- (AM)//(BL) ;
- (AB) et (ML) sont sécantes en K ;
- BL = 5 cm, AM = 9 cm, KL = 3 cm et KA = 8 cm.

Calculer les valeurs exactes des longueurs KB et KM puis en donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 2



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

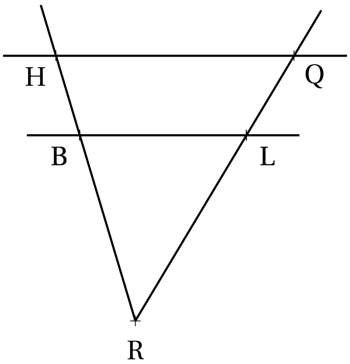
- (RS)//(EJ) ;
- (RJ) et (SE) sont sécantes en F ;
- FJ = 10 m, RF = 7 m, EJ = 12 m et FS = 5 m.

Calculer les valeurs exactes des longueurs FE et RS puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

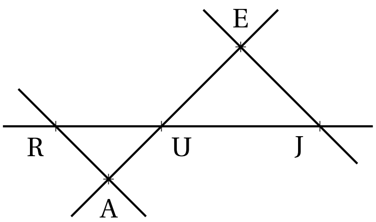
— (HQ)//(BL) ;

— (HB) et (QL) sont sécantes en R ;

— BL = 7 cm, HQ = 9 cm, RL = 3 cm et RH = 10 cm.

Calculer les valeurs exactes des longueurs RB et RQ puis en donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 2



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

— (RA)//(EJ) ;

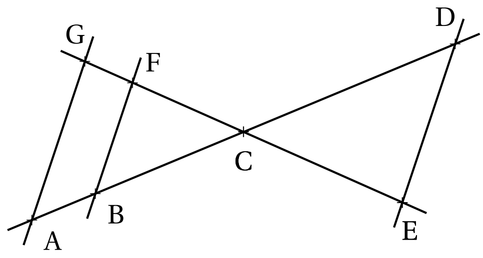
— (RJ) et (AE) sont sécantes en U ;

— UJ = 10 m, RU = 7 m, EJ = 12 m et UA = 5 m.

Calculer les valeurs exactes des longueurs UE et RA puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs nous savons que :

— Les droites (AD) et (GE) sont sécantes en C ;

— B ∈ (AD) et F ∈ (GE) ;

— (BF)//(ED)

— FC = 51 mm, GF = 18 mm, BF = 68 mm ;

— BC = 85 mm, AB = 30 mm, CD = 135 mm.

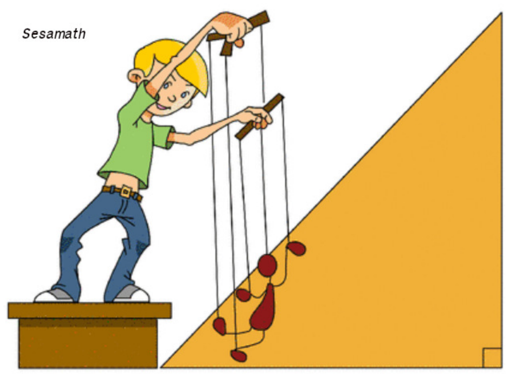
1. Calculer DE et CE.
2. Démontrer que les droites (FB) et (GA) sont parallèles.
3. En utilisant la question **3.**, calculer GA.
4. Les droites (FC) et (FB) sont-elles perpendiculaires ?
5. Démontrer en utilisant la question **4.** que le triangle CDE est rectangle.

Exercice 2

Julien prépare un spectacle de marionnettes et d'ombres chinoises.

Son écran mesure 2 m et sa marionnette 24 cm. Debout sur son estrade, il positionne sa marionnette à 30 cm de la lumière.

À quelle distance de la source de lumière doit-il placer l'écran pour que agrandir la marionnette au maximum ?



Toutes les traces de recherches seront valorisées.

Exercice 3

Voici trois fonctions :

$$f : x \to 6x - 8 \qquad g : x \to 10 - 3x \qquad h : x \to x^2 + 3x - 28$$

1. Calculer $f(4)$, $g(-2)$ et $h(-1)$.
2. Calculer l'antécédent de 5 par f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

D3 =10-3*D1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2	$f(x)$	-38	-32	-26	-20	-14	-8	-2	4	10	16	22
3	$g(x)$	25	22	19	16	13	10	7	4	1	-2	-5
4	$h(x)$	-18	-24	-28	-30	-30	-28	-24	-18	-10	0	12

4. Déterminer sans justification les antécédents de −28 par h.
5. Déterminer sans justification l'image de 4 par h.
6. Quelle formule a été écrite dans la cellule B4 puis recopiée vers la droite.

Correction

Exercice 1

1. Les droites (FE) et (BD) sont sécantes en C. Les droites (BF) et (ED) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{FB}{DE}$$

$$\frac{51\ mm}{CE} = \frac{85\ mm}{135\ mm} = \frac{68\ mm}{DE}$$

$CE = \dfrac{51\ mm \times 135\ mm}{85\ mm} = \dfrac{6\,885}{85}\ mm = 81\ mm$ et $DE = \dfrac{68\ mm \times 135\ mm}{85\ mm} = \dfrac{9\,180}{85}\ mm = 108\ mm$

2. Comparons $\dfrac{CF}{CG}$ et $\dfrac{CB}{CA}$

$\dfrac{CF}{CG} = \dfrac{51\ mm}{51\ mm + 18\ mm} = \dfrac{51}{69}$ et $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{85\ mm}{85\ mm + 30\ mm} = \dfrac{85}{115}$

Il y a trois méthodes pour vérifier si ces fractions sont égales :

Valeurs approchées	**Simplification**	**Les produits en croix**
$\dfrac{51}{69} \approx 0,739$ à $0,001$ près.	$\dfrac{51}{69} = \dfrac{3 \times 17}{3 \times 23} = \dfrac{17}{23}$	$51 \times 115 = 5\,865$
$\dfrac{85}{115} \approx 0,739$ à $0,001$ près.	$\dfrac{85}{115} = \dfrac{5 \times 17}{5 \times 23} = \dfrac{17}{23}$	$69 \times 85 = 5\,865$

Ainsi $\dfrac{CF}{CG} = \dfrac{CB}{CA}$. Comme les points C, F et G sont alignés et dans le même ordre que les points alignésC, B et A.
D'après **la réciproque du théorème de Thalès** les droites (FB) et (GA) sont parallèles.

3. Les droites (FG) et (BA) sont sécantes en C. Les droites (FB) et (GA) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CF}{CG} = \frac{CB}{CA} = \frac{BF}{GA}$$

$$\frac{51}{69} = \frac{85}{115} = \frac{68\ mm}{GA}$$

Donc $GA = \dfrac{68\ mm \times 69}{51} = \dfrac{4\,692}{51} = 92\ mm$

4. Nous allons démontrer que le triangle BFC est rectangle.

$FC^2 + FB^2 = 51^2 + 68^2$
$FC^2 + FB^2 = 2\,601 + 4\,624$
$FC^2 + FB^2 = 7\,225$

$BC^2 = 85^2$
$BC^2 = 7\,225$

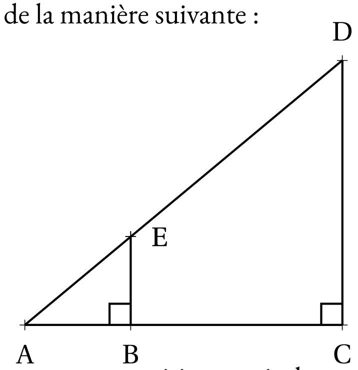
Comme $FC^2 + FB^2 = BC^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle FBC est rectangle en F.
Les droites (FC) et (FB) sont donc perpendiculaires.

5. On sait que $(DE)//(FB)$ et aussi que $(FB) \perp (FE)$
Or **si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**

Ainsi $(DE) \perp (CE)$ et le triangle CED est rectangle en E.

Exercice 2

On peut modéliser la situation de la manière suivante :



Comme la marionnette et l'écran sont en position verticale, on peut raisonnablement dire que $(CD)//(BE)$
Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{30\ cm}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{24\ cm}{2\ m}$$

Donc $AC = \dfrac{30\ cm \times 2\ m}{24\ cm} = \dfrac{30\ cm \times 200\ cm}{24\ cm} = \dfrac{6\,000\ cm}{24\ cm} = 250\ cm = 2,5\ m$

Il doit placer l'écran à $2,50\ m$ de la lumière.

Exercice 3

1. $f(4) = 6 \times 4 - 8 = 24 - 8 = 16$
$g(-2) = 10 - 3 \times (-2) = 10 + 6 = 16$
$h(-1) = (-1)^2 + 3 \times (-1) - 28 = 1 - 3 - 28 = -30$

2. Il faut résoudre $f(x) = 5$

$$6x - 8 = 5$$

$$6x - 8 + 8 = 5 + 8$$

$$6x = 13$$

$$x = \frac{13}{6}$$

3.

$$f(x) = g(x)$$

$$6x - 8 = 10 - 3x$$

$$6x - 8 + 8 = 10 - 3x + 8$$

$$6x = 18 - 3x$$

$$6x + 3x = 10 - 3x + 3x$$

$$9x = 10$$

$$x = \frac{10}{9}$$

4. Dans le tableau on lit que -3 et 0 sont des antécédents de -28 par h.

5. Dans le tableau on lit que l'image de 4 par h est 0.

6. Dans la cellule B4 il faut écrire $= \mathrm{B4} * \mathrm{B4} + 3 * \mathrm{B4} - 28$ ou $= \mathrm{B4}\hat{}2 + 3 * \mathrm{B4} - 28$ ou $= \mathrm{B4}^2 + 3 * \mathrm{B4} - 28$

Évaluation de mathématiques

Exercice 1

(6 points)

On pose :

— $f(x) = (x-4)(-6x-2)$;

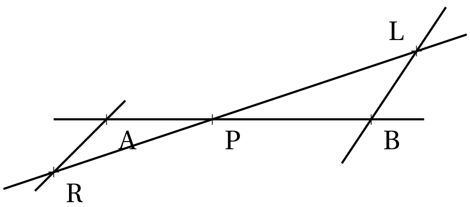
— $g(x) = 8 + 2x(7-3x) + 8x$;

— $h(x) = (x-4)(x+3) + (x-4)(-5-7x)$

Montrer en développant que $f(x) = g(x) = h(x)$

Exercice 2

(4 points)



La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs.
On sait que :

— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;

— LB = 4 m, PR = 5 m, PB = 5 m et PA = 3 m ;

— (AR)//(LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AR, et le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

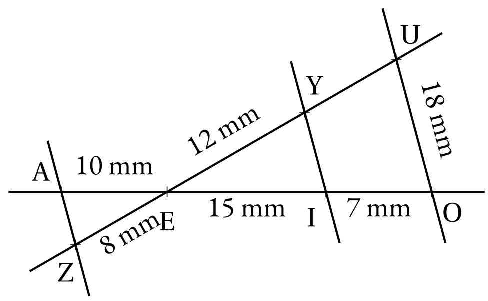
Exercice 3

(6 points)

La figure ci-après n'est pas en vraie grandeur.

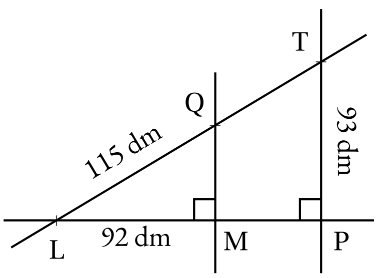
1. On sait que les droites (UY) et (IO) sont sécantes en E et que les droites (YI) et (UO) sont parallèles.
Calculer la valeur exacte de EU et YI puis une valeur approchée au dixième près.

2. Les droites (AZ) et (YI) sont-elles parallèles ?



Exercice 4

(4 points)



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— Le triangle LMQ est rectangle en M ;

— Le triangle LPT est rectangle en P ;

— Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L.

1. Calculer QM

2. En admettant que QM = 69 dm, calculer LT et LP.

Évaluation de mathématiques — Correction

Exercice 1

$f(x) = (x-4)(-6x-2)$
$f(x) = -6x^2 - 2x + 24x + 8$

$\boxed{f(x) = -6x^2 + 22x + 8}$

$g(x) = 8 + 2x(7-3x) + 8x$
$g(x) = 8 + 14x - 6x^2 + 8x$

$\boxed{g(x) = -6x^2 + 22x + 8}$

$h(x) = (x-4)(x+3) + (x-4)(-5-7x)$
$h(x) = x^2 + 3x - 4x - 12 - 5x - 7x^2 + 20 + 28x$

$\boxed{h(x) = -6x^2 + 22x + 8}$

Exercice 2

Les droites (LR) et (AB) sont sécantes en P, les droites (AR) et (LB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{PB}}{\text{PA}} = \frac{\text{PL}}{\text{PR}} = \frac{\text{BL}}{\text{AR}}$$

$$\frac{5\ m}{3\ m} = \frac{\text{PL}}{5\ m} = \frac{4\ m}{\text{AR}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{PL} = \dfrac{5\ m \times 5\ m}{3\ m}$ d'où $\text{PL} = \dfrac{25\ m^2}{3\ m}$ et $\text{PL} \approx 8,333\ m$

$\text{AR} = \dfrac{4\ m \times 3\ m}{5\ m}$ d'où $\text{AR} = \dfrac{12\ m^2}{5\ m}$ et $\text{AR} = 2,4\ m$

$\boxed{\text{PL} \approx 8,333\ m \text{ et } \text{AR} = 2,4\ m}$

Exercice 3

1. Les droites (YU) et (IO) sont sécantes en E, les droites (YI) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{EY}}{\text{EU}} = \frac{\text{EI}}{\text{EO}} = \frac{\text{YI}}{\text{UO}}$$

$$\frac{12\ mm}{\text{EU}} = \frac{15\ mm}{15\ mm + 7\ mm} = \frac{\text{YI}}{18\ mm}$$

$$\frac{12\ mm}{\text{EU}} = \frac{15\ mm}{22\ mm} = \frac{\text{YI}}{18\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{EU} = \dfrac{12\ mm \times 22\ mm}{15\ mm}$ d'où $\text{EU} = \dfrac{264\ mm^2}{15\ mm}$ et $\text{EU} = 17,6\ mm$

$\text{YI} = \dfrac{15\ mm \times 18\ mm}{22\ mm}$ d'où $\text{YI} = \dfrac{270\ mm^2}{22\ mm}$ et $\text{YI} \approx 12,3\ mm$

$\boxed{\text{EU} = 17,6\ mm \text{ et } \text{YI} \approx 12,3\ mm}$

2. Comparons $\dfrac{\text{EI}}{\text{EA}}$ et $\dfrac{\text{EY}}{\text{EZ}}$

$$\frac{EI}{EA} = \frac{15\ mm}{10\ mm}$$

$$\frac{EY}{EZ} = \frac{12\ mm}{8\ mm}$$

$$\frac{EI}{EA} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{EY}{EZ} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Comme $\frac{EY}{EZ} = \frac{EI}{EA}$ et comme les points E, I et A sont alignés et dans le même ordre que les points E, Y et Z, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (YI) et (AZ) sont parallèles.

$\boxed{(YI)//(AZ)}$

Exercice 4

1. Dans le triangle LMQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$ML^2 + MQ^2 = LQ^2$$

$$92^2 + MQ^2 = 115^2$$

$$8\,464 + MQ^2 = 13\,225$$

$$MQ^2 = 13\,225 - 8\,464$$

$$MQ^2 = 4\,761$$

$$MQ = \sqrt{4\,761}$$

$$MQ = 69$$

$\boxed{MQ = 69\ mm}$

2. Les droites (QM) et (TP) sont perpendiculaires à la droite (LP).
Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Ainsi (QM)//(TP)
Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L, les droites (QM) et (TP) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LQ}{LT} = \frac{LM}{LP} = \frac{QM}{TP}$$

$$\frac{115\ dm}{LT} = \frac{92\ dm}{LP} = \frac{69\ dm}{93\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$LT = \dfrac{115\ dm \times 93\ dm}{69\ dm}$ d'où $LT = \dfrac{10\,695\ dm^2}{69\ dm}$ et $LT = 155\ dm$

$LP = \dfrac{93\ dm \times 92\ dm}{69\ dm}$ d'où $LP = \dfrac{8\,556\ dm}{69\ dm}$ et $LP = 124\ dm$

Devoir de mathématiques à rédiger à la maison

L'ensemble de ces exercices est à rédiger sur feuille double, avec le même soin qu'une évaluation en classe. Il va vous demander environ 1h30 de travail. N'attendez pas le dernier moment pour vous y mettre. Il s'agit avant tout d'une préparation à l'évaluation qui aura lieu en fin de semaine précédent les vacances. J'ouvre un fil de discussion sur l'ENT pour que vous puissiez poser vos questions pendant la semaine.

Exercice n° 1 :

Un artisan confiseur souhaite préparer ses boites de bonbons pour Noël. Chacune des boites doit contenir des dragées aux amandes, des dragées au chocolat et des dragées guimauves. La répartition dans chaque boite est identique.
Ce matin, le confiseur vient de préparer 660 dragées aux amandes, 780 dragées au chocolat et 420 dragées guimauves.

1. Faire la liste des diviseurs de 660, 780 et 420.

2. Combien de boites, toutes identiques, pourra-t-il au maximum constituer ?
Combien de dragées de chaque sorte faut-il placer dans une boite ? Expliquer votre démarche.

3. Pour produire l'ensemble de ces dragées, le confiseur à dépensé 430 € en matière première et pour l'ensemble des charges. Sachant que son objectif est de faire un bénéfice égal à 20 % des dépenses, à quel prix doit-il vendre chaque boite ? Expliquer votre démarche.

Exercice n° 2 :

On pose :

- $f(x) = (7x-1)(4x+3) + 10(1-7x)$
- $g(x) = (1-7x)(8-9x) + (5x-1)(1-7x)$
- $h(x) = (1-7x)(7-4x)$
- $k(x) = 28x^2 - 53x + 7$

1. Développer et réduire $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

2. Que constatez-vous ?

3. Pour calculer les images de 0, 1 et -2 par la fonction f, quelle expression est la plus pratique ?
Calculer ces images en utilisant l'expression la plus simple de la fonction f.

4. Calculez les images de $\frac{1}{7}$ et $\frac{7}{4}$ par la fonction h.

5. Sans calcul supplémentaire, quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice n° 3 :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$3x + 9 = 7x + 4$$

$$4 - 8x = 9 - 5x$$

$$3x + 6 - 7x + 8 = 1 - 2x - 3 + 5x$$

$$5(3x - 7) = 3(6x + 2)$$

Exercice n° 4 :

L'Ultra-Trail du Mont-Blanc ou UTMB est un évènement sportif composé de sept trails (course à pied) dont quatre en ultra-endurance en pleine nature et de très longue durée, qui traverse trois pays (France / Italie / Suisse), trois grandes régions alpines (Auvergne-Rhône-Alpes / la Vallée d'Aoste / le Valais) et dix-huit communes françaises, italiennes et suisses du pays du Mont-Blanc. Il emprunte principalement le sentier de grande randonnée Tour du Mont-Blanc.
La course principale a lieu sur un parcours de 171 km pour un dénivelé positif de $10\,000$ m.

1. Le 27 août 2022, l'espagnol Kilian Jornet a terminé l'épreuve en 19 h 49 min 30 s.

Calculez sa vitesse moyenne en kilomètre heure. Arrondir au millième près.

2. Le record du monde de Marathon, $42,195$ km, a été réalisé le 25 septembre 2022 par le Kényan Eliud Kipchoge avec un temps de 2 h 14 min 4 s.

Calculez sa vitesse moyenne en kilomètre heure. Arrondir au millième près.

3. Usain Bolt a couru le 100 m en $9,58$ s le 16 août 2009.

Calculer sa vitesse moyenne en kilomètre heure. Arrondir au millième près.

4. Si Usain Bold courrait l'UTMB à la même vitesse que son record du monde (ce qui me semble humainement impossible), quel serait son temps ?

Exercice n° 5 :

1. Construire avec précision sur votre copie la figure suivante :

- Tracer un triangle KUG rectangle en G tel que KU = 8 cm et GU = $4,8$ cm ;
- Placer sur la droite (KG), le point R vérifiant les deux conditions suivantes :
  - KR = $5,2$ cm ;
  - K n'appartient pas à [KG).
- Tracer la droite perpendiculaire à la droite (KR) passant par R. Cette droite coupe la droite (KU) en S.

2. Expliquez pour quelle raison les droites (GU) et (RS) sont parallèles.

3. Calculer KG.

4. Calculer RS et SK.

Devoir de mathématiques à rédiger à la maison — CORRECTION

Exercice n° 1 : Arithmétique CORRECTION

Arithmétique

1. Pour faire la liste compléte des diviseurs d'un nombre entier, il souvent pratique de disposer de la décomposition en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{660 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11}$ $\boxed{780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13}$ $\boxed{420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7}$

Voici la liste des diviseurs de chacun de ces nombres :
660 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 11; 12 ; 15 ; 20 ; 22 ; 30 ; 33 ; 44 ; 55 ; 60 ; 66 ; 110 ; 132 ; 165 ; 220 ; 330 ; 660
780 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 20 ; 26 ; 30 ; 39 ; 52 ; 60 ; 65 ; 78 ; 130 ; 156 ; 195 ; 260 ; 390 ; 780
420 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 28 ;20 ; 21 ; 30 ; 35 ; 42 ; 60 ; 70 ; 84 ; 105 ; 140 ; 210 ; 420

2. On constate que les diviseurs communs de 660, 780 et 420 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.
Le plus grand diviseur commun au trois nombres est 60.

Comme $660 = 11 \times 60$, $780 = 13 \times 60$ et $420 = 7 \times 60$,

Il va pouvoir constituer 60 boites constituées de 11 dragées aux amandes, 13 dragées au chocolat et 6 dragées guimauve.

3. Il faut ajouter 20 % au montant de ses dépenses.

$\dfrac{20}{100} \times 430\,€ = 0,20 \times 430\,€ = 86\,€$.
Il veut donc réaliser un bénéfice de 86 € . Il lui faut un chiffre d'affaire de 430 € +86 € = 516 € .
Il a vendre 60 boites. Comme 516 € ÷60 = 8,60 € .

Il doit vendre chaque boite 8,60 € .

Exercice n° 2 : Fonctions, développement... CORRECTION

Calcul littéral

1.

$f(x) = (7x - 1)(4x + 3) + 10(1 - 7x)$
$f(x) = 28x^2 + 21x - 4x - 3 + 10 - 70x$

$\boxed{f(x) = 28x^2 - 53x + 7}$

$g(x) = (1 - 7x)(8 - 9x) + (5x - 1)(1 - 7x)$
$g(x) = 8 - 9x - 56x + 63x^2 + 5x - 35x^2 - 1 + 7x$

$\boxed{g(x) = 28x^2 - 53x + 7}$

$h(x) = (1 - 7x)(7 - 4x)$
$h(x) = 7 - 4x - 49x + 28x^2$

$\boxed{h(x) = 28x^2 - 53x + 7}$

2. $\boxed{\text{On constate que pour tout } x,\ f(x) = g(x) = h(x) = k(x)}$

3. L'expression la plus pratique est la forme développée et réduite $k(x)$.
$k(0) = 28 \times 0^2 - 53 \times 0 + 7$ donc $\boxed{k(0) = 0}$

$k(1) = 28 \times 1^2 - 53 \times 1 + 7 = 28 - 53 + 7$ donc $\boxed{k(1) = -18}$

$k(-2) = 28 \times (-2)^2 - 53 \times (-2) + 7 = 28 \times 4 + 106 + 7 = 112 + 113$ donc $\boxed{k(-2) = 225}$

4. $h\left(\frac{1}{7}\right) = \left(1 - 7 \times \frac{1}{7}\right)\left(7 - 4 \times \frac{1}{7}\right)$
$h\left(\frac{1}{7}\right) = (1-1))\left(7 - 4 \times \frac{1}{7}\right)$
$h\left(\frac{1}{7}\right) = 0 \times \left(7 - 4 \times \frac{1}{7}\right)$
$h\left(\frac{1}{7}\right) = 0$

$h\left(\frac{7}{4}\right) = \left(1 - 7 \times \frac{7}{4}\right)\left(7 - 4 \times \frac{7}{4}\right)$
$h\left(\frac{7}{4}\right) = \left(1 - \frac{49}{4})\right)(7-7)$
$h\left(\frac{7}{4}\right) = \left(1 - \frac{49}{4})\right) \times 0$
$h\left(\frac{7}{4}\right) = 0$

5. Comme on le voit dans la question précédente, les nombres $\frac{1}{7}$ et $\frac{4}{7}$ sont deux antécédents de 0 par la fonction h.
Nous démontrerons plus tard cette année que ce sont les seuls.

Exercice n° 3 : Équations Correction

Équations

$$\begin{aligned}
3x + 9 &= 7x + 4\\
3x + 9 - 9 &= 7x + 4 - 9\\
3x &= 7x - 5\\
3x - 7x &= 7x - 5 - 7x\\
-4x &= -5\\
x &= \frac{-5}{-4}\\
x &= \frac{5}{4}\\
x &= 1,25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 - 8x &= 9 - 5x\\
4 - 8x - 4 &= 9 - 5x - 4\\
-8x &= 5 - 5x\\
-8x + 5x &= 5 - 5x + 5x\\
-3x &= 5\\
x &= \frac{5}{-3}\\
x &= -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x + 6 - 7x + 8 &= 1 - 2x - 3 + 5x\\
-4x + 14 &= 3x - 2\\
-4x + 14 - 14 &= 3x - 2 - 14\\
-4x &= 3x - 16\\
-4x - 3x &= 3x - 16 - 3x\\
-7x &= 16\\
x &= \frac{16}{-7}\\
x &= -\frac{16}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5(3x - 7) &= 3(6x + 2)\\
15x - 35 &= 18x + 6\\
15x - 35 + 35 &= 18x + 6 + 35\\
15x &= 18x + 41\\
15x - 18x &= 18x + 41 - 18x\\
-3x &= 41\\
x &= \frac{41}{-3}\\
x &= -\frac{41}{3}
\end{aligned}$$

Exercice n° 4 : Vitesse CORRECTION

Vitesse

La course principale a lieu sur un parcours de 171 km pour un dénivelé positif de 10 000 m.

1. On sait que la distance et le temps sont deux grandeurs proportionnelles :

Distance	$171\ km$	$\dfrac{171\ km \times 3600\ s}{71370\ s} \approx 8,625\ km$
Temps	$19\ h\ 49\ min\ 30\ s = 19 \times 3600\ s + 49 \times 60\ s + 30\ s = 71370\ s$	$1\ h\ = 60\ min = 3600\ s$

Il a courru à la vitesse moyenne de 8,625 km/h

2. On sait que la distance et le temps sont deux grandeurs proportionnelles :

Distance	$42,195\ km$	$\dfrac{42,195\ km \times 3600\ s}{8044\ s} \approx 18,884\ km$
Temps	$2\ h\ 14\ min\ 4\ s = 2 \times 3600\ s + 14 \times 60\ s + 4\ s = 8044\ s$	$1\ h\ = 60\ min = 3600\ s$

Il a courru à la vitesse moyenne de 18,884 km/h

3. On sait que la distance et le temps sont deux grandeurs proportionnelles :

Distance	$100\ km = 0,1\ km$	$\dfrac{0,1\ km \times 3600\ s}{9{,}58\ s} \approx 37,578\ km$
Temps	$9,58\ s$	$1\ h\ = 60\ min = 3600\ s$

Il a courru à la vitesse moyenne de 37,578 km/h

4. On sait que la distance et le temps sont deux grandeurs proportionnelles :

Distance	$171\ km$	$100\ m = 0,1\ km$
Temps	$\dfrac{171\ km \times 9{,}58\ s}{0,1\ km} = 16381{,}8\ s$	$9{,}58\ s$

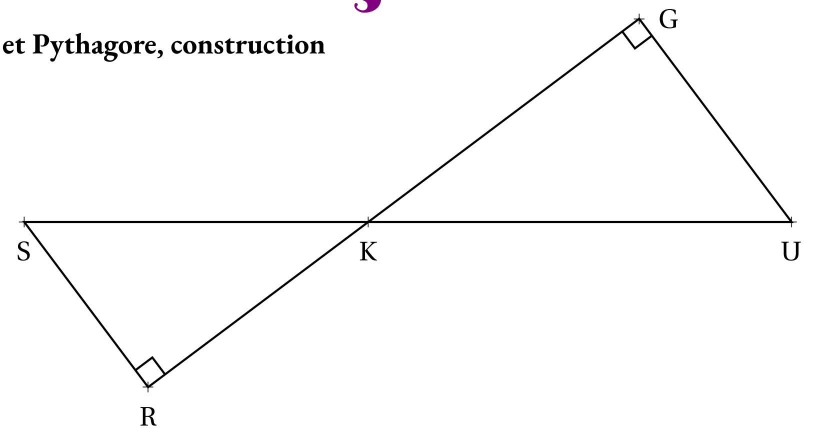
Or $16381\ s = 273 \times 60\ s + 1\ s$ et $273\ min = 4 \times 6 + 33\ min$.

Usain Bolt mettrait environ 4 h 33 min 1 s pour effectuer l'UTMB... ce qui est impossible !

Exercice n° 5 : Thalès papillon et Pythagore, construction CORRECTION

Thalès et Pythagore

1.



2. Les droites (GU) et (RS) sont l'une et l'autre perpendiculaire à la droite (GR).
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (GU) et (RS) sont parallèles.}}$

3.
Dans le triangle KUG rectangle en G,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$GK^2 + GU^2 = KU^2$$
$$GK^2 + 4,8^2 = 8^2$$
$$GK^2 + 23,04 = 64$$
$$GK^2 = 64 - 23,04$$
$$GK^2 = 40,96$$
$$GK = \sqrt{40,96}$$
$$GK = 6,4$$

$\boxed{GK = 6,4\ cm}$

4.
Les droites (GR) et (SU) sont sécantes en K, les droites (GU) et (SR) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{KG}{KR} = \frac{KU}{KS} = \frac{GU}{RS}$$

$$\frac{6,4\ cm}{5,2\ cm} = \frac{8\ cm}{KS} = \frac{4,8\ cm}{RS}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$KS = \dfrac{8\ cm \times 5,2\ cm}{6,4\ cm}$ d'où $KS = \dfrac{41,6\ cm^2}{6,4\ cm}$ et $KS = 6,5\ cm$
$RS = \dfrac{4,8\ cm \times 5,2\ cm}{6,4\ cm}$ d'où $RS = \dfrac{24,96\ cm^2}{6,4\ cm}$ et $RS = 3,9\ cm$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *6 points*

On pose :

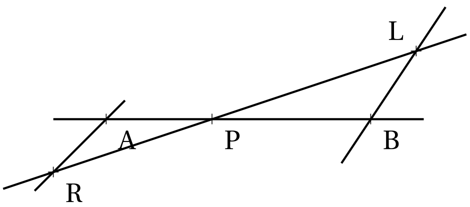
— $f(x) = 9x + 7x(3x - 1) - 9 + 5(3x + 1) - 6x^2$;
— $g(x) = 8x + 2x(7 - 3x) - 13 + 6x^2$;
— $h(x) = (5x - 1)(3x + 4)$;
— $k(x) = 15x^2 + 17x - 4$;
— $l(x) = 22x - 13$.

1. Développer et réduire $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

2. Calculer les images de 0 et -1 par la fonction k.

3. Calculer l'antécédent de -22 par la fonction l.

Exercice n° 2 : *4 points*



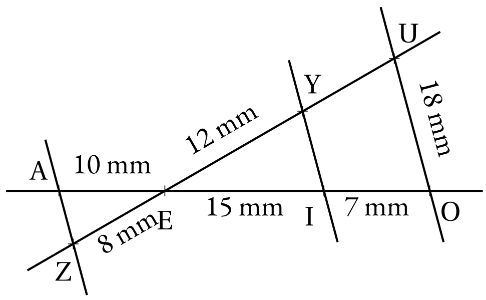
La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs.
On sait que :

— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;
— LB = 4 m, PR = 5 m, PB = 5 m et PA = 3 m ;
— (AR)//(LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AR, et le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

Exercice n° 3 : *6 points*

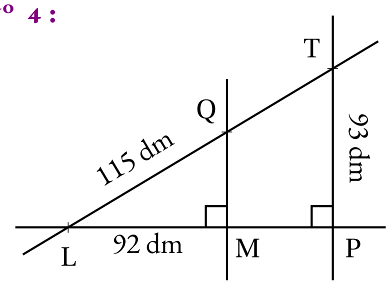
La figure ci-après n'est pas en vraie grandeur.



1. On sait que les droites (UY) et (IO) sont sécantes en E et que les droites (YI) et (UO) sont parallèles.
Calculer la valeur exacte de EU et YI puis une valeur approchée au dixième près.

2. Les droites (AZ) et (YI) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 4 : *4 points*



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— Le triangle LMQ est rectangle en M ;
— Le triangle LPT est rectangle en P ;
— Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L.

1. Calculer QM

2. En admettant que QM = 69 dm, calculer LT et LP.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Fonctions, développement... Correction

Calcul littéral

1.
$f(x)=9x+7x(3x-1)-9+5(3x+1)-6x^2$
$f(x)=9x+21x^2-7x-9+15x+5-6x^2$
$\boxed{f(x)=15x^2+17x-4}$

$g(x)=8x+2x(7-3x)-13+6x^2$
$g(x)=8x+14x-6x^2-13+6x^2$
$\boxed{g(x)=22x-13}$

$h(x)=(5x-1)(3x+4)$
$h(x)=15x^2+20x-3x-4$
$\boxed{h(x)=15x^2+17x-4}$

2. $k(0)=15\times 0^2+17\times 0-4=\boxed{-4}$
$k(-1)=15\times(-1)^2+17\times(-1)-4=15\times 1-17-4=15-21=\boxed{-6}$

3. Il faut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} l(x) &= -22 \\ 22x-13 &= -22 \\ 22x-13+13 &= -22+13 \\ 22x &= -9 \\ x &= -\frac{9}{22} \end{aligned}$$

$\boxed{-\frac{9}{22} \text{ est l'antécédent de } -22 \text{ par la fonction } l.}$

Exercice n° 2 : Thalès papillon Correction

Thalès

Les droites (LR) et (AB) sont sécantes en P, les droites (AR) et (LB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{PB}}{\text{PA}}=\frac{\text{PL}}{\text{PR}}=\frac{\text{BL}}{\text{AR}}$$

$$\frac{5\ m}{3\ m}=\frac{\text{PL}}{5\ m}=\frac{4\ m}{\text{AR}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{PL}=\frac{5\ m\times 5\ m}{3\ m}$ d'où $\text{PL}=\frac{25\ m^2}{3\ m}$ et $\text{PL}\approx 8,333\ m$

$\text{AR}=\frac{4\ m\times 3\ m}{5\ m}$ d'où $\text{AR}=\frac{12\ m^2}{5\ m}$ et $\text{AR}=2,4\ m$

$\boxed{\text{PL} \approx 8,333\ m \text{ et AR} = 2,4\ m}$

Exercice n° 3 : Thalès triangle et papillon Correction

Thalès

Exercice 3

1. Les droites (YU) et (IO) sont sécantes en E, les droites (YI) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{EY}}{\text{EU}} = \frac{\text{EI}}{\text{EO}} = \frac{\text{YI}}{\text{UO}}$$

$$\frac{12\ mm}{\text{EU}} = \frac{15\ mm}{15\ mm + 7\ mm} = \frac{\text{YI}}{18\ mm}$$

$$\frac{12\ mm}{\text{EU}} = \frac{15\ mm}{22\ mm} = \frac{\text{YI}}{18\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{EU} = \dfrac{12\ mm \times 22\ mm}{15\ mm}$ d'où $\text{EU} = \dfrac{264\ mm^2}{15\ mm}$ et $\text{EU} = 17,6\ mm$

$\text{YI} = \dfrac{15\ mm \times 18\ mm}{22\ mm}$ d'où $\text{YI} = \dfrac{270\ mm^2}{22\ mm}$ et $\text{YI} \approx 12,3\ mm$

$\boxed{\text{EU} = 17,6\ mm \text{ et YI} \approx 12,3\ mm}$

2. Comparons $\dfrac{\text{EI}}{\text{EA}}$ et $\dfrac{\text{EY}}{\text{EZ}}$

$$\frac{\text{EI}}{\text{EA}} = \frac{15\ mm}{10\ mm} \qquad \frac{\text{EY}}{\text{EZ}} = \frac{12\ mm}{8\ mm}$$

$$\frac{\text{EI}}{\text{EA}} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad \frac{\text{EY}}{\text{EZ}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Comme $\dfrac{\text{EY}}{\text{EZ}} = \dfrac{\text{EI}}{\text{EA}}$ et comme les points E, I et A sont alignés et dans le même ordre que les points E, Y et Z, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (YI) et (AZ) sont parallèles.

$\boxed{\text{(YI)}//\text{(AZ)}}$

Exercice n° 4 : Thalès triangle et Pythagore Correction

Thalès et Pythagore

1. Dans le triangle LMQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{ML}^2 + \text{MQ}^2 = \text{LQ}^2$$

$$92^2 + \text{MQ}^2 = 115^2$$

$$8\,464 + \text{MQ}^2 = 13\,225$$

$$\text{MQ}^2 = 13\,225 - 8\,464$$

$$\text{MQ}^2 = 4\,761$$

$$MQ = \sqrt{4\,761}$$

$$MQ = 69$$

$\boxed{MQ = 69\ mm}$

2. Les droites (QM) et (TP) sont perpendiculaires à la droite (LP).
Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Ainsi (QM)//(TP)
Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L, les droites (QM) et (TP) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LQ}{LT} = \frac{LM}{LP} = \frac{QM}{TP}$$

$$\frac{115\ dm}{LT} = \frac{92\ dm}{LP} = \frac{69\ dm}{93\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$LT = \dfrac{115\ dm \times 93\ dm}{69\ dm}$ d'où $LT = \dfrac{10\,695\ dm^2}{69\ dm}$ et $LT = 155\ dm$

$LP = \dfrac{93\ dm \times 92\ dm}{69\ dm}$ d'où $LP = \dfrac{8\,556\ dm}{69\ dm}$ et $LP = 124\ dm$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 :

6 points

On pose :

— $f(x) = 9x + 7x(3x - 1) - 9 + 5(3x + 1) - 6x^2$;
— $g(x) = 8x + 2x(7 - 3x) - 13 + 6x^2$;
— $h(x) = (5x - 1)(3x + 4)$;
— $k(x) = 15x^2 + 17x - 4$;
— $l(x) = 22x - 13$.

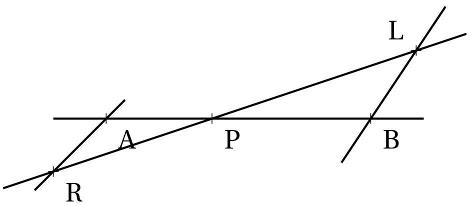
1. Développer et réduire $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

2. Calculer les images de 0 et -1 par la fonction k.

3. Calculer l'antécédent de -22 par la fonction l.

Exercice n° 2 :

4 points



La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs.
On sait que :

— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;
— LB = 4 m, PR = 5 m, PB = 5 m et PA = 3 m ;
— (AR)//(LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AR, et le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

Exercice n° 3 :

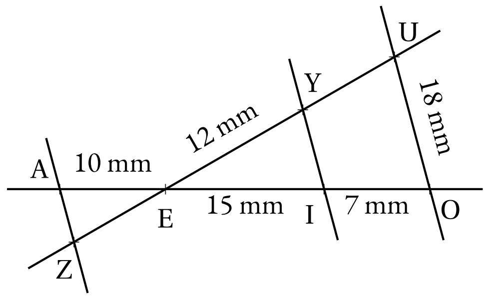
6 points

Sur la figure ci-après qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— (UY)//(IO)
— (AZ)//(UO)
— Les points Z, E, Y et U sont alignés ;
— Les points A, E, I et O) sont alignés ;

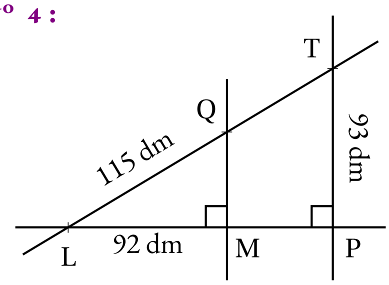
1. Calculer la valeur exacte de EU et YI puis une valeur approchée au dixième près.

2. Calculer la valeur exacte de AZ et ZE puis une valeur approchée au dixième près



Exercice n° 4 :

4 points



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— Le triangle LMQ est rectangle en M ;
— Le triangle LPT est rectangle en P ;
— Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L.

1. Calculer QM

2. En admettant que QM = 69 dm, calculer LT et LP.

Contrôle de mathématiques — CORRECTION

Exercice n° 1 : Fonctions, développement… CORRECTION

Calcul littéral

1.

$f(x) = 9x + 7x(3x-1) - 9 + 5(3x+1) - 6x^2$
$f(x) = 9x + 21x^2 - 7x - 9 + 15x + 5 - 6x^2$
$\boxed{f(x) = 15x^2 + 17x - 4}$

$g(x) = 8x + 2x(7-3x) - 13 + 6x^2$
$g(x) = 8x + 14x - 6x^2 - 13 + 6x^2$
$\boxed{g(x) = 22x - 13}$

$h(x) = (5x-1)(3x+4)$
$h(x) = 15x^2 + 20x - 3x - 4$
$\boxed{h(x) = 15x^2 + 17x - 4}$

2. $k(0) = 15 \times 0^2 + 17 \times 0 - 4 = \boxed{-4}$
$k(-1) = 15 \times (-1)^2 + 17 \times (-1) - 4 = 15 \times 1 - 17 - 4 = 15 - 21 = \boxed{-6}$

3. Il faut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} l(x) &= -22 \\ 22x - 13 &= -22 \\ 22x - 13 + 13 &= -22 + 13 \\ 22x &= -9 \\ x &= -\frac{9}{22} \end{aligned}$$

$\boxed{-\frac{9}{22} \text{ est l'antécédent de } -22 \text{ par la fonction } l.}$

Exercice n° 2 : Thalès papillon CORRECTION

Thalès

Les droites (LR) et (AB) sont sécantes en P, les droites (AR) et (LB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PL}{PR} = \frac{BL}{AR}$$

$$\frac{5\ m}{3\ m} = \frac{PL}{5\ m} = \frac{4\ m}{AR}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$PL = \frac{5\ m \times 5\ m}{3\ m}$ d'où $PL = \frac{25\ m^2}{3\ m}$ et $PL \approx 8{,}333\ m$

$AR = \frac{4\ m \times 3\ m}{5\ m}$ d'où $AR = \frac{12\ m^2}{5\ m}$ et $AR = 2{,}4\ m$

$\boxed{PL \approx 8,333\ m \text{ et } AR = 2,4\ m}$

Exercice n° 3 : Thalès triangle et papillon CORRECTION

Thalès

Exercice 3

1. Les droites (YU) et (IO) sont sécantes en E, les droites (YI) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EY}{EU} = \frac{EI}{EO} = \frac{YI}{UO}$$

$$\frac{12\ mm}{EU} = \frac{15\ mm}{15\ mm + 7\ mm} = \frac{YI}{18\ mm}$$

$$\frac{12\ mm}{EU} = \frac{15\ mm}{22\ mm} = \frac{YI}{18\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$EU = \dfrac{12\ mm \times 22\ mm}{15\ mm}$ d'où $EU = \dfrac{264\ mm^2}{15\ mm}$ et $EU = 17,6\ mm$

$YI = \dfrac{15\ mm \times 18\ mm}{22\ mm}$ d'où $YI = \dfrac{270\ mm^2}{22\ mm}$ et $YI \approx 12,3\ mm$

$\boxed{EU = 17,6\ mm \text{ et } YI \approx 12,3\ mm}$

2. Les droites (AO) et (ZU) sont sécantes en E, les droites (AZ) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EA}{EO} = \frac{EZ}{EU} = \frac{AZ}{UO}$$

$$\frac{10\ mm}{22\ mm} = \frac{EZ}{17,6\ mm} = \frac{AZ}{18\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$EZ = \dfrac{17,6\ mm \times 10\ mm}{22\ mm}$ d'où $EZ = \dfrac{176\ mm^2}{22\ mm}$ et $EZ = 8\ mm$

$AZ = \dfrac{18\ mm \times 10\ mm}{22\ cm}$ d'où $AZ = \dfrac{180\ mm^2}{22\ cm}$ et $AZ \approx 8,2\ mm$

Exercice n° 4 : Thalès triangle et Pythagore CORRECTION

Thalès et Pythagore

1. Dans le triangle LMQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$ML^2 + MQ^2 = LQ^2$$

$$92^2 + MQ^2 = 115^2$$

$$8\,464 + MQ^2 = 13\,225$$

$$MQ^2 = 13\,225 - 8\,464$$

$$MQ^2 = 4\,761$$

$$MQ = \sqrt{4761}$$

$$MQ = 69$$

$\boxed{MQ = 69\ mm}$

2. Les droites (QM) et (TP) sont perpendiculaires à la droite (LP).
Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Ainsi (QM)//(TP)
Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L, les droites (QM) et (TP) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LQ}{LT} = \frac{LM}{LP} = \frac{QM}{TP}$$

$$\frac{115\ dm}{LT} = \frac{92\ dm}{LP} = \frac{69\ dm}{93\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$LT = \dfrac{115\ dm \times 93\ dm}{69\ dm}$ d'où $LT = \dfrac{10\,695\ dm^2}{69\ dm}$ et $LT = 155\ dm$

$LP = \dfrac{93\ dm \times 92\ dm}{69\ dm}$ d'où $LP = \dfrac{8\,556\ dm}{69\ dm}$ et $LP = 124\ dm$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *5 points*

Un chocolatier vient de préparer 630 poissons et 1 155 cloches de Pâques. Il souhaite préparer des sachets mélangés **tous identiques**, chaque sachet contenant la même quantité de poissons et la même quantité de cloches en chocolat. Après la répartition dans des sachets, **il ne doit rester aucun chocolat !**

1.a. Peut-il constituer des sachets contenant 7 poissons et 11 cloches de Pâques ?
1.b. Peut-il constituer 35 sachets ?
2. Décomposer 630 et 1 155 en produit de facteurs premiers.
3. Déterminer la liste des diviseurs communs à 630 et 1 155.
4. Combien de sachets au maximum ce chocolatier pourra-t-il préparer ?
Combien chacun de ces sachets contiendra de cloches et de poissons de Pâques ?

Exercice n° 2 : *5 points*

On note $f(x) = (3x-1)(2x+3)+(5x-1)(3x-1)$ et $g(x) = 5x(2x-1)-10x^2+3$

1. Développer et réduire $f(x)$.

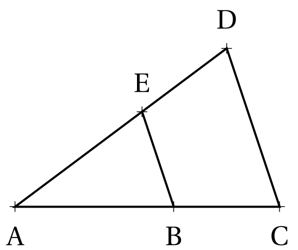
2. Développer et réduire $g(x)$.

3. Démontrer que $f(x) = (3x-1)(7x+2)$.

4. En utilisant l'expression de la question **3.** calculer les images de -1 et 5 par la fonction f.

5. On peut prouver que $g(x) = -5x+3$. Calculer l'antécédent de 11 par la fonction g.

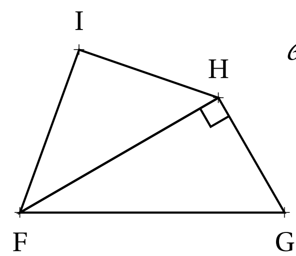
Exercice n° 3 : *6 points*



Sur la figure ci-dessus on sait que :

- B ∈ [AC] et E ∈ [AD] et (BE)//(CD) ;
- CD = 125 mm, EB = 75 mm ;
- AD = 165 mm, AB = 87 mm.

1. Calculer la valeur exacte des longueurs AE et AC.

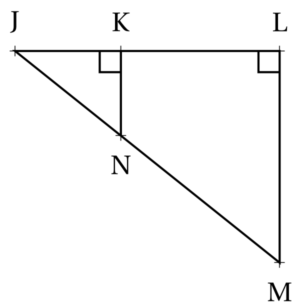


Sur la figure ci-dessus on sait que :

- FHG est rectangle en H ;
- FG = 97 m, HG = 72 m, IH = 36 m, IF = 54 m.

2. Le triangle FIH est-il rectangle ?

Exercice n° 4 : *4 points*



Sur la figure ci-contre on sait que :

- JKN est rectangle en K et JLM est rectangle en L ;
- K ∈ [JL] et N ∈ [JM] ;
- JN = 70 cm, KN = 56 cm et LM = 136 cm.

1. Calculer la valeur exacte de JK.

2. Démontrer que (KN)//(LM).

3. Calculer JL et JM puis KL et NM.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Les chocolats

Correction

Arithmétique

1.a. On effectue les divisions euclidiennes de 630 et 1 155 par 7 et 11.
$630 = 7 \times 90$ et $1\,155 = 11 \times 105$

Ce n'est pas possible car les quotients ne sont pas égaux (90 et 105).

1.b. On effectue les divisions euclidiennes de 630 et 1 155 par 35.
$630 = 35 \times 18$ et $1\,155 = 35 \times 33$.

Il peut préparer 35 sachets contenant chacun 18 poissons et 33 cloches de Pâques.

2. Décomposer 630 et 1 155 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ donc $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$1\,155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$

3. Déterminer la liste des diviseurs communs à 630 et 1 155.
On constate en examinant les produits de facteurs premiers que les facteurs 3, 5 et 7 sont communs aux deux nombres. Les diviseurs communs à ces deux nombres sont donc tous les produits que l'on peut construire à partir des ces nombres :

$1 = 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$3 = 3^1 \times 5^0 \times 7^0$
$5 = 3^0 \times 5^1 \times 7^0$
$7 = 3^0 \times 5^0 \times 7^1$
$15 = 3^1 \times 5^1 \times 7^0$
$21 = 3^1 \times 5^0 \times 7^1$
$35 = 3^0 \times 5^1 \times 7^1$
$105 = 3^1 \times 5^1 \times 7^1$.

La liste des diviseurs communs à 630 et 1 155 sont : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 et 105.

4. Combien de sachets au maximum ce chocolatier pourra-t-il préparer ?
Combien chacun de ces sachets contiendra de cloches et de poissons de Pâques ?

Il pourra faire au maximum 105 sachets et comme $630 = 105 \times 6$ et $1\,155 = 105 \times 11$,

Il pourra faire 105 sachets au maximum contenant chacun 6 poissons et 11 cloches de Pâques.

Exercice n° 2 : Fonctions et calcul littéral

Correction

Fonction et calcul littéral

On note $f(x) = (3x-1)(2x+3) + (5x-1)(3x-1)$ et $g(x) = 5x(2x-1) - 10x^2 + 3$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (3x-1)(2x+3) + (5x-1)(3x-1)$
$f(x) = (6x^2 + 9x - 2x - 3) + (15x^2 - 5x - 3x + 1)$

$\boxed{f(x) = 21x^2 - x - 2}$

2. Développer et réduire $g(x)$.
$g(x) = 5x(2x-1) - 10x^2 + 3$
$g(x) = 10x^2 - 5x - 10x^2 + 3$

$\boxed{g(x) = -5x + 3}$

3. Démontrer que $f(x) = (3x-1)(7x+2)$.
$(3x-1)(7x+2) = 21x^2 + 6x - 7x - 2$
$(3x-1)(7x+2) = 21x^2 - x - 2.$

$\boxed{\text{On constate bien que } f(x) = (3x-1)(7x+2)}$.

4. En utilisant l'expression de la question **3.** calculer les images de -1 et 5 par la fonction f.
$f(-1) = (3\times(-1)-1)(7\times(-1)+2) = (-3-1)(-7+2) = (-4)\times 5 = \boxed{-20}$

$f(5) = (3\times 5 - 1)(7\times 5 + 2) = (15-1)(35+2) = 14\times 37 = \boxed{518}$

5. On peut prouver que $g(x) = -5x + 3$. Calculer l'antécédent de 11 par la fonction g.
Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
-5x + 3 &= 11 \\
-5x + 3 {\color{red}-3} &= 11 {\color{red}-3} \\
-5x &= 14 \\
x &= -\frac{14}{5} \\
x &= -2{,}8
\end{aligned}$$

$\boxed{-2{,}8 \text{ est l'antécédent de 11 par la fonction } g.}$

Exercice n° 3 : Thales et Pythagore CORRECTION

Pythagore et Thalès
1. Dans le triangle ADC, les droites (BE) et (DC) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{87\,\text{mm}}{AC} = \frac{AE}{165\,\text{mm}} = \frac{75\,\text{mm}}{125\,\text{mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AC = \dfrac{87\,\text{mm}\times 125\,\text{mm}}{75\,\text{mm}}$ d'où $AC = \dfrac{10\,875\,\text{mm}^2}{75\,\text{mm}}$ et $AC = 145\,\text{mm}$

$AE = \dfrac{165\,\text{mm}\times 75\,\text{mm}}{125\,\text{mm}}$ d'où $AE = \dfrac{12\,375\,\text{mm}^2}{125\,\text{mm}}$ et $AE = 99\,\text{mm}$

$\boxed{AC = 145\,\text{mm et } AE = 99\,\text{mm.}}$

2.

Dans le triangle FHG rectangle en H,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HF^2 + HG^2 = FG^2$$

$$HF^2 + 72^2 = 97^2$$

$$HF^2 + 5\,184 = 9\,409$$

$$HF^2 = 9\,409 - 5\,184$$

$$HF^2 = 4\,225$$

$$HF = \sqrt{4\,225}$$

$$HF = 65$$

Comparons $IF^2 + IH^2$ et HF^2 :

$IF^2 + IH^2$	HF^2
$54^2 + 36^2$	65^2
$2\,916 + 1\,296$	
$4\,212$	$4\,225$

Comme

$$IF^2 + IH^2 \neq HF^2$$

, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle ABC n'est pas rectangle .

Exercice n° 4 :

4 points

1. Calculer la valeur exacte de JK.

Dans le triangle JKN rectangle en K,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KJ^2 + KN^2 = JN^2$$
$$KJ^2 + 56^2 = 70^2$$
$$KJ^2 + 3\,136 = 4\,900$$
$$KJ^2 = 4\,900 - 3\,136$$
$$KJ^2 = 1\,764$$
$$KJ = \sqrt{1\,764}$$
$$KJ = 42$$

$\boxed{KJ = 42\,\text{cm}}$

2. Démontrer que (KN)//(LM).

Les droites (KN) et (LM) sont perpendiculaires à la droite (JL) puisque les deux triangles sont rectangles.
Or on sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (KN) et (LM) sont donc parallèles.}}$

3. Calculer JL et JM puis KL et NM.

Dans le triangle JLM, les droites (KN) et (LM) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM} = \frac{KN}{LM}$$
$$\frac{42\,\text{cm}}{JL} = \frac{70\,\text{cm}}{JM} = \frac{56\,\text{cm}}{136\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$JL = \dfrac{42\,\text{cm} \times 136\,\text{cm}}{56\,\text{cm}}$ d'où $JL = \dfrac{5\,712\,\text{cm}^2}{56\,\text{cm}}$ et $JL = 102\,\text{cm}$

$JM = \dfrac{70\,\text{cm} \times 136\,\text{cm}}{56\,\text{cm}}$ d'où $JM = \dfrac{9\,520\,\text{cm}^2}{56\,\text{cm}}$ et $JM = 170\,\text{cm}$

Comme $KL = JL - JK = 102\,\text{cm} - 42\,\text{cm} = 60\,\text{cm}$ et $NM = JM - JN = 170\,\text{cm} - 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$.

$\boxed{JL = 102\,\text{cm},\ JM = 170\,\text{cm},\ KL = 100\,\text{cm et } NM = 100\,\text{cm.}}$

Contrôle de mathématiques

EXERCICE N° 1 :

6 points

On pose :

— $f(x) = (x-7)(2x+3) - (5x-3)(5-9x)$

— $g(x) = 3x(-1-x) + (5x-7)(2+10x) + 8$

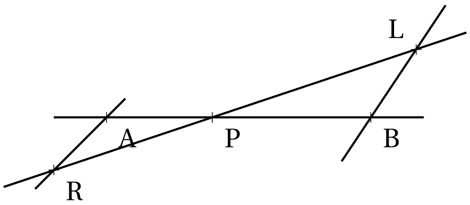
— $h(x) = 47x^2 - 63x - 6$

En développant $f(x)$ et $g(x)$ montrer que :

$$f(x) = g(x) = h(x)$$

EXERCICE N° 2 :

4 points



La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs.
On sait que :

— (AB) et (RL) sont sécantes en P ;

— LB = 4 m, PR = 5 m, PB = 5 m et PA = 3 m ;

— (AR) / / (LB)

Calculer les valeurs exactes de LP et AR, et le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

EXERCICE N° 3 :

6 points

La figure ci-après n'est pas en vraie grandeur.

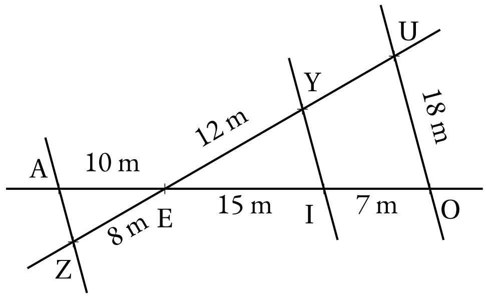
On sait que :

— Les droites (UY) et (IO) sont sécantes en E ;

— Les droites (YI) et (UO) sont parallèles.

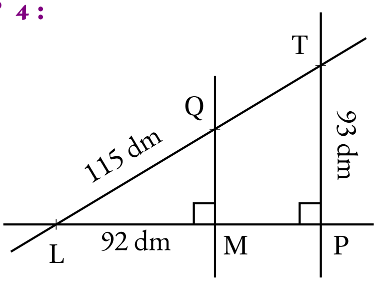
1. Calculer la valeur exacte de EU et YI puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Les droites (AZ) et (YI) sont-elles parallèles ?



EXERCICE N° 4 :

4 points



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

— Le triangle LMQ est rectangle en M ;

— Le triangle LPT est rectangle en P ;

— Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L.

1. Calculer QM

2. En admettant que QM = 69 dm, calculer LT et LP.

Justifier soigneusement votre démarche.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Trois fonctions Correction

Calcul littéral

On pose :

- $f(x) = (x-7)(2x+3) - (5x-3)(5-9x)$
- $g(x) = 3x(-1-x) + (5x-7)(2+10x) + 8$
- $h(x) = 47x^2 - 63x - 6$

$f(x) = (x-7)(2x+3) - (5x-3)(5-9x)$
$f(x) = (2x^2 + 3x - 14x - 21) - (25x - 45x^2 - 15 + 27x)$
$f(x) = 2x^2 + 3x - 14x - 21 - 25x + 45x^2 + 15 - 27x$

$\boxed{f(x) = 47x^2 - 63x - 6}$

$g(x) = 3x(-1-x) + (5x-7)(2+10x) + 8$
$g(x) = -3x - 3x^2 + 10x + 50x^2 - 14 - 70x + 8$

$\boxed{g(x) = 47x^2 - 63x - 6}$

On constate que $\boxed{f(x) = g(x) = h(x)}$

Exercice n° 2 : Thalès papillon Correction

Thalès

Les droites (AB) et (RL) sont sécantes en P, les droites (AR) et (LB) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{PA}}{\text{PB}} = \frac{\text{PR}}{\text{PL}} = \frac{\text{AR}}{\text{BL}}$$

$$\frac{3\ m}{5\ m} = \frac{5\ m}{\text{PL}} = \frac{\text{AR}}{4\ m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{PL} = \dfrac{5\ m \times 5\ m}{3\ m}$ d'où $\text{PL} = \dfrac{25\ m^2}{3\ m}$ et PLă $\approx 8,33\ m$
$\text{AR} = \dfrac{4\ m \times 3\ m}{5\ m}$ d'où $\text{AR} = \dfrac{12\ m^2}{5\ m}$ et $\text{AR} \approx 2,4\ m$

Exercice n° 3 : Thalès papillon et réciproque Correction

Thalès

1.

Les droites (YU) et (IO) sont sécantes en E, les droites (YI) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{EY}}{\text{EU}} = \frac{\text{EI}}{\text{EO}} = \frac{\text{YI}}{\text{UO}}$$

$$\frac{12\ m}{\text{EU}} = \frac{15\ m}{22\ m} = \frac{\text{YI}}{18\ m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{EU} = \dfrac{12\ m \times 22\ m}{15\ m}$ d'où $\text{EU} = \dfrac{264\ m^2}{15\ m}$ et $\text{EU} = 17{,}6\ m$
$\text{YI} = \dfrac{18\ m \times 15\ m}{22\ m}$ d'où $\text{YI} = \dfrac{270\ m}{22\ m}$ et $\text{YU} \approx 12{,}27\ m$

2. Comparons $\dfrac{\text{EA}}{\text{EI}}$ et $\dfrac{\text{EZ}}{\text{EY}}$.

$\dfrac{\text{EA}}{\text{EI}} = \dfrac{10\ m}{15\ m} \approx 0{,}67$

$\dfrac{\text{EZ}}{\text{EY}} = \dfrac{8\ m}{12\ m} \approx 0{,}67$

Comme $\dfrac{10}{15} = \dfrac{5 \times 2}{5 \times 3} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{8}{12} = \dfrac{4 \times 2}{4 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

Ou encore comme $10 \times 12 = 120$ et $8 \times 15 = 120$

Les quotients $\dfrac{\text{EA}}{\text{EI}}$ et $\dfrac{\text{EZ}}{\text{EY}}$ sont égaux, les points A E et I sont alignés et dans le même ordre que les points alignés Z, E et Y, d'après **la réciproque de Thalès** les droites (AZ) et (YI) sont parallèles.

Exercice n° 4 : Thalès et pythagore Correction

DIFFICILE

4 points

Thalès et Pythagore **1.**
Dans le triangle LMQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{MQ}^2 + \text{ML}^2 = \text{QL}^2$$
$$\text{MQ}^2 + 92^2 = 115^2$$
$$\text{MQ}^2 + 8\,464 = 13\,225$$
$$\text{MQ}^2 = 13\,225 - 8\,464$$
$$\text{MQ}^2 = 4\,761$$
$$\text{MQ} = 69$$

$\boxed{\text{MQ} = 69\ dm}$

2.
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**
Comme (QM) ⊥ (LP) et (TP) ⊥ (LP), les droites (QM) et (LP) sont parallèles.

Les droites (LP) et (LT) sont sécantes en L, les droites (QM) et (TP) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{LM}}{\text{LP}} = \frac{\text{LQ}}{\text{LT}} = \frac{\text{MQ}}{\text{PT}}$$

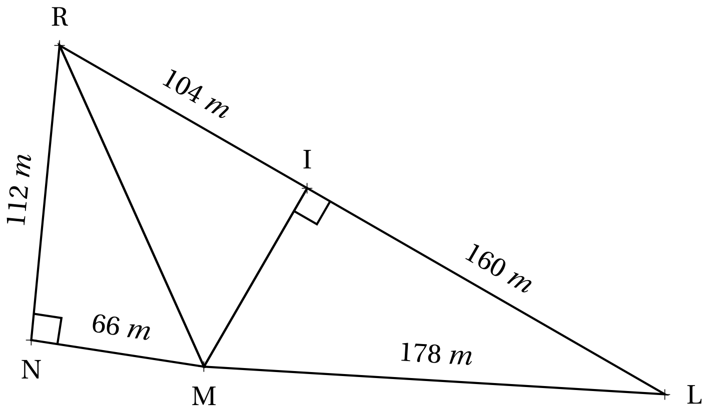
$$\frac{92\ dm}{\text{LP}} = \frac{115\ dm}{\text{LT}} = \frac{69\ dm}{93\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

LP $= \dfrac{92\ dm \times 93\ dm}{69\ dm}$ d'où LP $= \dfrac{8\,556\ dm^2}{69\ dm}$ et LP $= 124\ dm$
LT $= \dfrac{115\ dmm \times 93\ dm}{69\ cm}$ d'où LT $= \dfrac{10\,695\ dm^2}{69\ dm}$ et LT $= 55\ dm$

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :



La figure ci-dessus n'est pas en vraie grandeur, par exemple les points R, I et L ne sont pas forcément alignés.
Calculer les valeurs exactes de RM et MI puis démontrer que le triangle RIM est rectangle.
Vous rédigerez avec soin les démonstrations nécessaires à cette résolution.

Interrogation de mathématiques — **Correction**

Dans le triangle RNM rectangle en N,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$NR^2 + NM^2 = RM^2$$

$$112^2 + 66^2 = RM^2$$

$$12\,544 + 4356 = RM^2$$

$$RM^2 = 16\,900$$

$$RM = \sqrt{16\,900}$$

$$RM = 130$$

$\boxed{RM = 130\,\text{m}}$

Dans le triangle MIL rectangle en I,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$IM^2 + IL^2 = ML^2$$

$$IM^2 + 160^2 = 178^2$$

$$IM^2 + 25\,600 = 31\,684$$

$$IM^2 = 31\,684 - 25\,600$$

$$IM^2 = 6084$$

$$IM = \sqrt{6084}$$

$$IM = 78$$

$\boxed{IM = 78\,\text{m}}$

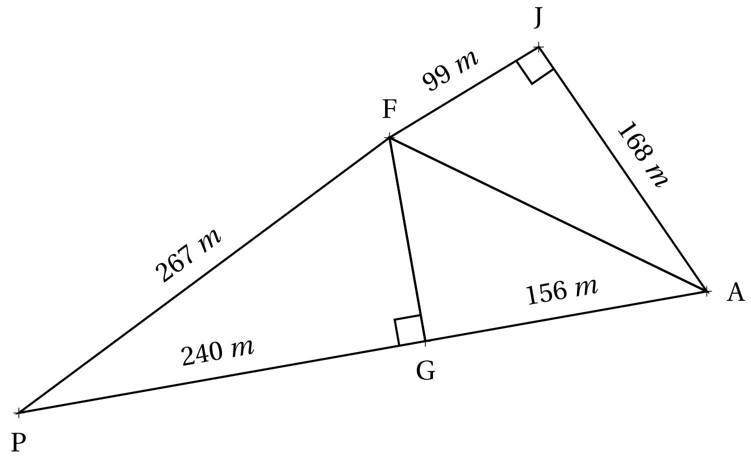
Comparons $IR^2 + IM^2$ et RM^2 :

$IR^2 + IM^2$	RM^2
$104^2 + 78^2$	130^2
$10\,816 + 6084$	
$16\,900$	$16\,900$

Comme $IR^2 + IM^2 = RM^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle IRM est rectangle en I}}$.

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :



La figure ci-dessus n'est pas en vraie grandeur, par exemple les points J, F et P ne sont pas forcément alignés.
Calculer les valeurs exactes de AF et FG puis démontrer que le triangle AGF est rectangle.
Vous rédigerez avec soin les démonstrations nécessaires à cette résolution.

Interrogation de mathématiques — Correction

Dans le triangle JFA rectangle en J,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$JF^2 + JA^2 = FA^2$$
$$99^2 + 168^2 = FA^2$$
$$9801 + 28\,224 = FA^2$$
$$FA^2 = 38\,025$$
$$FA = \sqrt{38\,025}$$
$$FA = 195$$

$\boxed{FA = 195\,\text{m}}$

Dans le triangle FPG rectangle en G,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$GP^2 + GF^2 = PF^2$$
$$240^2 + GF^2 = 267^2$$
$$57\,600 + GF^2 = 71\,289$$
$$GF^2 = 71\,289 - 57\,600$$
$$GF^2 = 13\,689$$
$$GF = \sqrt{13\,689}$$
$$GF = 117$$

$\boxed{GF = 117\,\text{m}}$

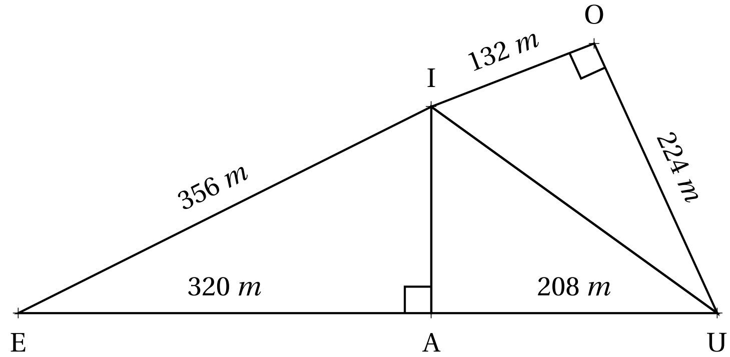
Comparons $GF^2 + GA^2$ et FA^2 :

$GF^2 + GA^2$	FA^2
$117^2 + 156^2$	195^2
$13\,689 + 24\,336$	
$38\,025$	$38\,025$

Comme $GF^2 + GA^2 = FA^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle GFA est rectangle en G}}$.

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :



La figure ci-dessus n'est pas en vraie grandeur, par exemple les points E, I et O ne sont pas forcément alignés.
Calculer les valeurs exactes de UI et IA puis démontrer que le triangle UAI est rectangle.
Vous rédigerez avec soin les démonstrations nécessaires à cette résolution.

Interrogation de mathématiques — Correction

Dans le triangle IOU rectangle en O,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$OI^2 + OU^2 = IU^2$$

$$132^2 + 224^2 = IU^2$$

$$17\,424 + 50\,176 = IU^2$$

$$IU^2 = 67\,600$$

$$IU = \sqrt{67\,600}$$

$$IU = 260$$

$\boxed{IU = 260\,\text{m}}$

Dans le triangle IAE rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AI^2 + AE^2 = IE^2$$

$$AI^2 + 320^2 = 356^2$$

$$AI^2 + 102\,400 = 126\,736$$

$$AI^2 = 126\,736 - 102\,400$$

$$AI^2 = 24\,336$$

$$AI = \sqrt{24\,336}$$

$$AI = 156$$

$\boxed{AI = 156\,\text{m}}$

Comparons $AI^2 + AU^2$ et IU^2 :

$AI^2 + AU^2$	IU^2
$156^2 + 208^2$	260^2
$24\,336 + 43\,264$	
$67\,600$	$67\,600$

Comme $AI^2 + AU^2 = IU^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle AIU est rectangle en A}}$.

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Exercice n° 1 :

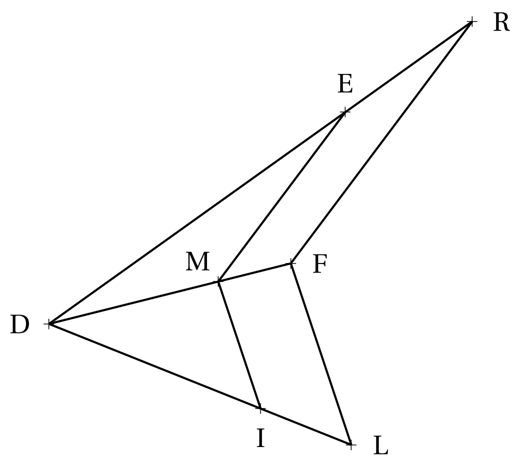
Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 5x(3x+2) + 6(2x+1) + 3x + 7$	$g(x) = 4x(2x-3) - 5(x+2) - 7x(-5-3x)$	$h(x) = 7x^2 - 3(2x-1) + 3x - 1 + 4(2-3x)$

Exercice n° 2 :

La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Sur la figure ci-contre, on sait que :
Les points D, L et I sont alignés ;
Les points D, F et M sont alignés ;
Les points D, R et E sont alignés ;
Les droites (LF) et (IM) sont parallèles ;
Les droites (FR) et (ME) sont parallèles ;
$DI = 4\ m$, $DL = 10\ m$, $FL = 5\ m$,
$DM = 3\ m$, $ME = 6\ m$ et $DE = 9\ m$.



Vous rédigerez vos réponses ci-dessous en détaillant votre raisonnement.

1. Montrer que $DF = 7,5\ m$ et que $MI = 2\ m$

2. En utilisant la question **1.** calculer RF et RE.

Interrogation de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Développer et réduire

Correction

Distributivité — Développer

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 5x(3x+2)+6(2x+1)+3x+7$
$f(x) = 15x^2+10x+12x+6+3x+7$

$\boxed{f(x) = 15x^2+25x+13}$

$g(x) = 4x(2x-3)-5(x+2)-7x(-5-3x)$
$g(x) = 8x^2-12x-5x-10+35x+21x^2$

$\boxed{g(x) = 29x^2+18x-10}$

$h(x) = 7x^2-3(2x-1)+3x-1+4(2-3x)$
$h(x) = 7x^2-6x+3+3x-1+8-12x$

$\boxed{h(x) = 7x^2-15x+10}$

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès

Correction

Théorème de Thalès

1.
Les droites (MF) et (IL) sont sécantes en D, les droites (MI) et (FL) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{DI}}{\text{DL}} = \frac{\text{DM}}{\text{DF}} = \frac{\text{IM}}{\text{LF}}$$

$$\frac{4\ m}{10\ m} = \frac{3\ m}{\text{DF}} = \frac{\text{MI}}{5\ m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{DF} = \dfrac{3\ m \times 10\ m}{4\ m}$ d'où $\text{DF} = \dfrac{30\ m^2}{4\ m}$ et $\text{DF} = 7{,}5\ m$

$\text{MI} = \dfrac{5\ m \times 4\ m}{10\ m}$ d'où $\text{MI} = \dfrac{20\ m^2}{10\ m}$ et $\text{MI} = 2\ m$

2.
Les droites (MF) et (ER) sont sécantes en D, les droites (ME) et (FR) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{DM}}{\text{DF}} = \frac{\text{DE}}{\text{DR}} = \frac{\text{ME}}{\text{FR}}$$

$$\frac{3\ m}{7{,}5\ m} = \frac{9\ m}{\text{DR}} = \frac{6\ m}{\text{FR}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{DR} = \dfrac{9\ m \times 7{,}5\ m}{3\ m}$ d'où $\text{DR} = \dfrac{67{,}5\ m^2}{3\ m}$ et $\text{DR} = 22{,}5\ m$

$\text{FR} = \dfrac{6\ m \times 7{,}5\ m}{3\ m}$ d'où $\text{FR} = \dfrac{45\ m^2}{3\ m}$ et $\text{FR} = 15\ m$

Ainsi $\text{ER} = \text{DR} - \text{DE} = 22{,}5\ m - 9\ m = 13{,}5\ m$

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Exercice n° 1 :

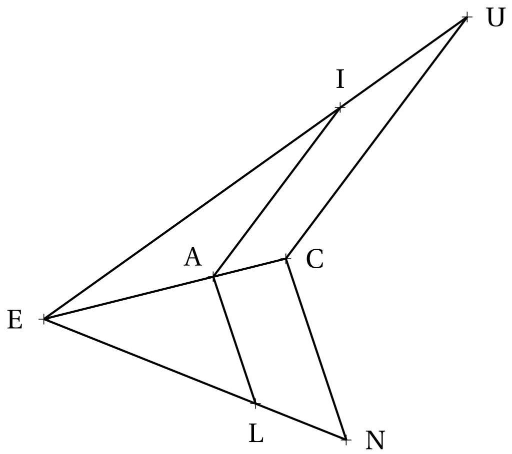
Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 4x(2x+3)+7(2x+1)+4x+7$	$g(x) = 5x(2x-3)-6(x+2)-5x(-5-3x)$	$h(x) = 7x^2-4(2x-1)+3x-6+5(2-3x)$

Exercice n° 2 :

La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Sur la figure ci-contre, on sait que :
Les points E, N et L sont alignés;
Les points E, C et A sont alignés;
Les points E, U et I sont alignés;
Les droites (NC) et (LA) sont parallèles;
Les droites (CU) et (AI) sont parallèles;
EL = 6 m, EN = 10 m, CN = 7 m,
EA = 3 m, AI = 6 m et EI = 9 m.



Vous rédigerez vos réponses ci-dessous en détaillant votre raisonnement.

1. Montrer que EC = 5 m et que AL = 4,2 m

2. En utilisant la question **1.** calculer UC et UI.

Interrogation de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Développer et réduire

Correction

Distributivité — Développer

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 4x(2x+3)+7(2x+1)+4x+7$
$f(x) = 8x^2+12x+14x+7+4x+7$

$\boxed{f(x) = 8x^2+30x+14}$

$g(x) = 5x(2x-3)-6(x+2)-5x(-5-3x)$
$g(x) = 10x^2-15x-6x-12+25x+15x^2$

$\boxed{g(x) = 25x^2+4x-12}$

$h(x) = 7x^2-4(2x-1)+3x-6+5(2-3x)$
$h(x) = 7x^2-8x+4+3x-6+10-15x$

$\boxed{h(x) = 7x^2-20x+8}$

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès

Correction

Théorème de Thalès

1.
Les droites (LN) et (AC) sont sécantes en E, les droites (AL) et (CN) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EL}{EN} = \frac{EA}{EC} = \frac{LA}{NC}$$

$$\frac{6\ m}{10\ m} = \frac{3\ m}{EC} = \frac{LA}{7\ m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$EC = \dfrac{3\ m \times 10\ m}{6\ m}$ d'où $EC = \dfrac{30\ m^2}{6\ m}$ et $EC = 5\ m$

$LA = \dfrac{7\ m \times 6\ m}{10\ m}$ d'où $LA = \dfrac{42\ m^2}{10\ m}$ et $LA = 4,2\ m$

2.
Les droites (AC) et (IU) sont sécantes en E, les droites (AI) et (CU) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{EI}{EU} = \frac{AI}{CU}$$

$$\frac{3\ m}{5\ m} = \frac{9\ m}{EU} = \frac{6\ m}{CU}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$EU = \dfrac{9\ m \times 5\ m}{3\ m}$ d'où $EU = \dfrac{45\ m^2}{3\ m}$ et $EU = 15\ m$

$CU = \dfrac{6\ m \times 5\ m}{3\ m}$ d'où $CU = \dfrac{30\ m^2}{3\ m}$ et $CU = 10\ m$

Ainsi $UI = EU - EI = 15\ m - 9\ m = 4\ m$

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Exercice n° 1 :

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 3x(3x+7)+7(2x+1)+4x+7$

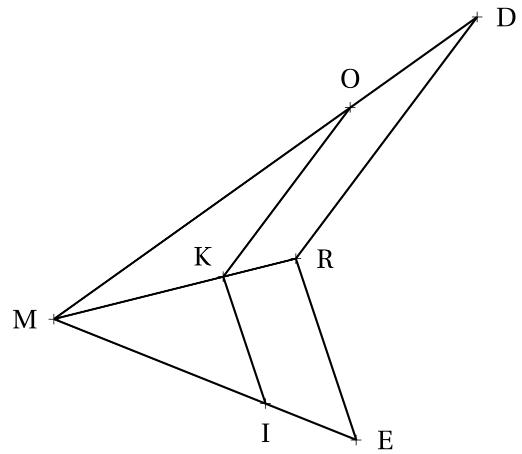
$g(x) = 4x(2x-3)-8(x+2)-6x(-5-3x)$

$h(x) = 7x^2-6(2x-1)+3x-3+4(2-3x)$

Exercice n° 2 :

La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Sur la figure ci-contre, on sait que :
Les points M, E et I sont alignés ;
Les points M, R et K sont alignés ;
Les points M, D et O sont alignés ;
Les droites (ER) et (IK) sont parallèles ;
Les droites (RD) et (KO) sont parallèles ;
$MI = 10\ m$, $ME = 15\ m$, $RE = 6\ m$,
$MK = 8\ m$, $KO = 7\ m$ et $MO = 13\ m$.



Vous rédigerez vos réponses ci-dessous en détaillant votre raisonnement.

1. Montrer que $MR = 12\ m$ et que $KI = 4\ m$

2. En utilisant la question **1.** calculer DR et DO.

Interrogation de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Développer et réduire

Correction

Distributivité — Développer

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 3x(3x+7)+7(2x+1)+4x+7$

$f(x) = 9x^2+21x+14x+7+4x+7$

$\boxed{f(x) = 9x^2+39x+14}$

$g(x) = 4x(2x-3)-8(x+2)-6x(-5-3x)$

$g(x) = 8x^2-12x-8x-16+30x+18x^2$

$\boxed{g(x) = 26x^2+10x-16}$

$h(x) = 7x^2-6(2x-1)+3x-3+4(2-3x)$

$h(x) = 7x^2-12x+6+3x-3+8-12x$

$\boxed{h(x) = 7x^2-21x+5}$

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès

Correction

Théorème de Thalès

1.

Les droites (IE) et (KR) sont sécantes en M, les droites (KI) et (RE) sont parallèles,

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{MI}}{\text{ME}} = \frac{\text{MK}}{\text{MR}} = \frac{\text{IK}}{\text{ER}}$$

$$\frac{10\ m}{15\ m} = \frac{8\ m}{\text{MR}} = \frac{\text{IK}}{6\ m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$\text{MR} = \frac{8\ m \times 15\ m}{10\ m} \text{ d'où MR} = \frac{120\ m^2}{10\ m} \text{ et MR} = 12\ m$$

$$\text{IK} = \frac{6\ m \times 10\ m}{15\ m} \text{ d'où IK} = \frac{60\ m^2}{15\ m} \text{ et IK} = 4\ m$$

2.

Les droites (KR) et (OD) sont sécantes en M, les droites (KO) et (RD) sont parallèles,

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{MK}}{\text{MR}} = \frac{\text{MO}}{\text{MD}} = \frac{\text{KO}}{\text{RD}}$$

$$\frac{8\ m}{12\ m} = \frac{13\ m}{\text{MD}} = \frac{7\ m}{\text{RD}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$\text{MD} = \frac{13\ m \times 12\ m}{8\ m} \text{ d'où MD} = \frac{166\ m^2}{8\ m} \text{ et MD} = 20,75\ m$$

$$\text{RD} = \frac{7\ m \times 12\ m}{8\ m} \text{ d'où RD} = \frac{84\ m^2}{8\ m} \text{ et RD} = 10,5\ m$$

Ainsi OD = MD − MO = $20,75\ m - 13\ m = 7,75\ m$

Interrogation de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Exercice n° 1 :

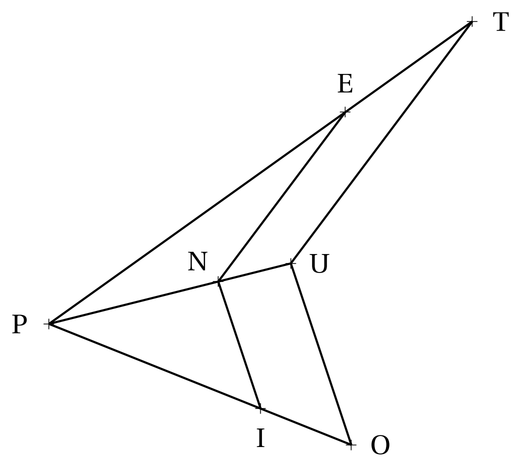
Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 7x(2x+3)+6(2x+1)+4x+7$	$g(x) = 4x(6x-3)-5(x+2)-6x(-5-3x)$	$h(x) = 7x^2-5(3x-1)+4x-1+4(3-3x)$

Exercice n° 2 :

La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

Sur la figure ci-contre, on sait que :
Les points P, O et I sont alignés;
Les points P, U et N sont alignés;
Les points P, T et E sont alignés;
Les droites (OU) et (IN) sont parallèles;
Les droites (UT) et (NE) sont parallèles;
PI = 12 m, PO = 18 m, UO = 9 m,
PN = 9 m, NE = 8 m et PE = 15 m.



Vous rédigerez vos réponses ci-dessous en détaillant votre raisonnement.

1. Montrer que PU = 13,5 m et que NI = 6 m

2. En utilisant la question **1.** calculer TU et TE.

Interrogation de mathématiques — CORRECTION

Exercice n° 1 : Développer et réduire

CORRECTION

Distributivité — Développer

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 7x(2x+3)+6(2x+1)+4x+7$
$f(x) = 14x^2+21x+12x+6+4x+7$

$\boxed{f(x) = 14x^2+37x+13}$

$g(x) = 4x(6x-3)-5(x+2)-6x(-5-3x)$
$g(x) = 24x^2-12x-5x-10+30x+18x^2$

$\boxed{g(x) = 42x^2+13x-10}$

$h(x) = 7x^2-3(2x-1)+3x-1+4(2-3x)$
$h(x) = 7x^2-6x+3+3x-1+8-12x$

$\boxed{h(x) = 7x^2-15x+10}$

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès

CORRECTION

Théorème de Thalès

1.

Les droites (IO) et (NU) sont sécantes en P, les droites (NI) et (UO) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{PI}}{\text{PO}} = \frac{\text{PN}}{\text{PU}} = \frac{\text{IN}}{\text{OU}}$$

$$\frac{12\ m}{18\ m} = \frac{9\ m}{\text{PU}} = \frac{\text{IN}}{9\ m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$\text{PU} = \frac{9\ m \times 18\ m}{12\ m} \text{ d'où PU} = \frac{162\ m^2}{12\ m} \text{ et PU} = 13,5\ m$$

$$\text{IN} = \frac{9\ m \times 12\ m}{18\ m} \text{ d'où IN} = \frac{108\ m^2}{18\ m} \text{ et IN} = 6\ m$$

2.

Les droites (NU) et (ET) sont sécantes en P, les droites (NE) et (UT) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{PN}}{\text{PU}} = \frac{\text{PE}}{\text{PT}} = \frac{\text{NE}}{\text{UT}}$$

$$\frac{9\ m}{13,5\ m} = \frac{15\ m}{\text{PT}} = \frac{8\ m}{\text{UT}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

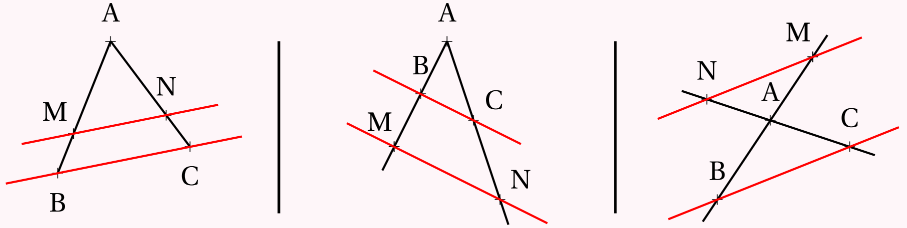
$$\text{PT} = \frac{15\ m \times 13,5\ m}{9\ m} \text{ d'où PT} = \frac{202,5\ m^2}{9\ m} \text{ et PT} = 22,5\ m$$

$$\text{UT} = \frac{8\ m \times 13,5\ m}{9\ m} \text{ d'où UT} = \frac{108\ m^2}{9\ m} \text{ et UT} = 12\ m$$

Ainsi $\text{ET} = \text{PT} - \text{PE} = 22,5\ m - 15\ m = 7,5\ m$

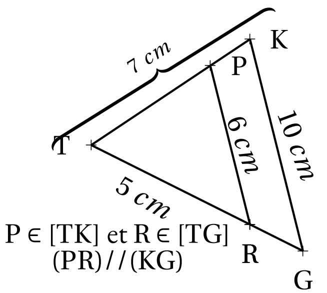
Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès



Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si (MN)//(BC)
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Calculer TG **et** TP**.**

Les droites (PK) et (RG) sont sécantes en T.
Les droites (PR) et (KG) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

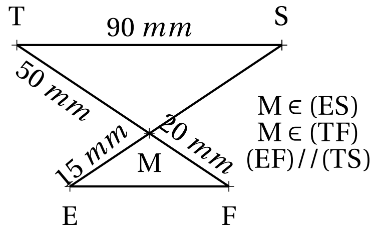
$$\frac{TP}{TK} = \frac{TR}{TG} = \frac{PR}{KG}$$

$$\frac{TP}{7\ cm} = \frac{5\ cm}{TG} = \frac{6\ cm}{10\ cm}$$

On utilise la règle de trois :

$$TP = \frac{7\ cm \times 6\ cm}{10\ cm} = 4{,}2\ cm$$

$$TG = \frac{5\ cm \times 10\ cm}{6\ cm} \approx 8{,}3\ cm$$



Calculer MS **et** EF**.**

Les droites (ES) et (TF) sont sécantes en M.
Les droites (EF) et (TS) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{ME}{MS} = \frac{MF}{MT} = \frac{EF}{ST}$$

$$\frac{15\ mm}{MS} = \frac{20\ mm}{50\ mm} = \frac{EF}{90\ mm}$$

On utilise la règle de trois :

$$MS = \frac{50\ mm \times 15\ mm}{20\ mm} = 37{,}5\ mm$$

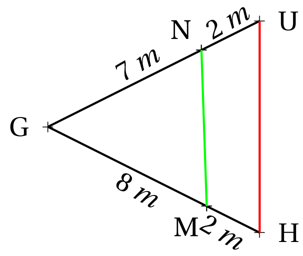
$$EF = \frac{90\ mm \times 20\ mm}{50\ mm} = 36\ mm$$

Théorème de Thalès contraposé

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$
Alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Réciproque du théorème de Thalès

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A avec A, B et M dans le même ordre que A, C et N et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



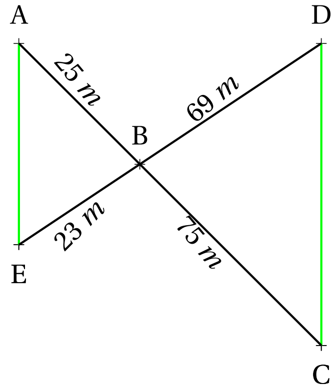
(NM) **et** (HU) **sont-elles parallèles ?**

Comparons $\frac{GN}{GU}$ et $\frac{GM}{GH}$

$\frac{GN}{GU} = \frac{7\ m}{9\ m} \approx 0{,}78$ et $\frac{GM}{GH} = \frac{8\ m}{10\ m} = 0{,}8$

Comme $\frac{GN}{GU} \neq \frac{GM}{GH}$ d'après **le théorème de Thalès (contraposé)**, les droites (NM) et (HU) sont sécantes.

On pouvait aussi comparer les produits en croix :
$7 \times 10 = 70$ et $9 \times 8 = 56$ pour conclure au fait que les quotients ne sont pas égaux.



(AE) **et** (DC) **sont-elles parallèles ?**

Comparons $\frac{BA}{BC}$ et $\frac{BE}{BD}$

$\frac{BA}{BC} = \frac{25\ m}{75\ m} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ et $\frac{BE}{BD} = \frac{23\ m}{69\ m} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

Comme $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD}$ et comme les points B, A et C sont alignés et dans le même ordre que les points alignés B, E et D.
D'après **la réciproque du théorème de Thalès** les droites (AE) et (DC) sont parallèles.

Pour comparer les fractions ont peu utiliser la valeur exacte ou la valeur approchée. Le plus pratique est souvent de comparer les produits en croix :
$75 \times 23 = 1725$ et $25 \times 69 = 1725$

Chapitre V

Statistiques

Sommaire

Infox : Le paradoxe de Simpson — Les calculs rénaux 226
Infox : Le paradoxe de Simpson — Cigarettes et mortalité 228
Infox : Le paradoxe de Simpson — Covid et vaccin 231
Situation initiale : Les équipes de basket-ball 234
I Moyenne arithmétique et pondérée 238
Évaluation : Statistiques et calcul littéral 239
Fiche de synthèse : Statistiques 243

Infox

Le paradoxe de Simpson — Les calculs rénaux

Troisième

Un laboratoire médical vient de mettre au point deux traitements pour éliminer les calculs rénaux. Ces traitements ont été testés sur deux groupes de 350 personnes. Il y a deux types de calculs rénaux : les petits calculs rénaux inférieurs à 2 mm et les gros calculs.
Voici les résultats des tests effectués avec ces deux traitements :

Test du Arnaclam 300 mg

	Réussite	Échec	Total
Petits calculs	81	6	
Gros calculs	192		
Total			

Test du Arnodix 750 mg

	Réussite	Échec	Total
Petits calculs		36	
Gros calculs	55		80
Total			

1. Compléter les deux tableaux de résultats en utilisant les données de l'énoncé.

2. Compléter le tableau suivant en calculant en pourcentage à l'unité près les taux de réussite.

	Taux de réussite Arnaclam 300 mg	Taux de réussite Arnodix 750 mg
Petits calculs rénaux		
Gros calculs rénaux		
Total		

3.a Quel est le traitement le plus efficace sur les petits calculs rénaux ?
3.b Quel est le traitement le plus efficace sur les gros calculs rénaux ?
3.c Quel est le traitement le plus efficace sur l'ensemble de tous les calculs rénaux ?

4. Que pensez-vous de cette situation ?

La plus lointaine mention d'un cas analogue remonte à 1899, où le mathématicien anglais Karl Pearson décrivit des données équivalentes. Plus tard en 1903, Undy Yule redécouvrit le phénomène et le Britannique Edward Simpson écrivit en 1951 un article où cette singularité statistique était soigneusement étudiée et discutée.
De nombreux cas réels présentent cette inversion de résultat lorsqu'on regroupe plusieurs catégories complémentaires en une seule. De nombreux cas en médecine ont été rapportés. Le paradoxe a aussi été rencontré en démographie, dans l'analyse de match de basket-ball, dans l'étude de risque d'accidents... [?] [?]

Infox

Le paradoxe de Simpson — Les calculs rénaux — Correction

✧✧

Infox

Le paradoxe de Simpson — Cigarettes et mortalité

Troisième

✦✦

En 1972, à Whickham, une ville du nord-est de l'Angleterre, un sondage a été effectué afin d'éclairer des travaux sur les maladies cardiaques (Tunbridge et al. 1977). Une suite de cette étude a été menée vingt ans plus tard (Vanderpump et al. 1995). Certains des résultats avaient trait au tabagisme et cherchaient à savoir si les individus étaient toujours en vie lors de la seconde étude. Par simplicité, nous nous restreindrons aux femmes et parmi celles-ci aux 1314 qui ont été catégorisées comme « fumant actuellement » ou « n'ayant jamais fumé ». La survie à 20 ans a été déterminée pour l'ensemble des femmes du premier sondage.

Voici quelques résultats :

18-34 ans	Fumeuses	Non-fumeuses	**Total**
En vie	174	213	387
Décédée	5	6	11
Total	179	219	398

35-50 ans	Fumeuses	Non-fumeuses	Total
En vie	159	145	304
Décédée	36	16	52
Total	195	161	356

51-64 ans	Fumeuses	Non-fumeuses	**Total**
En vie	103		
Décédée		43	
Total		159	318

64 ans et plus	Fumeuses	Non-fumeuses	**Total**
En vie		28	
Décédée	42		
Total	49		

1. Compléter les deux tableaux restants en tenant compte des informations fournies.

2. Pour chacune des quatre tranches d'âge, calculer le taux de mortalité des fumeuses et des non-fumeuses en pourcentages arrondis au dixième près.

Le taux de mortalité est le ratio entre le nombre de personnes décédées et le nombre total de personnes considérées.

3. Que constatez-vous en comparant ces taux de mortalité pour chaque tranche d'âge.

4. En cumulant les données de ces quatre tableaux, déterminer le taux de mortalité des fumeuses et des non-fumeuses sur l'ensemble des 1 314 femmes intérrogées.

5. Complétez le tableau de synthèse suivant :

Taux de mortalité en pourcentage	Fumeuses	Non-fumeuses
18-34 ans		
35-50 ans		
50-64 ans		
64 ans et plus		
Ensemble		

6. Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer ce résultat ?

La plus lointaine mention d'un cas analogue remonte à 1899, où le mathématicien anglais Karl Pearson décrivit des données équivalentes. Plus tard en 1903, Undy Yule redécouvrit le phénomène et le Britannique Edward Simpson écrivit en 1951 un article où cette singularité statistique était soigneusement étudiée et discutée.

De nombreux cas réels présentent cette inversion de résultat lorsqu'on regroupe plusieurs catégories complémentaires en une seule. De nombreux cas en médecine ont été rapportés. Le paradoxe a aussi été rencontré en démographie, dans l'analyse de match de basket-ball, dans l'étude de risque d'accidents...

Infox

Le paradoxe de Simpson — Cigarettes et mortalité —

Correction

✧✧

18-34 ans	Fumeuses	Non-fumeuses	**Total**
En vie	174	213	387
Décédée	5	6	11
Total	179	219	398

35-50 ans	Fumeuses	Non-fumeuses	Total
En vie	159	145	304
Décédée	36	16	52
Total	195	161	356

51-64 ans	Fumeuses	Non-fumeuses	**Total**
En vie	103	116	219
Décédée	56	43	99
Total	159	159	318

64 ans et plus	Fumeuses	Non-fumeuses	**Total**
En vie	7	28	35
Décédée	42	165	207
Total	49	193	242

1. Compléter les deux tableaux restants en tenant compte des informations fournies.

2. Pour chacune des quatre tranches d'âge, calculer le taux de mortalité des fumeuses et des non-fumeuses en pourcentages arrondis au dixième près.

Les 18-34 ans

Fumeuses : $\dfrac{5}{179} \approx 0,028$ soit $2,8\ \%$

Non-fumeuses : $\dfrac{6}{219} \approx 0,027$ soit $2,7\ \%$

Les 35-50 ans

Fumeuses : $\dfrac{36}{195} \approx 0,185$ soit $18,5\ \%$

Non-fumeuses : $\dfrac{16}{161} \approx 0,099$ soit $9,9\ \%$

Les 51-64 ans

Fumeuses : $\dfrac{56}{159} \approx 0,352$ soit $35,2\ \%$

Non-fumeuses : $\dfrac{43}{159} \approx 0,27$ soit $27\ \%$

Les 64 ans et plus

Fumeuses : $\dfrac{42}{49} \approx 0,857$ soit $85,7\ \%$

Non-fumeuses : $\dfrac{165}{193} \approx 0,855$ soit $85,5\ \%$

3. Que constatez-vous en comparant ces taux de mortalité pour chaque tranche d'âge.

Globalement le taux de mortalité est supérieur pour les fumeuses que les non-fumeuses.
Pour la population jeune ou très âgée les taux sont similaires pour des raisons simples à comprendre.

4. En cumulant les données de ces quatre tableaux, déterminer le taux de mortalité des fumeuses et des non-fumeuses sur l'ensemble des 1 313 femmes interrogées.

Total des fumeuses : $179 + 195 + 159 + 49 = 582$ et nombre de décès dans cette population : $5 + 36 + 56 + 42 = 139$.

Total des non-fumeuses : $219 + 161 + 159 + 193 = 732$ et nombre de décès dans cette population : $6 + 16 + 43 + 165 = 230$.

Le taux de mortalité chez les fumeuses : $\dfrac{139}{582} \approx 0,239$ soit $23,9\ \%$.

Le taux de mortalité chez les non-fumeuses : $\dfrac{230}{732} \approx 0,314$ soit $31,4\ \%$.

5. Complétez le tableau de synthèse suivant :

Taux de mortalité en pourcentage	Fumeuses	Non-fumeuses
18-34 ans	2,8 %	2,7 %
35-50 ans	18,5 %	9,9 %
50-64 ans	35,2 %	27 %
64 ans et plus	85,7 %	85,5 %
Ensemble	23,9 %	31,4 %

6. Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer ce résultat ?

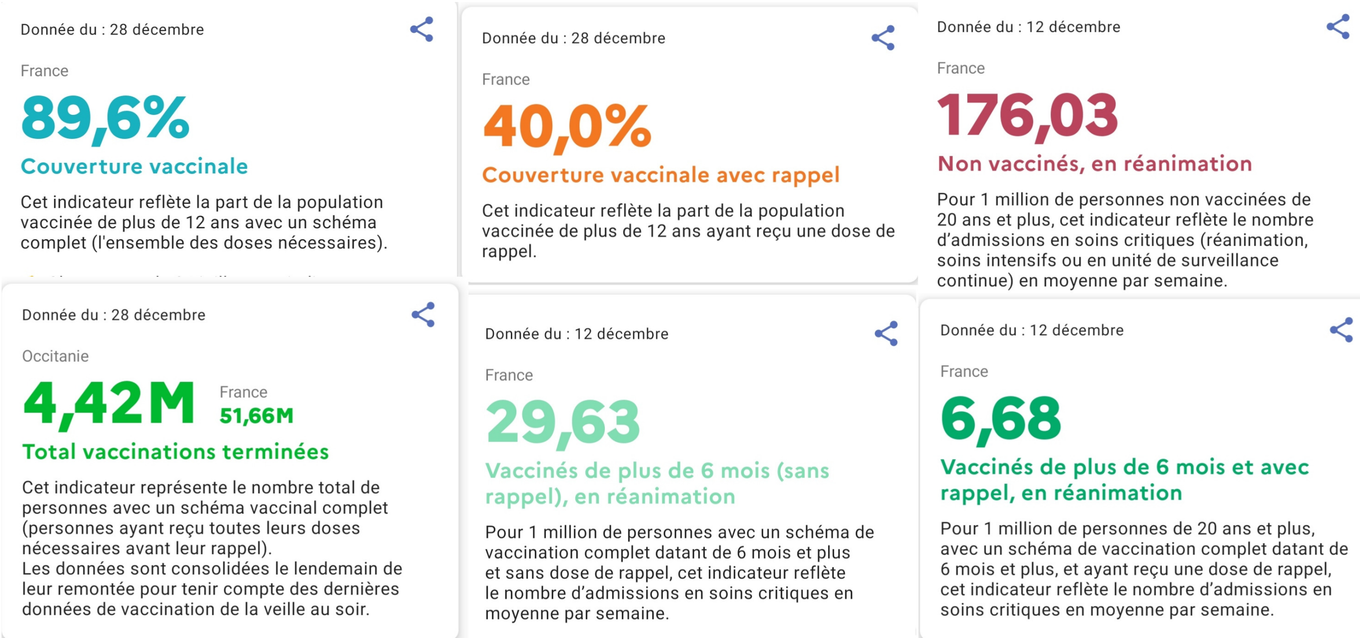
À rédiger !

INFOX

LE PARADOXE DE SIMPSON — COVID ET VACCIN

TROISIÈME

Voici les chiffres fournis par l'application TousAntiCovid à la date du 29 décembre 2021 :



Sur les réseaux sociaux, certains Anti-vaccins prétendent « qu'il y a plus de vaccinés que de non vaccinés en réanimation aux urgences de l'hopital ». Cela prouverait que le vaccin est inefficace ce qui irait dans le sens de leur opinion.

On souhaite utiliser les informations de l'application TousAntiCovid pour vérifier cette information.

1. Déterminer l'effectif de la part de la population française de plus de 12 ans.

2. Déterminer le nombre de personnes non vaccinés et le nombre de ceux ayant reçu une dose de rappel.

3. Compléter le tableau suivant :

	Effectif total	Effectif en réanimation	Fréquence (%)
Vaccinés			
Dont ayant reçu une dose de rappel			
Non vaccinés			
Total			

4. Que peut-on déduire de ces informations et que peut-on répondre au sujet de cette information ?

Le paradoxe de Simpson — Covid et vaccin — Correction

Infox *Les données fournies par l'application TousAntiCovid mélangent des informations datant du 28 décembre 2021 et d'autres (les taux de malades en réanimation) qui datent du 12 décembre. Il y a donc un biais dans les calculs que nous allons faire. À cette date l'épidémie est dans une phase exponentielle. On peut donc imaginer que nos résultats vont être sous-évalué.*

1. On constate que $89,6$ % de la population des plus de 12 ans correspond à $55,66$ M de personnes soit $55\,660\,000$.

Vaccinés	$89,6$	$55,66$ M
Total	100	$\dfrac{55,6\text{ M}\times 100}{89,6} \approx 62,05$ M

$\boxed{\text{L'échantillon de la population concernée par ces statistiques correspond à } 62,05 \text{ M soit } 62\,050\,000 \text{ de personnes.}}$

2. Comme $89,6$ % des personnes sont vaccinés, $100\ \% - 89,6\ \% = 10,4$ % ne le sont pas.

$\boxed{\dfrac{10,4}{100}\times 62,05\text{ M} \approx 6,45\text{ M de personnes non vaccinés.}}$

$\boxed{\dfrac{40}{100}\times 62,05\text{ M} = 24,82\text{ M de personnes ayant une dose de rappel.}}$

3. Compléter le tableau suivant :

	Effectif total	Effectif en réanimation	Fréquence (%)
Vaccinés	$51,66$ M	$51,66\text{ M}\times\dfrac{29,63}{1\text{ M}} \approx 1\,531$	$\dfrac{1\,531}{2\,667}\approx 0,57 \approx 57$ %
Dont ayant reçu une dose de rappel	$24,82$ M	$24,82\text{ M}\times\dfrac{6,68}{1\text{ M}} \approx 166$	$\dfrac{166}{2\,667}\approx 0,06 \approx 6$ %
Non vaccinés	$6,45$ M	$6,45\text{ M}\times$ ă$\dfrac{176,03}{1\text{ M}} \approx 1\,136$	$\dfrac{1\,136}{2\,667}\approx 0,43 \approx 43$ %
Total	$62,05$ M	$1\,531 + 1\,136 = 2\,667$	100 %

4. On constate que les vaccinés sont majoritaires en réanimation. 57 % de vaccinés contre 43 % de non-vaccinés.
Cela semble indiquer que le vaccin manque d'efficacité.

Cependant quand on observe les fréquences qui concernent les non-vaccinés, les vaccinés et les doses de rappel, on constate que les non-vaccinés sont présents à $\dfrac{176,03}{1\,000\,000}$ dans les réanimations.

En comparant les fréquences on constate que :

— $176,03$ non vaccinés sur un million sont en réanimation ;

— $29,63$ vaccinés sur un million ;
— $6,68$ dose de rappel sur un million.

Comme $\dfrac{176,03}{29,63} \approx 5,94$: cela signifie qu'il est environ six fois plus probable d'aller en réanimation quand on est vacciné que quand on ne l'est pas !

Comme $\dfrac{176,03}{6,68} \approx 26,35$: il est environ vingt-six fois plus probable d'aller en réanimation quand on a une dose de rappel que quand on n'est pas vacciné.

Cela semble contredire l'étude des proportions de vaccinés et de non-vaccinés en réanimation !

Cette contradiction apparente est due au fait que la proportion de non vaccinés est faible dans la population. La différence de taille des échantillons entre les vaccinés et les non-vaccinés produit ce paradoxe de type paradoxe de Simpson.

En poussant ce raisonnement à l'extrême, quand 100 % de la population sera vaccinée alors 100 % des personnes en réanimation seront vaccinés (car le vaccin ne garantit pas une totale imunité...).

En effet, la majorité des personnes en réanimation sont des gens vaccinés. Cela ne prouve qu'une seule chose : qu'une majorité de la population est maintenant vaccinée !
a

Situation Initiale

Les équipes de basket-ball

Troisième

Voici la taille en centimètres des joueurs de deux équipes de basket-ball (même s'il y a cinq joueurs sur le terrain en même temps, il faut tenir compte des remplaçants) :

Lakers de la Ramée : 178 cm – 196 cm – 165 cm – 211 cm – 162 cm – 198 cm – 196 cm – 197 cm – 163 cm – 173 cm – 196 cm
Celtics de Tibaous : 185 cm – 185 cm – 179 cm – 187 cm – 196 cm – 183 cm – 176 cm – 188 cm – 206 cm – 184 cm – 166 cm

On souhaite comparer la taille des joueurs de ces deux équipes.

1. Calculer la moyenne des tailles en centimètres de chacune des deux équipes. Que pouvez-vous dire de ces résultats ?

2. Déterminer la plus petite taille, la plus grande taille et l'écart entre la plus petite et la plus grande taille pour chacune des deux équipes. Que pouvez-vous dire de ces résultats ?

3. Pour chacune de ces deux équipes, classer les tailles dans l'ordre croissant. Que pouvez-vous dire de ce classement ?

4. Compléter le tableau suivant :

Analyse des tailles des Lakers de La Ramée

Taille (cm)	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180,190[$	$[190;200[$	$[200;210[$	Total
Effectif						
Fréquence						

Analyse des tailles des Celtics de Tibaous

Taille (cm)	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180,190[$	$[190;200[$	$[200;210[$	Total
Effectif						
Fréquence						

Que pouvez-vous en dire ?

5. Voici les tailles de l'équipe des Hornets des Pradettes :

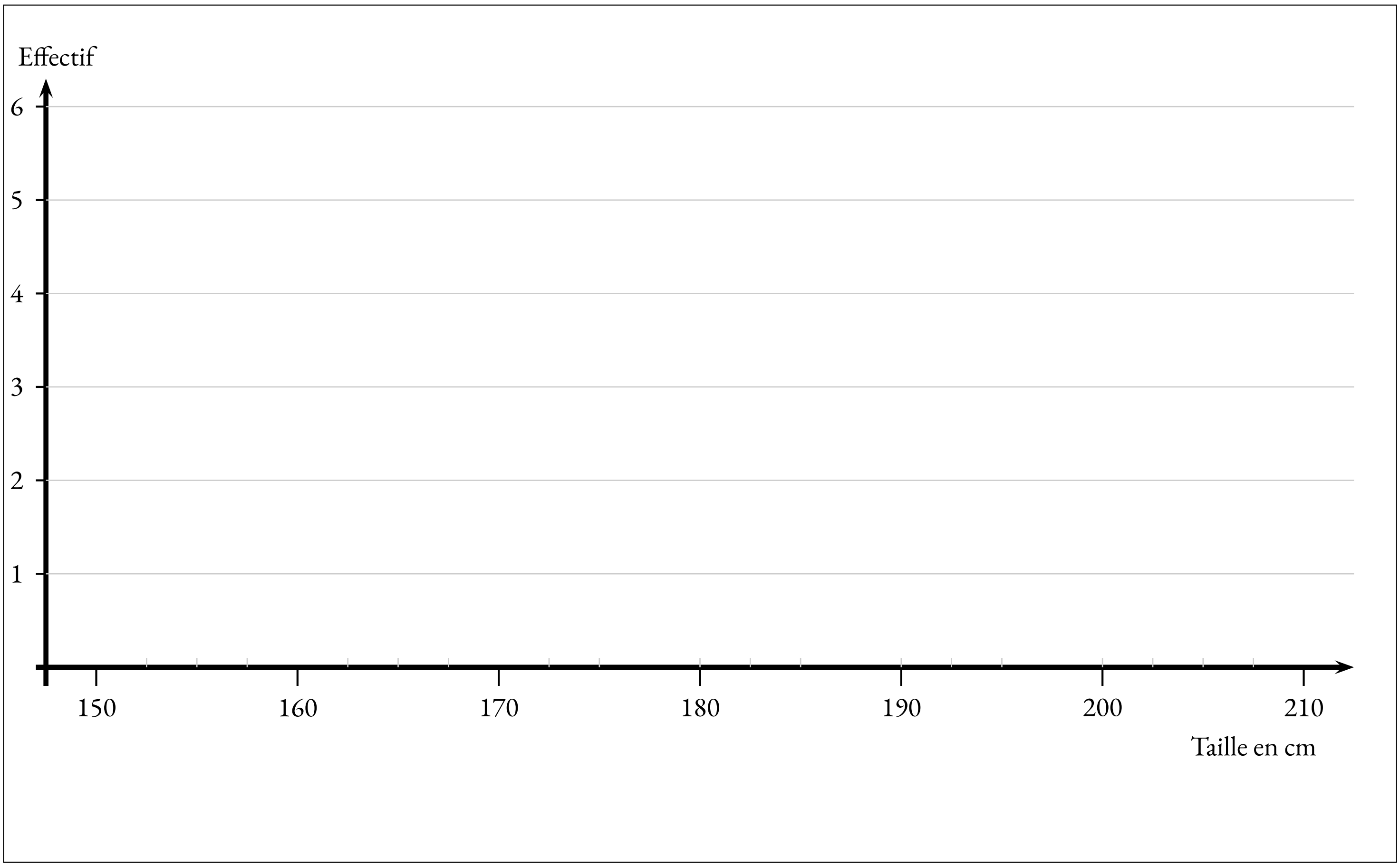
Taille (cm)	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180,190[$	$[190;200[$	$[200;210[$	Total
Effectif	3	2	1	2	3	
Fréquence						

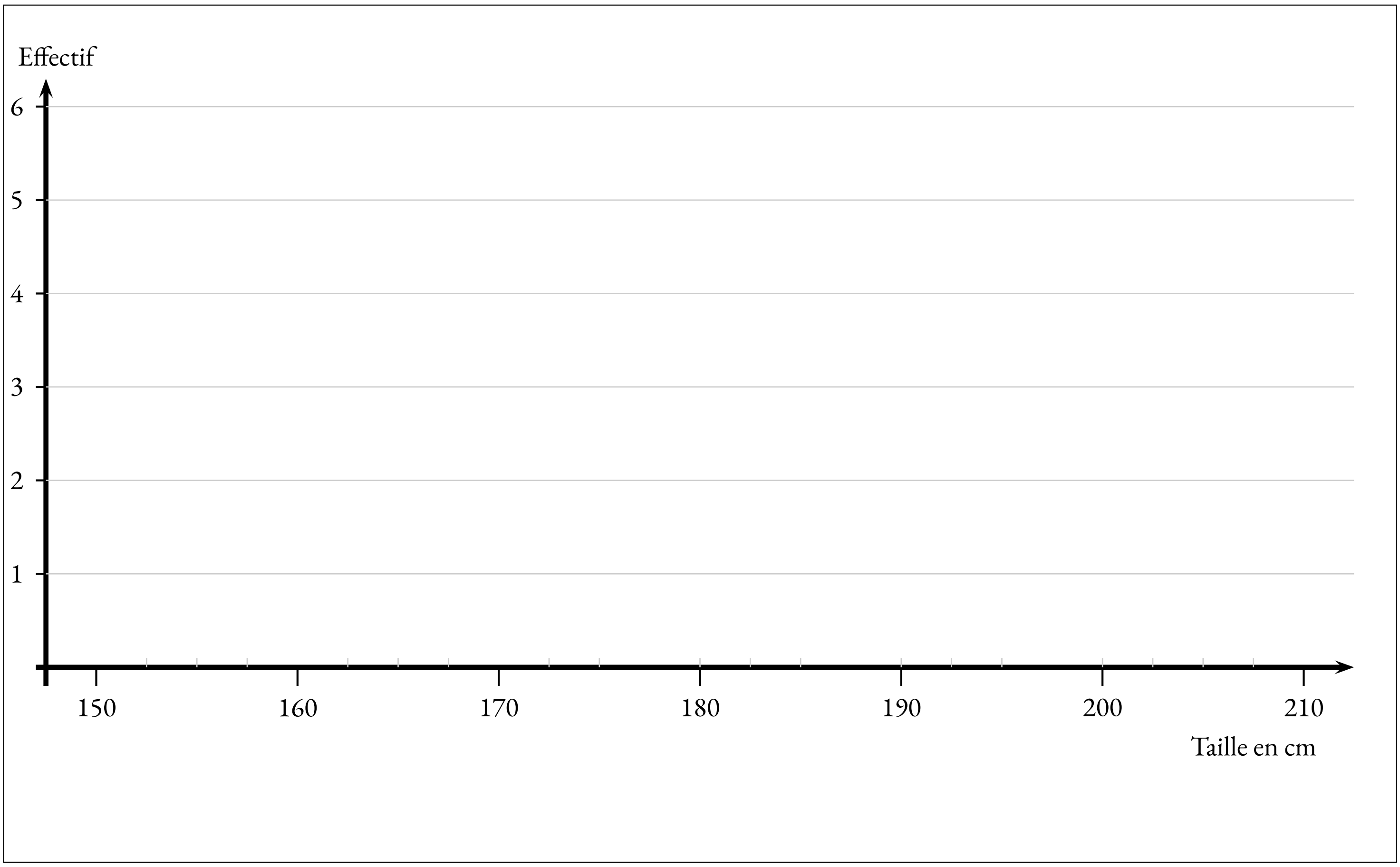
Complétez ce tableau.

6. Déterminer, avec ces informations, la moyenne, l'étendue et la médiane de la série des tailles des joueurs des Hornets.

7. Représenter graphiquement, sous forme de diagrammes en batons, les tailles des joueurs de chacunes de ces équipes.

Pouvez-vous comparer cette équipe avec les deux précédentes ?


Effectif
6
5
4
3
2
1
150
160
170
180
190
200
210
Taille en cm


Effectif
6
5
4
3
2
1
150
160
170
180
190
200
210
Taille en cm

Les équipes de basket-ball — Correction

Situation Initiale

1. Moyen
des tailles des Lakers de la Ramée :

$$\frac{178\ cm+196\ cm+165\ cm+211\ cm+162\ cm+198\ cm+196\ cm+197\ cm+163\ cm+173\ cm+196\ cm}{11}=\frac{2\,035\ cm}{11}=185\ cm$$

Moyenne des tailles des Celtics de Tibaous :

$$\frac{185\ cm+185\ cm+179\ cm+187\ cm+196\ cm+183\ cm+176\ cm+188\ cm+206\ cm+184\ cm+166\ cm}{11}=\frac{2\,035\ cm}{11}=185\ cm$$

2. Le plus petit des Lakers mesure 163 cm, le plus grand mesure 211 cm.
L'écart entre le plus grand et le plus petit s'appelle **l'étendue** de la série statistique.
L'étendue est égale à $211\ cm-163\ cm=48\ cm$

Le plus petit des Celtics mesure 166 cm, le plus grand mesure 206 cm.
L'écart entre le plus grand et le plus petit s'appelle **l'étendue** de la série statistique.
L'étendue est égale à $206\ cm-166\ cm=40\ cm$

On constate que l'étendue pour la série des tailles des Lakers est supérieure à celle des Celtics. C'est un indicateur de **dispersion**. Cela signifie que les tailles des Lakers sont réparties sur un plus grand intervalle, elles sont moins regroupées que celles des Celtics.

3. On classe dans l'ordre croissant la tailles des joueurs :

Lakers : $162\ cm\leqslant 163\ cm\leqslant 165\ cm\leqslant 173\ cm\leqslant 178\ cm\leqslant 196\ cm\leqslant 196\ cm\leqslant 196\ cm\leqslant 197\ cm\leqslant 198\ cm\leqslant 211\ cm$

Celtics : $166\ cm\leqslant 176\ cm\leqslant 179\ cm\leqslant 183\ cm\leqslant 184\ cm\leqslant 185\ cm\leqslant 185\ cm$ă $\leqslant 187\ cm\leqslant 188\ cm\leqslant 196\ cm\leqslant 206\ cm$

En observant ce classement, on peut s'intéresser à la valeur centrale, celle qui partage l'effectif en deux.
Comme l'effectif total de ces deux séries est 11 et comme $11=5+1+5$, la sixième valeur de ce classement partage la série en deux séries d'effectif égaux. Cette valeur s'appelle **la médiane** de la série.

Pour les Lakers, la médiane vaut 196 cm. La moitié des Lakers mesurent au plus 196 cm, l'autre moitié mesure au moins 196 cm.
Pour les Celtics, la médiane vaut 185 cm. La moitié des Celtics mesurent au plus 185 cm, l'autre moitié mesure au moins 185 cm.

4.

Analyse des tailles des Lakers de La Ramée

Taille (cm)	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180,190[$	$[190;200[$	$[200;210[$	Total
Effectif	3	2	0	5	1	11
Fréquence	$\frac{3}{11}\approx 27,3\ \%$	$\frac{2}{11}\approx 18,2\ \%$	$0\ \%$	$\frac{5}{11}\approx 45,5\ \%$	$\frac{1}{11}\approx 9,1\ \%$	$100\ \%$

Analyse des tailles des Celtics de Tibaous

Taille (cm)	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180,190[$	$[190;200[$	$[200;210[$	Total
Effectif	1	2	6	1	1	11
Fréquence	$\frac{1}{11}\approx 9,1\ \%$	$\frac{2}{11}\approx 18,2\ \%$	$\frac{6}{11}\approx 54,5\ \%$	$\frac{1}{11}\approx 9,1\ \%$	$\frac{1}{11}\approx 9,1\ \%$	$100\ \%$

On constate à nouveau que les tailles des Celtics sont regroupées autour de la moyenne, dans l'intervalle $[180\ cm;190\ cm[$.
Pour les Lakers, la dispersion est plus importante.

5.

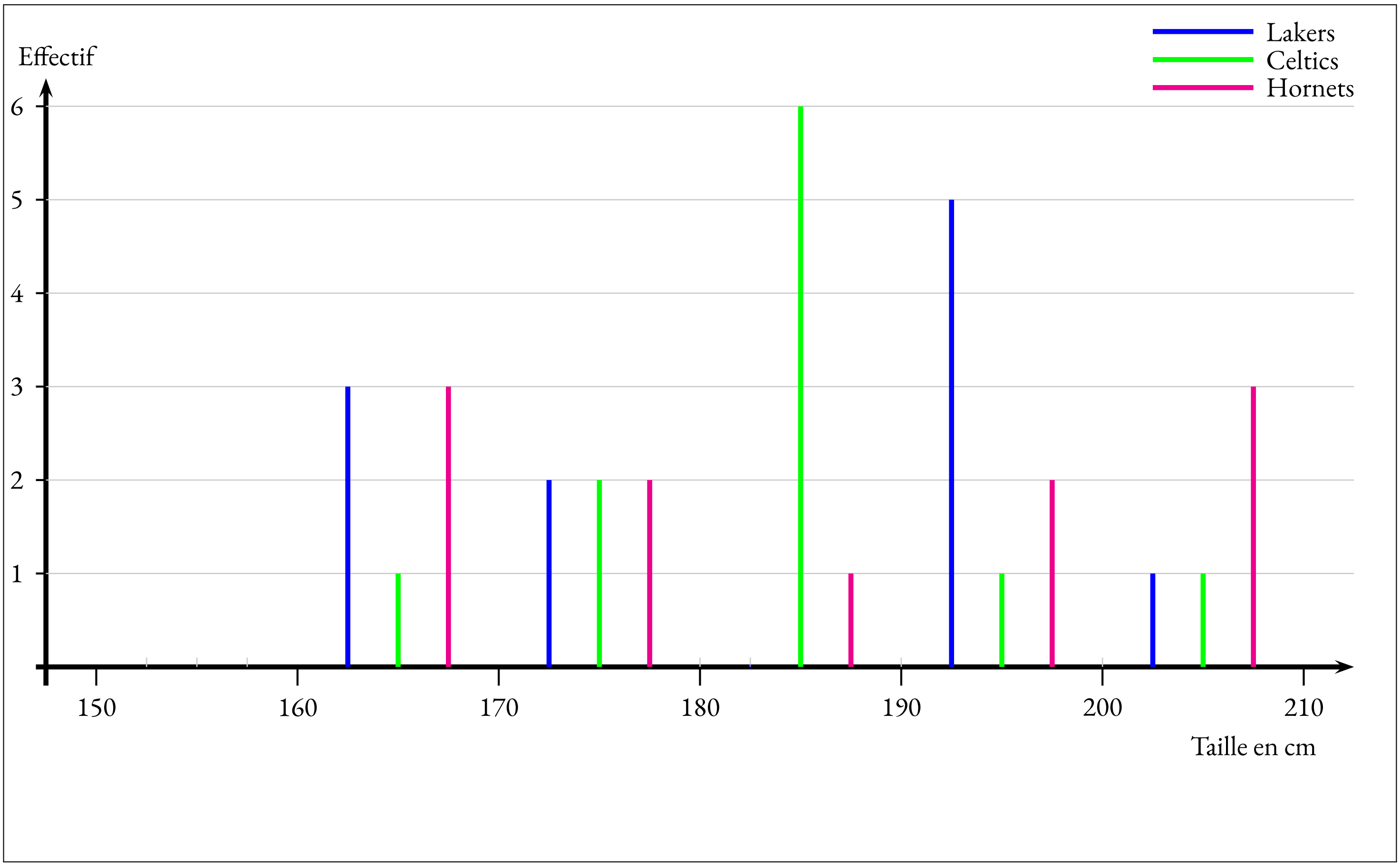
Taille (cm)	[160; 170[	[170; 180[	[180, 190[	[190; 200[	[200; 210[	Total
Effectif	3	2	1	2	3	11
Fréquence	$\frac{3}{11} \approx 27,3\ \%$	$\frac{2}{11} \approx 18,2\ \%$	$\frac{1}{11} \approx 9,1\ \%$	$\frac{2}{11} \approx 18,2\ \%$	$\frac{3}{11} \approx 27,3\ \%$	100 %

6. On ne peut pas obtenir ni la moyenne, ni la médiane, ni l'étendue de manière exacte puisque nous n'avons pas toute la série statistique. On peut cependant prendre les centres des intervalles pour effectuer ces calculs.

Le plus petit de cette équipe à une taille d'environ 165 cm, le centre de l'intervalle $[160\ cm; 170\ cm[$.
Le plus grand a une taille d'environ 205 cm.
L'étendue est vaut donc environ $205\ cm - 165\ cm = 40\ cm$.

Pour la moyenne on utilise la même méthode : $\dfrac{3 \times 165\ cm + 2 \times 175\ cm + 185\ cm + 2 \times 195\ cm + 3 \times 205\ cm}{11} = \dfrac{2\,035\ cm}{11} = 185\ cm$.

On observe aussi que la médiane est comprise entre 180 cm et 190 cm, soit environ 185 cm.



Les Hornets sont l'équipe dont les tailles sont les plus équilibrées.
Les Celtics ont des tailles très regroupées autour de la moyenne.
Les Lakers sont ceux dont la taille est la plus dispersée.

I — Moyenne arithmétique et pondérée

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1

(6 points)

On pose :

$\mathbf{f(x) = 5x(3x-1) - 7(2x-3) - 8x^2}$ et $\mathbf{g(x) = (3x-7)(2x+3) + (3x-7)(4x-5)}$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Développer et réduire $g(x)$.

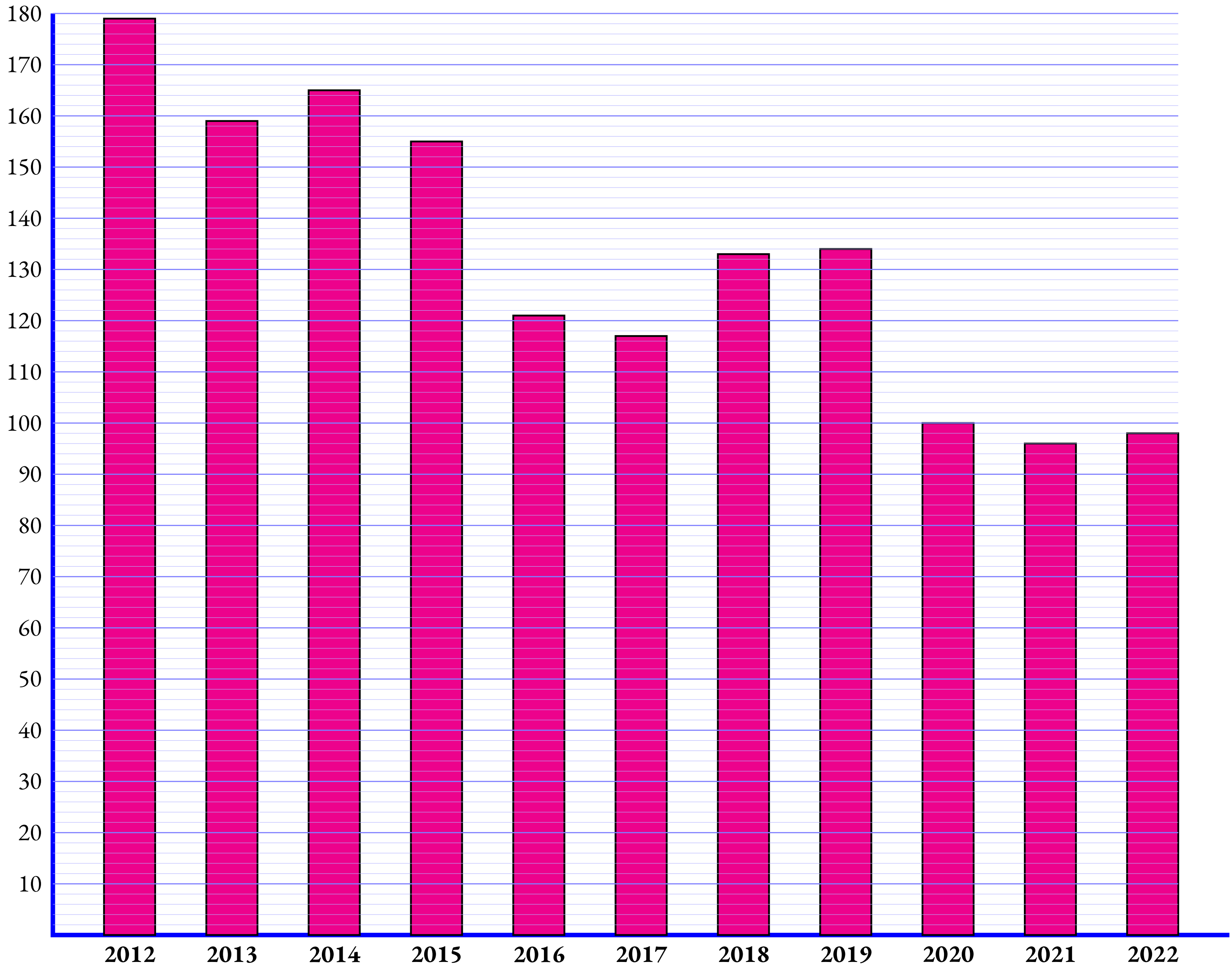
3. Factoriser $g(x)$.

Exercice n° 2

(8 points)

Voici une représentation graphique en barres qui correspond, pour la France, au nombre de conducteurs de cyclomoteurs décédés chaque année.

Première partie



Dans toute cette première partie, la lecture graphique sera faîte sans justification.

1. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

2. Est-il vrai qu'entre 2012 et 2022 le nombre de décès à diminué de plus de 45 % ?

3. Calculer la moyenne à l'unité près de cette série statistique.

4. Déterminer une médiane de cette série statistique.

Deuxième partie

Voici la série statistiques du nombre total de décès dans un accident de la circulation en France.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Années	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	Total
2	Nombre de décès	3 384	3 461	3 477	3 448	3 248	3 244	2 541	2 944	3 267	3 106	32 120

1. Calculer la moyenne de cette série statistique.

2. Quelle formule a été saisie dans la cellule **L2** ?

3. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

4. Déterminer la médiane de cette série.

Exercice n° 3

(6 points)

Lors d'un sondage, on a demandé à des familles le nombre total d'écrans disponibles à la maison en comptant les télévisions, les tablettes et les téléphones.
Voici le résultat :

Nombre d'écrans	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	51	134	678	789	1 089	2 678	2 876	1 678	1 089	890	654	145	76	17

1. Combien de familles ont été interrogées pour ce sondage ?

2. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

3. Calculer la moyenne, arrondie à l'unité près, du nombre d'écrans possédés par ces familles.

4. Est-il vrai que la moitié de ces familles possèdent plus de 7 écrans ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 — Correction

1.

$f(x) = 5x(3x-1) - 7(2x-3) - 8x^2$

$f(x) = 15x^2 - 5x - 14x + 21 - 8x^2$

$\boxed{f(x) = 7x^2 - 19x + 21}$

2.

$g(x) = (3x-7)(2x+3) + (3x-7)(4x-5)$

$g(x) = 6x^2 + 9x - 14x - 21 + 12x^2 - 9x - 28x + 35$

$\boxed{g(x) = 18x^2 - 48x + 14}$

3. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (3x-7)(2x+3) + (3x-7)(4x-5)$

$g(x) = (3x-7)\,[(2x+3) + (4x-5)]$

$g(x) = (3x-7)(2x+3+4x-5)$

$\boxed{g(x) = (3x-7)(6x-2)}$

Exercice n° 2 — Correction

Première partie

1. La valeur minimum est 96 en 2021. La valeur maximum est 179 en 2012.

$\boxed{\text{L'étendue de cette série statistique vaut } 179 - 96 = 83.}$

2. En 2012 il y a environ 179 décès. En 2022 environ 98.
Comme $179 - 98 = 81$, il y a une baisse de 81 décès.

Or $\dfrac{81}{179} \approx 0,4525$ soit $45,3$ %.

$\boxed{\text{Oui, il est vrai que le nombre de décès a baissé de 45 \%.}}$

3. Il faut calculer :

$$\frac{179+159+165+155+121+117+133+134+100+96+98}{11} = \frac{1457}{11} \approx 133$$

$\boxed{\text{En moyenne, il y a eu chaque année environ 123 décès, à l'unité près.}}$

4. Il y a 11 valeurs dans cette série statistique. Comme $11 = 5+1+5$, la médiane est la sixième valeur dans l'ordre croissant.
Classons les valeurs de la série : $96 < 98 < 100 < 117 < 121 < 133 < 134 < 155 < 159 < 165 < 179$.

$\boxed{\text{La médiane de cette série statistique est 133.}}$

Deuxième partie

Voici la série statistiques du nombre total de décès dans un accident de la circulation en France.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Années	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	Total
2	Nombre de décès	3 384	3 461	3 477	3 448	3 248	3 244	2 541	2 944	3 267	3 106	32 120

1. Calculons $\dfrac{3384+3461+3477+3448+3248+3244+2541+2944+3267+3104}{10}=\dfrac{32\,120}{10}=3112$

La moyenne de cette série statistique vaut 3212.

2. Dans la cellule **L2** on a saisi : **=B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2+K2** ou **=SOMME(B2:K2)**.

3. La valeur maximale vaut 3477 et la valeur minimale 2541.

L'étendue de cette série vaut : $3477-2541=936$.

4. Il y a 10 valeurs dans cette série. La médiane est la moyenne de la cinquième et la sixième valeur classée dans l'ordre croissant.
Voici le classement : $2541<2944<3106<3244<3248<3267<3384<3448<3461<3477$

La cinquième valeur vaut 3248 et la sixième 3267. La médiane vaut $\dfrac{3248+3267}{2}=3257{,}5$

Exercice n° 3 — Correction

1. Calculons $51+134+678+789+1089+2678+2876+1678+1089+890+654+145+76+17=12\,844$.

12 844 familles ont été interrogées.

2. L'étendue de cette série vaut $13-0=13$.

3. Calculons :

$$\frac{51\times0+134\times1+678\times2+789\times3+1089\times4+2678\times5+2876\times6+1678\times7+1089\times8+890\times9+654\times10+145\times11+76\times12+17\times13}{12\,844}$$

$$\frac{76\,595}{12\,844}\approx 5{,}96$$

Ces familles possèdent en moyenne 6 écrans.

4. Il faut déterminer la médiane en déterminant les effectifs cumulés croissants.

L'effectif total vaut 12 844. Comme $12\,844\div2=6422$, la médiane se situe entre la 6422 $^{\text{e}}$et 6423 $^{\text{e}}$valeur.
Calculons les effectifs cumulés croissants.

Nombre d'écrans	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	51	134	678	789	1 089	2 678	2 876	1 678	1 089	890	654	145	76	17
.C.C	51	185	863	1 652	2 741	5 419	8 295	...	...	...	...	...	...	...

La valeur cherchée se trouve dans la colonne qui correspond à 6 écrans.

C'est faux ! La moitié des familles possèdent plus de 6 écrans !

Statistiques

Vocabulaire

Une **série statistique** est une liste de valeurs obtenues en étudiant une **population** (des élèves, des plantes, des factures…). Pour chaque **individu** de la population étudiée on peut observer un ou plusieurs **caractères** (tailles, masse, âge, prix, couleur…), c'est à dire une information. Un caractère peut être **qualitatif** (couleur, difficulté, goût…) ou **quantitatif** (quantité, nombre, prix…).
On connaît parfois toutes les valeurs d'une série statistiques. Quelquefois on ne connaît que la **répartition** des valeurs étudiées.
L'effectif total d'une série désigne le nombre total d'individu étudié. Dans un tableau de répartition on utilise le mot **effectif** pour le nombre d'individus concernés par une valeur du caractère.
La fréquence d'une valeur du caractère étudié correspond au quotient de l'effectif de ce caractère sur l'effectif total. Une fréquence peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un pourcentage ou d'un nombre décimal approché ou non.

Exemples :

Voici une première série qualitative : la couleur des yeux de 10 personnes :

Bleu – Bleu – Vert – Vert – Vert – Marron – Marron – Marron – Marron – Noir

Voici une seconde série quantitative : les notes d'un groupe de 9 élèves au diplôme de fin d'année :

10 – 05 – 15 – 20 – 11 – 15 – 15 – 03 – 17

Voici une troisième série quantitative : la répartition des notes sur les 156 élèves de dernière année :

Notes	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20]$
Effectif	26	54	60	16

Moyenne arithmétique et pondérée

La **moyenne** ou **moyenne arithmétique** de la série de n valeurs : $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ est :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

La **moyenne pondérée** de la série de n valeurs $x_1, x_2, x_2, \dots x_n$ pondérées par leurs effectifs respectifs $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ est :

$$\frac{a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + a_3 \times x_3 + \dots + a_n \times x_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

La moyenne d'une série statistique est un nombre qui correspond à un partage équitable de toutes les valeurs de la série.

Exemples :
La première série est qualitative, la moyenne n'a pas de sens pour cette série.
La seconde série a pour moyenne :

$$\frac{10+5+15+20+11+15+15+3+17}{9} = \frac{111}{9} \approx 12{,}33 \text{ à } 0{,}01 \text{ près.}$$

Pour la troisième série, il faut calculer la moyenne des centres des intervalles pondérée par l'effectif.

$$\frac{2{,}5 \times 26 + 7{,}5 \times 54 + 12{,}5 \times 60 + 17{,}5 \times 16}{26+54+60+16} = \frac{1500}{156} \approx 9{,}62 \text{ à } 0{,}01 \text{ près.}$$

Étendue

L'étendue d'une série statistique est l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale de cette série.
L'étendue donne une information sur la dispersion des valeurs de la série : plus l'étendue est petite moins la série est dispersée.

Exemple :
L'étendue de la deuxième série est $20 - 3 = 17$
Pour la deuxième série on peut seulement dire que l'étendue est inférieure ou égale à 20.

Médiane

La **médiane** d'une série statistique est un nombre qui partage la série en deux séries ayant le même effectif.
La moitié des valeurs sont inférieures à la médiane, l'autre moitié est supérieure.
La médiane donne une information sur la dispersion des valeurs de la série. Son écart avec la moyenne est souvent intéressant.

Méthode :
Pour calculer la médiane d'une série statistique il faut classer les valeurs du caractère dans l'ordre croissant puis déterminer la valeur centrale.

— si l'effectif est impair, $2n+1$, la médiane est la $n+1^{e}$ valeur;

— si l'effectif est pair, $2n$, la médiane est la moyenne de la n^{e} et $n+1^{e}$ valeur.
Tout nombres compris entre la n^{e} et la $n+1^{e}$ valeur est une médiane dans ce cas.

Exemples :
Pour la deuxième série, l'effectif total est impair : $9 = 2 \times 4 + 1$, la médiane est la $4+1 = 5^{e}$ valeur soit 15.
Pour la troisième série, l'effectif total est pair : $156 = 2 \times 78$, la médiane est la moyenne de la 78^{e} et 79^{e} valeurs.
D'après le tableau cette médiane se situe dans l'intervalle $[5;10[$.

Chapitre VI

Calcul littéral

Sommaire

Situation initiale : Tour de magie et programme de calcul . . . 246
I La distributivité . . . 247
II Développer et réduire un expression littérale . . . 247
III Factoriser avec un facteur commun . . . 247
IV Initiation au calcul littéral . . . 247
V Résoudre une équation produit . . . 247
Exercices . . . 248
Prépa brevet . . . 272
Fiche de synthèse . . . 294
Fiche de synthèse : Calcul littéral . . . 294

Situation initiale : **Tour de magie et programme de calcul**

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre;
— le multiplier par 7;
— enlever 4;
— multiplier le tout par 11;
— ajouter 50;
— multiplier le tour par 13;
— enlever 78.

1. Tester ce programme de calcul avec trois nombres entiers positifs inférieurs à 100 de votre choix.

2. Que constatez-vous? Quelle conjecture pouvez-vous faire?

3. On note x le nombre entier de départ inférieur à 100 et on note $f(x)$ le résultat obtenu à la fin du programme. Quelle est l'expression de f en fonction de x.

4. Développer et réduire $f(x)$ et expliquer la conjecture de la question **2.**

Voici le programme Scratch qui correspond à ce programme de calcul :

```
quand [drapeau] est cliqué
demander (Choisir un nombre) et attendre
mettre f(x) à (réponse)
mettre f(x) à ((f(x)) * (7))
dire (regrouper (On multiplie par 7 :) et (f(x))) pendant (2) secondes
mettre f(x) à ((f(x)) - (4))
dire (regrouper (On enlève 4 :) et (f(x))) pendant (2) secondes
mettre f(x) à (...)
dire (regrouper (On multiplie par 11 :) et (f(x))) pendant (2) secondes
mettre f(x) à (...)
dire (regrouper (...) et (f(x))) pendant (2) secondes
mettre f(x) à (...)
dire (regrouper (...) et (f(x))) pendant (2) secondes
mettre f(x) à (...)
dire (regrouper (On obtient finalement :) et (f(x))) pendant (2) secondes
```

5. Compléter les parties manquantes de ce programme.

I — La distributivité

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition. Cela signifie que le produit d'une somme est égal à la somme des produits.
Plus généralement :

❧ Définition 6.1 : Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

a, b et k des nombres quelconques.

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

Vocabulaire :

- **Développer** une expression revient à écrire un produit de plusieurs facteurs sous forme d'une somme de termes.
- **Factoriser** une expression revient à écrire une somme de termes sous forme d'un produit de plusieurs facteurs.

Exemples :
La distributivité est utilisé pour faciliter le calcul mental.
$78 \times 99 = 78 \times (100-1) = 78 \times 100 - 78 \times 1 = 7800 - 78 = 7722$

II — Développer et réduire un expression littérale

III — Factoriser avec un facteur commun

IV — Initiation au calcul littéral

V — Résoudre une équation produit

Exercices

Exercice n° 6.1 : Un exercice

Factoriser pour résoudre

1. On pense à deux nombres quelconques A et B. On sait que A × B = 0. Que peut-on dire de A et B ?

2. On pose $f(x) = (2x-8)(3x+4)$.

2.a. Développer et réduire $f(x)$.

2.b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3.a. On pose $g(x) = (3x+4)(4x-1)+(3x+4)(7-2x)$. Développer et réduire $g(x)$.

3.b. Factoriser $g(x)$.

3.c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

4.a. On pose $h(x) = (5x-1)(3x+3)-(5x-1)(6x+3)$. Développer et réduire $h(x)$.

4.b. Factoriser $h(x)$.

4.c. Quels sont les antécédents de 0 par h.

5.a On pose $k(x) = (3x-5)^2-(3x-5)(5x-3)$. Développer et réduire $k(x)$.

5.b. Factoriser $k(x)$.

5.c. Résoudre $k(x) = 0$.

6. On pose $l(x) = (3x+7)(3x-7)$

6.a. Développer et réduire $l(x)$

6.b. On pose $m(x) = 16x^2-36$. Factoriser $m(x)$.

6.c. On pose $p(x) = 25x^2-16$. Factoriser $p(x)$.

7. On pose $q(x) = (5x-7)^2-25$

7.a. Factoriser $q(x)$.

7.b. Résoudre $q(x) = 0$.

8. On pose $r(x) = (3x+1)^2-(2x-3)^2$

8.a. Développer et réduire $r(x)$.

8.b. Factoriser $r(x)$.

8.c. Résoudre $r(x) = 0$.

9. On pose $s(x) = (4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$, $t(x) = (6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$ et $v(x) = (6x-7)^2-(2x+3)^2$.

9.a. Développer et réduire $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

9.b. Factoriser $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

9.c. Résoudre $s(x) = 0$, $t(x) = 0$ et $v(x) = 0$.

Factoriser pour résoudre — Correction

1. On pense à deux nombres quelconques A et B. On sait que A × B = 0. Que peut-on dire de A et B ?

Pour que le produit soit égal à 0, il faut que l'un des deux nombres soit égal à 0.

Un produit de deux facteurs est égal à 0 si et seulement si un des deux facteurs est égal à 0.

2. On pose $f(x) = (2x-8)(3x+4)$.

2.a. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = 6x^2 + 8x - 24x - 32$

$\boxed{6x^2 - 16x - 32}$

2.b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On peut tenter d'utiliser la forme développée.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 6x^2 - 16x - 32 &= 0 \\ 6x^2 - 16x &= 32 \\ x(6x-16) &= 32 \end{aligned}$$

C'est une impasse ! Utilisons la forme factorisée.

$$(2x-8)(3x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \\ 2x - 8 + 8 &= 0 + 8 \\ 2x8 \\ x\frac{8}{2} \\ x4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ 3x + 4 - 4 &= 0 - 4 \\ 3x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 4 \text{ et } x = \frac{-4}{3}}$

3.a. On pose $g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = \left(12x^2 - 3x + 16x - 4\right) + \left(21x - 6x^2 + 28 - 8x\right)$

$\boxed{g(x) = 6x^2 + 26x + 22}$

3.b. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$
$g(x) = (3x+4)\,[(4x-1) + (7x-2x)]$
$g(x) = (3x+4)(3x-1+7x-2)$

$\boxed{g(x) = (3x+4)(10x-3)}$

3.c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

$$(3x+4)(10x-3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 0 \\ 3x+4-4 &= 0-4 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x-3 &= 0 \\ 10x-3+3 &= 0+3 \\ 10x &= 3 \\ x &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = -\frac{4}{3} \text{ et } x = \frac{3}{10}}$

4.a. On pose $h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$. Développer et réduire $h(x)$.

$h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$
$h(x) = \left(15x^2 + 15x - 3x - 3\right) - \left(30x^2 + 15x - 6x - 3\right)$
$h(x) = 15x^2 + 15x - 3x - 3 - 30x^2 - 15x + 6x + 3$

$\boxed{h(x) = -15x^2 + 3x}$

4.b. Factoriser $h(x)$.

$h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$
$h(x) = (5x-1)\left((3x+3) - (6x+3)\right)$
$h(x) = (5x-1)(3x+3-6x-3)$
$h(x) = (5x-1)(-3x)$

$\boxed{h(x) = -3x(5x-1)}$

4.c. Quels sont les antécédents de 0 par h.

Il faut résoudre l'équation $h(x) = 0$.

$$-3x(5x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} -3x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-3} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-1 &= 0 \\ 5x-1+1 &= 0+1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0 \text{ et } x = \frac{1}{5}}$

5.a On pose $k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$. Développer et réduire $k(x)$.

$k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5) - (3x-5)(5x-3)$

$k(x) = \left(9x^2 - 15x - 15x + 25\right) - \left(15x^2 - 9x - 25x + 15\right)$
$k(x) = 9x^2 - 15x - 15x + 25 - 15x^2 + 9x + 25x - 15$

$\boxed{k(x) = -6x^2 + 4x + 10}$

5.b. Factoriser $k(x)$.

$k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5) - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)\left((3x-5) - (5x-3)\right)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5-5x+3)$

$\boxed{k(x) = (3x-5)(-2x-2)}$

5.c. Résoudre $k(x) = 0$.

$$(3x-5)(-2x-2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$3x - 5 = 0$$
$$3x - 5 + 5 = 0 + 5$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$

$$-2x - 2 = 0$$
$$-2x - 2 + 2 = 0 + 2$$
$$-2x = 2$$
$$x = \frac{2}{-2}$$
$$x = -1$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = \frac{5}{3} \text{ et } x = -1}$

6. On pose $l(x) = (3x+7)(3x-7)$

6.a. Développer et réduire $l(x)$

$l(x) = (3x+7)(3x-7)$
$l(x) = 9x^2 - 21x + 21x - 49$

$\boxed{l(x) = 9x^2 - 49}$

a et b des nombres quelconques.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

6.b. On pose $m(x) = 16x^2 - 36$. Factoriser $m(x)$.

$m(x) = 16x^2 - 36$
$m(x) = (4x)^2 - 6^2$

$\boxed{m(x) = (4x+6)(4x-6)}$

6.c. On pose $p(x) = 25x^2 - 16$. Factoriser $p(x)$.

7. On pose $q(x) = (5x-7)^2 - 25$

7.a. Factoriser $q(x)$.

$q(x) = (5x-7)^2 - 25$
$q(x) = (5x-7)^2 - 5^2$

$q(x) = ((5x-7)+5)((5x-7)-5)$
$q(x) = (5x-7+5)(5x-7-5)$

$\boxed{q(x) = (5x-2)(5x-12)}$

7.b. Résoudre $q(x) = 0$.

$$(5x-2)(5x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x-2 &= 0 \\ 5x-2+2 &= 0+2 \\ 5x &= 2 \\ x &= \frac{2}{5} \\ x &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-12 &= 0 \\ 5x-12+12 &= 0+12 \\ 5x &= 12 \\ x &= \frac{12}{5} \\ x &= 2,4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,4 \text{ et } x = 2,4}$

8. On pose $r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

8.a. Développer et réduire $r(x)$.

$r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$
$r(x) = (3x+1)(3x+1) - (2x-3)(2x-3)$
$r(x) = \left(9x^2+3x+3x+1\right) - \left(4x^2-6x-6x+9\right)$
$r(x) = 9x^2+3x+3x+1-4x^2+6x+6x-9$

$\boxed{r(x) = 5x^2+18x-8}$

8.b. Factoriser $r(x)$.

$r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

On reconnaît une expression de la forme $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$ *avec* $\mathrm{A} = (3x+1)$ *et* $\mathrm{B} = (2x-3)$

$r(x) = [(3x+1)+(2x-3)]\,[(3x+1)-(2x-3)]$
$r(x) = (3x+1+2x-3)(3x+1-2x+3)$

$\boxed{r(x) = (5x-2)(x+4)}$

8.c. Résoudre $r(x) = 0$.

$$(5x-2)(x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x-2 &= 0 \\ 5x-2+2 &= 0+2 \\ 5x &= 2 \\ x &= \frac{2}{5} \\ x &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ x+4-4 &= 0-4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,4 \text{ et } x = -4}$

9. On pose $s(x) = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x+1)$, $t(x) = (6x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-2)$ et $v(x) = (6x-7)^2 - (2x+3)^2$.

9.a. Développer et réduire $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

$s(x) = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x+1)$
$s(x) = (4x-1)(4x-1) - (4x-1)(3x+1)$
$s(x) = \left(16x^2 - 4x - 4x + 1\right) - \left(12x^2 + 4x - 3x - 1\right)$
$s(x) = 16x^2 - 4x - 4x + 1 - 12x^2 - 4x + 3x + 1$

$\boxed{s(x) = 4x^2 - 9x + 2}$

$t(x) = (6x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-2)$
$t(x) = \left(18x^2 + 30x - 3x - 5\right) - \left(30x^2 - 12x - 5x + 2\right)$
$t(x) = 18x^2 + 30x - 3x - 5 - 30x^2 + 12x + 5x - 2$

$\boxed{t(x) = -12x^2 + 44x - 7}$

$v(x) = (6x-7)^2 - (2x+3)^2$
$v(x) = (6x-7)(6x-7) - (2x+3)(2x+3)$
$v(x) = \left(36x^2 - 42x - 42x + 49\right) - \left(4x^2 + 6x + 6x + 9\right)$
$v(x) = 36x^2 - 42x - 42x + 49 - 4x^2 - 6x - 6x - 9$

$\boxed{v(x) = 32x^2 - 96x + 40}$

9.b. Factoriser $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

$s(x) = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x+1)$
$s(x) = (4x-1)(4x-1) - (4x-1)(3x+1)$
$s(x) = (4x-1)\,[(4x-1) - (3x+1)]$
$s(x) = (4x-1)(4x-1-3x-1)$

$\boxed{s(x) = (4x-1)(x-2)}$

$t(x) = (6x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-2)$
$t(x) = (6x-1)\,[(3x+5) - (5x-2)]$
$t(x) = (6x-1)(3x+5-5x+2)$

$\boxed{t(x) = (6x-1)(-2x+7)}$

$v(x) = (6x-7)^2 - (2x+3)^2$
$v(x) = [(6x-7) + (2x+3)]\,[(6x-7) - (2x+3)]$
$v(x) = (6x-7+2x+3)(6x-7-2x-3)$

$\boxed{v(x) = (8x-4)(4x-10)}$

9.c. Résoudre $s(x) = 0$, $t(x) = 0$ et $v(x) = 0$.

$$s(x) = 0$$

$$(4x-1)(x-2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$4x - 1 = 0$$
$$4x - 1 + 1 = 0 + 1$$
$$4x = 1$$
$$x = \frac{1}{4}$$
$$x = 0,25$$

$$x - 2 = 0$$
$$x - 2 + 2 = 0 + 2$$
$$x = 2$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,25 \text{ et } x = 2}$

$$t(x) = 0$$

$$(6x - 1)(-2x + 7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 6x - 1 &= 0 \\ 6x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 6x &= 1 \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x + 7 &= 0 \\ -2x + 7 - 7 &= 0 - 7 \\ -2x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{2} \\ x &= -3,5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = \frac{1}{6} \text{ et } x = -3,5}$

$$v(x) = 0$$

$$(8x - 4)(4x - 10) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 8x - 4 &= 0 \\ 8x - 4 + 4 &= 0 + 4 \\ 8x &= 4 \\ x &= \frac{4}{8} \\ x &= \frac{1}{2} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 0 \\ 4x - 10 + 10 &= 0 + 10 \\ 4x &= 10 \\ x &= \frac{10}{4} \\ x &= \frac{5}{2} \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,5 \text{ et } x = 2,5}$

Évaluation de mathématiques

Question de cours

Recopier sur votre copie les trois identités remarquables.

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

$A = (x+6)^2$	$D = (5x-3)^2$	$G = (5x+10)(5x-10)$
$B = (3x-7)^2$	$E = (6x+8)^2$	$H = (7x-9)^2$
$C = (4x-3)(4x+3)$	$F = (7x+8)(7x-8)$	$I = (4x+8)^2$

Exercice 2

On pose $f(x) = (5x-8)^2 - (5x-8)(7x+3)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Factoriser $f(x)$.

3. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

4. Résoudre l'équation $(5x-8)(-2x-11) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 3

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par 9 ;
- Ajouter 30 ;
- Multiplier le tout par le nombre de départ ;
- Ajouter 25.

1. Montrer qu'en choisissant -2 pour nombre de départ on obtient 1 à la fin.

2. Utiliser ce programme de calcul en prenant 3 puis 5 comme nombre de départ.

On appelle g la fonction qui a un nombre de départ x donne le résultat final $g(x)$.

3. Donner l'expression de $g(x)$ et montrer en développant que $g(x) = 9x^2 + 30x + 25$.

4. Développer $(3x+5)^2$.

5. Expliquer pourquoi quand on choisit un nombre entier au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre entier.

6. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin ?

Évaluation de mathématiques – Correction

Question de cours

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

A $= (x+6)^2 = \boxed{x^2+12x+36}$

B $= (3x-7)^2 = \boxed{9x^2-42x+49}$

C $= (4x-3)(4x+3) = \boxed{16x^2-9}$

D $= (5x-3)^2 = \boxed{25x^2-30x+9}$

E $= (6x+8)^2 = \boxed{36x^2+96x+64}$

F $= (7x+8)(7x-8) = \boxed{49x^2-64}$

G $= (5x+10)(5x-10) = \boxed{25x^2-100}$

H $= (7x-9)^2 = \boxed{49x^2-126x+81}$

I $= (4x+8)^2 = \boxed{16x^2+64x+64}$

Exercice 2

1. $f(x) = (5x-8)^2 - (5x-8)(7x+3)$.
$f(x) = 25x^2 - 80x + 64 - (35x^2 + 15x - 56x - 24)$
$f(x) = 25x^2 - 80x + 64 - 35x^2 - 15x + 56x + 24$
$\boxed{f(x) = -10x^2 - 39x + 88}$

2. $f(x) = (5x-8)^2 - (5x-8)(7x+3)$
$f(x) = (5x-8)\,[(5x-8) - (7x+3)]$
$f(x) = (5x-8)(5x-8-7x-3)$
$\boxed{f(x) = (5x-8)(-2x-11)}$

3. $f(-1) = -10 \times (-1)^2 - 39 \times (-1) + 88$ donc $f(-1) = -10 + 39 + 88 = \boxed{116}$
$f(2) = -10 \times 2^2 - 39 \times 2 + 88$ donc $f(2) = -10 \times 4 - 78 + 88 = -40 + 10 = \boxed{-30}$

4. Résoudre l'équation $(5x-8)(-2x-11) = 0$
Un produit de facteurs est nul à la seule condition que l'un des facteurs soit nul.

$5x - 8 = 0$

$5x - 8 + 8 = 0 + 8$

$5x = 8$

x

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 3

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre;
- Le multiplier par 9;
- Ajouter 30;
- Multiplier le tout par le nombre de départ;
- Ajouter 25.

1. Montrer qu'en choisissant -2 pour nombre de départ on obtient 1 à la fin.

2. Utiliser ce programme de calcul en prenant 3 puis 5 comme nombre de départ.

On appelle g la fonction qui a un nombre de départ x donne le résultat final $g(x)$.

3. Donner l'expression de $g(x)$ et montrer en développant que $g(x) = 9x^2 + 30x + 25$.

4. Développer $(3x+5)^2$.

5. Expliquer pourquoi quand on choisit un nombre entier au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre entier.

6. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin ?

Évaluation

Exercice n° 1 : *10 points*

On pose $f(x) = (6x-1)(3x+12) + (x-6)(3x+12)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre $(3x+12)(7x-7) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice n° 2 : *10 points*

On pose $g(x) = (5x-1)(3x+2) - (4x+7)(5x-1)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

2. Calculer $g(0)$ et $g(3)$.

3. Factoriser $g(x)$.

4. Résoudre $(5x-1)(-x-5) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Calcul littéral Correction

Calcul littéral

On pose $f(x) = (6x-1)(3x+12)+(x-6)(3x+12)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (6x-1)(3x+12)+(x-6)(3x+12)$
$f(x) = (18x^2+72x-3x-12)+(3x^2+12x-18x-72$

$\boxed{f(x) = 21x^2+63x-84}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

$f(0) = 21\times 0^2+63\times 0-84 = -84$ donc $\boxed{f(0) = -84}$

$f(-2) = 21\times(-2)^2+63\times(-2)-84 = 21\times 4-136-84 = 84-220 = -136$ donc $\boxed{f(-2) = -136}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (6x-1)(3x+12)+(x-6)(3x+12)$
$f(x) = (3x+12)\,[(6x-1)+(x-6)]$
$\boxed{f(x) = (3x+12)(7x-7)}$

4. Résoudre $(3x+12)(7x-7) = 0$.

$$(3x+12)(7x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x+12 &= 0 \\ 3x+12-12 &= 0-12 \\ 3x &= -12 \\ x &= \frac{-12}{3} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x-7 &= 0 \\ 7x-7+7 &= 0+7 \\ 7x &= 7 \\ x &= \frac{7}{7} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-4 \text{ et } 1}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } -4 \text{ et } 1}$

Exercice n° 2 : Calcul littéral Correction

Calcul littéral

On pose $g(x) = (5x-1)(3x+2)-(4x+7)(5x-1)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = (5x-1)(3x+2)-(4x+7)(5x-1)$
$g(x) = (15x^2+10x-3x-2)-(20x^2-4x+35x-7)$
$g(x) = 15x^2+10x-3x-2-20x^2+4x-35x+7$

$\boxed{g(x) = -5x^2 - 24x + 5}$

2. Calculer $g(0)$ et $g(3)$.

$g(0) = -5 \times 0^2 - 24 \times 0 + 5 = 5$ donc $\boxed{g(0) = 5}$

$g(3) = -5 \times 3^2 - 24 \times 3 + 5 = -5 \times 9 - 72 + 5 = -45 - 67 = -112$ donc $\boxed{g(3) = -112}$

3. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (5x-1)(3x+2) - (4x+7)(5x-1)$
$g(x) = (5x-1)\,[(3x+2) - (4x+7)]$
$g(x) = (5x-1)(3x+2-4x-7)$
$\boxed{g(x) = (5x-1)(-x-5)}$

4. Résoudre $(5x-1)(-x-5) = 0$.

$$(5x-1)(-x-5) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= 0 \\ 5x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x - 5 &= 0 \\ -x - 5 + 5 &= 0 + 5 \\ -x &= 5 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{5} \text{ et } -5}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

$\boxed{\text{Les antécédents de } 0 \text{ par } g \text{ sont } \frac{1}{5} \text{ et } -5}$

Évaluation

Exercice n° 1 :

10 points

On pose $f(x) = (5x-2)(2x+8) + (2x-5)(2x+8)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-3)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre $(2x+8)(7x-7) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice n° 2 :

10 points

On pose $g(x) = (3x-2)(4x+3) - (4x+3)(7x-3)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

2. Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

3. Factoriser $g(x)$.

4. Résoudre $(4x+3)(-4x+1) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Calcul littéral

Correction

Calcul littéral

On pose $f(x) = (5x-2)(2x+8) + (2x-5)(2x+8)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (5x-2)(2x+8) + (2x-5)(2x+8)$
$f(x) = (10x^2 + 40x - 4x - 16) + (4x^2 + 16x - 10x - 40$

$\boxed{f(x) = 14x^2 + 42x - 56}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(-3)$.

$f(0) = 14 \times 0^2 + 42 \times 0 - 56 = -56$ donc $\boxed{f(0) = -56}$

$f(-3) = 14 \times (-3)^2 + 42 \times (-3) - 56 = 14 \times 9 - 126 - 56 = 126 - 126 - 56 = -56$ donc $\boxed{f(-3) = -56}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (5x-2)(2x+8) + (2x-5)(2x+8)$
$f(x) = (2x+8)\left[(5x-2) + (2x-5)\right]$
$\boxed{f(x) = (2x+8)(7x-7)}$

4. Résoudre $(2x+8)(7x-7) = 0$.

$$(2x+8)(7x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 2x+8 &= 0 \\ 2x+8-8 &= 0-8 \\ 2x &= -8 \\ x &= \frac{-8}{2} \\ x &= -4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 7x-7 &= 0 \\ 7x-7+7 &= 0+7 \\ 7x &= 7 \\ x &= \frac{7}{7} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-4 \text{ et } 1}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } -4 \text{ et } 1}$

Exercice n° 2 : Calcul littéral

Correction

Calcul littéral

On pose $g(x) = (3x-2)(4x+3) - (4x+3)(7x-3)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = (3x-2)(4x+3) - (4x+3)(7x-3)$
$g(x) = (12x^2 + 9x - 8x - 6) - (28x^2 - 12x + 21x - 9)$
$g(x) = 12x^2 + 9x - 8x - 6 - 28x^2 + 12x - 21x + 9$

$\boxed{g(x) = -16x^2 - 8x + 3}$

2. Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

$g(0) = -16 \times 0^2 - 8 \times 0 + 3 = 3$ donc $\boxed{g(0) = 3}$

$g(2) = -16 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = -16 \times 4 - 16 + 3 = -64 - 13 = -77$ donc $\boxed{g(2) = -77}$

3. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (3x-2)(4x+3) - (4x+3)(7x-3)$
$g(x) = (4x+3)\,[(3x-2) - (7x-3)]$
$g(x) = (4x+3)(3x-2-7x+3)$
$\boxed{g(x) = (4x+3)(-4x+1)}$

4. Résoudre $(4x+3)(-4x+1) = 0$.

$$(4x+3)(-4x+1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 4x+3 &= 0 \\ 4x+3-3 &= 0-3 \\ 4x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x+1 &= 0 \\ -4x+1-1 &= 0-1 \\ -4x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-4} \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{-3}{4} \text{ et } \frac{1}{4}}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } g \text{ sont } \frac{-3}{4} \text{ et } \frac{1}{4}}$

Évaluation

Exercice n° 1 :

10 points

On pose $f(x) = (4x-1)(5x+10) + (3x-6)(5x+10)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre $(5x+10)(7x-7) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice n° 2 :

10 points

On pose $g(x) = (7x-2)(3x+5) - (3x+5)(9x-1)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

2. Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

3. Factoriser $g(x)$.

4. Résoudre $(3x+5)(-2x-1) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

Évaluation — CORRECTION

Exercice n° 1 : Calcul littéral CORRECTION

Calcul littéral

On pose $f(x) = (4x-1)(5x+10) + (3x-6)(5x+10)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (4x-1)(5x+10) + (3x-6)(5x+10)$
$f(x) = (20x^2 + 40x - 5x - 10) + (15x^2 + 30x - 30x - 60$

$\boxed{f(x) = 35x^2 + 35x - 70}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.

$f(0) = 35 \times 0^2 + 35 \times 0 - 70 = -56$ donc $\boxed{f(0) = -70}$

$f(-3) = 35 \times (-1)^2 + 35 \times (-1) - 70 = 35 \times 1 - 35 - 70 = -70$ donc $\boxed{f(-1) = -70}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (4x-1)(5x+10) + (3x-6)(5x+10)$
$f(x) = (5x+10)[(4x-1) + (3x-6)]$
$\boxed{f(x) = (5x+10)(7x-7)}$

4. Résoudre $(4x+10)(7x-7) = 0$.

$$(4x+10)(7x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 4x + 10 &= 0 \\ 4x + 10 - 10 &= 0 - 10 \\ 4x &= -10 \\ x &= \frac{-10}{4} \\ x &= -2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x - 7 &= 0 \\ 7x - 7 + 7 &= 0 + 7 \\ 7x &= 7 \\ x &= \frac{7}{7} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-2,5 \text{ et } 1}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } -2,5 \text{ et } 1}$

Exercice n° 2 : Calcul littéral CORRECTION

Calcul littéral

On pose $g(x) = (7x-2)(3x+5) - (3x+5)(9x-1)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = (7x-2)(3x+5) - (3x+5)(9x-1)$
$g(x) = (21x^2 + 35x - 6x - 10) - (27x^2 - 3x + 45x - 5)$
$g(x) = 21x^2 + 35x - 6x - 10 - 27x^2 + 3x - 45x + 5$

$\boxed{g(x) = -6x^2 - 13x - 5}$

2. Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

$g(0) = -6 \times 0^2 - 13 \times 0 - 5 = -5$ donc $\boxed{g(0) = -5}$

$g(2) = -6 \times 2^2 - 13 \times 2 - 5 = -6 \times 4 - 26 - 5 = -24 - 31 = -55$ donc $\boxed{g(2) = -55}$

3. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (7x-2)(3x+5) - (3x+5)(9x-1)$
$g(x) = (3x+5)\left[(7x-2)-(9x-1)\right]$
$g(x) = (3x+5)(7x-2-9x+1)$
$\boxed{g(x) = (3x+5)(-2x-1)}$

4. Résoudre $(3x+5)(-2x-11) = 0$.

$$(3x+5)(-2x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x+5 &= 0 \\ 3x+5-5 &= 0-5 \\ 3x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x-11 &= 0 \\ -2x-11+11 &= 0+11 \\ -2x &= 11 \\ x &= \frac{11}{-2} \\ x &= -5,5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{-5}{3} \text{ et } -5,5}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } g \text{ sont } \frac{-5}{3} \text{ et } -5,5}$

Évaluation

Exercice n° 1 :

10 points

On pose $f(x) = (3x-2)(3x+9) + (4x-5)(3x+9)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre $(3x+9)(7x-7) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice n° 2 :

10 points

On pose $g(x) = (3x-1)(6x-4) - (6x-4)(7x-3)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

2. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

3. Factoriser $g(x)$.

4. Résoudre $(6x-4)(-4x+2) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Calcul littéral

Correction

Calcul littéral

On pose $f(x) = (3x-2)(3x+9) + (4x-5)(3x+9)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (3x-2)(3x+9) + (4x-5)(3x+9)$
$f(x) = (9x^2+27x-6x-18) + (12x^2+36x-15x-45)$

$\boxed{f(x) = 21x^2+42x-63}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

$f(0) = 21\times 0^2 + 42\times 0 - 63 = -63$ donc $\boxed{f(0) = -63}$

$f(-2) = 21\times(-2)^2 + 42\times(-2) - 63 = 21\times 4 - 84 - 63 = -63$ donc $\boxed{f(-2) = -63}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (3x-2)(3x+9) + (4x-5)(3x+9)$
$f(x) = (3x+9)\,[(3x-2)+(4x-5)]$
$\boxed{f(x) = (3x+9)(7x-7)}$

4. Résoudre $(3x+9)(7x-7) = 0$.

$$(3x+9)(7x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x+9 &= 0 \\ 3x+9-9 &= 0-9 \\ 3x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x-7 &= 0 \\ 7x-7+7 &= 0+7 \\ 7x &= 7 \\ x &= \frac{7}{7} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-3 \text{ et } 1}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

$\boxed{\text{Les antécédents de } 0 \text{ par } f \text{ sont } -3 \text{ et } 1}$

Exercice n° 2 : Calcul littéral

Correction

Calcul littéral

On pose $g(x) = (3x-1)(6x-4) - (6x-4)(7x-3)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = (3x-1)(6x-4) - (6x-4)(7x-3)$
$g(x) = (18x^2-12x-6x+4) - (42x^2-18x-28x+12)$
$g(x) = 18x^2-12x-6x+4-42x^2+18x+28x-12$

$\boxed{g(x) = -24x^2 + 28x - 8}$

2. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

$g(0) = -24 \times 0^2 + 28 \times 0 - 8 = -8$ donc $\boxed{g(0) = -8}$

$g(1) = -24 \times 1^2 + 28 \times 1 - 8 = -24 \times 1 + 28 - 8 = -24 + 20 = -4$ donc $\boxed{g(1) = -4}$

3. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (3x-1)(6x-4) - (6x-4)(7x-3)$
$g(x) = (6x-4)\left[(3x-1) - (7x-3)\right]$
$g(x) = (6x-4)(3x-1-7x+3)$
$\boxed{g(x) = (6x-4)(-4x+2)}$

4. Résoudre $(6x-4)(-4x+2) = 0$.

$$(6x-4)(-4x+2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 6x-4 &= 0 \\ 6x-4+4 &= 0+4 \\ 6x &= 4 \\ x &= \frac{4}{6} \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x+2 &= 0 \\ -4x+2-2 &= 0-2 \\ -4x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{-4} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{2}{3} \text{ et } 0,5}$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

$\boxed{\text{Les antécédents de } 0 \text{ par } g \text{ sont } \frac{2}{3} \text{ et } 0,5}$

Évaluation

Exercice n° 1 : *8 points*

Les informations suivantes concernent les salaires des hommes et des femmes d'une même entreprise.

Salaires des femmes
1 200 € ; 1 230 € ; 1 250 € ; 1 280 € ; 1 310 € ; 1 370 € ; 1 400 € ; 1 440 € ; 1 500 € ; 1 700 € ; 2 100 €

Salaires des hommes
Effectif total : 21
Moyenne : 1 769 €
Étendue : 2 400 €
Médiane : 2 000 €
Les salaires des hommes sont tous différents.

1. Comparer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.

2. Calculer l'étendue du salaire des femmes.

3. Calculer la médiane du salaire des femmes.

4. La plus bas salaire de l'entreprise est 1 000 €. Quel est le salaire le plus élevé ?

5. Dans cette entreprise, combien de personnes gagnent plus de 2 000 € ?

Exercice n° 2 : *6 points*

On pose $f(x) = (5x-1)(2x+1) - (4x+3)(2x+1)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Développer $(x-4)(2x+1)$.

Exercice n° 3 : *6 points*

0. Question de cours : Indiquez les développements de $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$.

On pose $g(x) = (6x-7)^2 - (5x+3)^2$ et $h(x) = (11x-4)(x-10)$.

1. Développer et réduire $g(x)$ et $h(x)$.
2. Factoriser $g(x)$.
3. Calculer $g(10)$.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Statistiques Correction

Statistiques

Exercice n° 2 : Développer et factoriser Correction

Développer et factoriser

Exercice n° 3 : Identités remarquables Correction

Développer et factoriser

Problème de brevet n° 1 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2018

1. Décomposer les nombres 162 et 108 en produit de facteurs premiers.

2. Déterminer deux diviseurs communs aux nombres 162 et 108 plus grand que 10.

Un cuisinier vend des barquettes composées de nems et de samossas. Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samossas. Chaque barquette doit avoir une répartition identique de nems et de samossas. Tous les nems et tous les samossas doivent être utilisés.

3.a. Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes ?

3.b. Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser ?

3.c. Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samossas dans chaque barquette ?

Problème de brevet n° 2 : Amérique du Sud — Novembre 2018

Voici deux programmes de calcul :

Programme de calcul n° 1
- Choisir un nombre ;
- Soustraire 5 ;
- Multiplier le tout par 4.

Programme de calcul n° 2
- Choisir un nombre ;
- Multiplier par 6 ;
- Soustraire 20 ;
- Soustraire le double du nombre de départ.

1.a. Quel résultat obtient-on quand on applique le **Programme n° 1** au nombre 3.
1.b. Quel résultat obtient-on quand on applique le **Programme n° 2** au nombre 3.

2. Démontrer qu'en choisissant -2, les deux programmes donnent le même résultat.

3. On décide de réaliser davantage d'essais. On utilise un tableur et on obtient les résultats suivants :

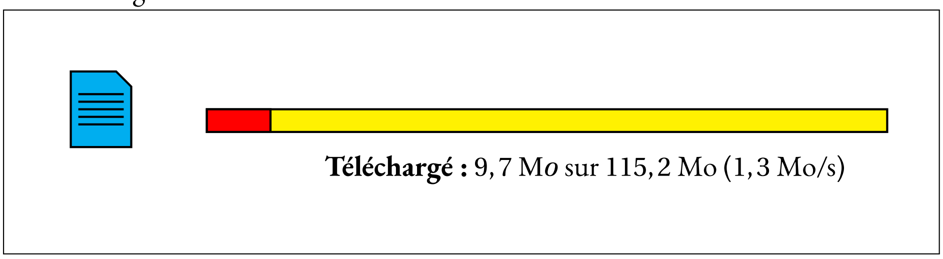
	A	B	C
1	Nombre choisi	Programme 1	Programme 2
2	0	-20	-20
3	1	-16	-16
4	2	-12	-12
5	3	-8	-8

Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule B2 avant de la recopier vers le bas ?

4. Les résultats affichés dans les colonnes B et C sont égaux. Lucie pense que pour n'importe quel nombre choisi au départ, les deux programmes donnent toujours le même résultat.
Démontrer que Lucie a raison.

Problème de brevet n° 3 : Amérique du Nord — Juin 2018

On considère la fenêtre de téléchargement ci-dessous :



Si la vitesse de téléchargement reste constante, faudra-t-il plus d'une minute vingt-cinq secondes pour que le téléchargement se termine ?

Problème de brevet n° 4 : **Polynésie — Juin 2016**

M. Durand doit changer de voiture. Il choisit un modèle Prima qui existe en deux versions : essence ou diesel. Il dispose des informations suivantes :

Version essence

- Consommation moyenne : 6,2 L pour 100 km ;
- Type de moteur : essence ;
- Carburant : SP95 ;
- Prix d'achat : 21 550 €.

Version diesel

- Consommation moyenne : 5,2 L pour 100 km ;
- Type de moteur : diesel ;
- Carburant : gazole ;
- Prix d'achat : 23 950 €.

Estimation du prix des carburants par M. Durand

- Prix d'un litre de SP95 : 1,415 € ;
- Prix d'un litre de gazole : 1,224 €.

Durant les dernières années, M. Durand a parcouru en moyenne 22 300 km par an. Pour choisir entre les deux modèles, il décide de réaliser le tableau comparatif ci-dessous, établi pour 22 300 km parcourus en un an.

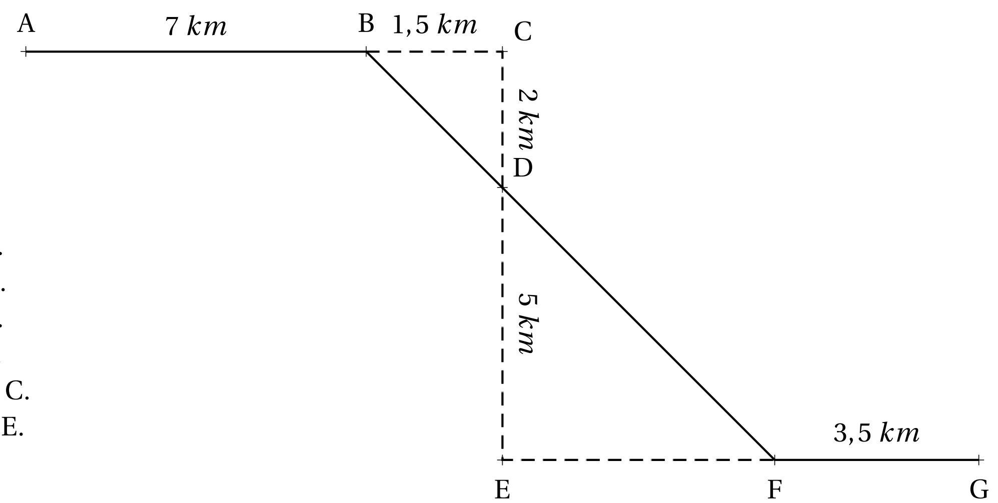
	Version essence	**Version diesel**
Consommation de carburant	1 383 L	
Budget de carburant	1 957 €	

1. Recopier et compléter le tableau en écrivant les calculs effectués.

2. M. Durand choisit finalement la version diesel. En considérant qu'il parcourt 22 300 km tous les ans et que le prix du carburant ne varie pas, dans combien d'années l'économie réalisée sur le carburant compensera-t-elle la différence de prix d'achat entre les deux versions ?

Problème de brevet n° 5 : **France — Septembre 2019**

Michel participe à un rallye VTT sur un parcours balisé.
Le trajet est représenté en traits pleins.
Le départ du rallye est en A et l'arrivée est en G.



Le dessin n'est pas à l'échelle.
Les points A, B et C sont alignés.
Les points C, D et E sont alignés.
Les points B, D et F sont alignés.
Les points E, F et G sont alignés.
Le triangle BCD est rectangle en C.
Le triangle DEF est rectangle en E.

1. Montrer que la longueur BD est égale à 2,5 km.
2. Justifier que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
3. Calculer la longueur DF.
4. Calculer la longueur totale du parcours.

Problème de brevet n° 6 : Amérique du Sud — Novembre 2019

1. Calculer $5x^2 - 3(2x+1)$ pour $x = 4$.

2. Montrer que, pour toute valeur de x, on a :

$$5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 6x - 3$$

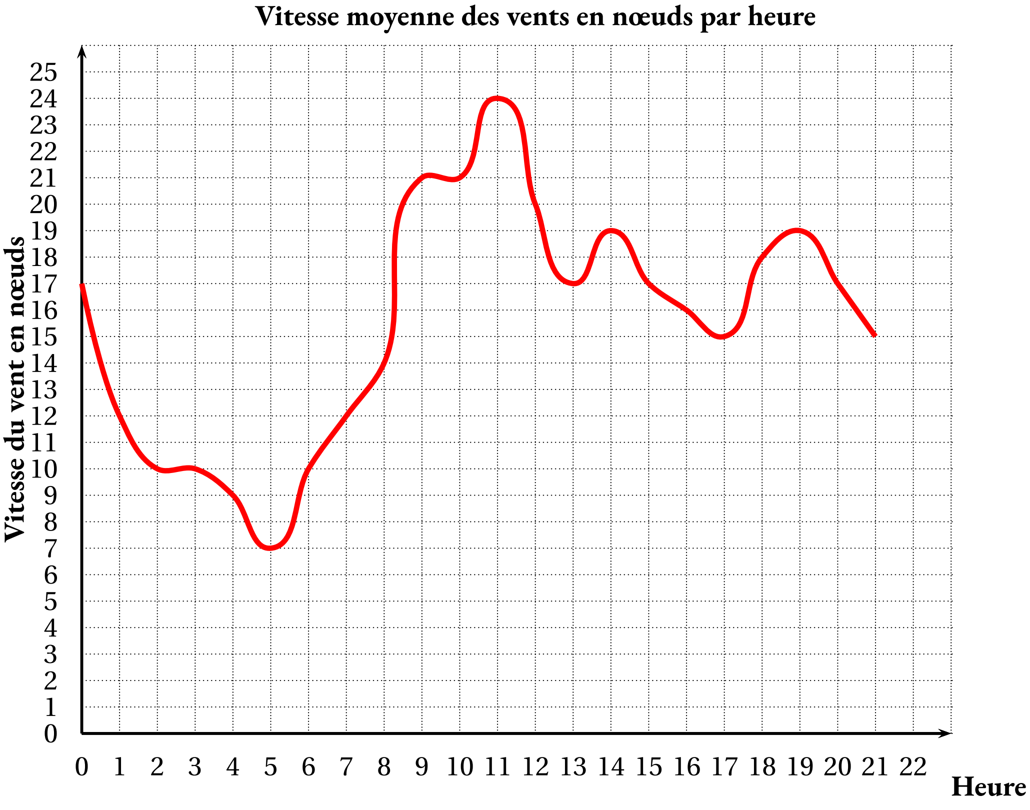
3. Trouver la valeur de x pour laquelle :

$$5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 4x + 1$$

Problème de brevet n° 7 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2019

Angelo va sur le site « météo NC »pour avoir une idée des meilleurs moments pour faire du cerf-volant avec ses enfants. Il obtient le graphique ci-dessous qui donne la prévision de la vitesse du vent, en nœuds, en fonction de l'heure de la journée.

Répondre aux questions par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.



1.a. Quelle est la vitesse du vent prévue à 14 h ?
1.b À quelles heures prévoit-on 12 nœuds de vent ?
1.c À quelle heure la vitesse du vent prévue est-elle la plus élevée ?
1.d À quelle heure la vitesse du vent prévue est-elle la plus faible ?
2. La pratique du cerf-volant est dangereuse au-dessus de 20 nœuds.
De quelle heure à quelle heure ne faut-il pas faire de cerf-volant ?
On répondra avec la précision permise par le graphique.

PROBLÈME DE BREVET N° 8 : **Amérique du Sud — Novembre 2019**

Une entreprise rembourse à ses employés le coût de leurs déplacements professionnels, quand les employés utilisent leur véhicule personnel.

Pour calculer le montant de ces remboursements, elle utilise la formule et d'équivalence ci-dessous proposés par le gestionnaire :

Document 1

Longueur d du trajet aller	Prix a	Prix b par kilomètre
De 1 km à 16 km	0,7781	0,1944
De 17 km à 32 km	0,2503	0,2165
De 33 km à 64 km	2,0706	0,1597
De 65 km à 109 km	2,8891	0,1489
De 110 km à 149 km	4,0864	0,1425
De 150 km à 199 km	8,0871	0,1193
De 200 km à 300 km	7,7577	0,1209
De 301 km à 499 km	13,6514	0,1030
De 500 km à 799 km	18,4449	0,0921
De 800 km à 9999 km	32,2041	0,0755

Montant du remboursement

Formule : $a + b \times d$

- a est un prix en euros qui ne dépend que de la longueur du trajet ;
- b est le prix en euros payé par kilomètre parcouru ;
- d est la longueur en kilomètres du trajet aller.

1. Pour un trajet aller de 30 km, vérifier que le montant du remboursement est environ $6,75$ € .

2. Dans le cadre de son travail, un employé de cette entreprise effectue un déplacement à Paris.
Il choisit de prendre sa voiture et il trouve les informations ci-dessous sur un site internet.

Document 2

- Distance Nantes - Paris : 386 km ;
- Coût du péage entre Nantes et Paris : 37 € ;
- Consommation moyenne de la voiture de l'employé : $6,2$ litres d'essence aux 100 km ;
- Prix du litre d'essence : $1,52$ € .

À l'aide des **Documents 1 et 2**, répondre à la question suivante :

Le montant du remboursement sera-t-il suffisant pour couvrir les dépenses de cet employé pour effectuer le trajet aller de Nantes à Paris ?

Problème de brevet n° 9 : France — Juin 2021

Cette feuille de calcul présente les températures moyennes mensuelles à Tours en 2019.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	Moyenne annuelle
2	Température	4,4	7,8	9,6	11,2	13,4	19,4	22,6	20,5	17,9	14,4	8,2	7,8	

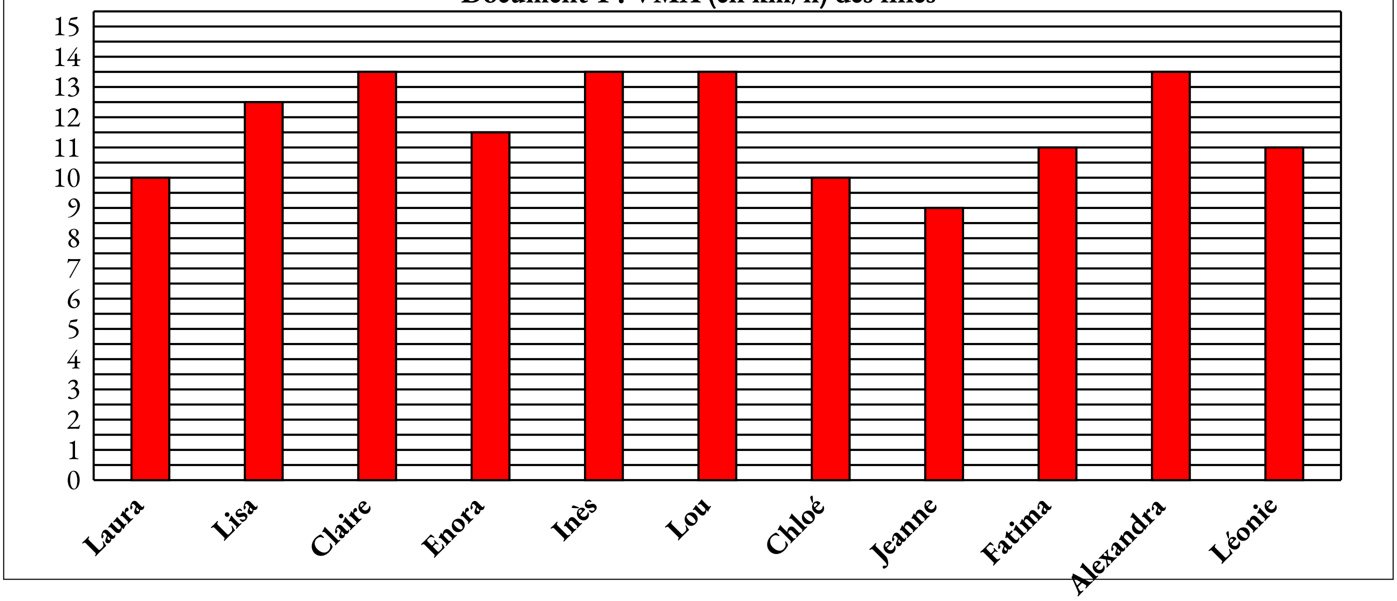
1. D'après le tableau ci-dessus, quelle a été la température moyenne à Tours en novembre 2019 ?
2. Déterminer l'étendue de cette série.
3. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule N2 pour calculer la température moyenne annuelle ?
4. Vérifier que la température moyenne annuelle est $13,1$ °C.
5. La température moyenne annuelle à Tours en 2009 était de $11,9$ °C.
Le pourcentage d'augmentation entre 2009 et 2019, arrondi à l'unité, est-il : 7 %, 10 % ou 13 % ? Justifier la réponse.

Problème de brevet n° 10 : Asie — Juin 2021

En cours d'éducation physique et sportive (EPS), les 24 élèves d'une classe de troisième pratiquent la course de fond. Les élèves réalisent le test de demi-Cooper : ils doivent parcourir la plus grande distance possible en six minutes. Chaque élève calcule ensuite sa vitesse moyenne sur cette course. Le résultat obtenu est appelé VMA (Vitesse Maximale Aérobie).

1. Après son échauffement, Chloé effectue ce test de demi-Cooper. Elle parcourt 1 000 m en 6 minutes.
Montrer que sa VMA est égale à 10 km/h.
2. L'enseignante a récolté les résultats et a obtenu les Documents 1 et 2 ci-dessous :

Document 1 : VMA (en km/h) des filles



Document 2 : VMA (en km/h) des garçons

Nathan : 12	Lucas : 11	Jules 14	Abdel : 13,5	Nicolas : 14
Thomas : 14,5	Martin : 11	Youssef : 14	Mathis : 13	Léo : 15
Simon : 12	José : 14	Ilan : 14		

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On rappelle que *toutes les réponses doivent être justifiées.*

2.a. Affirmation n° 1 : l'étendue de la série statistique des VMA des filles de la classe est plus élevée que celle de la série statistique de VMA des garçons de la classe.

2.b. Affirmation n° 2 : plus de 25 % des ékèves de la classe a une VMA inférieure ou égale à 11,5 km/h.

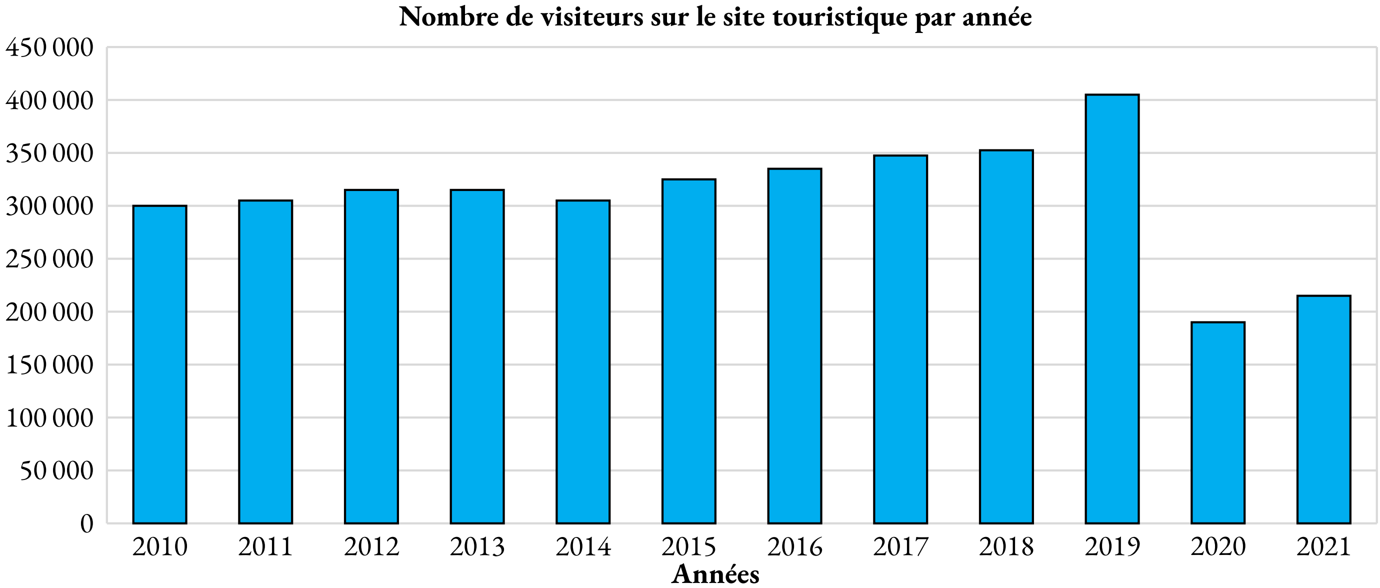
2.c. L'enseignante souhaite que la moitié de la classe participe à une compétetion. Elle selectionne donc les douze élèves dont la VMA est la plus élevée.
Affirmation n° 3 : Lisa participe à la compétition.

Problème de brevet n° II : Amérique du Nord — Avril 2023

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Évolution du nombre de visiteurs sur un site touristique.

1. Le diagramme ci-dessous représente le nombre de visiteurs par an de 2010 à 2021 sur ce site.



1.a. Quel a été le nombre de visiteurs en 2010 ? *Aucune justification n'est attendue.*

1.b. En quelle année le nombre de visiteurs a-t-il été le plus élevé ? *Aucune justification n'est attendue.*

2. Le tableau ci-dessous indique le nombre de visiteurs sur le site touristique de cette ville en 2020 et 2021 :

Année	2020	2021
Nombres de visiteurs	187 216	219 042

Le maire de cette ville avait pour objectif que le nombre de visiteurs progresse d'au moins 15 % entre 2020 et 2021. L'objectif a-t-il été atteint ?

Partie B : Étude des prix des hôtels de cette ville.

Sur une période donnée, on relève les prix facturés pour une nuit par les hôtels de cette ville.

Prix facturés pour une nuit	60 €	80 €	85 €	90 €	110 €	120 €	350 €	500 €
Effectif	1200	1350	1000	1100	1200	1300	900	300

3. Déterminer l'étendue des prix facturés.

4. Quelle est la moyenne des prix facturés pour une nuit ? Arrondir à l'euro près.

5. L'association des hôteliers de cette ville cherche à attirer des touristes et annonce :
« Dans les hôtels de notre ville, au moins la moitié des nuits est facturée à moins de 100 €. »
Est-ce vrai ?

Problème de brevet n° 1 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2018

1. Décomposer les nombres 162 et 108 en produit de facteurs premiers.

2. Déterminer deux diviseurs communs aux nombres 162 et 108 plus grand que 10.

Un cuisinier vend des barquettes composées de nems et de samossas. Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samossas. Chaque barquette doit avoir une répartition identique de nems et de samossas. Tous les nems et tous les samossas doivent être utilisés.

3.a. Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes ?

3.b. Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser ?

3.c. Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samossas dans chaque barquette ?

Exercice n° 1 — Correction

1.

162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\boxed{162 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^4}$

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$\boxed{108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3}$

2. *Il faut observer les deux décompositions et trouver des facteurs communs pour construire les diviseurs communs !*

$2 \times 3 \times 3 = 18$ est un diviseur commun. On a bien $162 = 18 \times 9$ et $108 = 18 \times 6$.

$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ est un autre diviseur commun. On a $162 = 54 \times 3$ et $108 = 54 \times 2$

$\boxed{\text{18 et 54 sont deux diviseurs communs supérieurs à 10}}$

3.a. On a $108 = 36 \times 3$ mais $162 = 36 \times 4 + 18$.

$\boxed{\text{Il ne peut pas réaliser 36 barquettes car il resterait des nems.}}$

3.b. Il faut déterminer le plus grand diviseur commun à 108 et 162.
En observant les décompositions en facteurs premiers on constate que ce diviseur est $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$.

$\boxed{\text{Il pourra faire au maximum 54 barquettes.}}$

3.c. Comme $162 = 54 \times 3$ et que $108 = 54 \times 2$ on en déduit que

$\boxed{\text{le cuisinier pourra faire 54 barquettes contenant chacune 3 nems et 2 samossas.}}$

Problème de brevet n° 2 : **Amérique du Sud — Novembre 2018**

Voici deux programmes de calcul :

Programme de calcul n° 1	**Programme de calcul n° 2**
— Choisir un nombre ;	— Choisir un nombre ;
— Soustraire 5 ;	— Multiplier par 6 ;
— Multiplier le tout par 4.	— Soustraire 20 ;
	— Soustraire le double du nombre de départ.

1.a. Quel résultat obtient-on quand on applique le **Programme n° 1** au nombre 3.
1.b. Quel résultat obtient-on quand on applique le **Programme n° 2** au nombre 3.

2. Démontrer qu'en choisissant -2, les deux programmes donnent le même résultat.

3. On décide de réaliser davantage d'essais. On utilise un tableur et on obtient les résultats suivants :

	A	B	C
1	Nombre choisi	Programme 1	Programme 2
2	0	-20	-20
3	1	-16	-16
4	2	-12	-12
5	3	-8	-8

Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule B2 avant de la recopier vers le bas ?

4. Les résultats affichés dans les colonnes B et C sont égaux. Lucie pense que pour n'importe quel nombre choisi au départ, les deux programmes donnent toujours le même résultat.
Démontrer que Lucie a raison.

Exercice n° 2 — Correction

1.a. Avec le **Programme n° 1** en partant de 3 on obtient successivement :
3 puis $3-5=-2$ et enfin $-2\times 4=-8$.

$\boxed{\text{On obtient } -8}$

1.b. Avec le **Programme n° 2** en partant de 3 on obtient successivement :
3 puis $3\times 6=18$, $18-20=-2$ et enfin $-2-2\times 3=-2-6=-8$.

$\boxed{\text{On obtient } -8}$

2. Avec le **Programme n° 1** en partant de -2 on obtient successivement :
-2 puis $-2-5=-7$ et enfin $-7\times 4=-28$
Avec le **Programme n° 2** en partant de -2 on obtient successivement :
-2 puis $-2\times 6=-12$, $-12-20=-32$ et enfin $-20-2\times 2=-20-8=-28$.

$\boxed{\text{On obtient } -28 \text{ avec les deux programmes en partant de } -2}$

3. $\boxed{\text{On a saisi} = (\text{A2}-5)*4}$

4. *Il faut modéliser sous forme d'une expression chacun des deux programmes puis comparer les expressions.*

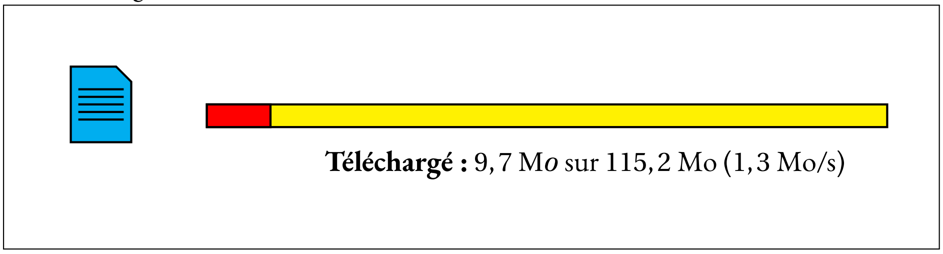
Notons x le nombre de départ.
Avec le **Programme n° 1** on obtient successivement : x puis $x-5$ et enfin $4(x-5)$
Avec le **Programme n° 2** on obtient successivement : x puis $6x$, $6x-20$ et enfin $6x-20-2x$

On développe : $4(x-5)=4x-20$.
On réduit : $6x-20-2x=4x-20$.

$\boxed{\text{Les deux programmes sont donc équivalents.}}$

Problème de brevet n° 3 : Amérique du Nord — Juin 2018

On considère la fenêtre de téléchargement ci-dessous :



Si la vitesse de téléchargement reste constante, faudra-t-il plus d'une minute vingt-cinq secondes pour que le téléchargement se termine ?

Exercice n° 3 — Correction

$9,7$ Mo ont été téléchargés sur $115,2$ Mo. Il reste donc $115,2\ Mo - 9,7\ Mo = 105,5\ Mo$.

La vitesse de téléchargement est de $1,3\ Mo/s$ soit $1,3\ Mo$ en une seconde.

$105,5\ Mo \div 1,3\ Mo \approx 81$. Il reste donc environ $81\ s$ de téléchargement.

Or $81\ s = 1 \times 60\ s + 21\ s$, il reste donc $1\ min\ 21\ s$ de téléchargement.

$\boxed{\text{Non, il reste moins d'une minute vingt-cinq secondes de téléchargement.}}$

Problème de brevet nº 4 : Polynésie — Juin 2016

M. Durand doit changer de voiture. Il choisit un modèle Prima qui existe en deux versions : essence ou diesel. Il dispose des informations suivantes :

Version essence

- Consommation moyenne : 6,2 L pour 100 km;
- Type de moteur : essence;
- Carburant : SP95;
- Prix d'achat : 21 550 €.

Version diesel

- Consommation moyenne : 5,2 L pour 100 km;
- Type de moteur : diesel;
- Carburant : gazole;
- Prix d'achat : 23 950 €.

Estimation du prix des carburants par M. Durand

- Prix d'un litre de SP95 : 1,415 €;
- Prix d'un litre de gazole : 1,224 €.

Durant les dernières années, M. Durand a parcouru en moyenne 22 300 km par an. Pour choisir entre les deux modèles, il décide de réaliser le tableau comparatif ci-dessous, établi pour 22 300 km parcourus en un an.

	Version essence	Version diesel
Consommation de carburant	1 383 L	
Budget de carburant	1 957 €	

1. Recopier et compléter le tableau en écrivant les calculs effectués.

2. M. Durand choisit finalement la version diesel. En considérant qu'il parcourt 22 300 km tous les ans et que le prix du carburant ne varie pas, dans combien d'années l'économie réalisée sur le carburant compensera-t-elle la différence de prix d'achat entre les deux versions ?

Exercice nº 4 — Correction

1.

	Version essence	Version diesel
Consommation de carburant	1 383 L	1 159,6 L
Budget de carburant	1 957 €	1 419,35 €

Le véhicule diesel consomme 5,2 L pour 100 km. M. Durand parcourt 22 300 km.

22 300 $km \div 100\ km = 223$ donc 5,2 L × 223 = 1 159,6 L.

Un litre de gazole coûte environ 1,224 €. Donc 1 159,6 × 1,224 € ≈ 1 419,35 €.

2. La différence de prix entre les deux véhicules vaut : 23 950 € − 21 550 € = 2 400 €.

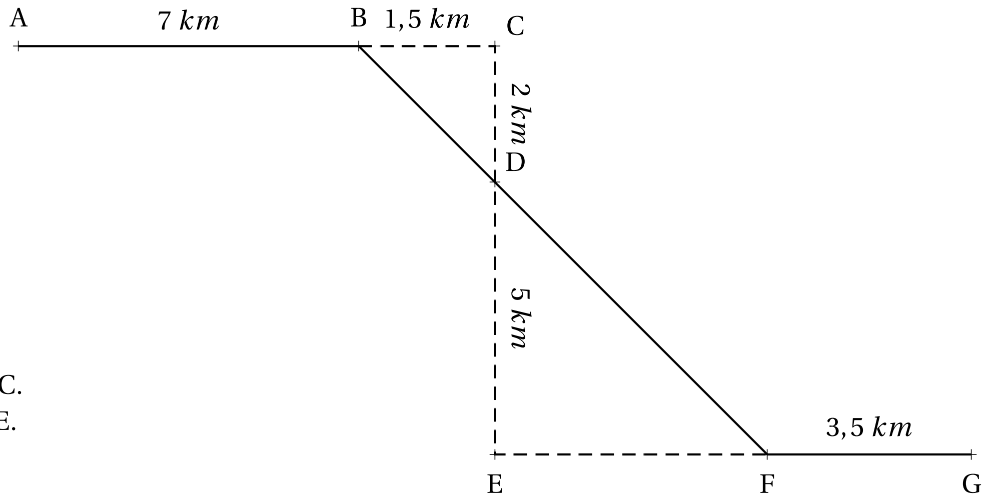
Chaque année la différence de prix sur le carburant vaut : 1 957 € − 1 419,35 € = 537,65 €.

Effectuons 2 400 € ÷ 537,65 € ≈ 4,46.

Il faudra 5 ans pour rentabiliser l'achat d'un véhicule diesel !

Problème de brevet n° 5 : France — Septembre 2019

Michel participe à un rallye VTT sur un parcours balisé.
Le trajet est représenté en traits pleins.
Le départ du rallye est en A et l'arrivée est en G.



Le dessin n'est pas à l'échelle.
Les points A, B et C sont alignés.
Les points C, D et E sont alignés.
Les points B, D et F sont alignés.
Les points E, F et G sont alignés.
Le triangle BCD est rectangle en C.
Le triangle DEF est rectangle en E.

1. Montrer que la longueur BD est égale à $2,5\ km$.
2. Justifier que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
3. Calculer la longueur DF.
4. Calculer la longueur totale du parcours.

Exercice n° 5 — Correction

1.
Dans le triangle BCD rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{CB}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BD}^2$$
$$1,5^2 + 2^2 = \mathrm{BD}^2$$
$$2,25 + 4 = \mathrm{BD}^2$$
$$\mathrm{BD}^2 = 6,25$$
$$\mathrm{BD} = \sqrt{6,25}$$
$$\mathrm{BD} = 2,5$$

La longueur BD est égale à $2,5\ km$.

2. Le triangle BCD est rectangle en C donc (BC) est perpendiculaire à (CD).
Le triangle DEF est rectangle en E donc (EF) est perpendiculaire à (ED).

Comme les points C, D et E sont alignés, les droites (CD) et (ED) sont identiques.

Or on sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors les droites sont parallèles.**

Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

3.
Les droites (BF) et (CE) sont sécantes en D, les droites (BC) et (EF) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CE}}$$

$$\frac{2,5\ km}{\mathrm{DF}} = \frac{2\ km}{5\ km} = \frac{1,5\ km}{\mathrm{EF}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$DF = \dfrac{5\ km \times 2,5\ km}{2\ km}$ d'où $DF = \dfrac{12,5\ km^2}{2\ km}$ et $DF = 6,25\ km$

$\boxed{\text{La longueur DF mesure } 6,25\ km.}$

4. $\boxed{\text{La longueur du parcours est : } 7\ km + 2,5\ km + 6,25\ km + 3,5\ km = 19,25\ km.}$

5. On se demande combien de temps est nécessaire pour parcourir $7\ km$ à $16\ km/h$.
On sait qu'à vitesse constante, la distance et le temps sont proportionnels.

Distance	$16\ km$	$7\ km$
Temps	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$	$\dfrac{3600\ s \times 7\ km}{16\ km} = 1575\ s$

On peut effectuer une division euclidienne : $1575\ s = 26 \times 60\ s + 15\ s$.

$\boxed{\text{Il mettra } 26\ min\ 15\ s \text{ pour aller du point A au point B.}}$

PROBLÈME DE BREVET N° 6 : Amérique du Sud — Novembre 2019

1. Calculer $5x^2 - 3(2x+1)$ pour $x = 4$.

2. Montrer que, pour toute valeur de x, on a :

$$5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 6x - 3$$

3. Trouver la valeur de x pour laquelle :

$$5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 4x + 1$$

EXERCICE N° 6 — **CORRECTION**

1. Pour $x = 4$,
$A = 5x^2 - 3(2x+1) = 5 \times 4^2 - 3(2 \times 4 + 1)$
$A = 5 \times 16 - 3(8+1)$
$A = 80 - 3 \times 9$
$A = 80 - 27 = 53$

$\boxed{\text{Pour } x = 4\text{, l'expression donne } 53.}$

2. Pour tout x on a :
$A = 5x^2 - 3(2x+1)$
$A = 5x^2 - 6x - 3$

$\boxed{\text{On a bien le résultat attendu.}}$

3. Résolvons :

$$\begin{aligned}
5x^2 - 3(2x+1) &= 5x^2 - 4x + 1 \\
5x^2 - 6x - 3 &= 5x^2 - 4x + 1 \\
5x^2 - 6x - 3 - 5x^2 &= 5x^2 - 4x + 1 - 5x^2 \\
-6x - 3 &= -4x + 1 \\
-6x - 3 + 4x &= -4x + 1 + 4x \\
-2x - 3 &= 1 \\
-2x - 3 + 3 &= 1 + 3 \\
-2x &= 4 \\
x &= \frac{4}{-2} \\
x &= -2
\end{aligned}$$

$\boxed{x = -2 \text{ est la solution de cette équation.}}$

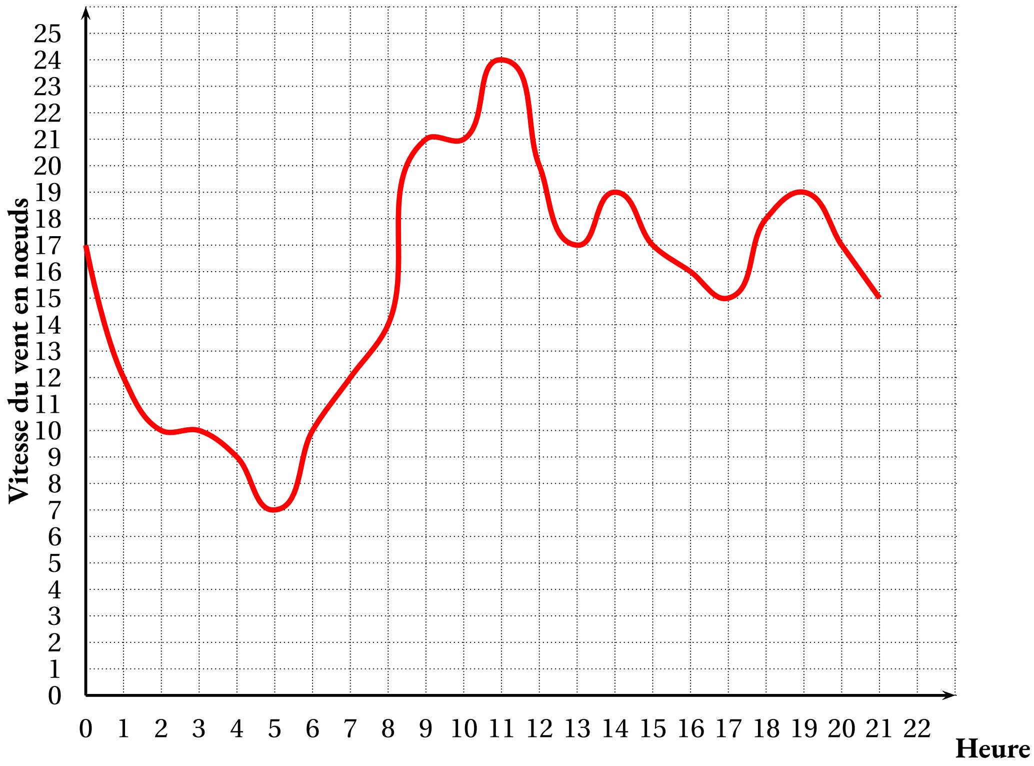
Cette équation est assez difficile à résoudre. Il s'agit d'une équation de degré 2 dont les termes en x^2 se simplifient. Ce n'est pas une équation que l'on résoud habituellement en troisième...

Problème de brevet n° 7 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2019

Angelo va sur le site « météo NC »pour avoir une idée des meilleurs moments pour faire du cerf-volant avec ses enfants. Il obtient le graphique ci-dessous qui donne la prévision de la vitesse du vent, en nœuds, en fonction de l'heure de la journée.

Répondre aux questions par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

Vitesse moyenne des vents en nœuds par heure



1.a. Quelle est la vitesse du vent prévue à 14 h ?

1.b À quelles heures prévoit-on 12 nœuds de vent ?

1.c À quelle heure la vitesse du vent prévue est-elle la plus élevée ?

1.d À quelle heure la vitesse du vent prévue est-elle la plus faible ?

2. La pratique du cerf-volant est dangereuse au-dessus de 20 nœuds.

De quelle heure à quelle heure ne faut-il pas faire de cerf-volant ?

On répondra avec la précision permise par le graphique.

Exercice n° 7 **Correction**

1.a. $\boxed{\text{À 14 h il est prévu 19 nœuds de vent.}}$

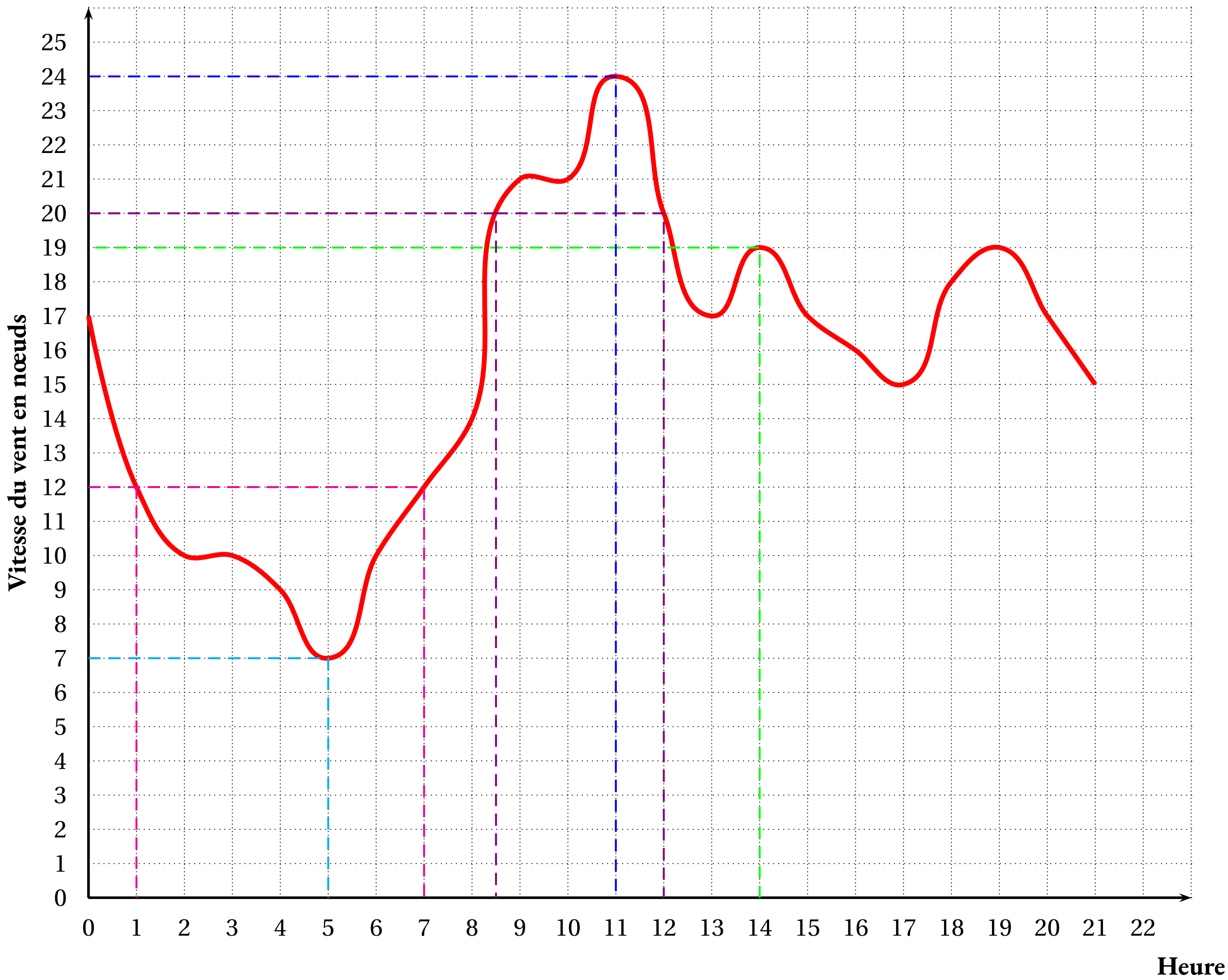
1.b $\boxed{\text{Il est prévu 12 nœuds de vent à 1 h et 7 h.}}$

1.c $\boxed{\text{À 11 h la vitesse du vent est la plus élevée, 24 nœuds.}}$

1.d $\boxed{\text{À 5 h la vitesse du vent est la plus faible, 7 nœuds.}}$

2. $\boxed{\text{La vitesse du vent est supérieure à 20 nœuds entre 8,5 h et 12 h.}}$

Vitesse moyenne des vents en nœuds par heure



Problème de brevet n° 8 :

Une entreprise rembourse à ses employés le coût de leurs déplacements professionnels, quand les employés utilisent leur véhicule personnel.

Pour calculer le montant de ces remboursements, elle utilise la formule et d'équivalence ci-dessous proposés par le gestionnaire :

Document 1

Longueur d du trajet aller	Prix a	Prix b par kilomètre
De 1 km à 16 km	0,7781	0,1944
De 17 km à 32 km	0,2503	0,2165
De 33 km à 64 km	2,0706	0,1597
De 65 km à 109 km	2,8891	0,1489
De 110 km à 149 km	4,0864	0,1425
De 150 km à 199 km	8,0871	0,1193
De 200 km à 300 km	7,7577	0,1209
De 301 km à 499 km	13,6514	0,1030
De 500 km à 799 km	18,4449	0,0921
De 800 km à 9999 km	32,2041	0,0755

Montant du remboursement

Formule : $a + b \times d$

— a est un prix en euros qui ne dépend que de la longueur du trajet ;

— b est le prix en euros payé par kilomètre parcouru ;

— d est la longueur en kilomètres du trajet aller.

1. Pour un trajet aller de 30 km, vérifier que le montant du remboursement est environ $6,75$ € .

2. Dans le cadre de son travail, un employé de cette entreprise effectue un déplacement à Paris.
Il choisit de prendre sa voiture et il trouve les informations ci-dessous sur un site internet.

Document 2

— Distance Nantes - Paris : 386 km ;

— Coût du péage entre Nantes et Paris : 37 € ;

— Consommation moyenne de la voiture de l'employé : $6,2$ litres d'essence aux 100 km ;

— Prix du litre d'essence : $1,52$ € .

À l'aide des **Documents 1 et 2**, répondre à la question suivante :

Le montant du remboursement sera-t-il suffisant pour couvrir les dépenses de cet employé pour effectuer le trajet aller de Nantes à Paris ?

Exercice n° 8 — Correction

1. Pour un trajet de 30 km d'après le tableau, dans la ligne « De 17 km à 32 km »on constate que $a = 0{,}2503$ et $b = 0{,}2165$.

Pour $d = 30$ km, la formule $a + b \times d$ donne : $0{,}2503$ € $+0{,}2165$ € $\times 30 = 6{,}7453$ € .

$\boxed{\text{Pour une distance de 30 } km \text{ le remboursement est d'environ } 6{,}75 \text{ € .}}$

2. Calcul du coût du trajet pour l'employé :

Il y a 386 km a parcourir. Son véhicule consomme 6, 2 L pour 100 km. Or 386 $km = 3{,}86 \times 100$ km.
Il va donc consommer $3{,}86 \times 6{,}2$ L $= 23{,}932$ L.

Une autre méthode consiste à utiliser la proportionnalité du volume d'essence et de la distance :

Volume d'essence	6, 2 L	$\dfrac{386\ km \times 6{,}2\ \text{L}}{100\ km} = \dfrac{2\,393{,}2}{100} = 23{,}932$
Distance	100 km	386 km

Le prix du litre d'essence est 1, 52 € . Cela va donc lui coûter : $23{,}932 \times 1{,}52$ € $\approx 36{,}38$ € .

Il faut ajouter le prix du pégage : $36{,}38$ € $+37$ € $= 73{,}38$ € .

$\boxed{\text{Ce trajet va coûter 73, 38 € à l'employé.}}$

Calcul du remboursement :

La distance parcourue est 386 km. Dans le tableau à la ligne « De 301 km à 499 km »on lit $a = 13{,}6514$ et $b = 0{,}1030$.

La formule donne pour $d = 386$ km : $13{,}6514$ € $+0{,}1030$ € $\times 386 = 53{,}4094$ € .

$\boxed{\text{Le remboursement pour cet employé est d'environ 53, 40 € .}}$

On peut calculer $73{,}38$ € $-53{,}40$ € $= 19{,}98$ € .

$\boxed{\text{Le remboursement n'est pas suffisant, il manque environ 20 € .}}$

Problème de brevet n° 9 : France — Juin 2021

Cette feuille de calcul présente les températures moyennes mensuelles à Tours en 2019.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	Moyenne annuelle
2	Température	4,4	7,8	9,6	11,2	13,4	19,4	22,6	20,5	17,9	14,4	8,2	7,8	

1. D'après le tableau ci-dessus, quelle a été la température moyenne à Tours en novembre 2019 ?

2. Déterminer l'étendue de cette série.

3. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule N2 pour calculer la température moyenne annuelle ?

4. Vérifier que la température moyenne annuelle est $13,1$°C.

5. La température moyenne annuelle à Tours en 2009 était de $11,9$°C.
Le pourcentage d'augmentation entre 2009 et 2019, arrondi à l'unité, est-il : 7 %, 10 % ou 13 % ?
Justifier la réponse.

Exercice n° 9 — Correction

1. $\boxed{\text{La température moyenne à Tours en novembre 2019 était de } 8,2\text{°C.}}$

2. La température moyenne minimale est en janvier, elle vaut $4,4$°C.
La température moyenne maximale est en juillet, elle vaut $22,6$°C.

$\boxed{\text{L'étendue de cette série statistique vaut } 22,6\text{°C} - 4,4\text{°C} = 18,2\text{°C.}}$

3. $\boxed{\text{Il faut saisir en N2 la formule : } = (B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2+K2+L2+M2)/12.}$

On pouvait aussi saisir = SOMME(B2 : M2)/12.

4. Calculons $\dfrac{4,4\text{°C}+7,8\text{°C}+9,6\text{°C}+11,2\text{°C}+13,4\text{°C}+19,4\text{°C}+22,6\text{°C}+20,5\text{°C}+17,9\text{°C}+8,2\text{°C}+7,8}{12} = \dfrac{157,2\text{°C}}{12} = 13,1\text{°C}.$

$\boxed{\text{La moyenne annuelle vaut bien } 13,1\text{°C.}}$

5. En 2009 la température moyenne annuelle valait $11,9$°C. Elle vaut $13,1$°C en 2019.
Nous cherchons le coefficient d'augmentation k tel que $11,9\text{°C} \times k = 13,1\text{°C}$.

$k = \dfrac{13,1\text{°C}}{11,9\text{°C}} \approx 1,10.$

Comme $1,10 = 1 + 0,10 = 1 + \dfrac{10}{100}$, $\boxed{\text{cela représente une augmentation de 10 \%.}}$

On pouvait bien sûr tester chacun des cas.
On pouvait aussi calculer l'écart de température : $13,1°C - 11,9°C = 1,2°C$ *puis calculer* $\dfrac{1,2°C}{11,9°C} \approx 0,10 = \dfrac{10}{100}$.

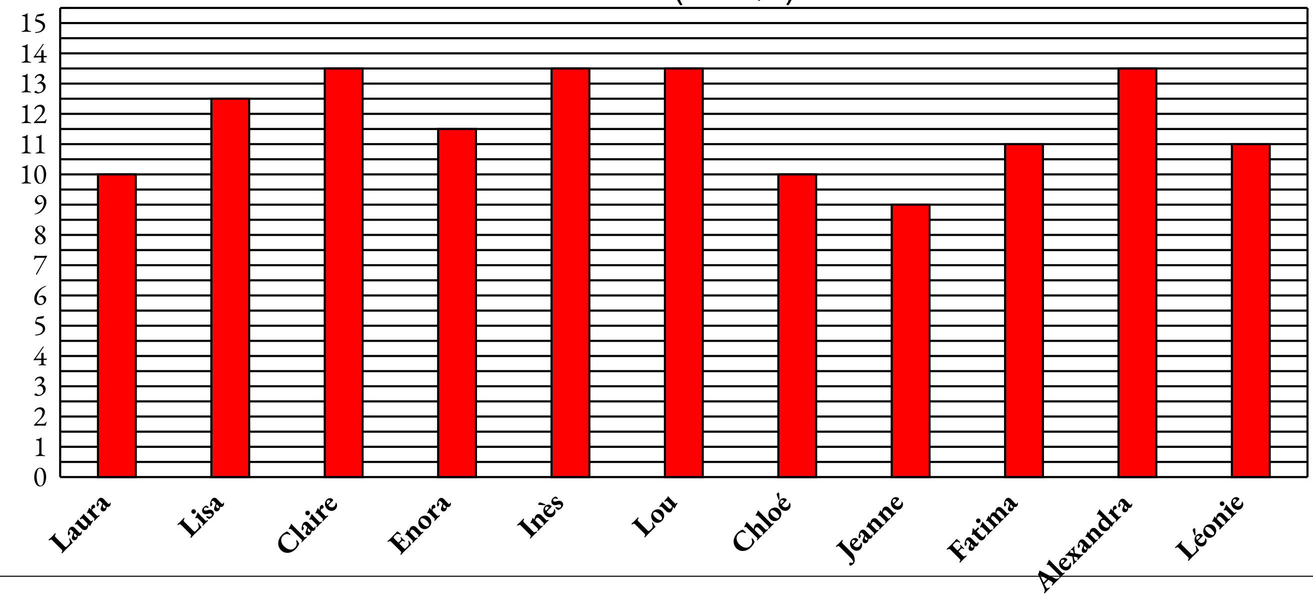
PROBLÈME DE BREVET N° 10 : **Asie — Juin 2021**

En cours d'éducation physique et sportive (EPS), les 24 élèves d'une classe de troisième pratiquent la course de fond. Les élèves réalisent le test de demi-Cooper : ils doivent parcourir la plus grande distance possible en six minutes. Chaque élève calcule ensuite sa vitesse moyenne sur cette course. Le résultat obtenu est appelé VMA (Vitesse Maximale Aérobie).

1. Après son échauffement, Chloé effectue ce test de demi-Cooper. Elle parcourt $1\,000\,\text{m}$ en 6 minutes.
Montrer que sa VMA est égale à $10\,\text{km/h}$.

2. L'enseignante a récolté les résultats et a obtenu les Documents 1 et 2 ci-dessous :

Document 1 : VMA (en km/h) des filles



Document 2 : VMA (en km/h) des garçons

Nathan : 12	Lucas : 11	Jules 14	Abdel : 13,5	Nicolas : 14
Thomas : 14,5	Martin : 11	Youssef : 14	Mathis : 13	Léo : 15
Simon : 12	José : 14	Ilan : 14		

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On rappelle que *toutes les réponses doivent être justifiées.*

2.a. Affirmation n° 1 : l'étendue de la série statistique des VMA des filles de la classe est plus élevée que celle de la série statistique de VMA des garçons de la classe.

2.b. Affirmation n° 2 : plus de 25 % des ékèves de la classe a une VMA inférieure ou égale à $11{,}5\,\text{km/h}$.

2.c. L'enseignante souhaite que la moitié de la classe participe à une compétetion. Elle selectionne donc les douze élèves dont la VMA est la plus élevée.
Affirmation n° 3 : Lisa participe à la compétition.

EXERCICE N° 10 — CORRECTION

1. On sait que dans le calcul d'une vitesse moyenne on considère que la distance et le temps sont proportionnels.

Distance	$1\,000\,\text{m}$	$\dfrac{60\,\text{min} \times 1\,000\,\text{m}}{6\,\text{min}} = 10\,000\,\text{m}$
Temps	$6\,\text{min}$	$1\,\text{h} = 60\,\text{min}$

On pouvait aussi remarquer que $6\,\text{min} \times 10 = 60\,\text{min}$, Chloé va donc parcourir une distance dix fois plus grande en un temps dix fois supérieur.

Elle parcourt $10\,000\,\text{m}$ en $1\,\text{h}$ ce qui correspond à une VMA de $10\,\text{km/h}$.

2.a. Affirmation n° 1

La VMA maximale des filles vaut $13{,}5\,\text{km/h}$. La VMA minimale $9\,\text{km/h}$. L'étendue pour les filles vaut $13{,}5\,\text{km/h} - 9\,\text{km/h} = 4{,}5\,\text{km/h}$.

La VMA maximale des garçons vaut 15 km/h. La VMA minimale 11 km/h. L'étendue pour les garçons vaut 15 km/h − 11 km/h = 4 km/h.

$\boxed{\textbf{Affirmation n}^{\text{o}}\textbf{ 1} : \text{Vraie}}$

2.b. Affirmation nº 2

Dans cette classe il y a 13 garçons et 11 filles. Chez les filles 5 ont une VMA inférieure à 11,5 km/h. Chez les garçons il y en a 2.
Il y a donc 7 élèves sur 24 qui ont une VMA inférieure à 11,5 km/h.

Or $\dfrac{7}{24} \approx 0,29$ soit 29 %.

$\boxed{\textbf{Affirmation n}^{\text{o}}\textbf{ 2} : \text{Vraie}}$

2.c. Affirmation nº 3

Lisa a une VMA de 12,5 km/h. Il y a 4 filles qui ont une VMA supérieure à la sienne et 8 garçons soit 12 élèves en tout. Elle a donc la treizième VMA.

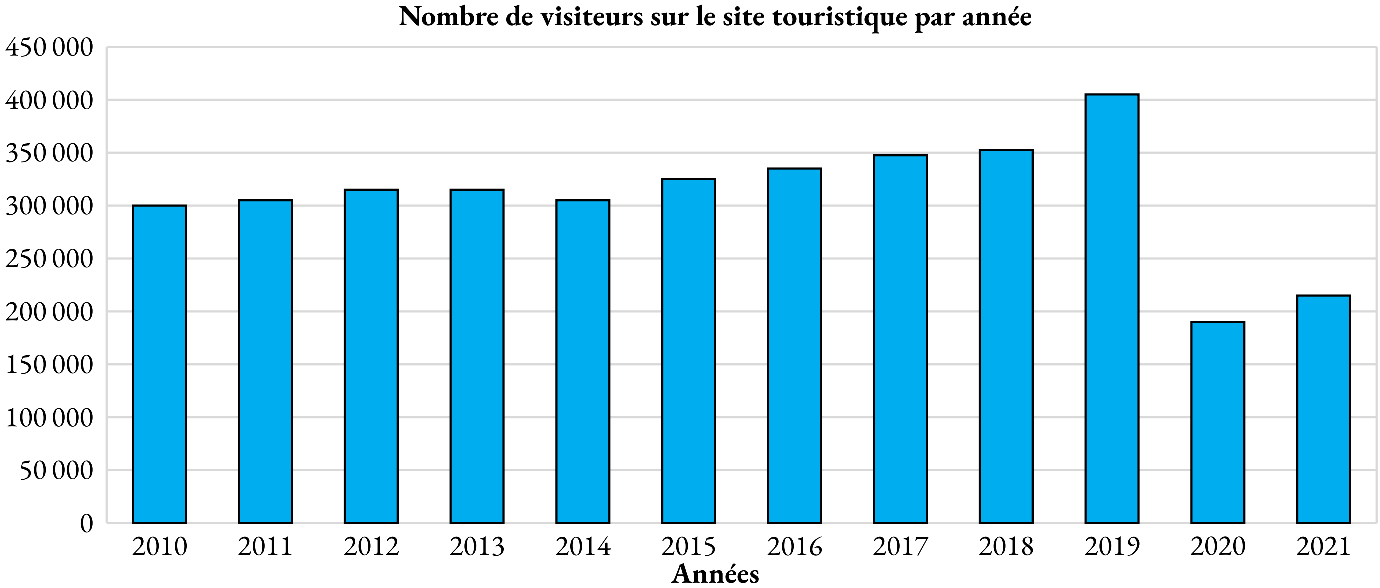
$\boxed{\textbf{Affirmation n}^{\text{o}}\textbf{ 3} : \text{Fausse}}$

Problème de brevet n° II : Amérique du Nord — Avril 2023

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Évolution du nombre de visiteurs sur un site touristique.

1. Le diagramme ci-dessous représente le nombre de visiteurs par an de 2010 à 2021 sur ce site.



1.a. Quel a été le nombre de visiteurs en 2010 ? *Aucune justification n'est attendue.*

1.b. En quelle année le nombre de visiteurs a-t-il été le plus élevé ? *Aucune justification n'est attendue.*

2. Le tableau ci-dessous indique le nombre de visiteurs sur le site touristique de cette ville en 2020 et 2021 :

Année	2020	2021
Nombres de visiteurs	187 216	219 042

Le maire de cette ville avait pour objectif que le nombre de visiteurs progresse d'au moins 15 % entre 2020 et 2021.
L'objectif a-t-il été atteint ?

Partie B : Étude des prix des hôtels de cette ville.

Sur une période donnée, on relève les prix facturés pour une nuit par les hôtels de cette ville.

Prix facturés pour une nuit	60 €	80 €	85 €	90 €	110 €	120 €	350 €	500 €
Effectif	1200	1350	1000	1100	1200	1300	900	300

3. Déterminer l'étendue des prix facturés.

4. Quelle est la moyenne des prix facturés pour une nuit ? Arrondir à l'euro près.

5. L'association des hôteliers de cette ville cherche à attirer des touristes et annonce :
« Dans les hôtels de notre ville, au moins la moitié des nuits est facturée à moins de 100 €. »
Est-ce vrai ?

Partie A

1.a. $\boxed{\text{En 2010, il y a environ 300 000 visiteurs.}}$

1.b. $\boxed{\text{C'est en 2019 que le maximum de visiteurs a été atteint avec 400 000 visiteurs.}}$

2. On peut utiliser plusieurs méthodes :

On sait qu'augmenter une grandeur de 15 % revient à multiplier cette grandeur par $1+\dfrac{15}{100}=1+0,15=1,15$.

On peut alors effectuer : $187\,216\times 1,15\approx 215298$.

L'objectif a bien été atteint !

On peut à l'inverse se demander quel est le coefficient d'agrandissement en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned}187\,216\times k &= 219\,042\\ k &= \frac{219\,042}{187\,216}\\ k &\approx 1,17\end{aligned}$$

Comme $1,17=1+0,17=1+\dfrac{17}{100}$, cela correspond à une augmentation d'environ 17 %.

Enfin, on pouvait effectuer $219\,042-187\,216=31\,826$ puis $\dfrac{31\,826}{187\,216}\approx 0,17$ soit 17 %.

Dans tous les cas, on peut dire que $\boxed{\text{l'objectif a été atteint.}}$

Partie B

3. La valeur maximale de cette série statistique est 500 €. La valeur minimale est 60 €.

$\boxed{\text{L'étendue de cette série statistique est 500 € − 60 € = 440 €.}}$

4. Il faut calculer la moyenne des prix pondérée par les effectifs :

$$\text{Moyenne}=\frac{1200\times 60\text{ €}+1350\times 80\text{ €}+1000\times 85\text{ €}+1100\times 90\text{ €}+1200\times 120\text{ €}+1300\times 120\text{ €}+900\times 350\text{ €}+300\times 500\text{ €}}{1200+1350+1000+1100+1200+1300+900+300}$$

$$\text{Moyenne}=\frac{1\,117\,000\text{ €}}{8350}\approx 133{,}77\text{ €}$$

$\boxed{\text{La moyenne des prix facturés est de 134 € à leuro près.}}$

5. On peut dresser la tableau des effectifs cumulés pour obtenir la médiane :

Prix facturés pour une nuit	60 €	80 €	85 €	90 €	110 €	120 €	350 €	500 €
Effectif	1200	1350	1000	1100	1200	1300	900	300
Effectif cumulé croissant	1200	2550	3550	4650	5850	7150	8050	8350

L'effectif total vaut 8350, comme $8350\div 2=4175$ on cherche dans quelle classe se trouve la 4175^{e} nuités.

La médiane de cette série statistiques est 90 €.

$\boxed{\text{L'affirmation des hotelliers est donc vraie. La moitié des nuitées sont facturées à moins de 90 €.}}$

On pouvait aussi aller un peu plus vite en calculant l'effectif total, 8350, en divisant par 2 pour obtenir 4175.
On cumule ensuite le tableau dans l'ordre croissant jusqu'à atteindre 4175.
Comme $1200+1350+1000=3550$ et que $1200+1350+1000+1100=4650$, on trouve que c'est pour le prix de 90 € que la valeur cherchée se trouve. Il s'agit évidement du même raisonnement que celui qui consiste à passer par le tableau des effectifs cumulés croissants.

Calcul littéral

La distributivité

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.
Plus précisement, si a, b et k sont des nombres alors

$$\underbrace{k\times(a+b)}_{\textit{Produit}} = \underbrace{k\times a + k\times b}_{\textit{Somme}}$$

$$\xrightarrow{\text{DÉVELOPPER}}$$

$$\xleftarrow{\text{FACTORISER}}$$

Réduire une expression :

Cela revient à effectuer les sommes des termes de même nature en factorisant.

$A = 3x - 2x^2 + 7 - 6x + 10x^2 + 9$

$A = x^2 \times (-2+10) + x \times (3-6) + 7 + 9$ (on n'écrit pas cette étape)

$\boxed{A = 8x^2 - 3x + 9}$

Exemples :

Développer et réduire :

$B = 3x(5x-1) - 3(-2x+5) - 5x^2$

$B = 15x^2 - 3x + 6x - 15 - 5x^2$

$\boxed{B = 10x^2 + 3x - 15}$

(somme de trois termes)

Factoriser :

$C = 15x + 10x^2$

$C = 5x \times 3 + 5x \times 2x$

$\boxed{C = 5x(3+2x)}$

(produit de deux facteurs)

La « double » distributivité

En utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition on peut développer des expressions plus complexes.
Si a, b, c, d sont des nombres alors

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

On a distribué deux fois : le a puis le b.
Cette formule n'est pas à apprendre... mais à comprendre !
On pourrait imaginer la « triple » ou la « quintuple » distributivité !

Développer et réduire des expressions complexes :

$D = (x-3)(2x-1) + (5x+3)(4x+1)$

$D = (2x^2 - x - 6x + 3) + (20x^2 + 5x + 12x + 3)$

$D = 2x^2 - 7x + 3 + 20x^2 + 17x + 3$

$\boxed{D = 22x^2 + 10x + 6}$

$E = (3x+7)(5x-2) - (3x+8)(1-2x)$

Le signe $-$ entre les deux produits !

$E = (15x^2 - 6x + 35x - 14) - (3x - 6x^2 + 8 - 16x)$

$E = 15x^2 + 29x - 14 - 3x + 6x^2 - 8 + 16x$

$\boxed{E = 21x^2 + 42x - 22}$

Factoriser des expressions complexes :

$F = (3x-7)(5x-1) - (3x-7)(2x+1)$

$F = (3x-7)\,[(5x-1) - (2x+1)]$

$F = (3x-7)(5x-1-2x-1)$

$\boxed{F = (3x-7)(3x-2)}$

$G = (6x-3)^2 + (6x-3)$

$G = (6x-3)(6x-3) + (6x-3) \times 1$

$G = (6x-3)\,[(6x-3)+1]$

$G = (6x-3)(6x-3+1)$

$\boxed{G = (6x-3)(6x-2)}$

Les identités remarquables

Si a et b sont des nombres alors

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}\right\}\textit{Hors programme}$$

Usage des identités remarquables :

Développer et réduire :

$H = (x+5)(x-5)$

$\boxed{H = x^2 - 25}$

$I = (6x+3)(6x-3)$

$\boxed{I = 36x^2 - 9}$

$J = (x+4)^2$

$\boxed{J = x^2 + 8x + 16}$

$K = (5x-3)^2$

$\boxed{K = 25x^2 - 30x + 9}$

Factoriser

$L = 25x^2 - 36$

$L = (5x)^2 - 6^2$

$\boxed{L = (5x+6)(5x-6)}$

$M = (3x-2)^2 - (7x+5)^2$

$M = [(3x-2)+(7x+5)]\,[(3x-2)-(7x+5)]$

$M = (3x-2+7x+5)(3x-2-7x-5)$

$\boxed{M = (10x+3)(-4x-7)}$

Chapitre VII

Proportionnalité et fonction linéaire

Sommaire

Finance : Intérêts, crédit et agios 296
I Augmentation et diminution en pourcentage 298
II La fonction linéaire 299
Exercices 302
Évaluation : Fonction linéaire, Scratch, calcul littéral 304
III Annexes 308
1 Exercices 308
Fiche de synthèse : Pourcentages et fonction linéaire 313
Fiche de synthèse : Ratio 314

Intérêts, crédit et agios

Troisième

Finance

Livret Jeune

Le Livret Jeune est un compte d'épargne défiscalisé réservé aux jeunes entre 12 et 25 ans. Les versements sur ce compte ne peuvent pas dépasser 1 600 € en dehors des intérêts. La banque LGL propose un compte rémunéré à 2 %.

1. Le 1er janvier de l'année de ses 12 ans, les parents de Mathéo ont placé 1 600 € sur un Livret Jeune de la LGL.
On note C_{12} le montant en euros sur son compte le premier janvier de l'année de ses 12 ans, ainsi $C_{12} = 1\,600$
Quels intérêts ont été ajoutés sur ce compte un an plus tard ?
Calculer C_{13} le montant en euros sur son compte le 1er janvier de l'année de ses 13 ans ?

2. Calculer C_{14} le montant en euros son compte le 1er janvier de l'année de ses 14 ans ?

3. Calculer C_{15} le montant en euros sur compte le 1er janvier de l'année de ses 15 ans ?

4. Calculer les quotients $\dfrac{C_{13}}{C_{12}}$, $\dfrac{C_{14}}{C_{13}}$ et $\dfrac{C_{15}}{C_{16}}$.

5. En déduire C_{18} le montant en euros sur son compte pour sa majorité ?

6. En déduire C_{25} le montant en euros son compte l'année de ses 25 ans ?

Le découvert autorisé

Ma conseillère financier m'a accordé un découvert autorisé de 1 500 €. Le montant des agios est fixé à 15 % annuel, cela signifie que 100 € de découvert pendant une année de 365 jours coûte 15 €. Le montant des agios est proportionnel aux nombres de jours de découvert.

1. Le mois dernier j'ai eu 450 € de découvert pendant 12 jours. Combien cela va-t-il me coûter ?

2. La durée maximale d'un découvert autorisé est de 30 jours. Combien coûte un découvert de 1 500 € pendant 30 jours ?

3. J'ai l'habitude d'être à découvert les cinq derniers jours du mois pour un montant en moyenne de 200 €.
Combien me coûte chaque année cette mauvaise habitude ?

Le crédit bancaire

Je souhaite acquérir une moto. Elle coûte 15 000 €. Ma banque me propose un crédit à la consommation au TAEG de 5 % sur 5 ans. On me propose un crédit à amortissement constant. Cela signifie que tous les mois je rembourse le même montant de la somme empruntée auquel la banque ajoute les intérêts d'emprunt.

1. Sans tenir compte des intérêts d'emprunt, quel montant constant (l'amortissement) vais-je rembourser chaque mois pour cette moto ?

Pour me faire payer les intérêts d'emprunt, ma banque calcule au début de chaque année le reste de la somme que je lui dois et elle me fait payer 5 % de cette somme en intérêts d'emprunt annuel. Ces intérêts sont ensuite répartis équitablement sur chacune des mensualités.

2. Quels intérêts d'emprunt vais-je payer la première année ? Calculer les mensualités de la première année du crédit ?

3. Quelles seront les mensualités durant la deuxième année du crédit ?

4. Quelle seront les mensualités durant les trois années suivantes ?

5. Combien aura coûté finalement cette moto à la fin du remboursement de ce crédit ?

6. Pour l'achat d'une maison à 210 000 € sur 20 ans au TAEG de 2 %, pour quelle raison la banque ne peut-elle pas proposer un emprunt à amortissement constant ?

Agios : ensemble des frais perçus par la banque pour le fonctionnement d'un compte.
Amortissement : partie du capital emprunté qui est remboursé à chaque échéance, par exemple chaque mois.
Compte epargne : compte sur lequel les fonds sont disponibles sous forme de retrait d'espèces, il est forcément créditeur et peut faire l'objet d'une rémunération sous forme d'intérêts fiscalisés ou non.
Crédit à la consommation : prêt accordé par une banque au particulier pour financer un achat important.
Intérêts d'emprunt : rémunération du prêt que l'emprunteur verse périodiquement au prêteur.
Mensualités : sommes versées mensuellement pour rembourser un crédit à la consommation.

Finance

Intérêts, crédit et agios — Correction

I — Augmentation et diminution en pourcentage

Propriété 7.1 : Augmentation et diminution en pourcentage

On note x un nombre positif quelconque.

Augmenter une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1+\dfrac{x}{100}$

Diminuer une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{x}{100}$

Démonstration :

Sur un exemple générique. Notons G une grandeur.

Augmentons cette grandeur de 20 %.
20 % de G revient à effectuer $G\times\dfrac{20}{100}=0,20G$
Ajoutons l'augmentation, la grandeur augmentée est : $G+0,20G=G\times1+G\times0,20=G\times(1+0,20)$ on factorise G !
On obtient bien $G\times(1+0,20)=G\times(1+\dfrac{20}{100})=1,20G$

Diminuons cette grandeur de 20 %.
On reprend le raisonnement précédent, la grandeur diminuée est : $G-0,20G=G\times1-G\times0,20=G\times(1-0,20)$.
On obtient bien $G\times(1-0,20)=G\times(1-\dfrac{20}{100})=0,80G$

CQFD

Exemples :
Augmenter une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{35}{100}=1+0,35=1,35$

Diminuer une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{35}{100}=1-0,35=0,65$

Augmenter une grandeur de 2,7 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{2,7}{100}=1+0,027=1,027$

Diminuer une grandeur de 1 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{1}{100}=1-0,01=0,99$ **Remarques :**
Augmenter une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{100}{100}=1+1=2$
Diminuer une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{100}{100}=0$

Diminuer d'un pourcentage inférieur à 100 % n'a pas de sens ! Par contre une augmentation est possible.

Augmenter une grandeur de 5 000 % revient à multiplier par $1+\dfrac{5\,000}{100}=1+50=51$

Attention au biais cognitif suivant : augmenter de 300 % revient à multiplier par 4 et pas 3 !!!

Méthode 7 . 1 : Effectuer une diminution ou une augmentation en pourcentage
Un livret d'épargne rémunère les dépôts de 1,5 % par an. On dépose 5 000 €sur ce livret.
De quelle montant dispose t-on au bout d'un an ? de deux ans ? de dix ans ?

Augmenter de 1,5 % revient à multiplier par $1+\dfrac{1,5}{100}=1+0,015=1,015$
Au bout d'un an il y aura : $5\,000$ € $\times1,015=5\,075$ €.
Au bout de deux ans on aura : $5\,075$ € $\times1,015=5\,151,125$ € soit $5\,000$ € $\times1,015\times1,015=5\,000$ € $\times1,015^2$

Au bout de dix ans on aura : $5000 \text{ €} \times \underbrace{1{,}015 \times 1{,}015 \times \ldots \times 1{,}015}_{10 \text{ fois}} = 5000 \text{ €} \times 1{,}015^{10} = 5802{,}704 \text{ €}$.

MÉTHODE 7 . 2 : Déterminer une augmentation ou une diminution en pourcentage

Un prix est passé de 75 € à 57 €. Quel est le pourcentage de diminution ?

Il faut chercher le coefficient multiplicateur k tel que $75 \times k = 57$

Ainsi $k = \dfrac{57}{75} = 0,76$.

Or $0,76 = 1 - 0,24 = 1 - \dfrac{24}{100}$. On peut remarquer que $76\,\% + 24\,\% = 100\,\%$!

Il s'agit d'une diminution de 24 %.

II — La fonction linéaire

DÉFINITION 7.1 : La fonction linéaire

On choisit a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \to a \times x$$

La fonction linéaire de coefficient a modélise le programme de calcul suivant :

— Choisir un nombre;

— Le multiplier par a;

— Écrire le résultat.

Exemples :

$f(x) = 5x$ – la fonction linéaire de coefficient 5

$g(x) = x$ – la fonction linéaire de coefficient 1 car $x = 1 \times x$

$h(x) = -x$ – la fonction linéaire de coefficient -1 car $-x = -1 \times x$

$k(x) = -3x$ – la fonction linéaire de coefficient 3

$l(x) = \dfrac{x}{5}$ – la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{5}$ car $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{5} \times x$

$m(x) = 3x + 6$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du $+6$

$p(x) = 4x^2$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du x^2

$t(x) = \dfrac{1}{x}$ – ce n'est pas une fonction linéaire

Propriété 7.2 : Fonction linéaire et proportionnalité

Les images et les antécédents par une fonction linéaire sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient de la fonction linéaire.

Démonstration :

a un nombre et f la fonction linéaire de coefficient a.
Pour un nombre x quelconque, son image est $f(x) = ax$. On constate que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{ax}{x} = a$
Cela prouve que x et $f(x)$ sont proportionnels.

CQFD

Exemple :
Soit g la fonction linéaire de coefficient $-3,25$.
Dressons un tableau de valeurs de cette fonction.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	9,75	6,5	3,25	0	-3,25	-6,5	-9,75	-13

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité de coefficient $-3,25$.

Méthode 7 . 3 : Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre et son image

Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = -2$.

Il faut déterminer le coefficient a de cette fonction.
Comme pour tout x on a $f(x) = ax$ or $f(3) = -2$, on en déduit que $a \times 3 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{3}$
Il s'agit de la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{2}{3}$.

Propriété 7.3 :

Si f est une fonction linéaire alors $f(0) = 0$

Démonstration :

f la fonction linéaire de coefficient a donc pour tout nombre x on a $f(x) = ax$
Ainsi $f(0) = a \times 0 = 0$

Propriété 7.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

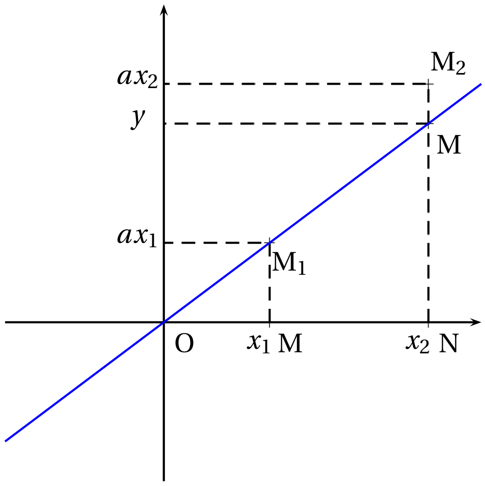
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Démonstration :

a un nombre quelconque et x_1 et x_2 deux nombres quelconques différents.
Nous pouvons commencer par traiter le cas où x_1 et x_2 sont positifs.

Considérons les points $O(0;0)$, $M_1(x_1, ax_1)$ et $M_2(x_2; ax_2)$.
O, M_1 et M_2 sont trois points distincts de la représentation graphique de la fonctions linéaire de coefficient a, $f(x) = ax$.
Nous allons montrer que ces points sont alignés.

Considérons la droite (OM_1) et un point $M(x_2; y_2)$ de la droite $(0M_1)$ d'abscisse x_2. Nous allons prouver que $y_2 = ax_2$.



Dans le triangle OMN, comme les droites (MM_1) et (NN_1) sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, elles sont parallèles entre elles.
Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{MM_1}{NN_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{ax_1}{y}$$

Ainsi comme $\frac{x_1}{x_2} = \frac{ax_1}{y}$ on a $y = \frac{x_2 \times ax_1}{x_1} = ax_2$

Ainsi le point M a pour coordonnées $M(x_1; ax_1)$, il s'agit du point M_1.

Cela prouve que deux points quelconques, M_1 et M_2, de la représentation graphique de la fonction linéaire, $f(x) = ax$, sont alignés avec l'origine du repère.

Si x_1 et x_2 sont négatifs, on peut effectuer une symétrie de centre O pour obtenir deux points M'_1 et M'_2 dont les abscisses sont positives. Ces points sont donc alignés avec l'origine d'après la première partie. Or par propriété de la symétrie centrale, O, M_1 et $M'1$ sont alignés ainsi que 0, M_2 et M'_2. Finalement O, M_1 et M_2 sont bien alignés.

Si x_1 ou x_2 est négatif, on raisonne de la même manière avec un seul symétrique.

CQFD

Exercices

Évolution en pourcentages

Troisième

Exercice n° 1 : Une histoire de soldes

Chez Lowcoast Blagnac, il y a des soldes exceptionnelles :

— 30 % de réduction sur tous les polos;

— 10 % de réduction supplémentaire en caisse sur le prix soldé.

1. Adriel a choisi un polo à 89 € . Combien va-t-il payer?

2. Etania a pris trois tee-shirt à 34 € pièce et une sacoche à 57 €. Combien va-t-elle payer?

3. En rentrant chez eux, Adriel et Etania se rendent sur le site officiel de Lowcoast. Le site propose 40 % de réduction sur tous les articles. Etania dit à Adriel qu'ils ont fait de meilleurs affaires en se rendant à Blagnac. A-t-elle raison? Justifier votre réponse.

Exercice n° 2 : Un crédit doit être remboursé

Solomon souhaite partir faire un tour du monde pendant son année de césure. Comme il n'est pas très économe, il doit demander un crédit à la consomation à sa banque pour financer son voyage. Il pense avoir besoin d'emprunter 7500 € pour réaliser son projet.
La banque lui propose un crédit au taux de 4,5 % pendant 7 ans et une mensualité de 104 € .

1. Solomon n'est pas un spécialiste de la finance. Il pense qu'il va rembourser 7,5 % en plus des 7500 € dont il a besoin, ce qui lui semble raisonnable. Combien Solomon pense-t-il que va lui coûter son prêt?

2. Calculer le coût réel de son prêt en tenant compte de la proposition de la banque.

3. Quel pourcentage du montant emprunté représentent les intérêts remboursés? Arrondir au dixième près.

Exercice n° 3 : Un placement de père de famille

À la naissance de sa petite fille Nada, le 1erjanvier 2024, son grand-père a décidé de lui ouvrir un Livret A avec 3000 € .
Cette année, le Livret A est rémunéré au taux annuel de 3 % , cela signifie que chaque année, la banque augmente le capital du Livret de 3 % . Les intérêts obtenus s'ajoutent au capital de l'année et rapportent à leur tour des intérêts l'année suivante.

1. Combien aura Nada, le 1erjanvier 2025?
2. Même question pour les 1erjanvier 2026, 2027 et 2028? (On suppose que le taux reste inchangé!)
3. Expliquer pourquoi le capital détenu sur ce Livret A au bout de n années sera de 3000 € $\times 1{,}03^n$.
4. Combien aura Nada a sa majorité?
5. Quel est le pourcentage d'augmentation de son capital en 18 ans?

Exercice n° 4 : Il ne faut investir que l'argent qu'on est prêt à perdre!

En août 2021, Tilda a entendu parler des cryptomonnaies. Elle est alors convaincue qu'elle peut devenir riche en quelques semaines en misant sur ces actifs. En suivant des conseils d'influenceurs sur Touk Touk, elle s'est décidée à investir 500 € . Elle était sûre d'elle en achetant du DogeCoin, la cryptomonnaie d'Elon Musk!

1. En août 2021, un DogeCoin valait environ 0,29 €. Combien a-t-elle pu en acheter? Arrondir au centième d'unité près.

Malheureusement, durant les mois qui ont suivi, le cours de cette cryptomonnaie n'a fait que chuter.
Lassée d'attendre, elle décide finalement de se débarasser de cet actif en juin 2022, un DogeCoin ne vaut plus que 0,04 €.

2. Combien a-t-elle perdu lors de ces transactions?

3. De quelle proportion, exprimée en pourcentage, a baissé cette cryptomonnaie en moins d'un an?

4. Si Tilda n'avait pas vendu ses DogeCoin, quel pourcentage d'augmentation lui aurait permis de retrouver sa mise de départ?

☞ Exercices — Correction ☜

Exercice nº 1 — Correction

1. Diminuer une grandeur de 30 % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{30}{100}=1-0,30=0,70$.

Diminuer une grandeur de 10 % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{10}{100}=1-0,10=0,90$

Ainsi, le polo passe de 89 € à $89\text{ €}\times 0,70=62,30\text{ €}$ puis $62,30\times 0,90=56,07\text{ €}$.

Adriel va payer 56,07 €.

2. Etania doit payer $3\times 34\text{ €}+57\text{ €}=102\text{ €}+57\text{ €}=159\text{ €}$.

En déduisant d'abord 30 % on arrive à $159\text{ €}\times 0,70=111,30\text{ €}$ puis en caisse $111,30\text{ €}\times 0,90=100,17\text{ €}$.

Etania va payer 100,17 €.

3. Diminuer une grandeur de 40 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{40}{100}=1-0,40=0,60$.

Adriel aurait ainsi payé $89\text{ €}\times 0,60=53,40\text{ €}$ et Etania $159\text{ €}\times 0,60=95,40\text{ €}$.

Etania a tord, ils auraient dû faire leurs achats en ligne !

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1

(7 points)

On pose $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$

1. Développer et réduire $g(x)$.

2. Calculer $g(-2)$.

3. Factoriser $g(x)$.

4. Résoudre $(6x-3)(1-2x) = 0$

Exercice n° 2

(7 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

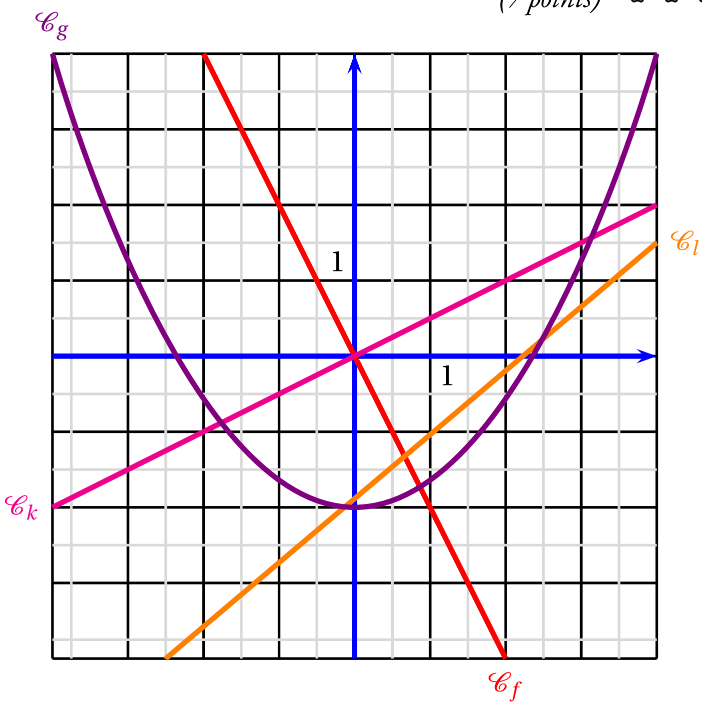
1. Voici plusieurs fonctions. Lesquelles sont linéaires ?
On ne demande pas de justifier votre réponse.
$f(x) = 3x$ # $g(x) = -x$ # $h(x) = 3x-7$ # $l(x) = 0$
$k(x) = 8$ # $m(x) = \dfrac{x}{5}$ # $n(x) = 3x^2$ # $p(x) = 5x-2x$

2. f est une fonction linéaire tel que $f(5) = -3$.
Déterminer l'expression de la fonction f en justifiant votre réponse.

3. g est une fonction linéaire tel que $g(7) = 2$.
Calculer $g(5)$ en justifiant votre réponse.

4. Un prix augmente de 13% puis il diminue de 7%. On appelle h la fonction linéaire qui au prix de départ associe le prix après l'augmentation et la diminution. Quelle est l'expression de cette fonction ?

5. Voici les représentations graphiques de quatre fonctions.
Indiquer celles qui correspondent à des fonctions linéaires.
Pour ces fonctions linéaires, déterminer leurs expressions en justifiant votre réponse.



Exercice n° 3

(6 points)

Voici un algorithme programmé dans un langage utilisant des blocs.

1.a. Que va afficher le programme si le nombre de départ est 5 ?
1.b. Que va afficher le programme si le nombre de départ est -3 ?

2. Juliette prétend qu'en choisissant les nombres de départ 1 et 2 elle a obtenu le même nombre.
Est-ce vrai ?

3. En partant du nombre générique x, donner l'expression de la fonction $f(x)$ qui correspond à ce programme de calcul.

4. Développer et réduire $f(x) = (2x-7)(10x+5)$.

5. Quels nombres faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin du programme.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1

Correction

On pose $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$

1. $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$
$g(x) = (30x^2 + 12x - 15x - 6) - (42x^2 - 21x + 6x - 2)$
$g(x) = 30x^2 + 12x - 15x - 6 - 42x^2 + 21x - 6x + 2$

$\boxed{g(x) = -12x^2 + 12x - 4}$

2. $g(-2) = -12 \times (-2)^2 + 12 \times (-2) - 4 = -12 \times 4 - 24 - 4 = -48 - 28 = -76$

$\boxed{g(-2) = -76}$

3. $g(x) = (6x-3)(5x+2) - (7x+1)(6x-3)$
$g(x) = (6x-3)\left[(5x+2) - (7x+1)\right)$
$g(x) = (6x-3)(5x+2-7x-1)$

$\boxed{g(x) = (6x-3)(-2x+1)}$

4. Résoudre $(6x-3)(1-2x) = 0$

$$(6x-1)(1-2x) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 6x - 1 &= 0 \\ 6x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 6x &= 1 \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 0 \\ 1 - 2x - 1 &= 0 - 1 \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-2} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{6} \text{ et } 0,5}$

Exercice n° 2

Correction

1. $\boxed{f \text{ est une fonction linéaire de coefficient 3 car } f(x) = 3 \times x.}$

$\boxed{g \text{ est une fonction linéaire de coefficient } -1 \text{ car } g(x) = -1 \times x.}$

$\boxed{h \text{ n'est pas une fonction linéaire, elle n'est pas de la forme } ax.}$

$\boxed{l \text{ est une fonction linéaire de coefficient 0, car } l(x) = 0 \times x.}$

$\boxed{k \text{ n'est pas une fonction linéaire, elle n'est pas de la forme } ax.}$

$\boxed{m \text{ est une fonction linéaire de coefficient } \frac{1}{5} \text{ car } m(x) = \frac{x}{5} = \frac{1}{5}x.}$

$\boxed{n \text{ n'est pas une fonction linéaire, elle n'est pas de la forme } ax.}$

$\boxed{p \text{ est une fonction linéaire de coefficient 3 car } p(x) = 5x - 2x = 3x.}$

2. f est une fonction linéaire, donc elle s'écrit $f(x) = ax$. On cherche la valeur de a.

On sait que $f(5) = -3$ donc $5 \times a = -3$ c'est à dire $a = -\frac{3}{5}$.

$\boxed{f(x) = -\frac{3}{5}x \text{ ou } f(x) = -\frac{3x}{5}.}$

3. g est une fonction linéaire, donc elle s'écrit $g(x) = ax$. On cherche la valeur de a.

On sait que $g(7) = 2$ donc $7 \times a = 2$ c'est à dire $a = \frac{2}{7}$.

$g(x) = \frac{2}{7}x$ ou $g(x) = -\frac{2x}{7}$.

$g(5) = \frac{2}{7} \times 5 = \frac{10}{7}$.

On pouvait aussi utiliser un tableau avec des grandeurs proportionnelles puisque pour une fonction linéaire, les antécédents et les images sont proportionnelles.

x	7	5
$g(x)$	2	$\frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$

3. Augmenter une grandeur de 13 %, revient à la multiplier par $1 + \frac{13}{100} = 1 + 0,13 = 1,13$
Diminuer une grandeur de 7 %, revient à la multiplier par $1 - \frac{7}{100} = 1 - 0,07 = 0,93$.

Notons x le prix de départ, il devient $1,13x$ après l'augmentation de 13 % puis $0,93 \times 1,13x$ après la diminution de 7 %.
Comme $0,93 \times 1,13x = 1{,}0509x$, la fonction linéiare cherchée est $\boxed{h(x) = 1{,}0509x}$.

4. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.
Seules les représentations graphiques des fonctions f, et k sont des droites qui passent par $(0;0)$.
Reste à déterminer une image pour chacune des fonctions.

On constate que le points de coordonnées $(1;-2)$ est sur la représentation graphique de f, donc $f(1) = -2$.
Comme f est une fonction linéaire, elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax$.
Or $f(1) = -2$, donc $1 \times a = -2$ et ainsi $a = \frac{-2}{1} = -2$ donc $\boxed{f(x) = -2x}$.

On constate que le points de coordonnées $(2;1)$ est sur la représentation graphique de k, donc $k(2) = 1$.
Comme k est une fonction linéaire, elle s'écrit sous la forme $k(x) = ax$.
Or $k(2) = 1$, donc $2 \times a = 1$ et ainsi $a = \frac{1}{2} = 0,5$ donc $\boxed{k(x) = 0,5x}$.

Exercice n° 3 — Correction

1.a. En partant du nombre de départ 5, Réponse prend la valeur 5. Puis Chouchou prend la valeur 5.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times 5 = 10$ et Coucou devient $10 + (-7) = 3$.
Hibou vaut $10 \times 5 = 50$ puis $50 + 5 = 55$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $3 \times 55 = 165$. $\boxed{\text{En partant de 5 on obtient 165 à la fin.}}$

1.b. En partant du nombre de départ -3, Réponse prend la valeur -3. Puis Chouchou prend la valeur -3.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times (-3) = -6$ et Coucou devient $-6 + (-7) = -13$.
Hibou vaut $10 \times (-3) = -30$ puis $-30 + 5 = -25$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $-13 \times -25 = 325$. $\boxed{\text{En partant de -3 on obtient 325 à la fin.}}$

2. En partant du nombre de départ 1, Réponse prend la valeur 1. Puis Chouchou prend la valeur 1.

Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times 1 = 2$ et Coucou devient $2 + (-7) = -5$.
Hibou vaut $10 \times 1 = 10$ puis $10 + 5 = 15$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $-5 \times 15 = -75$. En partant de 1 on obtient -75 à la fin.

En partant du nombre de départ 2, Réponse prend la valeur 2. Puis Chouchou prend la valeur 2.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times 2 = 4$ et Couou devient $4 + (-7) = -3$.
Hibou vaut $10 \times 2 = 20$ puis $20 + 5 = -25$
Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $-3 \times -25 = -75$. En partant de 2 on obtient -75 à la fin.

Juliette a raison, pour 1 et 2 le programme donne le même résultat.

3. En partant du nombre générique x, Réponse prend la valeur x. Puis Chouchou prend la valeur x.
Ensuite, Coucou passe à la valeur $2 \times x = 2x$ et Couou devient $2x + (-7) = 2x - 7$.
Hibou vaut $10 \times x = 10x$ puis $10x + 5$

Reste à calculer Coucou $\times$ Hibou, soit $(2x-7)(10x+5)$. Ainsi $f(x) = (2x-7)(10x+5)$

4. $f(x) = (2x-7)(10x+5)$
$f(x) = 20x^2 + 10x - 70x - 35$

$\boxed{f(x) = 20x^2 - 60x - 35}$

5. Il faut résoudre l'équation suivante :

$$(2x-7)(10x+5) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= 0 \\ 2x - 7 + 7 &= 0 + 7 \\ 2x &= 7 \\ x &= \frac{7}{2} \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x + 5 &= 0 \\ 10x + 5 - 5 &= 0 - 5 \\ 10x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{10} \\ x &= -0,5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{3,5 \text{ et } -0,5}$

III — Annexes

1 Exercices

Exercice n° 7.1 : Le rectangle

On considère une rectangle de 5 cm de longueur et de 4 cm de large.
On augmente sa largeur de 20 % et on diminue sa longueur de 20 %.

L'aire du rectangle a-t-elle augmenté ou diminué ? Quel est le pourcentage d'augmentation ou de diminution ?

Exercice n° 7.2 : Reconnaissance de fonctions

Voici des fonctions. Indiquez lesquelles sont des fonctions linéaires en justifiant votre réponse.

$f(x) = -3x$
$g(x) = 1 - 5x$
$h(x) = x$
$k(x) = 1$

$l(x) = 0$
$m(x) = \dfrac{x}{7}$
$n(x) = 3x^2$
$t(x) = 3,14159x$

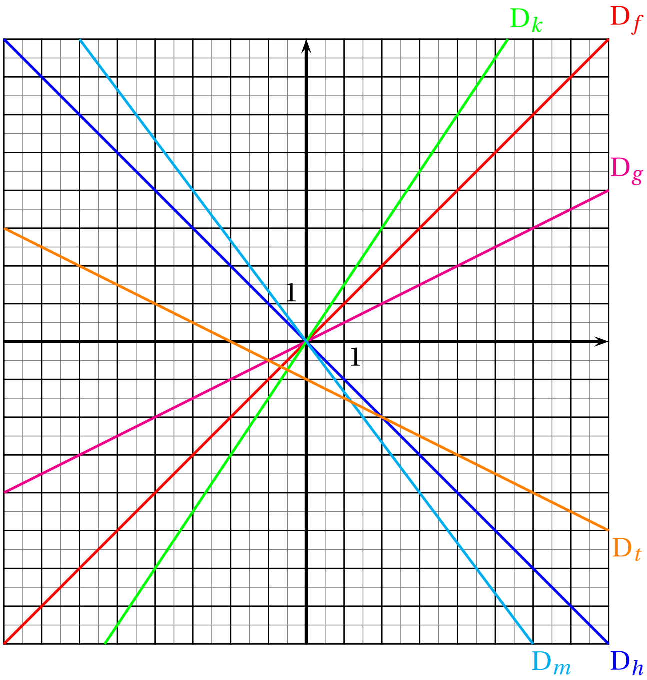
Exercice n° 7.3 : Détermination d'une fonction linéaire

1. h est une fonction linéaire dont on sait que $h(5) = -2$. Quel est le coefficient de cette fonction ?

2. Déterminer la fonction linéaire k pour laquelle l'image de -3 est 4.

3. t une fonction linéaire telle que $t(-2) = 3$. Calculer en justifiant $t(3)$.

Exercice n° 7.4 : Fonction linéaire et représentation graphique



Ci-dessus ont été tracé les représentations graphiques des fonctions f, g, h, k, m et t. Chacune de ces représentation est une droite.
Lesquelles de ces droites sont les représentations graphiques de fonctions linéaires et quel est le coefficient de chacune des ces fonctions ?

Exercice n° 7.1 : Le rectangle

Correction

On considère une rectangle de 5 cm de longueur et de 4 cm de large.
On augmente sa largeur de 20 % et on diminue sa longueur de 20 %.

L'aire du rectangle avant transformation était : $\mathbb{A} = 5\ cm \times 4\ cm = 20\ cm^2$

En augmentant sa largeur de 20 % elle devient : $4\ cm \times 1,20 = 4,8\ cm$
En diminuant sa longueur de 20 % elle devient : $5\ cm \times 0,80 = 4\ cm$

L'aire après transformation est donc : $\mathbb{B} = 4\ cm \times 4,8\ cm = 19,2\ cm^2$

Il s'agit donc d'une diminution.

Notons k le coefficient d'agrandissement/réduction on a $20\ cm^2 \times k = 19,2\ cm^2$ d'où $k = \dfrac{19,2\ cm^2}{20\ cm^2} = 0,96$

Comme $0,96 = 1 - 0,04 = 1 - \dfrac{4}{100}$: $\boxed{\text{il s'agit d'une diminution de 4 \%}}$.

D'autre part on peut remarquer que $1,20 \times 0,80 = 0,96$ ce qui donne aussi le résultat !

Exercice n° 7.2 : Reconnaissance de fonctions

Correction

Voici des fonctions. Indiquez lesquelles sont des fonctions linéaires en justifiant votre réponse.
$f(x) = -3x$: oui, linéaire de coefficient -3.
$g(x) = 1 - 5x$: oui, linéaire de coefficient $-1,5$
$h(x) = x$: oui, linéaire de coefficient 1
$k(x) = 1$: non, elle n'est pas linéaire car $1 \neq ax$ pour tous nombres a.
$l(x) = 0$: oui, elle est linéaire car $0 = 0 \times x$, donc de coefficient 0.
$m(x) = \dfrac{x}{7}$: oui, elle est linéaire de coefficient $\dfrac{1}{7}$ car $\dfrac{x}{7} = \dfrac{1}{7} \times x$
$n(x) = 3x^2$: non, elle n'est pas linéaire.
$t(x) = 3,14159x$: oui, elle est linéaire de coefficient 3,14159

Exercice n° 7.3 : Détermination d'une fonction linéaire

Correction

1. h est une fonction linéaire dont on sait que $h(5) = -2$. Quel est le coefficient de cette fonction ?

On sait que $h(x) = ax$ et que $h(5) = -2$ donc $a \times 5 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{5} = -0,4$.

Le coefficient est $-0,4$. Il s'agit de la fonction $\boxed{h(x) = -0,4x}$.

2. Déterminer la fonction linéaire k pour laquelle l'image de -3 est 4.

Même technique. $k(x) = ax$ donc comme $k(-3) = 4$ on a $a \times (-3) = 4$ et $a = -\dfrac{4}{3}$.

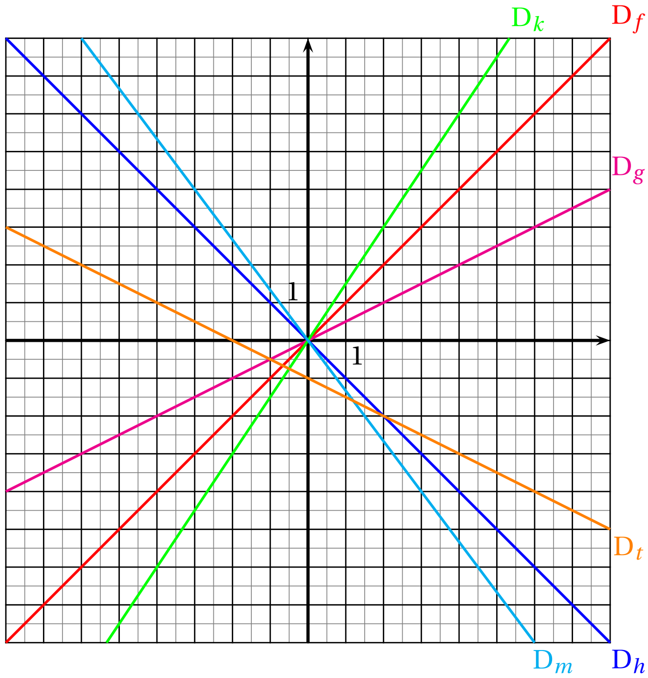
Le coefficient est $-\dfrac{4}{3}$. Il s'agit de la fonction $\boxed{k(x) = -\dfrac{4}{3}x}$.

3. t une fonction linéaire telle que $t(-2) = 3$. Calculer en justifiant $t(3)$.

$t(x) = ax$ et $t(-2) = 3$ donc $-2 \times a = 3$ et $a = -\dfrac{3}{2} = -1,5$

La fonction t est linéaire de coefficient $-1,5$ donc $t(x) = -1,5x$, ainsi $\boxed{t(3) = -1,5 \times 3 = -4,5}$.

EXERCICE N° 7.4 : Fonction linéaire et représentation graphique CORRECTION



Ci-dessus ont été tracé les représentations graphiques des fonctions f, g, h, k, m et t. Chacune de ces représentation est une droite. Lesquelles de ces droites sont les représentations graphiques de fonctions linéaires et quel est le coefficient de chacune des ces fonctions ?

Les fonctions f, g, h, k et m sont linéaires car leurs représentation sont des droites passant par l'origine.
La fonction t n'est pas linéaire car la droite qui la représente ne passe pas par l'origine.

La droite D_f passe par le point (2;2) (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme f est linéaire, elle s'écrit $f(x) = ax$. On a donc $f(2) = 2$ donc $a \times 2 = 2$ d'où $a = 1$.

f est la fonction linéaire de coefficient 1 c'est à dire $\boxed{f(x) = 1x = x}$.

La droite D_g passe par le point (4;2) (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme g est linéaire, elle s'écrit $g(x) = ax$. On a donc $g(4) = 2$ donc $a \times 4 = 2$ d'où $a = \dfrac{2}{4} = 0,5$.

g est la fonction linéaire de coefficient 0,5 c'est à dire $\boxed{g(x) = 0,5x}$.

La droite D_h passe par le point (1;−1) (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme h est linéaire, elle s'écrit $h(x) = ax$. On a donc $h(1) = -1$ donc $a \times 1 = -1$ d'où $a = -1$.

h est la fonction linéaire de coefficient −1 c'est à dire $\boxed{h(x) = -1x = -x}$.

La droite D_k passe par le point (2;3) (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme k est linéaire, elle s'écrit $k(x) = ax$. On a donc $k(2) = 3$ donc $a \times 2 = 3$ d'où $a = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

k est la fonction linéaire de coefficient 1,5 c'est à dire $\boxed{k(x) = 1,5x}$.

La droite D_m passe par le point (3;−4) (on peut choisir n'importe quel point !).
Comme m est linéaire, elle s'écrit $m(x) = ax$. On a donc $m(3) = -4$ donc $a \times 3 = -4$ d'où $a = -\dfrac{4}{3}$.

m est la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{4}{3}$ c'est à dire $\boxed{m(x) = -\dfrac{4}{3}x = -\dfrac{4x}{3}}$.

Interrogation de mathématiques

Exercice 1
Un article à 189 € est soldé de 30 %. Combien vaut le prix après réduction ?

Exercice 2
Après une augmentation de 35 %, le carburant coûte $2,916$ €. Quel était le prix avant cette augmentation ?

Exercice 3
La population de MathLand est passée de 135 678 à 167 908 habitants en 10 ans.
Donner une valeur approchée de l'augmentation en pourcentage. On arrondira le résultat à l'unité près.

Exercice 4
Un commerçant décide d'augmenter tout ses prix de 25 % puis le lendemain de diminuer ces nouveaux prix de 20 %.

1. Le prix de départ est 49 €. On augmente ce prix de 25 %, calculer le nouveau prix.
2. On diminue ensuite le prix obtenu à la question **1.** de 20 %. Calculer le nouveau prix.
3. En appliquant successivement une augmentation de 25 % puis une diminution de 20 %, de combien en pourcentage ce prix a-t-il augmenté ou diminué ?

Interrogation de mathématiques

Exercice 1
Un article à 178 € est soldé de 25 %. Combien vaut le prix après réduction ?

Exercice 2
Après une augmentation de 45 %, le carburant coûte $2,871$ €. Quel était le prix avant cette augmentation ?

Exercice 3
La population de MathLand est passée de 234 678 à 278 987 habitants en 10 ans.
Donner une valeur approchée de l'augmentation en pourcentage. On arrondira le résultat à l'unité près.

Exercice 4
Un commerçant décide d'augmenter tout ses prix de 20 % puis le lendemain de diminuer ces nouveaux prix de 15 %.

1. Le prix de départ est 59 €. On augmente ce prix de 20 %, calculer le nouveau prix.
2. On diminue ensuite le prix obtenu à la question **1.** de 15 %. Calculer le nouveau prix.
3. En appliquant successivement une augmentation de 20 % puis une diminution de 15 %, de combien en pourcentage ce prix a-t-il augmenté ou diminué ?

Interrogation de mathématiques

Exercice 1
Un article à 289 € est soldé de 35 %. Combien vaut le prix après réduction ?

Exercice 2
Après une augmentation de 15 %, le carburant coûte $2,323$ €. Quel était le prix avant cette augmentation ?

Exercice 3
La population de MathLand est passée de 98 760 à 127 987 habitants en 10 ans.
Donner une valeur approchée de l'augmentation en pourcentage. On arrondira le résultat à l'unité près.

Exercice 4
Un commerçant décide d'augmenter tout ses prix de 30 % puis le lendemain de diminuer ces nouveaux prix de 25 %.

1. Le prix de départ est 69 €. On augmente ce prix de 30 %, calculer le nouveau prix.
2. On diminue ensuite le prix obtenu à la question **1.** de 25 %. Calculer le nouveau prix.
3. En appliquant successivement une augmentation de 30 % puis une diminution de 25 %, de combien en pourcentage ce prix a-t-il augmenté ou diminué ?

Pourcentages et fonction linéaire

Augmentation et diminution en pourcentage

x est un nombre positif.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $1+\dfrac{x}{100}$;

Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $1-\dfrac{x}{100}$.

Coefficient d'agrandissement-réduction :

Quand on multiplie une grandeur par un nombre supérieur à 1 on augmente la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par 1 on ne change pas la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par un nombre inférieur à 1 on diminue la grandeur.

Exemple :

Un commerçant diminue tous les prix de 30 % puis un peu plus tard il augmente tous les prix de 30 %. Les prix ont-ils retrouvé le niveau de départ ?

Prenons pour exemple un prix $\mathrm{P}=67$ €.

Diminuer ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1-\dfrac{30}{100}=1-0,30=0,70$

Le prix diminué est donc $\mathrm{D}=0,70\times\mathrm{P}=0,70\times 67$ € $=46,90$ €.

Augmenter ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1+\dfrac{30}{100}=1+0,30=1,30$.

Le prix augmenté est donc $\mathrm{A}=1,30\times\mathrm{D}=1,30\times 46,90$ € $=60,97$ €.

On constate que le prix final est plus bas que le prix initial. L'augmentation de 30 % ne suffit pas à remonter jusqu'au prix initial.

De manière plus littérale on a : $\mathrm{A}=1,30\times\mathrm{D}=1,30\times 0,70\times\mathrm{P}$ or $1,30\times 0,70=0,91$. Ainsi $\mathrm{A}=0,91\times\mathrm{P}$.

Comme $0,91=1-0,09$ car $1-0,91=0,09$, on a $0,91=1-\dfrac{9}{100}$. $\boxed{\text{Il s'agit d'un baisse de 9 \%}}$.

On peut se demander quel pourcentage d'augmentation aurait permis de remonter au prix initial.
Cela revient à résoudre l'équation suivante dont l'inconnue est k :

$$\begin{aligned}0,70\times k\times\mathrm{P}&=\mathrm{P}\\0,70\times k&=1\\k&=\frac{1}{0,70}\\k&\approx 1,43\end{aligned}$$

Comme $1,43=1+\dfrac{43}{100}$, $\boxed{\text{il aurait fallu augmenter le prix de 43 \%}}$.

La fonction linéaire

a un nombre quelconque fixé.
La fonction linéaire de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \longrightarrow f(x)=ax$$

Exemples :

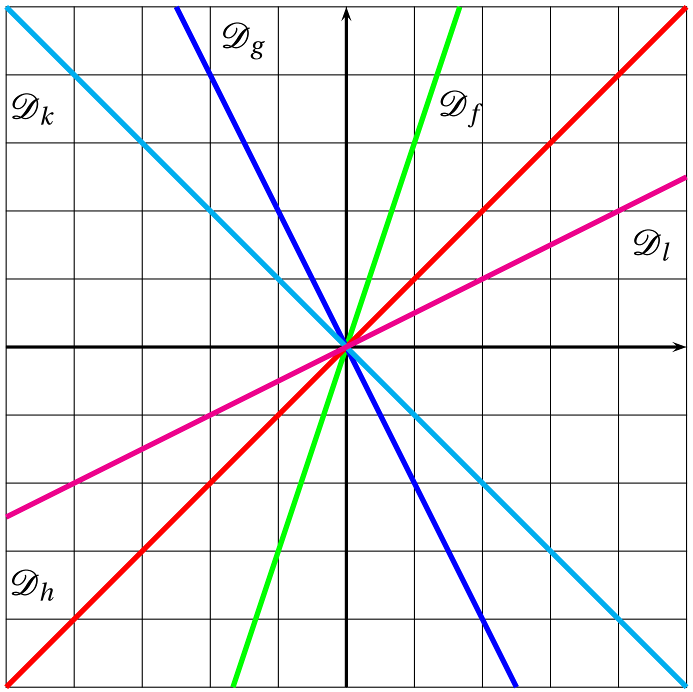
- $f(x)=3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3 ;
- $g(x)=-2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2 ;
- $h(x)=x$ est la fonction linéaire de coefficient 1 ;
- $k(x)=-x$ est la fonction linéaire de coefficient -1 ;
- $l(x)=\dfrac{x}{2}$ est la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$;
- $m(x)=0$ est la fonction linéaire de coefficient 0 ;

Propriétés de la fonction linéaire

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité dont le coefficient est celui de la fonction.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

Exemples :

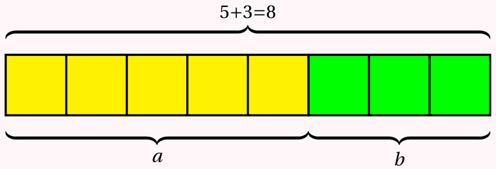


RATIO

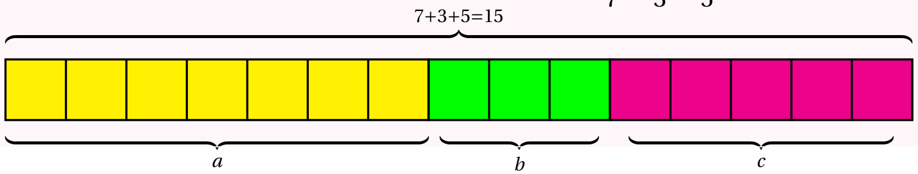
Définition sur un exemple générique

On dit que deux nombres a et b sont dans **le ratio** 5 : 3 si $\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$.

On a aussi $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$, ce qui explique le choix de l'expression « être dans le ratio $\frac{5}{3}$ ».



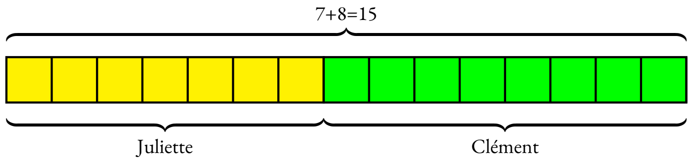
On dit que trois nombres a, b et c sont dans **le ratio** 7 : 3 : 5 si $\frac{a}{7} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$.



Exemples :

1. Juliette et Clément ont partagé un sachet de 135 bonbons selon le ratio 7 : 8.
Combien chacun a-t-il reçu ?

Notons j et c le nombre de bonbons reçus par chacun. On a $\frac{j}{7} = \frac{c}{8}$.
On peut représenter cette situation ainsi :



Il y a donc 15 parts en tout. Un part correspond à $135 \div 15 = 9$ bonbons.
Juliette a reçu $9 \times 7 = 63$ bonbons et Clément $9 \times 8 = 72$ bonbons.

On a bien $\frac{63}{7} = \frac{72}{8} = 9$ et même $\frac{63}{72} = \frac{9 \times 7}{9 \times 8} = \frac{7}{8}$.
On peut aussi représenter ces informations dans un tableau en ajoutant une colonne pour la somme totale :

	Juliette	Clément	Total
Bonbons	$\frac{135 \times 7}{15} = \frac{945}{15} = 63$	$\frac{135 \times 8}{15} = \frac{1080}{15} = 72$	135
Ratio	7	8	15

2. Le **sexe-ratio** est un indicateur démographique qui permet d'exprimer le nombre de mâles par rapport au nombre de femelles d'une population donnée.
En France on dit que le sexe-ratio est de 105 : 100 parce qu'il naît environ 105 garçons pour 100 fille.
En 2022, il y a eu 723 000 naissances. En partageant 723 000 en $105 + 100 = 205$ parts on arrive à $723\,000 \div 205 \approx 3527$.
Il est né environ $3527 \times 105 = 370\,335$ garçons pour $3527 \times 100 = 352\,700$ filles à l'arrondi près.

3. Un plan à **l'échelle** 1 : 10 000 signifie que les mesures sur le plan p et les mesures réelles r sont dans un ratio 1 : 10 000.
On a ainsi $\frac{p}{1} = \frac{r}{10\,000}$ soit $p = \frac{r}{10\,000}$.
Les mesures sur le plan sont 10 000 fois plus petites que celles de la réalité.

4. Un écran de télévision est au **format** 16 : 9. Cela signifie que sa longueur L et sa largeur l vérifient $\frac{L}{16} = \frac{l}{9}$ ou que $\frac{L}{l} = \frac{16}{9}$.

5. Les mesures d'un pavé droit sont au ratio 2 : 5 : 7.
Si la plus grande mesure vaut 91 cm, combien valent les deux autres ?
Comme $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{91}{7}$ on peut utiliser la règle de trois :
$x = \frac{2 \times 91\,\text{cm}}{7} = \frac{182\,\text{cm}}{7} = 26\,\text{cm}$ et $y = \frac{5 \times 91\,\text{cm}}{7} = 65\,\text{cm}$.

6. Dans une classe de 30 élèves, le ratio de garçons filles est de 40 : 60. On a donc $\frac{g}{f} = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Ce ratio est donc équivalent à 4 : 6 et 2 : 3. De plus la somme $40 + 60 = 100$, il y a donc 40 % de garçons et 60 % de filles soit 12 garçons et 18 filles.

7. Pour produire un béton classique il faut du ciment, du sable, du gravier et de l'eau suivant le ratio 1 : 2 : 3 : 6

8. Le fameux gateau quatre quarts est constitué d'un quart de lait, un quart de farine, un quart de sucre et un quart d'oeufs.
Ces ingrédients sont donc dans un ration 1 : 1 : 1 : 1.

Chapitre VIII

Les probabilités

Sommaire

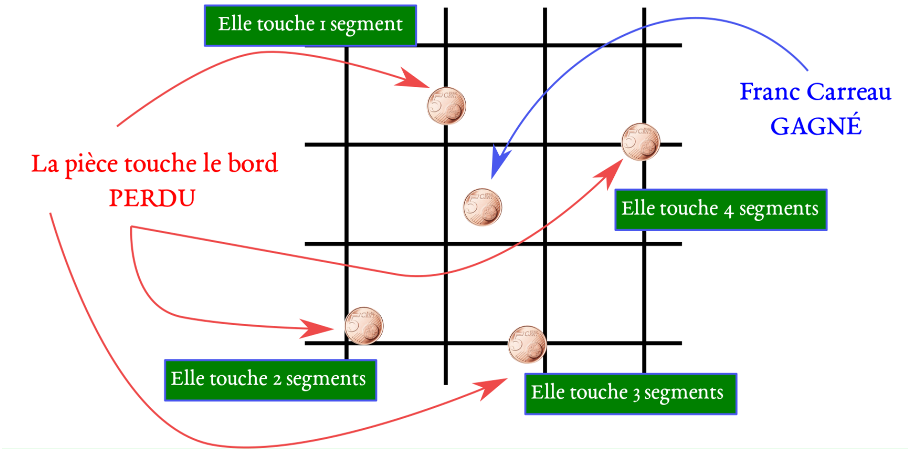
Situation initiale : Le jeu du franc carreau 316
Activité — Situation initiale : Lancer deux dès et nombres premiers 317
I Vocabulaire des probabilités 322
II Fréquences et probabilités 323
III L'équiprobabilité 324
IV Expérience aléatoire à deux épreuves 325
Évaluations 329
Évaluation : Probabilités — Calcul littéral — Pourcentages 329
Exercices 340
Fiche de synthèse : Probabilités 344
V Annexes 345
1 Exercices 345
2 Évaluations 348
3 Annexe 387

Situation initiale : Le jeu du franc carreau

Georges-Louis Leclerc comte de Buffon (1707-1788) est un naturaliste, biologiste, mathématicien, cosmologiste, philosophe et écrivain français. En 1778 il propose un jeu particulièrement intéressant : le jeu du Franc carreau. Voici le texte original :

« Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs. »

Nous allons jouer ensemble avec une pièce de 5 centimes d'euro et d'un quadrillage carré dont les carreaux mesurent 6 cm. Voici ce qui peut se passer :



1. Tracer ce quadrillage avec des carreaux carrés de 6 cm sur une feuille. Munissez-vous d'une pièce de 5 centimes et expérimentez cette situation. De manière pratique vous pouvez placer votre feuille au fond d'une boîte de chaussures pour que la pièce ne sorte pas de du quadrillage.
Je vous propose de lancer la pièce plusieurs fois (au moins 20 fois... 100 fois...) et de noter les résultats de votre expérience. Vous pouvez par exemple compléter le tableau suivant :

	Franc Carreau GAGNÉ	1 segment PERDU	2 segments PERDU	3 segments PERDU	4 segments PERDU	Total
Effectif						
Fréquence						

Rappel : L'effectif désigne tout simplement le nombre de cas observé. La fréquence est le quotient du nombre de cas observé sur le nombre total de lancers. La fréquence peut s'exprimer sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

2. Je vous propose maintenant de jouer contre moi à ce jeu. La partie coûte 2 euros. Si vous faites un Franc Carreau vous gagnez 4 euros. Sinon vous perdez vos 2 euros.
Jouez-vous à ce jeu ? Expliquez votre choix.

3. Avant de jouer à ce jeu je vous autorise à vous entrainer à lancer cette pièce avant de jouer.
Acceptez-vous maintenant de jouer ? Expliquer votre choix.

4. Vous avez joué cinq fois avec moi et cinq fois de suite vous avez gagné en faisant Franc-Carreau.
Acceptez-vous de jouer une sixième fois ? Expliquer votre choix.

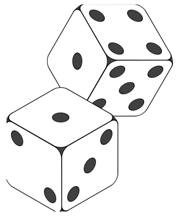
Consulter la simulation Scratch qui correspond à cette expérience.

Situation Initiale

Lancer deux dès et nombres premiers

Troisième

✧✧



On propose **l'expérience aléatoire** suivante :

— On lance deux dès cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6 ;

— on observe les deux nombres obtenus ;

— si un des deux nombres est premier (ou les deux), on calcule l'écart entre les deux nombres ;

— si aucun des nombres est premier, on calcule la somme des deux nombres.

Exemples :

— Si le premier dé montre **3** et le second **6** alors le résultat est **3** ;

— si le premier dé montre **1** et le second **4** alors le résultat est **5** ;

— si le premier dé montre **3** et le second **2** alors le résultat est **1**.

1. Avez-vous compris la règle du jeu ?
1.a. On lance les deux dés. Le premier indique 6 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.b. On lance les deux dés. Le premier indique 1 et le second 6. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.c. On lance les deux dés. Le premier indique 2 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.d. On lance les deux dés. Le premier indique 3 et le second 5. Quel est le résultat dans ce cas ?
1.e. On lance les deux dés. Le premier dé indique 5. Le résultat obtenu est 1. Quel est le nombre indiqué sur le second dé ?

2. En vous fiant à votre intuition, quelle conjecture pouvez-vous faire sur le résultat le plus probable dans cette expérience aléatoire ?

3. Effectuer 20 **épreuves** de cette **expérience aléatoire** et indiquer ci-dessous les résultats obtenus :

Premier dé																				
Deuxième dé																				
Résultat																				

Indiquer ci-dessous la synthèse des résultats que vous avez obtenus avec les membres de votre groupe :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

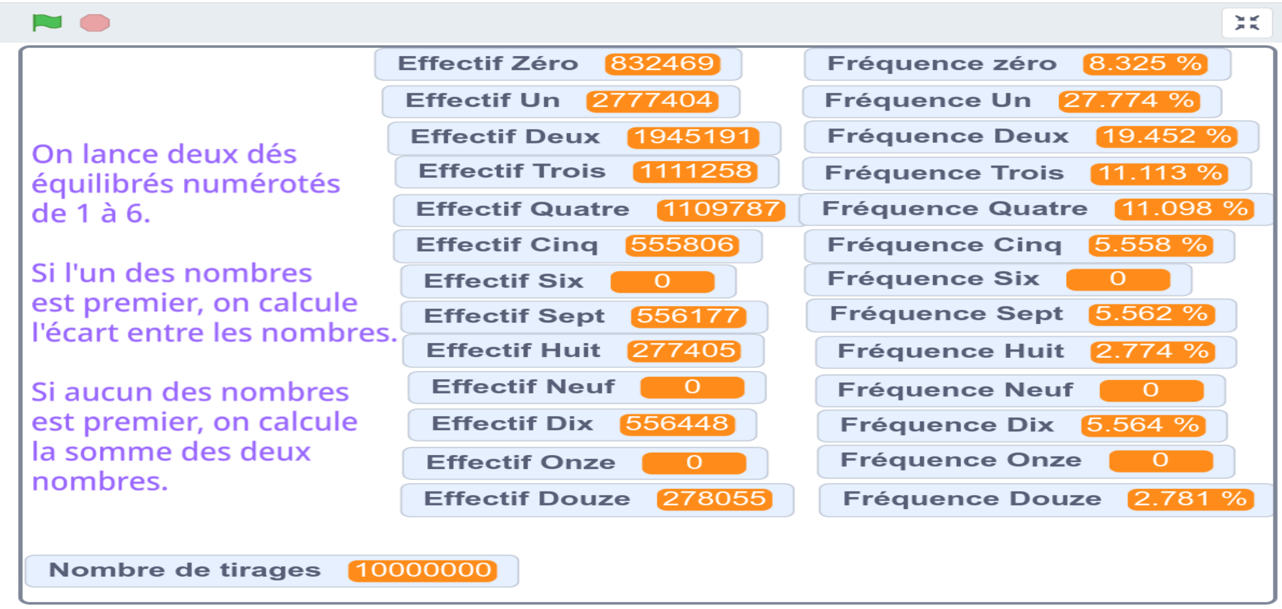
Résultat																Total
Effectif																
Fréquence																

4. Indiquer ci-dessous les résultats obtenus par la classe entière :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

Résultats														Total
Effectif														
Fréquence														

5. Les résultats de cette **expérience aléatoire** vous semblent-ils **équiprobables** ?

6. Voici les résultats de cette simulation obtenue avec Scratch.
Ces résultats sont-ils cohérents avec la simulation effectuée en classe ?



5. Dans le tableau ci-dessous, on indique en ligne les résultats du premier dé et en colonne ceux du second. Chaque case contient le résultat correspondant. Compléter ce tableau.

Second dé / Premier dé						

7. Combien y-a-t-il d'**issues** à cette **expérience aléatoires** ? Expliquer pourquoi ces issues sont **équiprobables**.

8. À l'aide du tableau ci-dessus, déterminer **la probabilité** des **événements** suivants :

— A : « Le résultat obtenu vaut 1 » ;
— B : « Le résultat obtenu vaut 6 » ;
— C : « Le résultat obtenu est un nombre pair » ;
— D : « Le résultat obtenu est un nombre impair » ;
— E : « Le résultat obtenu est un nombre premier » ;
— F : « Le résultat obtenu est supérieur à 6 » ;
— G : « Le résultat obtenu n'est pas inférieur à 9 ».
— H : « Le résultat obtenu est la somme des deux faces observées ».

Lancer deux dès et nombres premiers — Correction

Situation Initiale

Exemples :

— Si le premier dé montre **3** et le second **6** alors le résultat est **3** ;
— si le premier dé montre **1** et le second **4** alors le résultat est **5** ;
— si le premier dé montre **3** et le second **2** alors le résultat est **1**.

Les nombres premiers inférieurs à 6 sont 2, 3 et 5. 1 n'est pas un nombre premier : il ne possède qu'un seul diviseur !
3 est premier et 6 ne l'est pas, on effectue donc la différence $6 - 3 = 3$.
1 n'est pas premier, 4 non plus, on effectue la somme $1 + 4 = 5$.
3 et 2 sont premiers, on effectue la différence $3 - 2 = 1$

1. Avez-vous compris la règle du jeu ?

1.a. On lance les deux dés. Le premier indique 6 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
Aucun des nombres 6 et 4 n'est premier. Il faut donc faire la somme, $6 + 4 = 10$

1.b. On lance les deux dés. Le premier indique 1 et le second 6. Quel est le résultat dans ce cas ?
Aucun des nombres 1 et 6 n'est premier. On le répéte, 1 n'est pas un nombre premier, il ne possède qu'un seul diviseur ! Il faut faire la somme $1 + 6 = 7$.

1.c. On lance les deux dés. Le premier indique 2 et le second 4. Quel est le résultat dans ce cas ?
Le nombre 2 est premier, pas le nombre 4. On calcule l'écart $4 - 2 = 2$.

1.d. On lance les deux dés. Le premier indique 3 et le second 5. Quel est le résultat dans ce cas ?
Les deux nombres 3 et 5 sont premiers. On calcule l'écart $5 - 3 = 2$.

1.e. On lance les deux dés. Le premier dé indique 5. Le résultat obtenu est 1. Quel est le nombre indiqué sur le second dé ?
Le premier dé indique 5 qui est un nombre premier. Il va donc falloir calculer l'écart entre les deux nombres. On peut effectuer $6 - 5 = 1$ ou $5 - 4 = 1$. Il y a donc deux possibilités pour le second dé : 6 ou 4.

2. Effectuer 20 **épreuves** de cette expérience aléatoire et indiquer ci-dessous les résultats obtenus :

Premier dé	1	3	1	6	5	3	6	2	3	1	1	4	1	5	6	1	2	1	1	6
Deuxième dé	3	3	5	2	1	6	6	6	1	2	4	5	3	2	1	3	3	3	3	5
Résultat	2	0	4	4	4	3	12	4	2	1	5	1	2	3	7	2	1	2	2	1

Indiquer ci-dessous la synthèse des résultats que vous avez obtenus avec les membres de votre groupe :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

Résultat	0	1	2	3	4	5	7	12								Total
Effectif	1	4	5	6	4	1	1	1								20
Fréquence	5%	20%	25%	30%	20%	5%	5%	5%								100%

3. Indiquer ci-dessous les résultats obtenus par la classe entière :
Les fréquences seront données en pourcentage au dixième d'unité près.

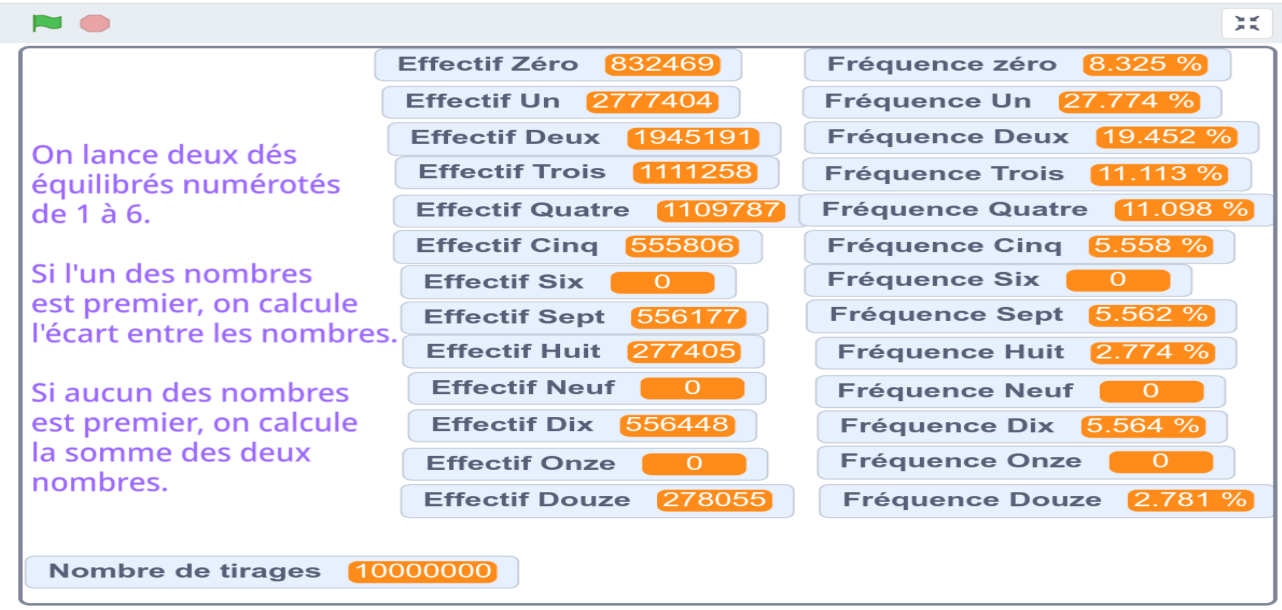
Résultats	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	55	158	99	64	48	27	0	22	11	0	28	0	8	520
Fréquence	10,6%	30,4%	19%	12,3%	9,2%	5,2%	0%	4,2%	2,1%	0%	5,4%	0%	1,5%	100%

4. Les résultats de cette expérience aléatoire vous semblent-ils **équiprobables** ?

On constate que les fréquences d'apparition de chacun des résultats sont très différentes. Par exemple, la fréquence d'apparition du 1 est très supérieure à celle du 12. D'autre part, les nombres 6, 9 et 11 ne sont pas apparus dans ces épreuves.

Ces résultats ne semblent donc pas équiprobables.

5. Voici les résultats de cette simulation obtenue avec Scratch.
Ces résultats sont-ils cohérents avec la simulation effectuée en classe ?



Scratch a réalisé 10 000 000 d'épreuves de cette expérience. On obtient chaque fréquence en divisant l'effectif par 10 000 000. On arrondit le pourcentage au dixième près.

Voici les fréquences constatées :

Résultats	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Fréquence	8,3%	27,8%	19,4%	11,1%	11,1%	5,6%	0%	5,6%	2,8%	0%	5,6%	0%	2,8%	100%

Oui. Ils confirment la succession d'épreuves réalisées par la classe entière. Ils sont différents des résultats obtenus individuellement avec seulement 20 épreuves.
Cela montre à nouveau qu'en augmentant le nombre d'épreuves d'une expérience aléatoire, les fréquences obtenues pour chaque résultat approche d'une fréquence théorique appalée probabilité.

6. Dans le tableau ci-dessous, on indique en ligne les résultats du premier dé et en colonne ceux du second. Chaque case contient le résultat correspondant. Compléter ce tableau.

Second dé / Premier dé	1	2	3	4	5	6
1	2	1	2	5	4	7
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	5	2	1	8	1	10
5	4	3	2	1	0	1
6	7	4	3	10	1	12

7. Combien il y a-t-il d'issues à cette expérience aléatoire ? Expliquer pourquoi ces issues sont équiprobables.

Il y a 6 lignes et 6 colonnes soit $6 \times 6 = 36$ issues à cette expérience aléatoire.
Comme les dés sont équilibrés, chaque face apparaît avec la même fréquence pour chacun.
Ces 36 issues sont donc bien équiprobables.

8. À l'aide du tableau ci-dessus, déterminer **la probabilité** des **événements** suivants :

— A : « Le résultat obtenu vaut 1 » ;
Le nombre 1 apparaît 10 fois dans le tableau. La probabilité cherchée est donc $\frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0,2778$ soit environ $27,8\%$. On constate la proximité de ce résultat avec la fréquence obtenue avec Scratch !

— B : « Le résultat obtenu vaut 6 » ;
Le nombre 6 n'apparaît pas dans le tableau.
La probabilité cherchée est donc 0. C'est un événement impossible.

— C : « Le résultat obtenu est un nombre pair » ;
Il y a 18 cases contenant un nombre pair. le nombre 0 est pair puisque $0 = 2 \times 0$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0,5$ soit 50%.

— D : « Le résultat obtenu est un nombre impair » ;
L'événement D est le contraire de l'événement C. On peut donc calculer cette probabilité en effectuant $1 - \frac{18}{36} = \frac{36}{36} - \frac{18}{36} = \frac{18}{36}$.

On pouvait aussi remarquer qu'il y a 18 nombres impairs dans le tableau.

— E : « Le résultat obtenu est un nombre premier » ;
Il y a 14 cases du tableau qui contiennent un nombre premier. La probabilité cherchée est donc $\frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 0,3888$ soit environ $38,9\%$

— F : « Le résultat obtenu est supérieur à 6 » ;
Il y a 6 cases qui contiennent un nombre supérieur à 6. La probabilité cherchée est donc $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$ soit environ $16,7\%$.

— G : « Le résultat obtenu n'est pas inférieur à 9 ».
Cela signifie que le résultat doit être supérieur à 9. Il y a 3 cases qui contiennent un nombre supérieur à 9.

La probabilité cherchée est donc $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0,0833$ soit environ $8,3\%$.

— H : « Le résultat obtenu est la somme des deux faces observées ».
Seules les faces montrant les nombres 1, 4 et 6 permettent de faire la somme des deux nombres.
Il y a 9 cases qui correspondent à la somme des deux faces.

La probabilité cherchée est donc $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$ soit 25%.

I — Vocabulaire des probabilités

❧ DÉFINITION 8.1 : Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont le résultat est soumis au hasard.
À chaque répétition dans les mêmes conditions de cette expérience, le résultat n'est pas forcément le même.

EXEMPLES :

Expérience n° 1 : on lance une pièce de monnaie équilibrée.

Expérience n° 2 : on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Expérience n° 3 : on lance une pièce de 5 centimes d'euros sur un quadrillage.

Expérience n° 4 : on pioche deux fois de suite sans remise une boule dans une urne contenant 2 boules vertes, 3 boules noires et 1 boule blanche.

Expérience n° 5 : on lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Expérience n° 6 : deux personnes jouent à Chifoumi (Pierre – Papier – Ciseaux).

❧ DÉFINITION 8.2 : Issues possibles et événements

Les résultats élémentaires d'une expérience aléatoire sont les **issues possibles** de l'expérience.
On dit parfois que l'ensemble de ces issues forme **l'univers** des possibles.

Après une expérience aléatoire, un **événement** est ensemble constitué d'une partie des issues possibles.

Un événement ou une issue sont le plus souvent décrits par une phrase.

EXEMPLES :

Expérience n° 1 : les issues possibles sont « obtenir Pile »et « obtenir Face ».
On peut noter P l'événement « obtenir Pile »et F l'événement « obtenir Face ».

Expérience n° 2 : il y a 6 issues possibles : obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
On peut étudier de nombreux événements comme A l'événement « obtenir 5 », B l'évenement « obtenir un nombre premier », C l'événement « obtenir un multiple de 3 », D l'événement « obtenir un nombre pair »et E « obtenir un nombre impair ».
L'événement A est constitué d'une seule issue : 1.
L'événement B est constitué de trois issues : 2, 3 et 5.
L'événement C est constitué de deux issues : 3 et 6.
L'événement D est constitué des trois issues : 2, 4 et 6.
L'événement E est constitué des trois issues : 1, 3 et 5.

Expérience n° 3 : il y a deux issues possibles : faire « franc-carreau »ou « toucher une ligne ».
L'événement F est « gagner en faisant franc-carreau ».
L'événement L est « perdre en touchant une ligne ».

Expérience n° 4 : il y a de nombreuses issues comme « obtenir un boule blanche puis obtenir une boule verte ».
Voici quelques événements :
L'événement M « obtenir deux boules de la même couleur », l'événement N « obtenir deux boules de couleurs différentes »ou encore O « obtenir une boule blanche et une boule verte ».

Expérience n° 5 : il y a de nombreuses issues comme « 6 et 2 », « 2 et 2 »...

On peut considérer certains événements :
Q : « la somme des deux dés est égale à 7 ».
R : « la somme des deux dés est égale à 12 ».
S : « la somme des deux dés est égale à 1 ».
T : « la somme des deux dés est inférieure à 13 ».

Expérience n° 6 : il y a de nombreuses issues comme « Pierre-Pierre », « Feuille-Ciseaux », « Ciseaux-Pierre », ... L'ordre a de l'importance, il correspond à chacun des joueurs.
On peut considérer certains événements :
U : « le premier joueur gagne ».
V : « il y a égalité ».
W : « le premier joueur perd ».

Définition 8.3 : Événements contraire

Deux événements sont **contraires** l'un de l'autre si en rassemblant les issues de chacun des deux événements on obtient toutes les issues possibles.

Exemples :

Expérience n° 2 : les événements D et E sont contraires l'un de l'autre. Ne pas être pair c'est être impair.

Expérience n° 3 : les événements F et L sont contraires l'un de l'autre. Le contraire de gagner c'est perdre !

Expérience n° 6 : les événements U et W ne sont pas contraires, car il faut tenir compte de l'égalité.

II — Fréquences et probabilités

Définition 8.4 : Probabilité d'un événement

La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence de réalisation de l'événement c'est-à-dire « la chance »de réalisation de cet événement.
Un événement dont la probabilité est 1 se réalise toujours.
Un événement dont la probabilité est 0 ne se réalise jamais.

Théorème 8.1 : Stabilisation des fréquences Admis

En répétant dans les mêmes conditions une expérience aléatoire la fréquence d'apparition de chaque issue tend à se stabiliser vers une valeur unique comprise entre 0 et 1.
Cette valeur unique est égale à la probabilité de l'événement constitué par cette issue.

Exemples :

Expérience n° 1 : en lançant de très nombreuses fois une pièce de monnaie, les fréquences d'apparition de Pile et de Face tendent à s'approcher de $\frac{1}{2} = 0,5$ soit 50 % c'est-à-dire une chance sur deux !
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/141607450/

Expérience n° 2 : en lançant de très nombreuses fois un dé à six faces les fréquences d'apparition de chaque face tendent à s'approcher de $\frac{1}{6} \approx 0,17$ soit environ 17 % c'est une chance sur six !
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/141712015/

Expérience n° 3 : en lançant une pièce de très nombreuse fois sur le quadrillage on constate que l'événement Gagner se réalise dans environ 40 % des cas et l'événement Perdre dans 60 % des cas.

Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/378552453/

Expérience n° 5 : en répétant de très nombreuses fois l'expérience et en effectuant la somme des dès on constate que les fréquences se stabilisent.
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/14171022/

III — L'équiprobabilité

Propriété 8.1 : L'équiprobabilité Admise

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire se réalisent avec la même probabilité on dit c'est une situation **d'équiprobabilité** .
Dans ce cas la probabilité d'un événement se calcule de la manière suivante :

$$\frac{\text{nombre d'issues réalisant l'événement}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Exemples :

Expérience n° 1 : comme la pièce est équilibrée nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a 2 issues possibles : Pile et Face.
L'événement P est constitué d'une issue : la probabilité d'obtenir Pile est donc $\frac{1}{2} = 0,50$ soit 50 %.

L'événement F est constitué d'une issue : la probabilité d'obtenir Face est donc $\frac{1}{2} = 0,50$ soit 50 %.

P et F sont deux événements contraires et on remarque que la somme de leurs probabilités est égale à 1.

Expérience n° 2 : comme le dé est équilibré nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a 6 issues possibles.
L'événement A est constitué d'une seule issue : sa probabilité est $\frac{1}{6} \approx 0,17$ soit environ 17 %.

L'événement B est constitué de 3 issues : sa probabilité est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

L'événement C est constitué de 2 issues : sa probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %

Les événements D et E sont aussi chacun constitué de 3 issues : leurs probabilités sont 0,5 ou 50 %.

On remarque à nouveau que D et E sont contraires et que la somme de leurs probabilités vaut 1. **Remarque :**
Expérience n° 3 : les deux issues possibles ne sont pas équiprobables. En utilisant les fréquences d'apparition avec on peut avoir une valeur approchée du résultat. Voir en annexe.

Expériences n° 4 et n° 5 : il s'agit d'expérience aléatoire à deux épreuves, on verra plus tard une méthode de calcul.

IV — Expérience aléatoire à deux épreuves

❧ DÉFINITION 8.5 :

Une expérience aléatoire est dite à **deux épreuves** lorsqu'elle est constituée de deux expériences aléatoires consécutives.
Ces deux expériences aléatoires peuvent être indépendantes l'une de l'autre, mais ce n'est pas toujours le cas.

EXEMPLES :

Expérience 4 : c'est une expérience aléatoire à deux épreuves. Les deux épreuves ne sont pas indépendantes puisque la boule choisie lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne ensuite.

Expérience 5 : c'est aussi une expérience aléatoire à deux épreuves. Chaque lancer de dé est une expérience aléatoire indépendante de l'autre.

Expérience 6 : une autre expérience aléatoire à deux épreuves. Chaque joueur correspond à une expérience aléatoire indépendante de l'autre joueur.

MÉTHODE 8 . 1 : Modéliser une expérience aléatoire à deux épreuves
Pour faire la liste des issues possibles équiprobables d'une expérience aléatoire à deux épreuves on peut les représenter sous forme d'un tableau ou d'un arbre.
Il faut veiller à ce que les issues dont on fait la liste soient bien équiprobables !

Exemples :

Expérience n° 5 : On pourrait se dire que les issues sont les différentes sommes possibles avec deux dès cubiques.
Ces issues sont : 2, 3, 4, ..., 12.
Elles ne sont cependant pas équiprobables car une seule combinaison donne 12 : $6+6$ alors que pour obtenir 4 il y a plusieurs possibilités : $1+3$, $2+2$, $3+1$...
On peut modéliser cette expérience sous forme du tableau suivant :

Somme		Premier dé					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Second dé	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Il y a donc 36 issues équiprobables !

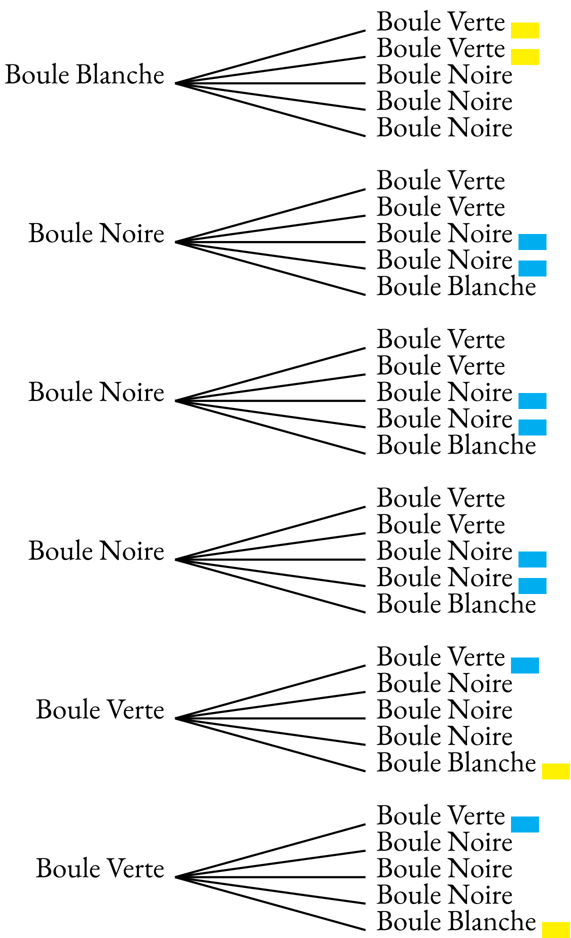
L'événement Q : « la somme est égale à 7 »a pour probabilité : $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}\approx 0,17$ soit environ 17 %.
En effet la somme 7 apparaît 6 fois dans le tableau.

L'événement R : « la somme est égale à 12 »a pour probabilité : $\dfrac{1}{36}\approx 0,03$ soit environ 3 %.
En effet la somme 12 apparaît une seule fois dans le tableau.

L'événement S : « la somme est égale à 1 »n'apparaît pas dans le tableau, cet événement est impossible, sa probabilité vaut 0.

L'événement T : « la somme est inférieure à 12 »se réalise pour toutes les cases du tableau, cet événement se réalise toujours, sa probabilité vaut 1.

Expérience n° 4 : Il y a six boules dans l'urne lors du premier tirage puis seulement cinq lors du second tirage. Cette situation se prête à la modélisation des issues sous forme d'un arbre.



C'est un arbre ayant 30 branches équiprobables.
L'événement M « obtenir deux boules de la même couleur »correspond à 9 branches de cet arbre.

La probabilité de l'événement M est donc $\frac{9}{30} = 0,3$ soit 30 %.

L'événement N « obtenir deux boules de couleurs différentes »est le contraire de l'événement M.

Sa probabilité est donc 70 % soit $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$: ce sont les 21 branches restantes !

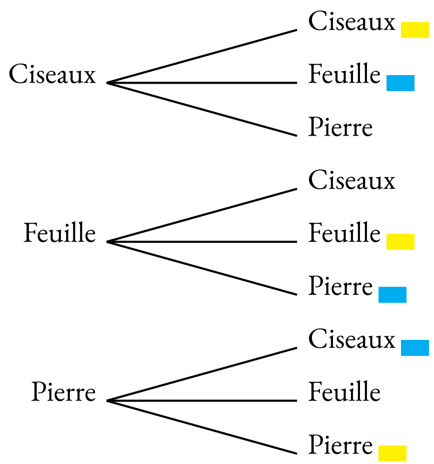
L'événement O « obtenir une boule blanche et une boule verte »correspond à 4 branches de cet arbre.

La probabilité de l'événement O est donc $\frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0,13$ soit 13 %

Expérience n° 6 : il y a 3 issues pour chaque joueur.
On rappelle que la Pierre gagne face aux Ciseaux (elle casse les ciseaux), la Feuille face à la Pierre (la feuille enveloppe la pierre), les Ciseaux face à la Feuille (les ciseaux coupent la feuille).

On peut au choix se servir d'un tableau ou d'un arbre.

Chifoumi		Premier Joueur		
		Pierre	**Feuille**	**Ciseaux**
Second Joueur	**Pierre**	Pierre-Pierre	Feuille-Pierre	Ciseaux-Pierre
	Feuille	Pierre-Feuille	Feuille-Feuille	Ciseaux-Feuille
	Ciseaux	Pierre-Ciseaux	Feuille-Ciseaux	Ciseaux-Ciseaux



Il y a donc 9 issues possibles.

L'événement U « le premier joueur gagne »correspond à 3 cases du tableau ou 3 branches de l'arbre.

La probabilité de l'événement U est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

L'événement V « il y a égalité »correspond à 3 cases du tableau ou 3 branches de l'arbre.

La probabilité de l'événement V est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

L'événement W n'est pas le contraire de l'événement U, car il faut tenir compte de l'égalité ! Il reste 3 branches.

La probabilité de l'événement W est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1

(5 points)

On pose $f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. En utilisant le résultat de la question **1.** calculer $f(-1)$.

3. Factoriser $f(x)$.

Exercice n° 2

(6 points)

Joshua fait ses achats en ligne sur mesachatsenligne.com . Il a placé dans son panier plusieurs articles depuis quelques semaines.

1. En se connectant, le site lui signale que la paire de chaussure qu'il avait placé dans son panier vient d'augmenter de 14 %. Elle coûtait 56 € auparavant.
Combien coûte ces chaussures maintenant.

2. Si Joshua commande dans les 4 heures qui viennent, le site lui propose 20 % de réduction sur tout son panier. Le montant total de ses achats avant réduction est de 139 €. Au moment de régler son achat, pour le remercier de sa fidélité, on lui propose 15 % de réduction supplémentaire sur le prix soldé.
Combien va-t-il payer ?

3. Finalement, Joshua a payé 94,52 € au lieu de 139 € après toutes les réductions.
De quel pourcentage de réduction a-t-il bénéficié ?

Exercice n° 3

(4 points)

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il les range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous.

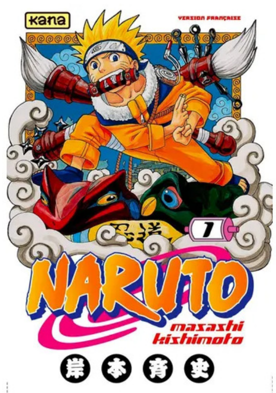
Séries franco-belges	Séries de comics	Séries de mangas
23 albums « Astérix » 22 albums « Tintin » 45 albums « Lucky-Luke »	35 albums « Batman » 90 albums « Spider-Man »	85 albums « One-Piece » 65 albums « Naruto »

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album « Lucky-Luke » ?

1.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics ?

1.c. Quelle est la probabilité que l'album choisi ne soit pas un manga ?



Tous les albums de chaque série sont numérotés dans l'ordre de sortie en librairie et chacune des séries est complète du numéro 1 au dernier numéro.

2.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 1 ?

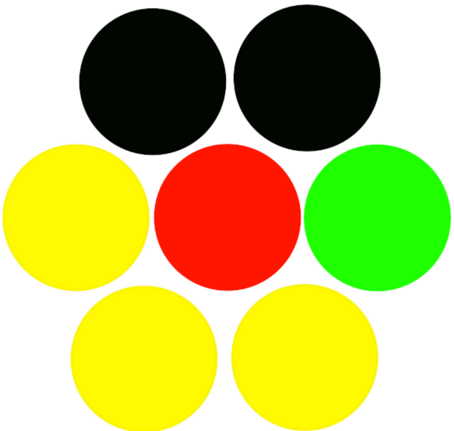
2.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 40 ?

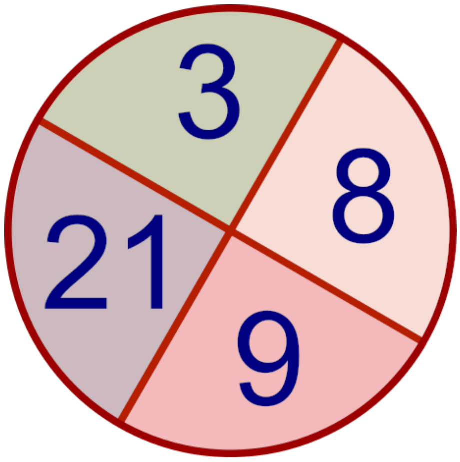
Exercice n° 4 *(5 points)*

À la fête du collège, on propose un loterie pour financer le voyage à Édimbourg des élèves de quatrième.

Le jeu est constitué d'une urne opaque contenant des boules indiscernables au toucher et d'une roue équilibrée. L'urne contient 3 boules jaunes, 1 boules vertes, 2 boules noires et 1 boule rouge. La roue comprend les nombres 3, 8, 9 et 21.

Le jeu consiste à prendre une boule au hasard et à faire tourner la roue.





Les lots à gagner et les règles du jeu ont été fixés par les professeur de mathématiques :

- Si la boule obtenue est verte, on gagne un lot de règles, équerres et rapporteurs ;
- Si la roue indique un nombre pair, on gagne une boite de compas ;
- Si la boule est jaune et la roue indique un nombre supérieur à 7, on gagne des crayons de papier ;
- Si la boule est rouge et la roue indique un nombre premier, on gagne une calculatrice.

Les lots sont cumulables, on peut gagner plusieurs lots en jouant une seul fois !

Pour toute la suite, indiquer votre réponse sous la forme d'une fraction puis d'un pourcentage arrondi à l'unité.

1. Quelle est la probabilité de gagner un lot de règles, équerres et rapporteurs ?

2. Quelle est la probabilité de gagner une boite de compas ?

3. Quelle est la probabilité de gagner des crayons de papier ?

4. Quelle est la probabilité de gagner une calculatrice ?

5. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?

6. Quelle est la probabilité de gagner quelque chose ?

7. Quelle est la probabilité de gagner deux lots en même temps ?

8. Quelle est la probabilité de gagner trois lots en même temps ?

Évaluation — Correction

Exercice nº 1 — Correction

On pose $f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$
$f(x) = \left(30x^2 + 10x - 18x - 6\right) - \left(5x - 35x^2 - 3 + 21x\right)$
$f(x) = 30x^2 + 10x - 18x - 6 - 5x + 35x^2 + 3 - 21x$

$\boxed{f(x) = 65x^2 - 34x - 3}$

2. $f(-1) = 65 \times (-1)^2 - 34 \times (-1) - 3 = 65 \times 1 + 34 - 3 = 96$ donc $\boxed{f(-1) = 96}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (5x-3)(6x+2) - (5x-3)(1-7x)$
$f(x) = (5x-3)\left[(6x+2) - (1-7x)\right]$
$f(x) = (5x-3)(6x+2-1+7x)$

$\boxed{f(x) = (5x-3)(13x+1)}$

Exercice nº 2 — Correction

1. Augmenter une grandeur de 14 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{14}{100} = 1 + 0,14 = 1,14$.

56 € $\times 1,14 = 63,84$ €, $\boxed{\text{le prix des chaussures est passé à 63,84 €.}}$

2. Diminuer une grandeur de 20 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,20 = 0,80$.

139 € $\times 0,80 = 111,20$ €, le prix après la réduction est 111,20 €.

Diminuer une grandeur de 15 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$.

111,20 € $\times 0,85 = 94,52$ €, $\boxed{\text{Joshua va payer 94,52 €.}}$

3. Il faut trouver le coefficient multiplicateur k vérifiant :

$$\begin{aligned} 139 \times k &= 94,52 \\ k &= \frac{94,52}{139} \\ k &= 0,68 \end{aligned}$$

Comme $1 - 0,68 = 0,32$ on a $0,68 = 1 - 0,32 = 1 - \dfrac{32}{100}$, $\boxed{\text{il s'agit d'une baisse de 32 \%.}}$

Exercice nº 3 — Correction

Dans tout cet exercice nous sommes dans une **expérience aléatoire à une épreuve** pour laquelle il y a **365 issues équiprobables**.

1.a. Il y a 45 albums de Lucky Luke. $\boxed{\dfrac{45}{365} = \dfrac{9}{73} \approx 0,12 \text{ soit } 12\ \%}$

1.b. Il y a $35+90=125$ albums classés Comics. $\boxed{\dfrac{125}{365}=\dfrac{25}{73}\approx 0,34 \text{ soit } 34\ \%}$

1.c. Il y a $85+65=150$ albums classés Mangas. Il y a donc $365-150=215$ albums qui ne sont pas des mangas.
$\boxed{\dfrac{215}{365}=\dfrac{43}{73}\approx 0,59 \text{ soit } 59\ \%}$

2.a. Il y a un numéro 1 dans chaque série soit 7 séries. $\boxed{\dfrac{7}{365}\approx 0,02 \text{ soit } 2\ \%}$

2.b. Il n'y a que 4 séries d'albums qui dépasse le numéro 40. $\boxed{\dfrac{4}{365}\approx 0,01 \text{ soit } 1\ \%}$

Exercice n° 4 — Correction

Il s'agit d'une **expérience aléatoire à deux épreuves**. On peut présenter les résultats de cette expérience dans un tableau à double entrées.

	Boule noire	Boule noire	Boule jaune	Boule jaune	Boule jaune	Boule verte	Boule rouge
3	3N	3N	3J	3J	3J	3V	3R
8	8N	8N	8J	8J	8J	8V	8R
9	9N	9N	9J	9J	9J	9V	9R
21	21N	21N	21J	21J	21J	21V	21R

Il y a $7\times 4=28$ issues équiprobables possibles.

1. Il y a 4 issues qui correspondent. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{4}{28}=\dfrac{1}{7}\approx 0,143 \text{ soit environ } 14\,\%\,.}$

2. Il y a 7 issues qui correspondent. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}=0,25 \text{ soit } 25\,\%\,.}$

3. Il y a 3 issues qui correspondent. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{3}{28}\approx 0,107 \text{ soit environ } 11\,\%\,.}$

4. Il y a 1 issue qui correspond. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{1}{28}\approx 0,036 \text{ soit environ } 4\,\%\,.}$

5. Les cases non coloriées sont celle où on ne gagne rien.
Il y a 15 issues possibles. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{15}{28}\approx 0,536 \text{ soit environ } 53{,}6\,\%\,.}$

6. Cet événement est le contraire du précédent. Il y a donc $28-15=13$ issues possibles.
$\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{13}{28}\approx 0,464 \text{ soit environ } 46\,\%\,.}$

6. On ne peut gagner deux lots que dans un cas possible : en tirant une boule verte et un nombre pair.
Il y a 1 issue qui correspond. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } \dfrac{1}{28}\approx 0,036 \text{ soit environ } 4\,\%\,.}$

7. On ne peut pas gagner plus de deux lots. $\boxed{\text{La probabilité cherchée vaut } 0 \text{ soit } 0\,\%\,.}$

Évaluation de mathématiques — Probabilités

Exercice n° 1 :

5 points

Indiquez sans justification si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Affirmation n° 1 : Je viens de lancer dix fois une pièce de monnaie. J'ai obtenu dix fois piles. La pièce est forcément truquée !

Affirmation n° 2 : Je viens de gagner au Loto dix millions d'euros. Je peux gagner à nouveau la semaine prochaine !

Affirmation n° 3 : En choisissant une lettre au hasard dans l'alphabet il y a environ 33 % de chance d'obtenir une voyelle.

Affirmation n° 4 : J'ai plus de chance d'obtenir un six qu'un quatre en lançant un dé cubique !

Affirmation n° 5 : J'ai plus de chance de faire deux fois pile en lançant une pièce que de faire deux en lançant un dé cubique.

Affirmation n° 6 : Je choisis une lettre au hasard dans le mot **MATHEMATIQUES**. J'ai plus de chance de tomber sur un **E** que sur un **T**.

Exercice n° 2 :

5 points

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il les range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous.

Séries franco-belges	Séries de comics	Séries de mangas
23 albums « Astérix »	35 albums « Batman »	85 albums « One-Piece »
22 albums « Tintin »	90 albums « Spider-Man »	65 albums « Naruto »
45 albums « Lucky-Luke »		

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album « Lucky-Luke » ?

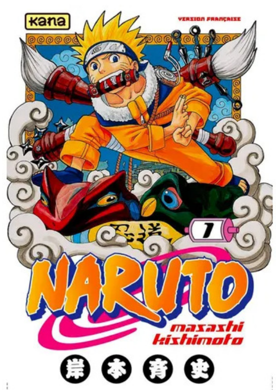
1.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics ?

1.c. Quelle est la probabilité que l'album choisi ne soit pas un manga ?

Tous les albums de chaque série sont numérotés dans l'ordre de sortie en librairie et chacune des séries est complète du numéro 1 au dernier numéro.

2.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 1 ?

2.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 40 ?



Exercice n° 3 : *5 points*

Dans le jeu pierre–feuille–ciseaux deux joueurs choisissent en même temps l'un des trois « coups »suivants :

— pierre en fermant la main ;
— feuille en tendant la main ;
— ciseaux en écartant deux doigts.

La pierre bat les ciseaux (en les cassant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant), il y a match nul si les deux joueurs choisissent le même coup (par exemple si chaque joueur choisit « feuille ».

1. Je joue une partie face à un adversaire qui joue au hasard et je choisis de jouer « pierre ».

1.a. Quelle est la probabilité que je perde la partie ?
1.b. Quelle est la probabilité que je ne perde pas la partie ?

2. Je joue deux parties de suite et je choisis de jouer « pierre »à chaque partie. Mon adversaire joue au hasard.

2.a. Quelle est la probabilité que je gagne les deux parties.
2.b. Quelle est la probabilité que je ne perde aucune des deux parties.

Exercice n° 4 : *5 points*

Damien a fabriqué trois dés à six faces parfaitement équilibrés mais un peu particuliers.
Sur les faces du premier dé sont écrits les six plus petits nombres pairs strictement positifs : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 et 12.
Sur les faces du deuxième dé sont écrits les six plus petits nombres impairs positifs.
Sur les faces du troisième dé sont écrits les six plus petits nombres premiers.
Après avoir lancé un dé, on note le nombre obtenu sur la face du dessus.

1. Quels sont les six nombres figurant sur le deuxième dé ? Quels sont les six nombres figurant sur le troisième dé ?

2. Zoé choisit le troisième dé et le lance. Elle met au carré le nombre obtenu.
Léo choisit le premier dé et le lance. Il met au carré le nombre obtenu.

2.a. Zoé a obtenu un carré égal à 25. Quel était le nombre lu sur le dé qu'elle a lancé ?

2.b. Quelle est la probabilité que Léo obtienne un carré supérieur à celui obtenu par Zoé ?

3. Mohammed choisit un des trois dés et le lance quatre fois de suite. Il multiplie les quatre nombre obtenus et obtient 525.

3.a. Peut-on déterminer les nombres obtenus lors des quatre lancers ? Justifier votre réponse.

3.b. Peut-on déterminer quel est le dé choisi par Mohammed ? Justifier votre réponse.

Évaluation de mathématiques — Probabilités

Exercice n° 1 : *5 points*

1. Développer et réduire $f(x) = (4x-1)(2x+3) + (4x+6)(2x-1)$

2. Développer et réduire $g(x) = 5x^2 - 3x(6x+1) + 2 - 3x + (3x+1)(1-5x)$

Exercice n° 2 : *2 points*

Indiquez **sans justification** si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Affirmation n° 1 : Je viens de lancer dix fois une pièce de monnaie. J'ai obtenu dix fois piles. La pièce est forcément truquée !

Affirmation n° 2 : Je viens de gagner au Loto dix millions d'euros. Je peux gagner à nouveau la semaine prochaine !

Affirmation n° 3 : J'ai plus de chance d'obtenir un six qu'un quatre en lançant un dé cubique !

Affirmation n° 4 : Je choisis une lettre au hasard dans le mot **MATHEMATIQUES**. J'ai plus de chance de tomber sur un **E** que sur un **T**.

Exercice n° 3 : *5 points*

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il les range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous.

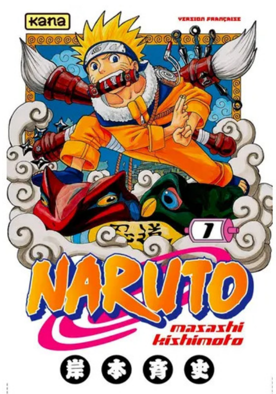
Séries franco-belges	**Séries de comics**	**Séries de mangas**
23 albums « Astérix »	35 albums « Batman »	85 albums « One-Piece »
22 albums « Tintin »	90 albums « Spider-Man »	65 albums « Naruto »
45 albums « Lucky-Luke »		

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album « Lucky-Luke » ?

1.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics ?

1.c. Quelle est la probabilité que l'album choisi ne soit pas un manga ?



Tous les albums de chaque série sont numérotés dans l'ordre de sortie en librairie et chacune des séries est complète du numéro 1 au dernier numéro.

2.a. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 1 ?

2.b. Quelle est la probabilité que l'album choisi porte le numéro 40 ?

Exercice n° 4 :

5 points

Dans le jeu pierre–feuille–ciseaux deux joueurs choisissent en même temps l'un des trois « coups »suivants :

— pierre en fermant la main;

— feuille en tendant la main;

— ciseaux en écartant deux doigts.

La pierre bat les ciseaux (en les cassant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant), il y a match nul si les deux joueurs choisissent le même coup (par exemple si chaque joueur choisit « feuille ».

1. Je joue une partie face à un adversaire qui joue au hasard et je choisis de jouer « pierre ».

1.a. Quelle est la probabilité que je perde la partie ?

1.b. Quelle est la probabilité que je ne perde pas la partie ?

2. Je joue deux parties de suite et je choisis de jouer « pierre »à chaque partie. Mon adversaire joue au hasard.

2.a. Quelle est la probabilité que je gagne les deux parties.

2.b. Quelle est la probabilité que je ne perde aucune des deux parties.

Exercice n° 5 :

5 points

Laura, Alexandre et Miloud jouent à Maxthox. Ce jeu se joue avec deux dés :

— **un dé tétraèdrique**, à quatre faces : une face rouge, une bleue, une verte et une blanche;

— **un dé octaèdrique**, à huit faces numérotées de 13 à 20.

On joue en lançant les deux dés simultanément. La règle change suivant la couleur du premier dé :

— Blanc : on perd la partie;

— Rouge : on gagne en obtenant un nombre premier avec le second dé;

— Bleu : on gagne en obtenant un multiple de 5 avec le second dé;

— Vert : on gagne en obtenant un multiple de 3 avec le second dé;

— Dans tous les autres cas on perd la partie.

On suppose que les deux dés sont équilibrés.

Pour l'ensemble de ces exercices, les probabilités seront exprimées sous la forme d'une fraction simplifiée.

1. Nadia lance le premier dé. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne la couleur blanche ?

2. Simon a obtenu rouge en lançant le premier dé. Il lance le deuxième dé :

2.a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un nombre pair ?

2.b. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un nombre supérieur à 12 ?

2.c. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?

2.d. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un multiple de 11 ?

3. C'est au tour de Miloud de jouer. Il lance le dé tétraèdrique puis le dé octaèdrique.

3.a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne rouge avec le premier dé et un multiple de 5 avec le second ?

3.b. Quelle est la probabilité qu'il obtienne bleu ou vert avec le premier dé et un multiple de 3 avec le second ?

3.c. Quelle est la probabilité qu'il gagne en lançant les deux dés ?

Évaluation de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : Calcul littéral CORRECTION

Calcul littéral

1. Développer et réduire :

$f(x) = (4x-1)(2x+3) + (4x+6)(2x-1)$

$f(x) = 8x^2 + 12x - 2x - 3 + 8x^2 - 4x + 12x - 6$

$\boxed{f(x) = 16x^2 + 18x - 9}$

2. Développer et réduire :

$g(x) = 5x^2 - 3x(6x+1) + 2 - 3x + (3x+1)(1-5x)$

$g(x) = 5x^2 - 18x^2 - 3x + 2 - 3x + 3x - 15x^2 + 1 - 5x$

$\boxed{g(x) = -28x^2 - 8x + 3}$

Exercice n° 2 : Vrai ou Faux CORRECTION

MOYEN

2 points

Probabilités Indiquez **sans justification** si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Affirmation n° 1 : Je viens de lancer dix fois une pièce de monnaie. J'ai obtenu dix fois piles. La pièce est forcément truquée !

$\boxed{\text{C'est faux !}}$ Le hasard n'a pas de mémoire, le fait d'avoir fait dix fois de suite piles n'influence pas le prochain tirage.

Affirmation n° 2 : Je viens de gagner au Loto dix millions d'euros. Je peux gagner à nouveau la semaine prochaine !

$\boxed{\text{C'est vrai !}}$ Pour la même raison. La probabilité de gagner deux fois de suite au Loto est très faible. En revanche, le fait d'avoir gagné cette semaine n'a aucune influence sur le futur tirage du loto.

Affirmation n° 3 : J'ai plus de chance d'obtenir un six qu'un quatre en lançant un dé cubique !

$\boxed{\text{C'est faux !}}$ Comme le dé est équilibré, toutes faces ont la même chance d'apparaître.

Affirmation n° 4 : Je choisis une lettre au hasard dans le mot **MATHEMATIQUES**. J'ai plus de chance de tomber sur un **E** que sur un **T**.

Dans le mot mathématiques, il y a deux **E** et deux **T**, donc j'ai la même probabilité de tomber sur l'un ou l'autre. $\boxed{\text{Faux}}$

Exercice n° 3 : Les albums de bandes dessinées CORRECTION

Probabilités

Dans tout cet exercice nous sommes dans une **expérience aléatoire à une épreuve** pour laquelle il y a **365 issues équiprobables**.

1.a. Il y a 45 albums de Lucky Luke. $\boxed{\dfrac{45}{365} = \dfrac{9}{73} \approx 0,12 \text{ soit } 12\ \%}$

1.b. Il y a $35 + 90 = 125$ albums classés Comics. $\boxed{\dfrac{125}{365} = \dfrac{25}{73} \approx 0,34 \text{ soit } 34\ \%}$

1.c. Il y a $85+65=150$ albums classés Mangas. Il y a donc $365-150=215$ albums qui ne sont pas des mangas.

$\boxed{\dfrac{215}{365}=\dfrac{43}{73}\approx 0,59 \text{ soit } 59\ \%}$

2.a. Il y a un numéro 1 dans chaque série soit 7 séries. $\boxed{\dfrac{7}{365}\approx 0,02 \text{ soit } 2\ \%}$

2.b. Il n'y a que 4 séries d'albums qui dépasse le numéro 40. $\boxed{\dfrac{4}{365}\approx 0,01 \text{ soit } 1\ \%}$

Exercice n° 4 : Chifoumi CORRECTION

Probabilités

1. Je joue une partie face à un adversaire qui joue au hasard et je choisis de jouer « pierre ».

1.a. Nous sommes dans une **expérience aléatoire à une épreuve** pour laquelle il y a **trois issues équiprobables**, pierre, feuille, ciseau. Je perds la partie en choisissant feuille.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{1}{3}\approx 0,33\approx 33\ \%}$

1.b. Ne pas perdre la partie, signifier gagner en jouant feuille ou faire match nul en jouant pierre.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{3}\approx 0,67\text{ă}\approx 67\ \%}$

2. Nous sommes maintenant dans **une expérience aléatoire à deux épreuves**. Nous allons la modéliser sous la forme d'un tableau.

Première partie \ Deuxième partie	Pierre	Feuille	Ciseau
Pierre	Pierre - Pierre	Pierre - Feuille	Pierre - Ciseau
Feuille	Feuille - Pierre	Feuille - Feuille	Feuille - Ciseau
Ciseau	Ciseau - Pierre	Ciseau - Feuille	Ciseau - Ciseau

En lisant le tableau, on constate qu'il y a **9 issues équiprobables.**

2.a. Je joue Pierre deux fois de suite, pour perdre deux fois, il faut que l'adversaire joue Ciseau - Ciseau ce qui correspond à une seule case du tableau (la case jaune).

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est de } \dfrac{1}{9}\approx 0,11\approx 11\ \%}$

2.b. Pour ne perdre aucune partie, il ne faut pas qu'il choisisse Feuille. Il y a 4 cases du tableau qui ne contiennent pas le mot Feuille (les trois cases bleues et la case jaune).

$\boxed{\text{La probabilité cherchées est de } \dfrac{4}{9}\approx 0,44\approx 44\ \%}$

Exercice n° 5 : Le jeu et les dé polyèdriques CORRECTION

Probabilités

1. Nadia effectue **une expérience aléatoire à une épreuve** où il y a **quatre issues possibles.**

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est de } \dfrac{1}{4}=0,25=25\ \%}$

2. Simon effectue **une expérience aléatoire à une épreuve** où il y a **8 issues possibles.**

2.a. Sur le dé octaédrique, les nombres pairs sont 14, 16, 18, 20. Il y en a 4.

La probabilité cherchée est $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\ \%$

2.b. Sur le dé octaèdrique, tous les nombres sont supérieurs à 12.

La probabilité cherchée est de $\frac{8}{8} = 1 = 100\ \%$: c'est un événement qui se réalise toujours !

2.c. Comme il a obtenu rouge avec le premier dé, pour gagner il doit obtenir un nombre premier avec le second dé.
Sur le dé octaèdrique, il y a les nombres premiers suivants : 13, 17 et 19 soit 3 nombres.

La probabilité cherchée est $\frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\ \%$

2.d. Parmi les nombres 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 et 20 aucun n'est un multiple de 11 puisque le multiple précédent est 11 et le suivant est 22.

La probabilité cherchée est $\frac{0}{12} = 0 = 0\ \%$: c'est un événement impossible !

3. Miloud effectue **une expérience aléatoire à deux épreuves.** Nous allons modéliser ces expériences sous forme d'un tableau.

Dé tétraèdrique / Dès octaèdrique	Blanc	Bleu	Rouge	Vert
13	Blanc - 13	Bleu - 13	Rouge - 13	Vert - 13
14	Blanc - 14	Bleu - 14	Rouge - 14	Vert - 14
15	Blanc - 15	Bleu - 15	Rouge - 15	Vert - 15
16	Blanc - 16	Bleu - 16	Rouge - 16	Vert - 16
17	Blanc - 17	Bleu - 17	Rouge - 17	Vert - 17
18	Blanc - 18	Bleu - 18	Rouge - 18	Vert - 18
19	Blanc - 19	Bleu - 19	Rouge - 19	Vert - 19
20	Blanc - 20	Bleu - 20	Rouge - 20	Vert - 20

Il y a $4 \times 8 = 32$ **issues équiprobables.**

3.a. Sur le dé octaèdrique, il y a deux multiples de 5 : 15 et 20. Il y a donc deux cases du tableau qui correspondent (cases bleues).

La probabilité cherchée est $\frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\ \%$

3.b. Sur le dé octaèdrique, les multiples de 3 sont 15 et 18. Il faut donc repérer les cases contenant 15 ou 18 et les couleurs bleu ou vert. Il y en a quatre (les cases jaunes).

La probabilité cherchée est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\ \%$

3.c. Pour gagner, les règles sont différentes en fonction de la couleur du dé tétraèdrique :

— Blanc : dans tous les cas, c'est perdu ;

— Rouge : on gagne avec un nombre premier, donc avec les nombres 13, 17 et 19 ;

— Bleu : on gagne avec un multiple de 5, donc avec les nombre 15 et 20 ;

— Vert : on gagne avec un multiple de 3, donc avec les nombres 15 et 18.

On constate que cela correspond à 7 cases du tableau (4 cases vertes, la case bleue : Bleu - 15 et les deux cases jaunes Vert - 15 et Vert - 18).

La probabilité cherchée est $\frac{7}{32} = 0,21875 = 21,875\ \%$

Exercices

PROBABILITÉS

Troisième

EXERCICE N° 1 : Une urne et des boules

Une urne contient des boules indiscernables au toucher :

— 2 boules vertes;
— 5 boules bleues;
— 1 boules noires;
— 4 boules blanches.

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ou une boule bleue ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une boule noire ?

EXERCICE N° 2 : Une urne et des boules alphabétiques

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

ANTICONSTITUTIONNELLEMENT

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES** ?

4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** ?

5. Quelle est la probabilité d'obtenir un **J** ?

EXERCICE N° 3 : Une histoire de bonbons

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans les paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?
2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?
5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?
6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Exercices — Correction

Exercice n° 1 — Correction

L'expérience aléatoire consiste à choisir un boule indiscernable au toucher dans une urne contenant $2+5+1+4=12$ boules.
Comme elles sont indiscernables au toucher, nous pouvons dire que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a 5 boules bleues et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{12} \approx 0,42$ soit environ 42 %.

2. Il y a 4 boules blanches et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

3. Il y a 2 boules vertes et 4 boules bleues. Il y a donc 6 boules sur 12 qui conviennent.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

4. Il y a 1 boule noire, il reste donc 11 boules non noires sur 12.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{11}{12} \approx 0,92$ soit environ 92 %.

Exercice n° 2 — Correction

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres !
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

2. Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

3. Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1=14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

4. Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2=10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\dfrac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

5. Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.
La probabilité cherchée est 0 %.

Exercice n° 3 — Correction

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquet que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?

L'expérience aléatoire considérée est à une épreuve, elle consiste choisir un bonbon sans regarder. Nous sommes donc dans un modèle d'équiprobabilité.

Il y a $1+1+1+2=5$ bonbons dans le paquet.

Deux bonbons sont mes préférés. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?

Il y a un seul bonbon au réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{1}{5} = 0,2 \text{ soit } 20\%}$

3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Deux bonbons sont au citron ou à la fraise. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?

Nous sommes maintenant dans une expérience aléatoire à deux épreuves, nous pouvons la modéliser sous forme d'un arbre.

- Bonbon cola
  - Bonbon cola
  - Bonbon fraise
  - Bonbon citron
  - Bonbon réglisse
- Bonbon cola
  - Bonbon cola
  - Bonbon fraise
  - Bonbon citron
  - Bonbon réglisse
- Bonbon fraise
  - Bonbon cola
  - Bonbon cola
  - Bonbon citron
  - Bonbon réglisse
- Bonbon citron
  - Bonbon cola
  - Bonbon cola
  - Bonbon fraise
  - Bonbon réglisse
- Bonbon réglisse
  - Bonbon cola
  - Bonbon cola
  - Bonbon fraise
  - Bonbon citron

Il y a 20 branches équiprobables.

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?

C'est impossible puisqu'il n'y a qu'un bonbon réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } 0.}$

6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

Probabilités

Vocabulaire et exemples :

— Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu. Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle une épreuve;
Lancer un dé à six faces ou lancer une pièce de monnaie sont des expériences aléatoires à une épreuve.
Lancer deux dés à six faces ou deux pièces de monnaie sont des expériences aléatoires à deux épreuves.

— Le hasard n'a pas de mémoire : quand on répéte une expérience aléatoire, les résultats obtenus dans le passé n'influencent pas les futurs résultats.
Le tirage du Loto obtenu la semaine dernière a la même probabilité de survenir cette semaine !

— Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat de cette expérience. Un événement est constitué d'une ou plusieurs issues de cette expérience.
« Obtenir trois avec un dé cubique »ou « Obtenir face en lancant une pièce »sont des issues.
« Obtenir un nombre pair en lancant un dé »ou « Obtenir 7 en faisant la somme de deux dés sont des événements ».

— La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence d'apparition d'un résultat. On peut l'exprimer en pourcentage, en fraction ou sous forme décimale.
Il y a 1 chance sur 6 soit environ $16,7$ % d'obtenir 4 avec un dé cubique équilibré. Il y a 50 % de faire pile avec une pièce non truquée.

— Un événement est impossible quand sa probabilité vaut 0;
L'événement « Obtenir 13 en faisant la somme de deux dés cubiques »est impossible.

— Un événement est certain quand sa probabilité vaut 1;
L'événement « Obtenir un nombre positif avec un dé cubique »est certain.

— Deux événements sont contraires quand l'un ou l'autre se produit de manière certaine. Cela signifie que la somme de leurs probabilités est égale à 1.
Les événements « Obtenir une carte noire »et « Obtenir une carte rouge »sont contraires quand on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Approche fréquentiste :

Lorsqu'on répéte une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un événement approche la probabilité de cet événement.
Quand on lance une pièce de monnaie 10 fois, on peut obtenir 10 fois la même face. Si la pièce n'est pas truquée, plus on répéte cette expérience, plus la fréquence d'apparition de Pile et de Face s'approche de $\frac{1}{2} = 0,5$ ou 50 %

Loi de probabilité et équiprobabilité :

— La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est la connaissance des probabilités de toutes les issues possibles de cette expérience.

— Il est souvent difficile de trouver la loi de probabilité d'une expérience aléatoire. Parfois on se contente d'une approche fréquentiste qui en répétant l'expérience donne une valeur approchée de la probabilité cherchée.
Quand on lance une punaise à tête plate, il est difficile de déterminer la probabilité qu'elle tombe à plat ou sur le côté.
La probabilité de gagner au Loto la semaine prochaine est difficile à calculer et demande des compétences de lycée.

— Si toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité de se réaliser, on dit que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. On parle aussi de loi de probabilité uniforme. Dans ce cas la probabilité d'un événement se calcule de la manière suivante :

$$\text{Probabilité de l'événement} = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à cet événement}}{\text{Nombre d'issues totales}}$$

Le lancer d'une pièce de monnaie non truquée, d'un dé cubique équilibré, la prise d'une boule non discernable au toucher... sont autant d'expériences aléatoires dont les issues sont équiprobables.

Expérience aléatoire à deux épreuves :

— Une expérience aléatoire à deux épreuves est constituée de deux épreuves indépendantes de deux expériences aléatoires à une épreuve.
On lance deux dés cubiques pour en faire la somme, on lance deux pièces de monnaies équilibrée, on fait tourner une roue et on pioche une boule... voici des expériences aléatoires à deux épreuves.

— Il faut bien choisir la définition des issues en veillant à ce qu'elles soient équiprobables. On utilise souvent pour cela un tableau à deux entrées ou un arbre.
On lance deux dés équilibrés et on fait la somme. Voici les issues possibles sous forme de tableau :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 36 issues équiprobables.
La probabilité d'obtenir un 7 est égale à $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ soit environ $16,7$ %.
La probabilité d'obtenir un nombre premier est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ soit environ $41,7$ %.
La probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 9 vaut $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ soit environ $27,8$ %

V — Annexes

1 Exercices

Exercice n° 8.1 : Une urne et des boules

Une urne contient des boules indiscernables au toucher :

— 2 boules vertes;

— 5 boules bleues;

— 1 boules noires;

— 4 boules blanches.

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ou une boule bleue?

4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une boule noire?

Exercice n° 8.2 : Une urne et des boules alphabétiques

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

ANTICONSTITUTIONNELLEMENT

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES**?

4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**?

5. Quelle est la probabilité d'obtenir un **J**?

EXERCICE N° 8.1 : Une urne et des boules

CORRECTION

L'expérience aléatoire consiste à choisir un boule indiscernable au toucher dans une urne contenant $2+5+1+4=12$ boules.
Comme elles sont indiscernables au toucher, nous pouvons dire que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a 5 boules bleues et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{5}{12} \approx 0,42$ soit environ 42 %.

2. Il y a 4 boules blanches et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

3. Il y a 2 boules vertes et 4 boules bleues. Il y a donc 6 boules sur 12 qui conviennent.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

4. Il y a 1 boule noire, il reste donc 11 boules non noires sur 12.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{11}{12} \approx 0,92$ soit environ 92 %.

EXERCICE N° 8.2 : Une urne et des boules alphabétiques

CORRECTION

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres !
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

2. Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

3. Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1=14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\frac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

4. Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2=10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\frac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

5. Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.

La probabilité cherchée est 0 %.

2 Évaluations

Évaluation de mathématiques

Exercice 1 : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

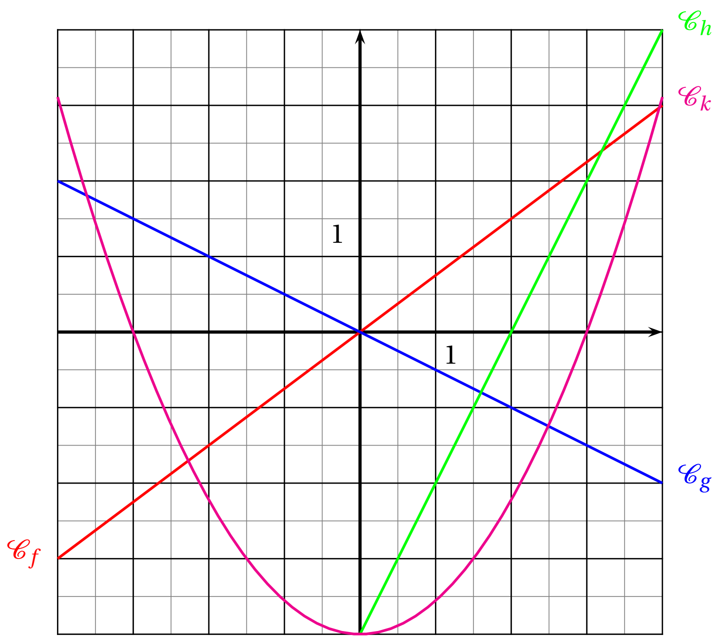
2. Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

3.a. En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.
3.b. Quels sont les antécédents de 30 par la fonction f ?

4. Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

5.a. Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$
5.b. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice 2



Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions f, g, h et k.

1. Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

2. Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions f, g, h et k.

3. Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

4. Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

Exercice 3
J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans les paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?
2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?
5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?
6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Évaluation de mathématiques

Correction

Exercice 1 : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$
$f(x) = (25x^2 - 30x + 9) - (20x^2 + 35x - 12x - 21)$

Il faut séparer les deux parties de l'expression pour ne pas commettre d'erreur.
Pour développer $(5x-3)^2$ on peut écrire $(5x-3)(5x-3)$ et utiliser la méthode habituelle.

$f(x) = 25x^2 - 30x + 9 - 20x^2 - 35x + 12x + 21$

Attention au changement de signe. Le moins devant la seconde parenthèse signifie « prendre l'opposé »de l'expression entre parenthèse.

$\boxed{f(x) = 5x^2 - 53x + 30}$

2. Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

Il suffit de remplacer x par 0 et par -1 en utilisant la forme développée : c'est plus rapide !

$f(0) = 5 \times 0^2 - 53 \times 0 + 30 = \boxed{30}$

$f(-1) = 5 \times (-1)^2 - 53 \times (-1) + 30$

Attention à $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ et par -1 !!

$f(-1) = 5 \times 1 + 53 + 30 = \boxed{88}$

3.a. En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.

Il faut résoudre :

$$5x^2 - 53x + 30 = 30$$

$$5x^2 - 53x = 0$$

Quand on voit une équation avec un x^2 il faut penser à l'équation produit et donc essayer de factoriser !

$$5x \times x - 53 \times x = 0$$

$$x(5x - 53) = 0$$

$x(5x-53)$ est bien la forme factorisée de $5x^2 - 53x$ il suffit de développer pour s'en rendre compte.

$$x(5x - 53) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

En clair, $x(5x-53)$ est le produit de x par $5x-53$. Pour que ce produit soit égal à 0 il faut que l'un des deux facteurs soit nul. Nous allons donc résoudre deux équations.

	$5x - 53 = 0$
	$5x - 53 + 53 = 53$
$x = 0$	$5x = 53$

$$x = \frac{53}{5} = 10{,}6$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5}}$.

3.b. Quels sont les antécédents de 30 par la fonction f ?

Les antécédents de 30 par f sont les nombres x tels que $f(x) = 30$, c'est-à-dire les nombres dont l'image est 30. Ce sont donc les solutions de l'équation précédente.

$\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5} \text{ sont les antécédents de 30 par } f.}$

4. Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

On reconnaît une forme factorisée, on peut la développer pour démontrer le résultat.

$(5x-3)(x-10) = 5x^2 - 50x - 3x + 30 = 5x^2 - 53x + 30$

On obtient bien le résultat attendu !

On peut aussi tenter de factoriser l'expression de départ.

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

$f(x) = (5x-3)(5x-3) - (5x-3)(4x+7)$

$f(x) = (5x-3)[(5x-3) - (4x+7)]$

$f(x) = (5x-3)(5x-3-4x-7)$

$\boxed{f(x) = (5x-3)(x-10)}$

5.a. Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$

On reconnaît encore une forme factorisée.

$$(5x-3)(x-10) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x - 3 = 0$$

$$5x - 3 + 3 = 3$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$x - 10 = 0$$

$$x - 10 + 10 = 10$$

$$x = 10$$

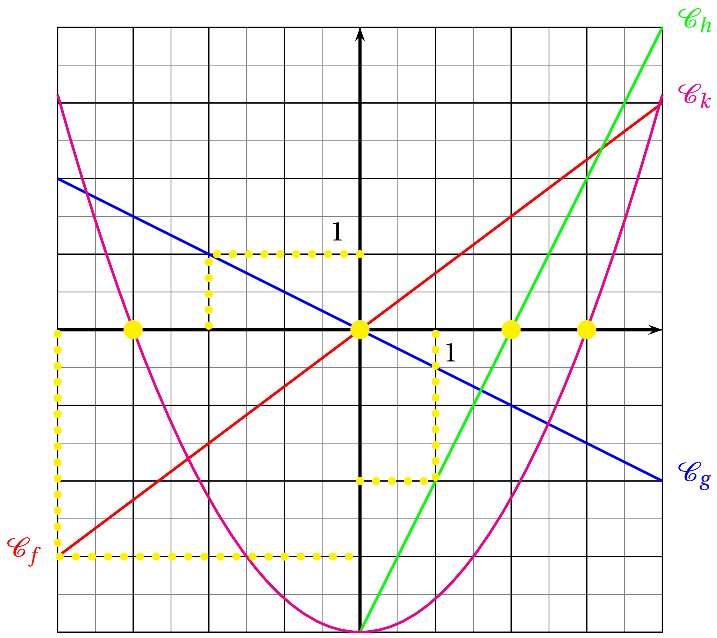
Il y a deux solutions : $\boxed{0{,}6 \text{ et } 10}$

5.b. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Je joue une nouvelle fois avec le vocabulaire : les antécédents de 0 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } 0{,}6 \text{ et } 10.}$

Exercice 2



Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions f, g, h et k.

1. Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

f est représentée graphiquement par la droite orange. Le point de cette droite ayant pour abscisse -4 a pour ordonnée -3.
Donc $\boxed{f(-4) = -3}$

g est représentée graphiquement par la droite bleue. Le point de cette droite ayant pour abscisse -2 a pour ordonnée 1.
Donc $\boxed{g(-2) = 1}$

h est représentée graphiquement par la droite verte. Le point de cette droite ayant pour abscisse 1 a pour ordonnée -2.
Donc $\boxed{h(1) = -2}$

k est représentée graphiquement par la parabole (oui cela s'appelle comme cela !) rose. Le point de cette courbe ayant pour abscisse -3 a pour ordonnée 0.
Donc $\boxed{k(-3) = 0}$

2. Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions f, g, h et k.

Les antécédents de 0 pour chaque fonction correspondent aux abscisses des points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses, en effet sur l'axe des abscisses les ordonnées sont égales 0.

La droite qui représente f coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{0 \text{ est l'antécédent de } 0 \text{ par } f}$.

La droite qui représente g coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{0 \text{ est l'antécédent de } 0 \text{ par } g}$.

La droite qui représente h coupe l'axe des abscisses en $(2;0)$ donc $\boxed{2 \text{ est l'antécédent de } 0 \text{ par } h}$.

La parabole qui représente k coupe l'axe des abscisses en $(-3;0)$ et $(3;0)$ donc $\boxed{-3 \text{ et } 3 \text{ sont les antécédents de } 0 \text{ par } k}$.

3. Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

D'après le cours, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont linaires.}}$

4. Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

f est linéaire. Donc il existe un nombre a tel que pour tous les nombres x on a $f(x) = a \times x$

Or nous avons vu que $f(-4) = -3$, nous pouvons donc calculer a.

$f(-4) = a \times -4 = -3$ donc $a = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

Ainsi $f(x) = 0,75x$ d'où $\boxed{f(10) = 0,75 \times 10 = 7,5}$

De même $g(-2) = 1$ donc comme $g(x) = a \times x$ on a $a \times (-2) = 1$ d'où $a = \dfrac{1}{-2} = -0,5$

Ainsi $g(x) = -0,5x$ et $\boxed{g(50) = -0,5 \times 50 = -25}$

Exercice 3

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquet que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisis sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

1. Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?

L'expérience aléatoire considérée est à une épreuve, elle consiste choisir un bonbon sans regarder. Nous sommes donc dans un modèle d'équiprobabilité.

Il y a $1+1+1+2 = 5$ bonbons dans le paquet.

Deux bonbons sont mes préférés. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

2. Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?

Il y a un seul bonbon au réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{1}{5} = 0,2 \text{ soit } 20\%}$

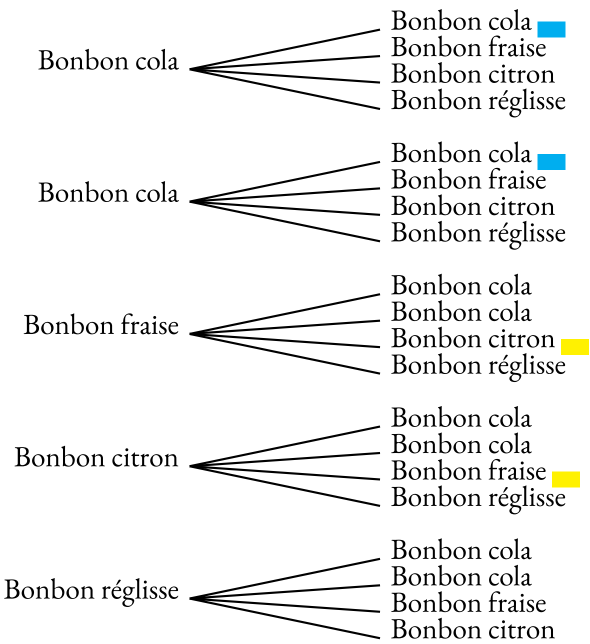
3. Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Deux bonbons sont au citron ou à la fraise. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

4. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?

Nous sommes maintenant dans une expérience aléatoire à deux épreuves, nous pouvons la modéliser sous forme d'un arbre.



Il y a 20 branches équiprobables.

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

5. Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?

C'est impossible puisqu'il n'y a qu'un bonbon réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } 0.}$

6. Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

Pour rester en forme en mathématiques...

Voici une sélection d'exercices qui couvrent trois thèmes du programme de troisième.
Chaque thème est décliné en trois niveaux d'expertise :

— ✵— Maîtrise satisfaisante (le niveau attendu pour le Brevet) ;
— ✵✵— Très bonne maîtrise (le niveau recommandé pour le lycée général) ;
— ✵✵✵— Hors catégorie (pour les passionnés qui aiment se creuser la tête).

À vous d'essayer d'aller le plus loin possible !

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✵

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$
$B(x) = (2-3x)(6-7x)$
$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$
$D(x) = (2x+3)^2$
$E(x) = (5x-3)^2 - 9$
$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$
$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$
$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$
$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1) = 0$$
$$(6x-3)(1+7x) = 0$$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✵✵

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x) = x^2 - 9$
$L(x) = 25x^2 - 49$
$M(x) = (5x-1)^2 - 16$
$N(x) = (3x+7)^2 - (4x-1)^2$

2. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-3)(3x-1) + (5x-3)(2x-1) = 0$$
$$(4x-3)^2 - (4x-3)(5x-1) = 0$$
$$(3x-2)^2 = 25$$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✵✵✵

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

1. Développer $(x-7)^2$

2. Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

3. Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

Défi. Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✻

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.

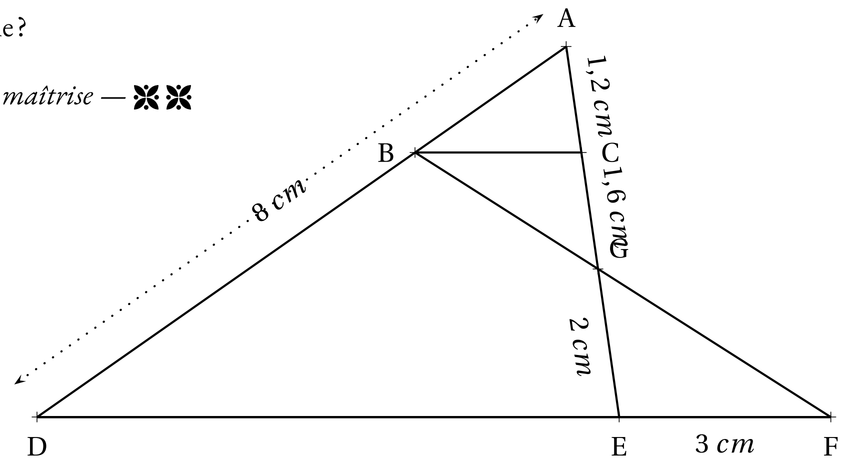
2. Calculer les longueurs BD et AE.

3. Calculer les longueurs EF et FC.

4. Calculer la longueur AF.

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

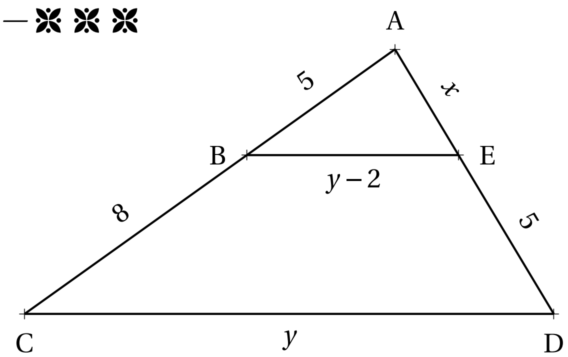
- D, E et F sont alignés ;
- A, B et D sont alignés ;
- A, C, G et E sont alignés ;
- (BC)//(DF).

1. Calculer BC.

2. Calculer DE et AB.

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✻ ✻ ✻



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs :

- les grandeurs indiquées sont exprimées en mètres ;
- A, B et C sont alignés ;
- A, E et D sont alignés ;
- (BE)//(CD).

Calculer la valeur exacte de x et de y.

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

Conjecture n° 1 : : $\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{4}$ est un nombre négatif.

Conjecture n° 2 : : $\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{7}$ est égal à 0.

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x-3=4x+13$.

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✱✱

Conjecture n° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Conjecture n° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

Conjecture n° 10 : : $\dfrac{5}{3}$ et $-\dfrac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✱✱✱

Conjecture n° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Conjecture n° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
- Le multiplier par 13;
- Enlever 5 au résultat précédent;
- Multiplier le tout par 11;
- Ajouter 49 au résultat précédent;
- Multiplier par 7;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Conjecture n° 15 : : $1+2+3+4+5+...+100$ est égal à 5 050

Pour rester en forme en mathématiques...

Correction

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$

$A(x) = 15x^2 + 9x + 25x + 15$

$\boxed{A(x) = 15x^2 + 34x + 15}$

$B(x) = (2-3x)(6-7x)$

$B(x) = 12 - 14x - 18x + 21x^2$

$\boxed{B(x) = 21x^2 - 32x + 12}$

$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$

$C(x) = -12x - 28x^2 + 9 + 21x$

$\boxed{C(x) = -28x^2 + 9x + 9}$

$D(x) = (2x+3)^2$

$D(x) = (2x+3)(2x+3)$

$D(x) = 4x^2 + 6x + 6x + 9$

$\boxed{D(x) = 4x^2 + 12x + 9}$

On pouvait aussi utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Cela revient à calculer mentalement le terme $2ab$ c'est-à-dire ici le double de $6x$.

Cette méthode est recommandée pour les futurs élèves de seconde générale !

$E(x) = (5x-3)^2 - 9$

$E(x) = (5x-3)(5x-3) - 9$

$E(x) = 25x^2 - 15x - 15x + 9 - 9$

$\boxed{E(x) = 25x^2 - 30x}$

$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

$F(x) = 30x^2 + 24x - 15x - 12$

$\boxed{F(x) = 30x^2 + 9x - 12}$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)[(2x-3) + (4x+5)]$

$G(x) = (5x-1)(2x-3+4x+5)$

$\boxed{G(x) = (5x-1)(6x+2)}$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)[(2x+9) - (2x-9)]$

$H(x) = (6x-1)(2x+9-2x+9)$

Attention au changement de signe !

$H(x) = (6x-1) \times 18$

$\boxed{H(x) = 18(6x-1)}$

$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)(5x-2) + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)[(5x-2) + (3x-1)]$

$I(x) = (5x-2)(5x-2+3x-1)$

$\boxed{I(x) = (5x-2)(8x-3)}$

$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)(3x-1) - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)[(3x-1) - (6x+1)]$

$J(x) = (3x-1)(3x-1-6x-1)$

Attention au changement de signe !

$\boxed{J(x) = (3x-1)(-3x-2)}$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}\approx 0,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,4 \text{ et } \frac{1}{3}}$

$$(6x-3)(1+7x)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$6x-3=0$$
$$6x-3+3=3$$
$$6x=3$$
$$x=\frac{3}{6}=0,5$$

$$1+7x=0$$
$$1+7x-1=-1$$
$$7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}\approx -0,14$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,5 \text{ et } -\frac{1}{7}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x)=x^2-9$

On utilise l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$K(x)=x^2-3^2$

$\boxed{K(x)=(x+3)(x-3)}$

$L(x)=25x^2-49$

$L(x)=(5x)^2-7^2$

$\boxed{L(x)=(5x+7)(5x-7)}$

$N(x)=(3x+7)^2-(4x-1)^2$

Ici $A=(3x+7)$ et $B=(4x-1)$

$N(x)=[(3x+7)+(4x-1)]\,[(3x+7)-(4x-1)]$

$N(x)=[3x+7+4x-1]\,[3x+7-4x+1]$

$\boxed{N(x)=(7x+6)(-x+8)}$

$M(x)=(5x-1)^2-16$

$M(x)=(5x-1)^2-4^2$

On utilise à nouveau l'identité $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Ici $A=(5x-1)$ et $B=4$

$M(x)=[(5x-1)+4]\,[(5x-1)-4]$

$M(x)=[5x-1+4]\,[5x-1-4]$

$\boxed{M(x)=(5x+3)(5x-5)}$

2. Résoudre les équations suivantes :

Aucune des équations suivantes ne peut être résolue tel quel. Il ne faut pas développer ces expressions, car la présence d'un terme en x^2 empêche la résolution (Voir la troisième partie).
La bonne idée consiste à factoriser ces expressions puis à utiliser la propriété « du produit nul ».

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)\left[(3x-1)+(2x-1)\right]=0$$

$$(5x-3)(3x-1+2x-1)=0$$

$$(5x-3)(5x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-3=0$$

$$5x-3+3=3$$

$$5x=3$$

$$x=\frac{3}{5}=0,6$$

$$5x-2=0$$

$$5x-2+2=2$$

$$5x=2$$

$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 0,4}$

$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)(4x-3)+(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)\left[(4x-3)-(5x-1)\right]=0$$

$$(4x-3)(4x-3-5x+1)=0$$

$$(4x-3)(-x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$4x-3=0$$

$$4x-3+3=3$$

$$4x=3$$

$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

$$-x-2=0$$

$$-x-2+2=2$$

$$-x=2$$

$$x=-2$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,75 \text{ et } -2}$

$$(3x-2)^2 = 25$$

C'est un cas difficile. Il faut penser à « faire apparaître »un zéro d'un côté de l'égalité puis factoriser l'expression en s'inspirant de l'identité remarquable $a^2 - b^2$

$$(3x-2)^2 - 25 = 25 - 25$$
$$(3x-2)^2 - 25 = 0$$
$$(3x-2)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(3x-2)+5]\,[(3x-2)-5] = 0$$
$$[3x-2+5]\,[3x-2-5] = 0$$
$$(3x+3)(3x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$3x+3 = 0$$
$$3x+3-3 = -3$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3} = 1$$

$$3x-7 = 0$$
$$3x-7+7 = 7$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{1 \text{ et } \frac{7}{3}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✵✵✵

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

Vous ne savez pas résoudre une telle équation en troisième. Ces équations avec un terme en x^2 s'appelle des équations du second degré. Vous saurez les résoudre directement en première. En attendant, l'exercice propose une version simplifiée de la méthode. Le principe de cette méthode consiste à reconnaître le début d'une identité remarquable du type $(a+b)^2$ ou $(a-)^2$ puis d'effectuer la factorisation de $a^2 - b^2$

1. Développer $(x-7)^2$

$(x-7)^2 = \boxed{x^2 - 14x + 49}$
L'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

$(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 49 - 25$
$\boxed{(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 24}$

3. Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

Nous allons utiliser l'identité $a^2 - b^2$ pour factoriser cette expression.

$$(x-7)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x-7)+5]\,[(x-7)-5] = 0$$
$$[x-7+5]\,[x-7-5] = 0$$
$$(x-2)(x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$x-2 = 0$$
$$x-2+2 = 2$$
$$x = 2$$

$$x-12 = 0$$
$$x-12+12 = 12$$
$$x = 12$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{2 \text{ et } 12}$
Vérifions : $2^2 - 14 \times 2 + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$ et $12^2 - 14 \times 12 = 144 - 168 + 24 = 0$
Ainsi 2 et 12 sont bien les solutions attendues !

Défi. Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

C'est une question très difficile. Nous allons utiliser le plan de la première partie !

Observons l'expression $x^2 + 8x - 9$. On veut que le début de l'expression ressemble à l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Comme $x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x$, on pense à l'identité $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. C'est assez proche de l'expression cherchée.
L'écart entre les deux expressions est : $(x^2 + 8x + 16) - (x^2 + 8x - 9) = 16 + 9 = 25$.
Donc finalement $x^2 + 8x - 9 = (x^2 + 8x + 16) - 25 = (x+4)^2 - 25$
Or nous savons factoriser l'expression $(x+4)^2 - 25$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2$.
Voici donc la résolution :

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+4)^2 - 25 = 0$$
$$(x+4)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x+4)+5]\,[(x+4)-5] = 0$$
$$[x+4+5]\,[x+4-5] = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$x+9 = 0$$
$$x+9-9 = -9$$
$$x = -9$$

$$x-1 = 0$$
$$x-1+1 = 1$$
$$x = 1$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-9 \text{ et } 1}$

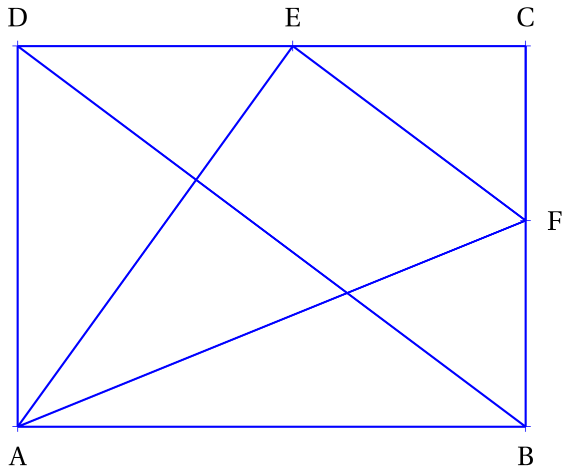
Vérifions : $1^2 + 8 \times 1 - 9 = 1 + 8 - 9 = 0$ et $(-9)^2 + 8 \times (-9) - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✜

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.



2. Calculer les longueurs BD et AE.

Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{BD}^2$$
$$96^2 + 72^2 = \mathrm{BD}^2$$
$$\mathrm{BD}^2 = 9\,216 + 5\,184$$
$$\mathrm{BD}^2 = 14\,400$$
$$\mathrm{BD} = \sqrt{14\,400}$$
$$\mathrm{BD} = 120$$

$\boxed{\mathrm{BD} = 120\ mm}$

Dans le triangle ADE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{DA}^2 + \mathrm{DE}^2 = \mathrm{AE}^2$$
$$72^2 + 52^2 = \mathrm{AE}^2$$
$$\mathrm{AE}^2 = 5\,184 + 2\,704$$
$$\mathrm{AE}^2 = 7\,888$$
$$\mathrm{AE} = \sqrt{7\,888}$$
$$\mathrm{AE} \approx 88,8$$

$\boxed{\mathrm{AE} = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

3. Calculer les longueurs EF et FC.

Dans le triangle DCB, $E \in [DC]$ et $F \in [CB]$
Les droites (DB) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{DB}$$
$$\frac{96\ mm - 52\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$
$$\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm}$ alors $CF = \frac{72\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 33\ mm$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$ alors $EF = \frac{120\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 55\ mm$

Ainsi $\boxed{CF = 33\ mm \text{ et } EF = 55\ mm}$

4. Calculer la longueur AF.

Dans le triangle AFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$
$$96^2 + (72 - 33)^2 = AF^2$$
$$AF^2 = 96^2 + 39^2$$
$$AF^2 = 9\,216 + 1\,521$$
$$AF^2 = 10\,737$$
$$AF = \sqrt{10\,737}$$
$$AF \approx 103,6$$

$\boxed{AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF nous avons $EF = 55\ mm$, $EA = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm$ et $AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm$.

Comparons AF^2 et $EF^2 + EA^2$

Pour calculer AF^2 on peut passer par la valeur approchée, mais il est plus rigoureux d'utiliser la valeur exacte.
En effet $AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$ d'après la définition de la racine carrée !

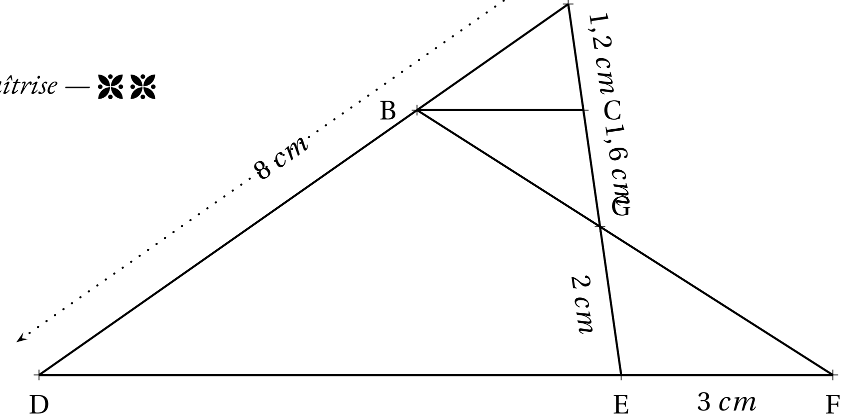
$AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$

$EF^2 + EA^2 = 55^2 + (\sqrt{7\,888})^2 = 3\,025 + 7\,888 = 10\,913$

On constate ainsi que $EF^2 + EA^2 \neq AF^2$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAF n'est pas rectangle}}$.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✷✷



1. Calculer BC.

La difficulté consiste à se demander dans quelle configuration on se place !

Les droites (BF) et (EC) se coupent en G. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{GE}} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}$$

$$\frac{1,6\,cm}{2\,cm} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{BC}}{3\,cm}$$

Comme $\frac{1,6\,cm}{2\,cm} = \frac{\mathrm{BC}}{3\,cm}$ on a $\mathrm{BC} = \frac{3\,cm \times 1,6\,cm}{2\,cm} = 2,4\,cm$

$\boxed{\mathrm{BC} = 2,4\,cm}$

2. Calculer DE et AB.

Dans le triangle ADE, B ∈ [AD] et C ∈ [AE]. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DE}}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{8\,cm} = \frac{1,2\,cm}{1,6\,cm + 2\,cm} = \frac{2,4\,cm}{\mathrm{DE}}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{8\,cm} = \frac{1,2\,cm}{3,6\,cm} = \frac{2,4\,cm}{\mathrm{DE}}$$

Comme $\frac{\mathrm{AB}}{8\,cm} = \frac{1,2\,cm}{3,6\,cm}$ on a $\mathrm{AB} = \frac{8\,cm \times 1,2\,cm}{3,6\,cm} = \frac{9,6}{3,6}\,cm \approx 2,7\,cm$

Comme $\frac{2,4\,cm}{\mathrm{DE}} = \frac{1,2\,cm}{3,6\,cm}$ on a $\mathrm{DE} = \frac{2,4\,cm \times 3,6\,cm}{1,2\,cm} = 7,2\,cm$

$\boxed{\mathrm{AB} \approx 2,7\,cm \text{ à } 0,1\,cm \text{ près et } \mathrm{DE} = 7,2\,cm}$

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

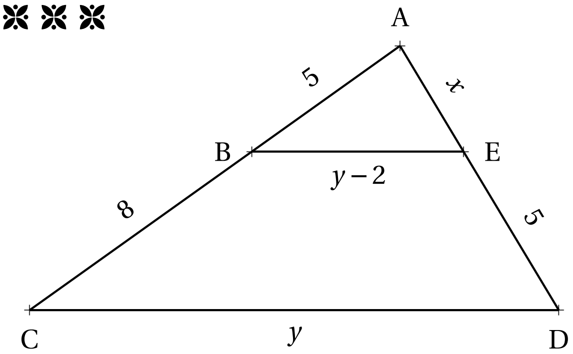
Comme les deux droites (BE) et (AF) coupent les droites (AD) et (DF) sécantes en D,

Nous allons comparer les quotients $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}}$ et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}}$

$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}} = \frac{8\,cm - 2,7\,cm}{8\,cm} = \frac{5,3\,cm}{8\,cm} \approx 0,66$ et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}} = \frac{7,2\,cm}{7,2\,cm + 3\,cm} = \frac{7,2\,cm}{10,2\,cm} \approx 0,71$

Comme $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}} \neq \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (BE) et (AF) ne sont pas parallèles.}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ※ ※ ※



Calculer la valeur exacte de x et de y.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD].
Comme (BE)//(CD), d'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{5}{5+8} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

Nous allons utiliser la propriété des produits en croix pour obtenir des équations que nous savons résoudre.

Comme $\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5}$ on en déduit que $5 \times (x+5) = 13 \times x$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$5(x+5) = 13x$$

$$5x + 25 = 13x$$

$$5x + 25 - 5x = 13x - 5x$$

$$25 = 8x$$

$$8x = 25$$

$$x = \frac{25}{8} = 3,125$$

Comme $\frac{5}{13} = \frac{y-2}{y}$ on en déduit que $5 \times y = 13 \times (y-2)$.
Il faut résoudre l'équation :

$$5y = 13(y-2)$$

$$5y = 13y - 26$$

$$5y - 5y = 13y - 26 - 5y$$

$$0 = 8y - 26$$

$$26 = 8y - 26 + 26$$

$$26 = 8y$$

$$8y = 26$$

$$y = \frac{26}{8} = 3,25$$

$\boxed{x = 3,125 \text{ et } y = 3,25}$

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

Conjecture n° 1 : : $\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{4}$ est un nombre négatif.

$\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{12}{28}-\dfrac{35}{28}=-\dfrac{23}{28}<0$

$\boxed{\text{Conjecture n° 1 : VRAIE}}$

Conjecture n° 2 : : $\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{7}$ est égal à 0.

Attention à la priorité de la multiplication.

$\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5\times 3}{3\times 7}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{7}=\dfrac{35}{21}-\dfrac{15}{21}=\dfrac{20}{21}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 2 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

$13=13\times 1$: 13 est un multiple de 13 et 13 est premier.

$\boxed{\text{Conjecture n° 3 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x-3=4x+13$.

On peut tester cette proposition de solution :
Pour $x=8$, $6x-3=6\times 8-3=48-3=45$ et $4x+13=4\times 8+13=32+13=45$
Donc 8 est une solution de l'équation.

On peut aussi résoudre cette équation (ce qui prouvera aussi que 8 est la seule solution !).

$$6x-3=4x+13$$
$$6x-3+3=4x+13+3$$
$$6x=4x+16$$
$$6x-4x=4x-4x+16$$
$$2x=16$$
$$x=\frac{16}{2}$$
$$x=8$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 4 : VRAIE}}$

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Le volume de ce pavé droit mesure : $16\ cm\times 11\ cm\times 6\ cm=1\,056\ cm^3$. On sait que $1\text{ L}=1\ dm^3=1\,000\ cm^3$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 5 : VRAIE}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✲✲

CONJECTURE N° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

On peut vérifier sur quelques exemples :
$n=3$ on a $2n+1=2\times3+1=6+1=7$: c'est impair.
$n=10$ on a $2n+1=2\times10+1=20+1=21$: c'est impair.
$n=2020$ on a $2n+1=2\times2020+1=4040+1=4041$: c'est impair !

Un nombre impair est un nombre dont le reste est 1 quand on le divise par 2. Cela signifie par exemple que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair. Pour n un nombre entier positif, $2n$ est un nombre pair puisque c'est un multiple de 2. $2n+1$ est le successeur de $2n$, il est donc impair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 6 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Pour $n=2$ on a $3n=3\times2=6$: c'est un nombre pair. Plus généralement, $3n$ est pair dès que n est pair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 7 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Le volume d'un cylindre s'exprime sous la forme : Aire de la base × Hauteur = $\pi\times R^2\times h$

Le volume d'un cône s'exprime sous la forme : $\frac{1}{3}$ × Aire de la base × Hauteur = $\frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times h$

Le cylindre à un volume de : $\pi\times(5\ cm)^2\times10\ cm=\pi\times25\times10\ cm^3=250\pi\ cm^3$

Le cône à un volume de : $\frac{1}{3}\times\pi\times(12\ cm)^2\times5\ cm=\frac{1}{3}\times144\times5\pi\ cm3=240\pi\ cm^3$

$\boxed{\text{Conjecture n° 8 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

La somme des carrés de deux nombres : $3^2+4^2=9+16=25$
Le carré de la somme de deux nombres : $(3+4)^2=7^2=49$

Comme $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ l'écart entre $(a+b)^2$ et a^2+b^2 est $2ab$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 9 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 10 : : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

Il faut résoudre l'équation : $(9x-15)(15x+35)=0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$9x-15=0$$
$$9x-15+15=15$$
$$9x=15$$
$$x=\frac{15}{9}$$
$$x=\frac{5}{3}$$

$$15x+35=0$$
$$15x+35-35=-35$$
$$15x=-35$$
$$x=-\frac{35}{15}$$
$$x=-\frac{7}{3}$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 10 : VRAIE}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✵✵✵

CONJECTURE N° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$4+5=9$: impair.
$10+17=27$: impair.

Un nombre pair quelconque peut s'écrire $2n$ où n est un entier.
Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n$ et $2p+1$: $2n+2p+1=2(n+p)+1$: on a factorisé 2.
Donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair quelconques peut s'écrire $2k+1$ où $k=n+p$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

| Conjecture n° 11 : VRAIE |

CONJECTURE N° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7+5=12$: pair.
$11+17=28$: pair.

Un premier nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Un second nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n+1$ et $2p+1$: $2n+1+2p+1=2n+2p+2=2(n+p+1)$: on a factorisé 2.
Donc la somme de deux nombres impairs quelconques peut s'écrire $2k$ où $k=n+p+1$.
C'est l'écriture d'un nombre pair !

| Conjecture n° 12 : VRAIE |

CONJECTURE N° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7^2=49$: impair.
$11^2=121$: impair.

Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Le carré d'un nombre impair peut donc s'écrire $(2n+1)^2$
$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$: on a factorisé 2.
Donc le carré d'un nombre impair quelconque peut s'écrire $2k+1$ où $k=2n^2+2n$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

| Conjecture n° 13 : VRAIE |

Conjecture n° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999 ;
- Le multiplier par 13 ;
- Enlever 5 au résultat précédent ;
- Multiplier le tout par 11 ;
- Ajouter 49 au résultat précédent ;
- Multiplier par 7 ;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Testons avec quelques nombres :

Avec 67 : $13 \times 67 = 871$, $871 - 5 = 866$ puis $11 \times 866 = 9\,526$, $9\,526 + 49 = 9\,575$
Et enfin $7 \times 9575 = 67\,025$ puis $67\,025 + 42 = 67\,067$

Avec 567 : $13 \times 567 = 7\,371$, $7\,371 - 5 = 7\,366$ puis $11 \times 7\,366 = 81\,026$, $81\,026 + 49 = 81\,075$
Et enfin $7 \times 81\,075 = 567\,525$ puis $567\,525 + 42 = 567\,567$

Le nombre de départ semble répété deux fois dans le nombre résultat.

Notons x le nombre entier choisi au départ.
On le multiplie par 13 : $13x$
On enlève 5 : $13x - 5$
On multiplie le tout par 11 : $11(13x - 5) = 143x - 55$
On ajoute 49 : $143x - 55 + 49 = 143x - 6$
On multiplie par 7 : $7(143x - 6) = 1\,001x - 42$
On ajoute 42 : $1\,001x - 42 + 42 = 1\,001x$

Ainsi ce programme de calcul revient à multiplier le nombre de départ par 1 001.
En multipliant un nombre par 1 001 on obtient bien l'effet attendu !

Conjecture n° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à 5 050

C'est une question célèbre ! On raconte qu'elle a été posée vers 1784 par un instituteur à une classe d'élèves de 7 ans qu'il voulait punir en leur donnant cette très longue addition. Dans cette classe cependant se trouvait celui qui allait devenir le plus grand mathématicien du XIX ^{e}siècle : Carl Friedrich Gauss. Celui-ci au bout de quelques secondes leva son ardoise avec le bon résultat ! Voici comment il s'y est pris ! Vous attendrez d'être en première pour découvrir les suites arithmétiques et une formule générale qui résoud ce problème

L'idée géniale est d'écrire cette somme dans un sens puis dans l'autre sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & ... & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
S+S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Au lieu d'ajouter horizontalement il faut penser à ajouter verticalement.
On obtient le double de la somme et 100 fois le nombre 101.
Ainsi le double de la somme est égale à $100 \times 101 = 10\,100$

La somme S cherchée vaut donc $10\,100 \div 2 = 5\,050$

$\boxed{\text{Conjecture n° 15 : VRAIE}}$

Pour rester en forme en mathématiques...

Voici une sélection d'exercices qui couvrent trois thèmes du programme de troisième.
Chaque thème est décliné en trois niveaux d'expertise :

— ✾— Maîtrise satisfaisante (le niveau attendu pour le Brevet);
— ✾✾— Très bonne maîtrise (le niveau recommandé pour le lycée général);
— ✾✾✾— Hors catégorie (pour les passionnés qui aiment se creuser la tête).

À vous d'essayer d'aller le plus loin possible !

Thème n° 1 : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✾

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$
$B(x) = (2-3x)(6-7x)$
$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$
$D(x) = (2x+3)^2$
$E(x) = (5x-3)^2 - 9$
$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$
$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$
$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$
$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$7x - 5 = 3x + 2$$

$$11x - 7 = 2x - 9$$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✾✾

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x) = x^2 - 9$
$L(x) = 25x^2 - 49$
$M(x) = (5x-1)^2 - 16$
$N(x) = (3x+7)^2 - (4x-1)^2$

2. Résoudre les équations suivantes :

$$5(4x-1) = 4(4x+3)$$

$$7(2x-4) + 3x - 1 = 3(6x-6) + 3$$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✾✾✾

On pose $f(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$ et $g(x) = (5x-8)^2 - (4x+8)(5x-8)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

2. Calculer $f(4)$ et $f(-\frac{2}{9})$.

3. Calculer $g(\frac{8}{5})$ et $g(16)$.

4. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par f et par g.

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✻

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.

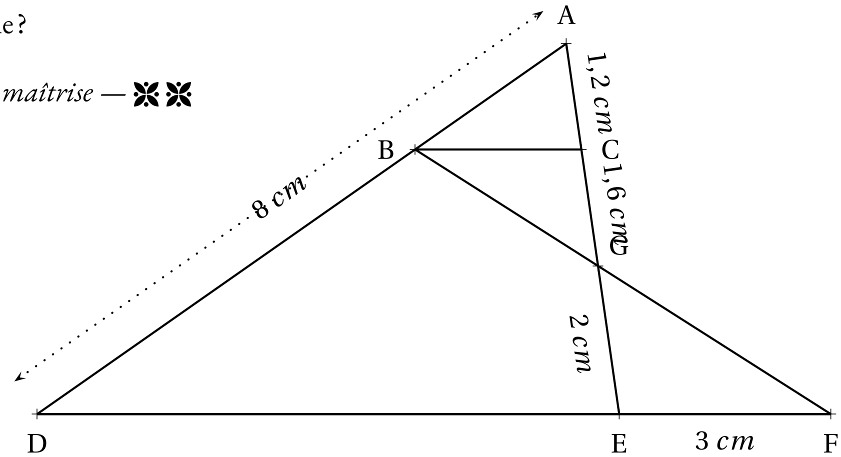
2. Calculer les longueurs BD et AE.

3. Calculer les longueurs EF et FC.

4. Calculer la longueur AF.

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

— D, E et F sont alignés ;

— A, B et D sont alignés ;

— A, C, G et E sont alignés ;

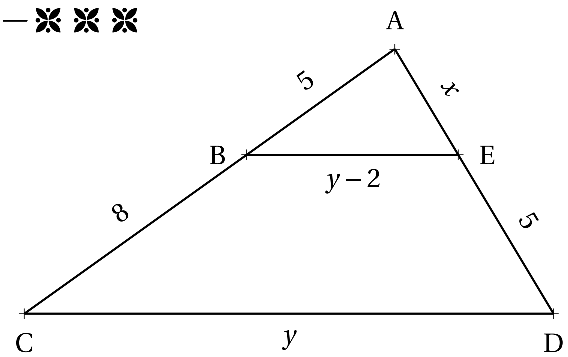
— (BC)//(DF).

1. Calculer BC.

2. Calculer DE et AB.

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✻✻✻



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs :

— les grandeurs indiquées sont exprimées en mètres ;

— A, B et C sont alignés ;

— A, E et D sont alignés ;

— (BE)//(CD).

Calculer la valeur exacte de x et de y.

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✻

Conjecture n° 1 : : $\dfrac{3}{7} - \dfrac{5}{4}$ est un nombre négatif.

Conjecture n° 2 : : $\dfrac{5}{3} - \dfrac{5}{3} \times \dfrac{3}{7}$ est égal à 0.

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x - 3 = 4x + 13$.

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✻✻

Conjecture n° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n + 1$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Conjecture n° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Conjecture n° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

Conjecture n° 10 : : $\dfrac{5}{3}$ et $-\dfrac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x - 15)(15x + 35) = 0$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✻✻✻

Conjecture n° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Conjecture n° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Conjecture n° 14 : : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
- Le multiplier par 13;
- Enlever 5 au résultat précédent;
- Multiplier le tout par 11;
- Ajouter 49 au résultat précédent;
- Multiplier par 7;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Conjecture n° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$ est égal à 5 050

Pour rester en forme en mathématiques...

Correction

Thème n° I : le calcul littéral

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

1. Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$

$A(x) = 15x^2+9x+25x+15$

$\boxed{A(x) = 15x^2+34x+15}$

$B(x) = (2-3x)(6-7x)$

$B(x) = 12-14x-18x+21x^2$

$\boxed{B(x) = 21x^2-32x+12}$

$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$

$C(x) = -12x-28x^2+9+21x$

$\boxed{C(x) = -28x^2+9x+9}$

$D(x) = (2x+3)^2$

$D(x) = (2x+3)(2x+3)$

$D(x) = 4x^2+6x+6x+9$

$\boxed{D(x) = 4x^2+12x+9}$

On pouvait aussi utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
Cela revient à calculer mentalement le terme $2ab$ c'est-à-dire ici le double de $6x$.

Cette méthode est recommandée pour les futurs élèves de seconde générale !

$E(x) = (5x-3)^2-9$

$E(x) = (5x-3)(5x-3)-9$

$E(x) = 25x^2-15x-15x+9-9$

$\boxed{E(x) = 25x^2-30x}$

$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

$F(x) = 30x^2+24x-15x-12$

$\boxed{F(x) = 30x^2+9x-12}$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3)+(5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)(2x-3)+(5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)[(2x-3)+(4x+5)]$

$G(x) = (5x-1)(2x-3+4x+5)$

$\boxed{G(x) = (5x-1)(6x+2)}$

$H(x) = (6x-1)(2x+9)-(2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)(2x+9)-(2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)[(2x+9)-(2x-9)]$

$H(x) = (6x-1)(2x+9-2x+9)$

Attention au changement de signe !

$H(x) = (6x-1)\times 18$

$\boxed{H(x) = 18(6x-1)}$

$I(x) = (5x-2)^2+(5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)(5x-2)+(5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)[(5x-2)+(3x-1)]$

$I(x) = (5x-2)(5x-2+3x-1)$

$\boxed{I(x) = (5x-2)(8x-3)}$

$J(x) = (3x-1)^2-(6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)(3x-1)-(6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)[(3x-1)-(6x+1)]$

$J(x) = (3x-1)(3x-1-6x-1)$

Attention au changement de signe !

$\boxed{J(x) = (3x-1)(-3x-2)}$

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}\approx 0,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,4 \text{ et } \frac{1}{3}}$

$$(6x-3)(1+7x)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$6x-3=0$$
$$6x-3+3=3$$
$$6x=3$$
$$x=\frac{3}{6}=0,5$$

$$1+7x=0$$
$$1+7x-1=-1$$
$$7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}\approx -0,14$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,5 \text{ et } -\frac{1}{7}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✖✖

1. Factoriser les expressions suivantes :

$K(x)=x^2-9$

On utilise l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$K(x)=x^2-3^2$

$\boxed{K(x)=(x+3)(x-3)}$

$L(x)=25x^2-49$

$L(x)=(5x)^2-7^2$

$\boxed{L(x)=(5x+7)(5x-7)}$

$M(x)=(5x-1)^2-16$

$M(x)=(5x-1)^2-4^2$

On utilise à nouveau l'identité
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Ici $A=(5x-1)$ et $B=4$

$M(x)=[(5x-1)+4]\,[(5x-1)-4]$

$M(x)=[5x-1+4]\,[5x-1-4]$

$\boxed{M(x)=(5x+3)(5x-5)}$

$N(x)=(3x+7)^2-(4x-1)^2$

Ici $A=(3x+7)$ et $B=(4x-1)$

$N(x)=[(3x+7)+(4x-1)]\,[(3x+7)-(4x-1)]$

$N(x)=[3x+7+4x-1]\,[3x+7-4x+1]$

$\boxed{N(x)=(7x+6)(-x+8)}$

2. Résoudre les équations suivantes :

Aucune des équations suivantes ne peut être résolue tel quel. Il ne faut pas développer ces expressions, car la présence d'un terme en x^2 empêche la résolution (Voir la troisième partie).
La bonne idée consiste à factoriser ces expressions puis à utiliser la propriété « du produit nul ».

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)\left[(3x-1)+(2x-1)\right]=0$$

$$(5x-3)(3x-1+2x-1)=0$$

$$(5x-3)(5x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$5x-3=0$$
$$5x-3+3=3$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5}=0,6$$

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 0,4}$

$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)(4x-3)+(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)\left[(4x-3)-(5x-1)\right]=0$$

$$(4x-3)(4x-3-5x+1)=0$$

$$(4x-3)(-x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$4x-3=0$$
$$4x-3+3=3$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

$$-x-2=0$$
$$-x-2+2=2$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,75 \text{ et } -2}$

$$(3x-2)^2 = 25$$

C'est un cas difficile. Il faut penser à « faire apparaître »un zéro d'un côté de l'égalité puis factoriser l'expression en s'inspirant de l'identité remarquable $a^2 - b^2$

$$(3x-2)^2 - 25 = 25 - 25$$

$$(3x-2)^2 - 25 = 0$$

$$(3x-2)^2 - 5^2 = 0$$

$$[(3x-2)+5]\,[(3x-2)-5] = 0$$

$$[3x-2+5]\,[3x-2-5] = 0$$

$$(3x+3)(3x-7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$3x+3 = 0$$

$$3x+3-3 = -3$$

$$3x = -3$$

$$x = \frac{-3}{3} = 1$$

$$3x-7 = 0$$

$$3x-7+7 = 7$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{1 \text{ et } \frac{7}{3}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✸✸✸

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

Vous ne savez pas résoudre une telle équation en troisième. Ces équations avec un terme en x^2 s'appelle des équations du second degré. Vous saurez les résoudre directement en première. En attendant, l'exercice propose une version simplifiée de la méthode. Le principe de cette méthode consiste à reconnaître le début d'une identité remarquable du type $(a+b)^2$ ou $(a-)^2$ puis d'effectuer la factorisation de $a^2 - b^2$

1. Développer $(x-7)^2$

$(x-7)^2 = \boxed{x^2 - 14x + 49}$

L'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

$(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 49 - 25$

$\boxed{(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 24}$

3. Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

Nous allons utiliser l'identité $a^2 - b^2$ pour factoriser cette expression.

$$(x-7)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x-7)+5]\,[(x-7)-5] = 0$$
$$[x-7+5]\,[x-7-5] = 0$$
$$(x-2)(x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$x - 2 = 0$$
$$x - 2 + 2 = 2$$
$$x = 2$$

$$x - 12 = 0$$
$$x - 12 + 12 = 12$$
$$x = 12$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{2 \text{ et } 12}$
Vérifions : $2^2 - 14 \times 2 + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$ et $12^2 - 14 \times 12 = 144 - 168 + 24 = 0$
Ainsi 2 et 12 sont bien les solutions attendues !

Défi. Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

C'est une question très difficile. Nous allons utiliser le plan de la première partie !

Observons l'expression $x^2 + 8x - 9$. On veut que le début de l'expression ressemble à l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Comme $x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x$, on pense à l'identité $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. C'est assez proche de l'expression cherchée.
L'écart entre les deux expressions est : $(x^2 + 8x + 16) - (x^2 + 8x - 9) = 16 + 9 = 25$.
Donc finalement $x^2 + 8x - 9 = (x^2 + 8x + 16) - 25 = (x+4)^2 - 25$
Or nous savons factoriser l'expression $(x+4)^2 - 25$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2$.
Voici donc la résolution :

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+4)^2 - 25 = 0$$
$$(x+4)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x+4)+5]\,[(x+4)-5] = 0$$
$$[x+4+5]\,[x+4-5] = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$x + 9 = 0$$
$$x + 9 - 9 = -9$$
$$x = -9$$

$$x - 1 = 0$$
$$x - 1 + 1 = 1$$
$$x = 1$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-9 \text{ et } 1}$

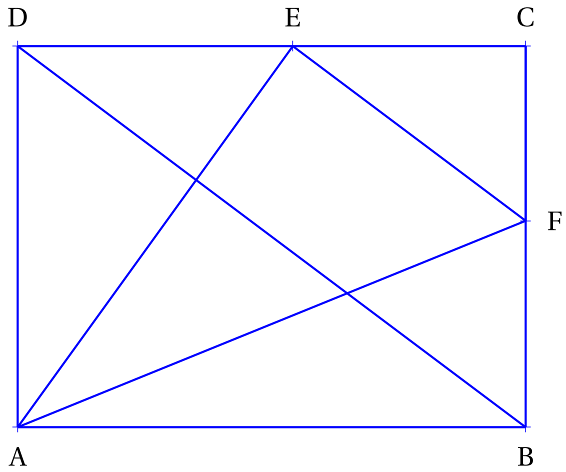
Vérifions : $1^2 + 8 \times 1 - 9 = 1 + 8 - 9 = 0$ et $(-9)^2 + 8 \times (-9) - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$

Thème n° 2 : géométrie

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* —

ABCD est un rectangle avec AB = 96 mm et AD = 72 mm.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 mm.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

1. Réaliser la figure en vraies grandeurs.



2. Calculer les longueurs BD et AE.

Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$
$$96^2 + 72^2 = BD^2$$
$$BD^2 = 9\,216 + 5\,184$$
$$BD^2 = 14\,400$$
$$BD = \sqrt{14\,400}$$
$$BD = 120$$

$\boxed{BD = 120\ mm}$

Dans le triangle ADE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DE^2 = AE^2$$
$$72^2 + 52^2 = AE^2$$
$$AE^2 = 5\,184 + 2\,704$$
$$AE^2 = 7\,888$$
$$AE = \sqrt{7\,888}$$
$$AE \approx 88,8$$

$\boxed{AE = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

3. Calculer les longueurs EF et FC.

Dans le triangle DCB, $E \in [DC]$ et $F \in [CB]$
Les droites (DB) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{DB}$$
$$\frac{96\ mm - 52\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$
$$\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm}$ alors $CF = \frac{72\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 33\ mm$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$ alors $EF = \frac{120\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 55\ mm$

Ainsi $\boxed{CF = 33\ mm \text{ et } EF = 55\ mm}$

4. Calculer la longueur AF.

Dans le triangle AFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$
$$96^2 + (72-33)^2 = AF^2$$
$$AF^2 = 96^2 + 39^2$$
$$AF^2 = 9\,216 + 1\,521$$
$$AF^2 = 10\,737$$
$$AF = \sqrt{10\,737}$$
$$AF \approx 103,6$$

$\boxed{AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

5. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF nous avons $EF = 55\ mm$, $EA = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm$ et $AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm$.

Comparons AF^2 et $EF^2 + EA^2$

Pour calculer AF^2 on peut passer par la valeur approchée, mais il est plus rigoureux d'utiliser la valeur exacte.
En effet $AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$ d'après la définition de la racine carrée !

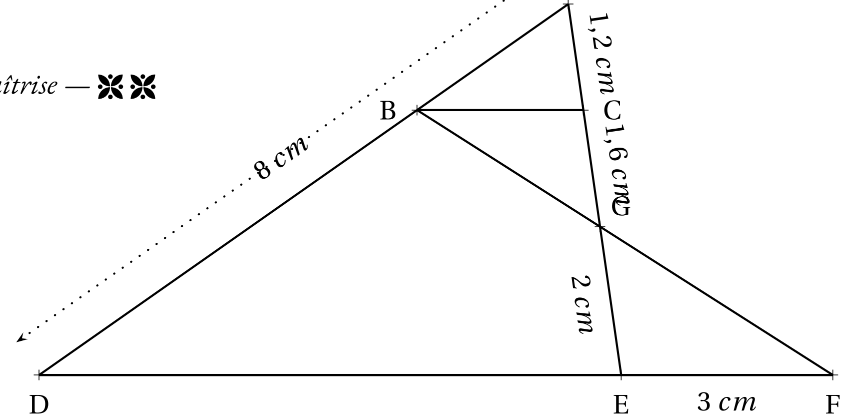
$AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$

$EF^2 + EA^2 = 55^2 + (\sqrt{7\,888})^2 = 3\,025 + 7\,888 = 10\,913$

On constate ainsi que $EF^2 + EA^2 \neq AF^2$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAF n'est pas rectangle}}$.

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✵✵



1. Calculer BC.

La difficulté consiste à se demander dans quelle configuration on se place !

Les droites (BF) et (EC) se coupent en G. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{GC}{GE} = \frac{GB}{GF} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{1,6\ cm}{2\ cm} = \frac{GB}{GF} = \frac{BC}{3\ cm}$$

Comme $\frac{1,6\ cm}{2\ cm} = \frac{BC}{3\ cm}$ on a $BC = \frac{3\ cm \times 1,6\ cm}{2\ cm} = 2,4\ cm$

$\boxed{BC = 2,4\ cm}$

2. Calculer DE et AB.

Dans le triangle ADE, B ∈ [AD] et C ∈ [AE]. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AB}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{1,6\ cm + 2\ cm} = \frac{2,4\ cm}{DE}$$

$$\frac{AB}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm} = \frac{2,4\ cm}{DE}$$

Comme $\frac{AB}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm}$ on a $AB = \frac{8\ cm \times 1,2\ cm}{3,6\ cm} = \frac{9,6}{3,6}\ cm \approx 2,7\ cm$

Comme $\frac{2,4\ cm}{DE} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm}$ on a $DE = \frac{2,4\ cm \times 3,6\ cm}{1,2\ cm} = 7,2\ cm$

$\boxed{AB \approx 2,7\ cm \text{ à } 0,1\ cm \text{ près et } DE = 7,2\ cm}$

3. Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

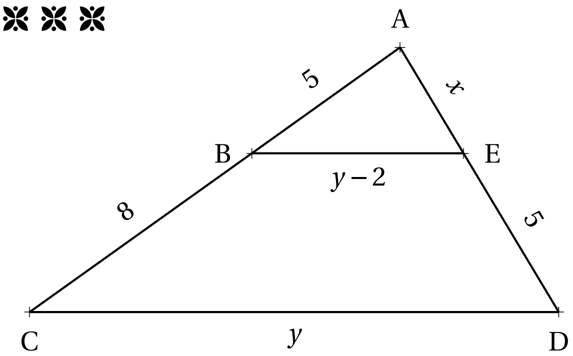
Comme les deux droites (BE) et (AF) coupent les droites (AD) et (DF) sécantes en D,

Nous allons comparer les quotients $\frac{DB}{DA}$ et $\frac{DE}{DF}$

$\frac{DB}{DA} = \frac{8\ cm - 2,7\ cm}{8\ cm} = \frac{5,3\ cm}{8\ cm} \approx 0,66$ et $\frac{DE}{DF} = \frac{7,2\ cm}{7,2\ cm + 3\ cm} = \frac{7,2\ cm}{10,2\ cm} \approx 0,71$

Comme $\frac{DB}{DA} \neq \frac{DE}{DF}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (BE) et (AF) ne sont pas parallèles.}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✤ ✤ ✤



Calculer la valeur exacte de x et de y.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD].
Comme (BE)//(CD), d'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{5}{5+8} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

Nous allons utiliser la propriété des produits en croix pour obtenir des équations que nous savons résoudre.

Comme $\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5}$ on en déduit que $5 \times (x+5) = 13 \times x$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$5(x+5) = 13x$$

$$5x + 25 = 13x$$

$$5x + 25 - 5x = 13x - 5x$$

$$25 = 8x$$

$$8x = 25$$

$$x = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

Comme $\frac{5}{13} = \frac{y-2}{y}$ on en déduit que $5 \times y = 13 \times (y-2)$.
Il faut résoudre l'équation :

$$5y = 13(y-2)$$

$$5y = 13y - 26$$

$$5y - 5y = 13y - 26 - 5y$$

$$0 = 8y - 26$$

$$26 = 8y - 26 + 26$$

$$26 = 8y$$

$$8y = 26$$

$$y = \frac{26}{8} = 3{,}25$$

$\boxed{x = 3{,}125 \text{ et } y = 3{,}25}$

Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

Conjecture n° 1 : : $\frac{3}{7} - \frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

$\frac{3}{7} - \frac{5}{4} = \frac{12}{28} - \frac{35}{28} = -\frac{23}{28} < 0$

$\boxed{\text{Conjecture n° 1 : VRAIE}}$

Conjecture n° 2 : : $\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7}$ est égal à 0.

Attention à la priorité de la multiplication.
$\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{3} - \frac{5 \times 3}{3 \times 7} = \frac{5}{3} - \frac{5}{7} = \frac{35}{21} - \frac{15}{21} = \frac{20}{21}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 2 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 3 : : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

$13 = 13 \times 1$: 13 est un multiple de 13 et 13 est premier.

$\boxed{\text{Conjecture n° 3 : FAUSSE}}$

Conjecture n° 4 : : 8 est la solution de l'équation $6x - 3 = 4x + 13$.

On peut tester cette proposition de solution :
Pour $x = 8$, $6x - 3 = 6 \times 8 - 3 = 48 - 3 = 45$ et $4x + 13 = 4 \times 8 + 13 = 32 + 13 = 45$
Donc 8 est une solution de l'équation.

On peut aussi résoudre cette équation (ce qui prouvera aussi que 8 est la seule solution !).

$$6x - 3 = 4x + 13$$
$$6x - 3 + 3 = 4x + 13 + 3$$
$$6x = 4x + 16$$
$$6x - 4x = 4x - 4x + 16$$
$$2x = 16$$
$$x = \frac{16}{2}$$
$$x = 8$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 4 : VRAIE}}$

Conjecture n° 5 : : Un pavé droit dont les mesures sont 16 cm, 11 cm et 6 cm contient un volume supérieur à 1 L.

Le volume de ce pavé droit mesure : $16\ cm \times 11\ cm \times 6\ cm = 1\,056\ cm^3$. On sait que $1\ \text{L} = 1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 5 : VRAIE}}$

Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✽✽

CONJECTURE N° 6 : : Si n est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

On peut vérifier sur quelques exemples :
$n=3$ on a $2n+1=2\times 3+1=6+1=7$: c'est impair.
$n=10$ on a $2n+1=2\times 10+1=20+1=21$: c'est impair.
$n=2020$ on a $2n+1=2\times 2020+1=4040+1=4041$: c'est impair !

Un nombre impair est un nombre dont le reste est 1 quand on le divise par 2. Cela signifie par exemple que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair. Pour n un nombre entier positif, $2n$ est un nombre pair puisque c'est un multiple de 2. $2n+1$ est le successeur de $2n$, il est donc impair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 6 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 7 : : Si n est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Pour $n=2$ on a $3n=3\times 2=6$: c'est un nombre pair. Plus généralement, $3n$ est pair dès que n est pair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 7 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 8 : : Un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 cm de rayon et de hauteur 5 cm

Le volume d'un cylindre s'exprime sous la forme : Aire de la base × Hauteur = $\pi\times R^2\times h$

Le volume d'un cône s'exprime sous la forme : $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base × Hauteur = $\frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times h$

Le cylindre à un volume de : $\pi\times(5\ cm)^2\times 10\ cm=\pi\times 25\times 10\ cm^3=250\pi\ cm^3$

Le cône à un volume de : $\frac{1}{3}\times\pi\times(12\ cm)^2\times 5\ cm=\frac{1}{3}\times 144\times 5\pi\ cm3=240\pi\ cm^3$

$\boxed{\text{Conjecture n° 8 : VRAIE}}$

CONJECTURE N° 9 : : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

La somme des carrés de deux nombres : $3^2+4^2=9+16=25$
Le carré de la somme de deux nombres : $(3+4)^2=7^2=49$

Comme $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ l'écart entre $(a+b)^2$ et a^2+b^2 est $2ab$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 9 : FAUSSE}}$

CONJECTURE N° 10 : : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

Il faut résoudre l'équation : $(9x-15)(15x+35)=0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$$9x-15=0$$
$$9x-15+15=15$$
$$9x=15$$
$$x=\frac{15}{9}$$
$$x=\frac{5}{3}$$

$$15x+35=0$$
$$15x+35-35=-35$$
$$15x=-35$$
$$x=-\frac{35}{15}$$
$$x=-\frac{7}{3}$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 10 : VRAIE}}$

Troisième partie — *Hors catégorie* — ✲✲✲

Conjecture n° 11 : : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$4+5=9$: impair.
$10+17=27$: impair.

Un nombre pair quelconque peut s'écrire $2n$ où n est un entier.
Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n$ et $2p+1$: $2n+2p+1=2(n+p)+1$: on a factorisé 2.
Donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair quelconques peut s'écrire $2k+1$ où $k=n+p$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 11 : VRAIE

Conjecture n° 12 : : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7+5=12$: pair.
$11+17=28$: pair.

Un premier nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Un second nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où p est un entier.
Effectuons la somme de $2n+1$ et $2p+1$: $2n+1+2p+1=2n+2p+2=2(n+p+1)$: on a factorisé 2.
Donc la somme de deux nombres impairs quelconques peut s'écrire $2k$ où $k=n+p+1$.
C'est l'écriture d'un nombre pair !

Conjecture n° 12 : VRAIE

Conjecture n° 13 : : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7^2=49$: impair.
$11^2=121$: impair.

Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où n est un entier.
Le carré d'un nombre impair peut donc s'écrire $(2n+1)^2$
$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$: on a factorisé 2.
Donc le carré d'un nombre impair quelconque peut s'écrire $2k+1$ où $k=2n^2+2n$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 13 : VRAIE

Conjecture n° 14 : : Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
— Le multiplier par 13;
— Enlever 5 au résultat précédent;
— Multiplier le tout par 11;
— Ajouter 49 au résultat précédent;
— Multiplier par 7;
— Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Testons avec quelques nombres :

Avec 67 : $13 \times 67 = 871$, $871 - 5 = 866$ puis $11 \times 866 = 9\,526$, $9\,526 + 49 = 9\,575$
Et enfin $7 \times 9\,575 = 67\,025$ puis $67\,025 + 42 = 67\,067$

Avec 567 : $13 \times 567 = 7\,371$, $7\,371 - 5 = 7\,366$ puis $11 \times 7\,366 = 81\,026$, $81\,026 + 49 = 81\,075$
Et enfin $7 \times 81\,075 = 567\,525$ puis $567\,525 + 42 = 567\,567$

Le nombre de départ semble répété deux fois dans le nombre résultat.

Notons x le nombre entier choisi au départ.
On le multiplie par 13 : $13x$
On enlève 5 : $13x - 5$
On multiplie le tout par 11 : $11(13x - 5) = 143x - 55$
On ajoute 49 : $143x - 55 + 49 = 143x - 6$
On multiplie par 7 : $7(143x - 6) = 1\,001x - 42$
On ajoute 42 : $1\,001x - 42 + 42 = 1\,001x$

Ainsi ce programme de calcul revient à multiplier le nombre de départ par $1\,001$.
En multipliant un nombre par $1\,001$ on obtient bien l'effet attendu !

Conjecture n° 15 : : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à $5\,050$

C'est une question célèbre ! On raconte qu'elle a été posée vers 1784 par un instituteur à une classe d'élèves de 7 ans qu'il voulait punir en leur donnant cette très longue addition. Dans cette classe cependant se trouvait celui qui allait devenir le plus grand mathématicien du XIX esiècle : Carl Friedrich Gauss. Celui-ci au bout de quelques secondes leva son ardoise avec le bon résultat ! Voici comment il s'y est pris ! Vous attendrez d'être en première pour découvrir les suites arithmétiques et une formule générale qui résoud ce problème

L'idée géniale est d'écrire cette somme dans un sens puis dans l'autre sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & ... & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
S+S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Au lieu d'ajouter horizontalement il faut penser à ajouter verticalement.
On obtient le double de la somme et 100 fois le nombre 101.
Ainsi le double de la somme est égale à $100 \times 101 = 10\,100$

La somme S cherchée vaut donc $10\,100 \div 2 = 5\,050$

$\boxed{\text{Conjecture n° 15 : VRAIE}}$

3 Annexe

Chapitre IX

Les fonctions affines

Sommaire

Situation initiale : La salle de sport 390
I Définition et exemples 396
II Fonction affine et représentation graphique 398
III Fonction affine et accroissements 399
IV Annexe 400
Fiche de synthèse : Les fonctions affines 407

Situation Initiale

La salle de sport
Troisième

✧✧✧

La salle de sport à côté de chez moi propose quatre forfaits :

Forfait All Inclusive	Forfait Cardio	Forfait En forme	Forfait Débutant
Accés illimité Cours et Sauna **100 € par mois**	Accés illimité au cours **45 € par mois** Sauna : 4 € la séance	**14 € par mois** Séances Supplémentaires : — 4,50 € le cours. — 3 € le sauna.	**Pas d'abonnement** 7 € le cours. 5 € la séance de sauna.

Je souhaite me remettre au sport et je me demande quel forfait choisir. Je veux suivre les cours **et faire une séance de sauna à chaque fois** que j'y vais.

Première partie : Analyse rapide

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de visites	All Inclusive	Cardio	En forme	Débutant
1				
2				
5				
8				
10				
12				
15				
20				

2. En observant ce tableau, pouvez-vous me conseiller sur le choix du forfait que je dois faire ?

Deuxième partie : Tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Nombre de visites 0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	
2	All Inclusive 100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
3	Cardio 45	49	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141	149	157	
4	En forme 14	21,5	29	44	59	74	89	104	119	134	149	164	179	194	209	224	
5	Débutant 0	12	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule **B3** puis recopiée vers la droite.
2. Quelle formule a été saisie dans la cellule **B4** puis recopiée vers la droite.
3. Quelle formule a été saisie dans la cellule **B5** puis recopiée vers la droite.
4. Quelle formule a été saisie dans la cellule **I5**.
5. Quelle formule a été saisie dans la cellule **G2**.
6. Quelle formule a été saisie dans la cellule **K5**.

Troisième partie : Analyse graphique et algébrique

On note x le nombre de visites à la salle de sport (cours + sauna), $f(x)$ le prix payé avec **le forfait Débutant**, $g(x)$ avec **le forfait En forme**, h(x) avec **le forfait Cardio** et k(x) avec **le forfait All Inclusive**.

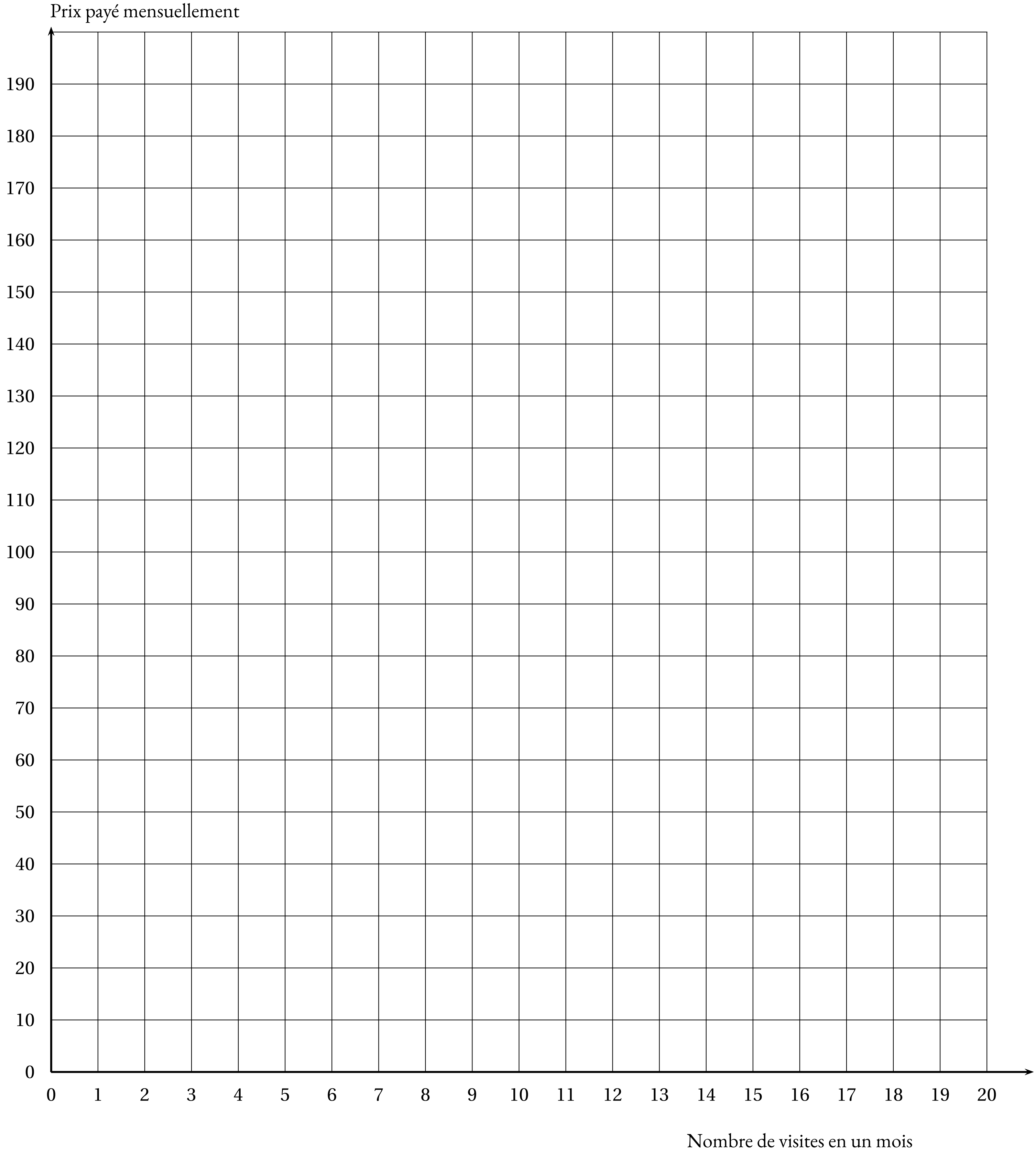
1. Quelle est l'expression algébrique de chacune des fonctions f, g, h et k ? Une de ces fonctions est linéaire. Laquelle ?

2. Dans un repère orthogonal, en prenant 1 cm pour 1 visite en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée, tracer la représentation graphique de chacune de ces fonctions en utilisant le tableau ci-dessus.

3. En observant ce graphique, pouvez-vous préciser vos conseils pour le choix d'un forfait ?

4. Résoudre chacune des équations suivantes : $12x = 7,5x + 14$ $7,5x + 14 = 45 + 4x$

6. Interpréter vos réponses à la question **5.** pour me conseiller sur le choix d'un forfait.



La salle de sport — Correction

Situation Initiale

Correction — La salle de sport

Première partie : Analyse rapide

1. Compléter le tableau suivant :

Pour le forfait All Inclusive, quel que soit le nombre d'entrée on paye toujours 100 €.

Pour le forfait Cardio, il faut payer 45 € d'abonnement et ajouter 4 € par entrée.

Pour le forfait En forme, il faut payer 14 € d'abonnement et ajouter $4,50$ € $+3$ € $= 7,50$ € par entrée.

Pour le forfait Débutant il n'y a pas de forfait, on paye 7 € $+5$ € $= 12$ € par entrée.

Nombre de visites	All Inclusive	Cardio	En forme	Débutant
1	100 €	49 €	21,50 €	12 €
2	100 €	53 €	29 €	24 €
5	100 €	65 €	51,50 €	60 €
8	100 €	77 €	74 €	96 €
10	100 €	85 €	89 €	120 €
12	100 €	93 €	104 €	144 €
15	100 €	105 €	126,50 €	180 €
20	100 €	125 €	164 €	240 €

2. En observant ce tableau, pouvez-vous me conseiller sur le choix du forfait que je dois faire ?

Pour 1 ou 2 visites le forfait le moins cher est le forfait Débutant.

Pour 5 à 8 visites il faut passer au forfait En Forme.

Pour 10 à 12 visites il faut passer au forfait Cardio.

Au-delà de 12 visites le forfait All Inclusive est le moins cher.

Deuxième partie : Analyse graphique et algébrique

1. Quelle est l'expression algébrique de chacune des fonctions f, g, h et k ?

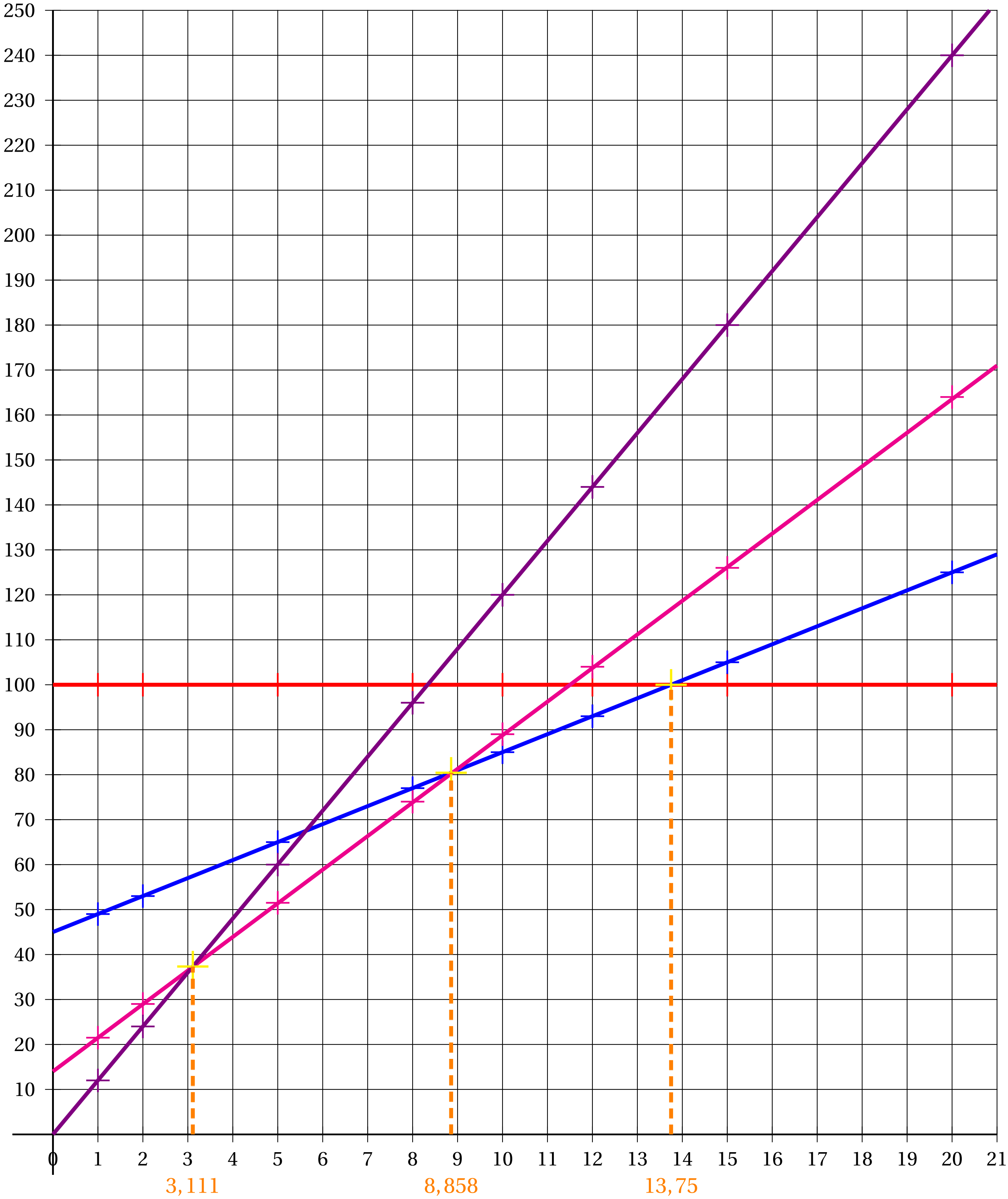
$f(x) = 100$ — $g(x) = 45 + 4x$ — $h(x) = 14 + 7,5x$ — $k(x) = 12x$

2. Une de ces fonctions est linéaire. Laquelle ?

La fonction k est linéaire.

3. Dans un repère orthogonal, en prenant 1 cm pour 1 visite en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée, tracer la représentation graphique de chacune de ces fonctions en utilisant le tableau ci-dessus.

Nous allons représenter les points de la fonction f en rouge, de la fonction g en bleu, de la fonction h en magenta et de la fonction k en violet



On constate que chacune de ces séries de points sont alignés, d'où le tracé des droites.

4. En observant ce graphique, pouvez-vous préciser vos conseils pour le choix d'un forfait ?

On constate en observant le graphique que :

— entre 0 et 3 visites la droite violette montre que le forfait Débutant est le moins cher ;

— entre 3 et 8 visites la droite magenta montre que le forfait En forme est le moins cher ;

— entre 9 et 13 visites la droite bleue montre que le forfait Cardio est le moins cher ;

— à partir de 14 visites la droite rouge montre que le forfait All Inclusive est le moins cher.

5. Résoudre chacune des équations suivantes :

$$12x = 7,5x + 14$$
$$12x - 7,5x = 7,5x - 7,5x + 14$$
$$4,5x = 14$$
$$x = \frac{14}{4,5}$$
$$x \approx 3,11$$

$$7,5x + 14 = 45 + 4x$$
$$7,5x + 14 - 4x = 45 + 4x - 4x$$
$$3,5x + 14 = 45$$
$$3,5x + 14 - 14 = 45 - 14$$
$$3,5x = 31$$
$$x = \frac{31}{3,5}$$
$$x \approx 8,86$$

$$45 + 4x = 100$$
$$45 + 4x - 45 = 100 - 45$$
$$4x = 55$$
$$x = \frac{55}{4}$$
$$x = 13,75$$

6. Interpréter vos réponses à la question **5.** pour me conseiller sur le choix d'un forfait.
Les équations précédentes correspondent aux points d'intersections des droites entre elles qui nous interessent.

Cela correspond donc aussi au nombre de visites où :

— le forfait Débutant est égal au forfait En forme : $3,11$ visites ;
— le forfait En forme est égal au forfait Cardio : $8,86$ visites ;
— le forfait Cardio est égal au forfait All Inclusive : $13,75$ visites.

Voici nos conseils :

— entre 0 et 2 visites il faut choisir le forfait Débutant ;
— entre 3 et 8 visites il faut choisir le forfait En forme ;
— entre 9 et 13 visites il faut choisir le forfait Cardio ;
— à partir de 14 visites il faut choisir le forfait All Inclusive.

I — Définition et exemples

❧ Définition 9.1 :

a et b deux nombres quelconques.

La **fonction affine** de paramètres a et b est la fonction définie ainsi :

$$f : x \to f(x) = ax + b$$

Exemples :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

$m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

Propriété 9.1 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \to ax$ peut s'écrire $x \to ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

Méthode 9.1 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Un cas simple :

f une fonction affine telle que $f(0) = 5$ et $f(2) = -1$.
On cherche l'expression algébrique de la fonction f c'est-à-dire les nombres a et b tel que pour tout nombre x, $f(x) = ax + b$.

Comme $f(0) = 5$ on arrive à $f(0) = a \times 0 + b = b$ c'est-à-dire $b = 5$.
Quand on connaît l'image de 0 par une fonction affine on obtient ainsi le paramètre b.

Ainsi $f(x) = ax + 5$ or on sait que $f(2) = -1$, il suffit donc de remplacer x par 2.
On obtient $f(2) = a \times 2 + 5 = 2a + 5$.
Il faut ensuite résoudre l'équation dont l'inconnue est a :

$$f(2) = -1$$

$$2a+5=-1$$

$$2a+5-5=-1-5$$

$$2a=-6$$

$$a=\frac{-6}{2}$$

$$a=-3$$

La fonction affine cherchée est donc $\boxed{f(x)=-3x+5}$.

On peut vérifier en calculant les images de 0 et 2 : $f(0)=-3\times 0+5=5$ et $f(2)=-3\times 2+5=-6+5=-1$.

Le cas général

g la fonction affine telle que $g(2)=8$ et $g(5)=17$.
Déterminons l'expression algébrique de cette fonction.

On cherche donc deux nombres a et b tel que $g(x)=ax+b$
En remplaçant x par 2 puis par 5 on obtient deux équations dont a et b sont les inconnues :

$$(1)\ a\times 2+b=8 \quad et \quad (2)\ a\times 5+b=17$$

$$(1)\ 2a+b=8 \quad et \quad (2)\ 5a+b=17$$

En utilisant l'équation (1) on obtient :

$$2a+b=8$$

$$2a-2a+b=8-2a$$

$$b=8-2a$$

Donc l'inconnue b peut s'exprimer en fonction de l'inconnue a : $b=8-2a$

En prenant maintenant l'équation (2) $5a+b=17$ on peut remplacer b par l'expression $8-2a$:

$$5a+b=17$$

$$5a+(8-2a)=17$$

$$5a+8-2a=17$$

$$3a+8=17$$

$$3a+8-8=17-8$$

$$3a=9$$

$$a=\frac{9}{3}$$

$$a=3$$

On a finalement trouvé $a=3$, or $b=8-2a=8-2\times 3=8-6=2$.

La fonction affine cherchée est donc : $\boxed{g(x)=3x+2}$.

Vérifions : $g(2)=3\times 2+2=8$ et $g(5)=3\times 5+2=15+2=17$!

II — Fonction affine et représentation graphique

Propriété 9.2 :

a et b deux nombres quelconques

La fonction affine de paramètres a et b est représentée graphiquement par une droite passant par le point de coordonnées $(0; b)$.

Le paramètre a s'appelle le **coefficient directeur** de cette droite.
Le paramètre b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** de cette droite.

Démonstration :

Nous avons vu avec la **Propriété 6.4** que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

CQFD

Méthode 9 . 2 : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine
Traçons dans un repère la représentation graphiques des fonctions suivantes :

$$f : x \to 2x - 3 \qquad et \qquad g : x \to -3x + 4$$

f est une fonction affine de paramètres $a = 2$ et $b = -3$.
g est une fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = 4$.

Comme f et g sont des fonctions affines, chacune se représente graphiquement par une droite, les droites (D_f) et (D_g).
Il suffit de deux points pour tracer une droite, nous allons donc calculer deux images pour chaque fonction.

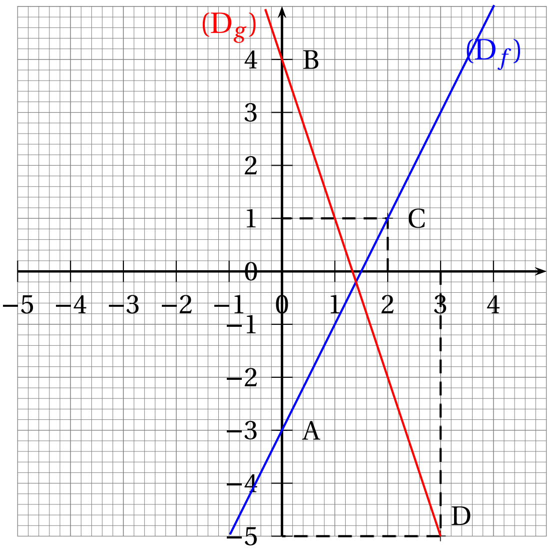
L'ordonnée à l'origine

$f(0) = -3$ et $g(0) = 4$: nous obtenons en prenant $x = 0$ la valeur du paramètre b.
Cela signifie que le points $A(0; -3)$ est sur la droite (D_f) et que le point $B(0; 4)$ est sur la droite (D_g).

Calcul d'une seconde image

Il suffit de choisir une valeur quelconque de x pour obtenir un second point.
Par exemple, $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$ et $g(3) = -3 \times 3 + 4 = -9 + 4 = -5$
Ainsi le point $C(2; 1)$ est sur la droite (D_f) et $D(3; -5)$ est sur la droite (D_g).

Il ne reste plus qu'à placer ces points dans un repère et de tracer les deux droites (AC) et (BD) qui représentent respectivement la fonction f et la fonction g.



Remarque :
Nous avons vu dans la première partie une méthode permettant de déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux images. On peut se demander pour quelle raison la connaissance de deux images est suffisante (et nécessaire).
Comme la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, la connaissance de deux images revient à connaître deux points dans un repère.
Or on sait que la connaissance de deux points distincts permet de définir une unique droite.
Pour la même raison, la connaissance de deux images permet de définir une unique fonction affine.

III — Fonction affine et accroissements

Proportionnalité des accroissements :
f la fonction affine $f : x \to 3x - 5$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10

Considérons les accroissements :
Entre -5 et -4 il y a une unité de différence pour les antécédents : $(-4) - (-5) = 1$
Entre $f(-5) = -20$ et $f(-4)$ il y a 3 unités de différence : $f(-4) - f(-5) = 3$
De même $(-2) - (-3) = 1$ et $f(-2) - f(-3) = (-11) - (-14) = 3$ ou encore $4 - 3 = 1$ et $f(4) - f(3) = 7 - 4 = 3$.
Ainsi quand il y a un accroissement d'une unité des antécédents, les images ont un accroissement de 3 unités.
Cela correspond à l'idée intuitive selon laquelle dans le tableau ci-dessus les images « avancent »de 3 en 3.

Entre -5 et -3 il y a un accroissement de deux unités : $(-3) - (-5) = 2$
Entre $f(-5)$ et $f(-3)$ il y a 6 unités d'accroissement : $f(-3) - f(-5) = -14 - (-20) = 6$

On peut de cette manière compléter un tableau des accroissements :

Accroissement des x	0	1	2	3	4	5	10
Accroissement des $f(x)$	0	3	6	9	12	15	30

On constate que ce tableau est un tableau de proportionnalité.
De plus le coefficient de proportionnalité est 3 c'est-à-dire le paramètre a de la fonction f.

Propriété 9.3 : Proportionnalité des accroissements

f une fonction affine de paramètres a et b.
Les accroissements des antécédents sont proportionnels aux accroissements des images.
De plus le coefficient de proportionnalité est égal à a.

Démonstration :

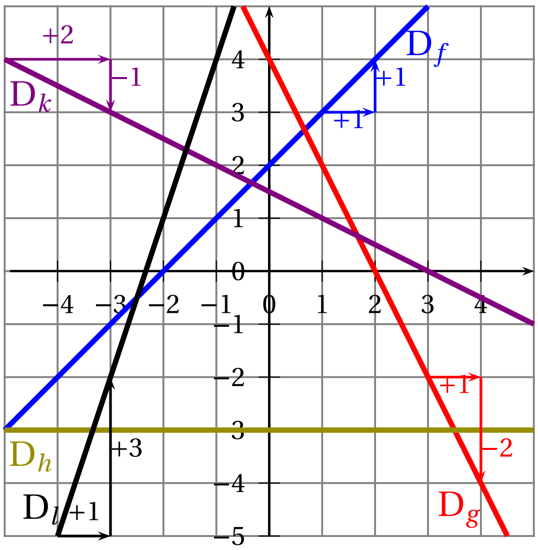
a et b deux nombres quelconques et f la fonction affine $f : x \to ax + b$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques différents.
$f(x_1) = ax_1 + b$ et $f(x_2) = ax_2 + b$.
Ainsi $f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$

Comme $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)$ cela prouve la propriété. De plus on remarque que $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

CQFD

Méthode 9 . 3 : Reconnaître la représentation graphique d'une fonction affine



Les accroissements des antécédents et des images peut se lire sur un graphique.
Ces accroissements correspondent à l'accroissement des abscisses et à celui des ordonnées.
En observant ces accroissements sur la droite représentant une fonction affine on peut lire rapidement la valeur du paramètre a : le coefficient directeur.

Par exemple pour la fonction f (en bleue), on constate qu'à un accroissement horizontal d'une unité positive correspond un accroissement positif d'une unité (comme le symbolise les flèches bleues). Le coefficient directeur, le paramètre a est donc égal à 1.
De plus la droite bleue coupe l'axe des ordonnées en $y = 2$, cela signifie que $f(0) = 2$ et donc que l'ordonnée à l'origine, le paramètre b, est égal à 2.

La fonction f a donc pour expression : $f(x) = x + 2$.

Pour la fonction g (en rouge), on constate qu'à un accroissement horizontal d'une unité positive correspond un accroissement négatif de deux unités (comme le symbolise les flèches rouges). Le coefficient directeur, le paramètre a est donc égal à 2.
De plus la droite rouge coupe l'axe des ordonnées en $y = 4$, cela signifie que $g(0) = 4$ et donc que l'ordonnée à l'origine, le paramètre b, est égal à 4.

Le fonction g a donc pour expression : $g(x) = -2x + 4$.

La fonction h est horizontale. Quel que soit l'accroissement horizontal il n'y a pas d'accroissement vertical, donc $a = 0$. Comme elle est constante égale à -3.

La fonction h a donc pour expression est $h(x) = -3$.

Par exemple pour la fonction k (en violet), on constate qu'à un accroissement horizontal de deux unités positives correspond un accroissement négatif d'une unité (comme le symbolise les flèches en violet). Le coefficient directeur, le paramètre a est donc égal à $-1 \div 2 = -0,5$.
De plus la droite en violet coupe l'axe des ordonnées en $y = 1,5$, cela signifie que $k(0) = 1,5$ et donc que l'ordonnée à l'origine, le paramètre b, est égal à $1,5$.

La fonction k a donc pour expression : $k(x) = -0,5x + 1,5$.

Pour la fonction l (en noir), on constate qu'à un accroissement horizontal d'une unité positive correspond un accroissement positif de trois unités (comme le symbolise les flèches noires). Le coefficient directeur, le paramètre a est donc égal à 3.
La fonction l peut s'écrire $l(x) = 3x + b$. Comme la droite ne coupe pas l'axe des ordonnées il faut utiliser une image facile à lire pour le déterminer.
On constate graphiquement que le point de coordonnées $(-2; 1)$ est sur cette droite. Ainsi $l(-2) = 1$.
Ainsi $3 \times (-2) + b = 1$ donc $-6 + b = 1$. En résolvant cette équation on trouve $b = 7$.

La fonction l a donc pour expression : $l(x) = 3x + 7$.

IV — Annexe

Exercice n° 9.1 : Reconnaître une fonction affine et linéaire

1. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est linéaire, affine ou ni l'un ni l'autre. Le cas échéant donner précisant la valeur des coefficients a et b de la fonction.

$$f_1 : x \to -3x+4$$

$$f_2 : x \to 10-x$$

$$f_3 : x \to \frac{2x}{7}$$

$$f_4 : x \to 3x^2+5$$

$$f_5 : x \to 7$$

$$f_6 : x \to x$$

$$f_7 : x \to -\frac{5x}{7}+\frac{2}{3}$$

$$f_8 : x \to 1-3x+5x+9$$

2. Calculer l'image de 0 pour chacune des fonctions ci-dessus.

3. Calculer le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions ci-dessus.

Exercice n° 9.2 : Fonctions affines et équations

On pose $f(x) = 3x-7$, $g(x) = 1-8x$ et $h(x) = -5x+10$

1. Indiquer les paramètres de chacune des fonctions affines précédentes.

2. Pour chacune des fonctions précédentes, déterminer un antécédent de -5.

3. Résoudre les équations suivantes :

$$(1)\quad f(x) = g(x)$$

$$(2)\quad f(x) = h(x)$$

$$(3)\quad g(x) = h(x)$$

Exercice n° 9.3 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

f est une fonction affine telle que $f(0) = 4$ et $f(1) = 9$.

Déterminer l'expression de cette fonction affine puis calculer $f(-5)$.

Exercice n° 9.4 : Déterminer l'expression d'une fonction affine — Épisode 2

g est une fonction affine telle que $g(2) = 8$ et $g(5) = 17$

Déterminer l'expression de cette fonction affine puis calculer $g(1)$.

Exercice n° 9.5 : Tracer la représentation graphique de fonctions affines

On se donne les fonctions affines suivantes :

$$f : x \to 2x-4 \qquad g : x \to -x+5 \qquad h : x \to -0,5x-2 \qquad k : x \to 2x \qquad l : x \to -x+3$$

1. Dans un repère orthonormé (deux axes perpendiculaires dont ayant la même unité) en prenant 1 cm pour unité, tracer les représentations graphiques des fonctions f, g, h et k. On les appelle D_f, D_g, D_h, D_k et D_l.

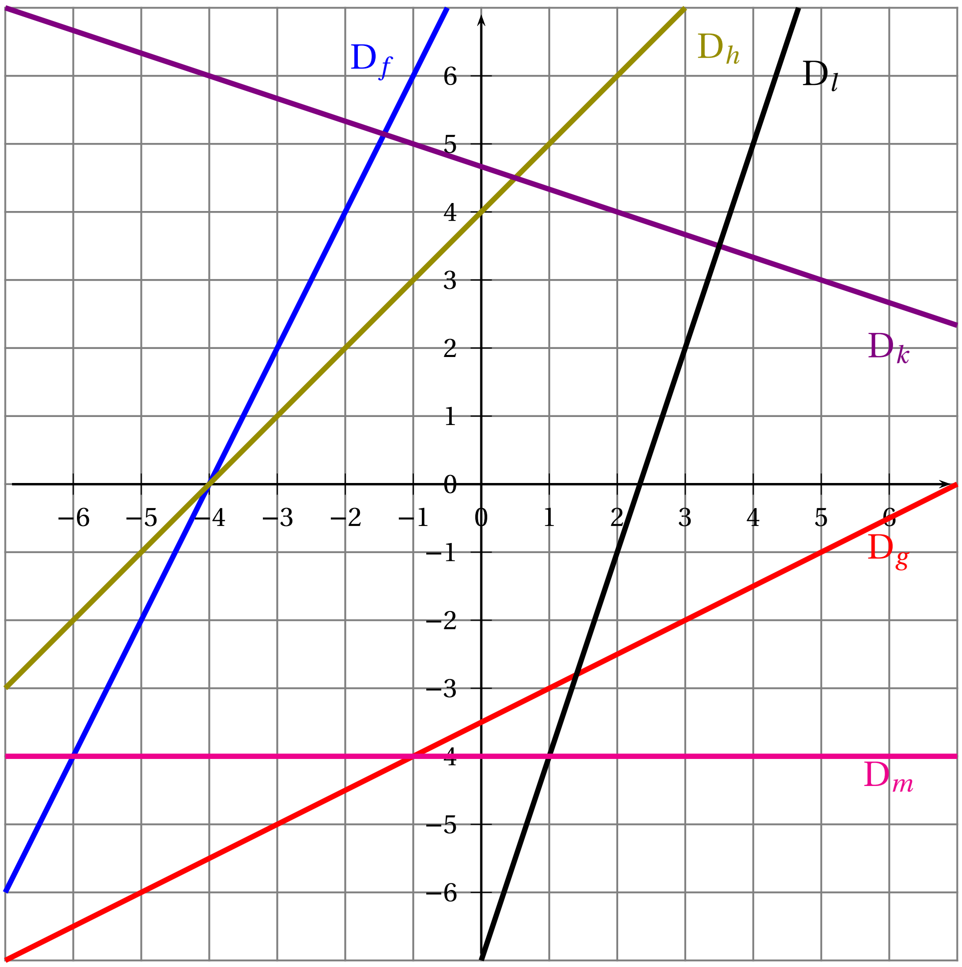
2. Que remarquez-vous pour les droites D_f et D_k ? Et pour les droites D_g et D_l ? Que remarquez-vous au sujet des coefficients directeurs ?

3. Une propriété de niveau lycée affirme que : « si le produit de deux coefficients directeurs est égal à -1 alors les droites sont perpendiculaires. ». Quelles droites illustrent cette propriété ?

4. Lire les coordonnées des huit points d'intersection présent sur cette figure.

5. Résoudre les huit équations qui correspondent à ces intersections et déterminer ensuite les valeurs exactes des coordonnées précédentes.

Exercice n° 9.6 : Déterminer l'expression d'une fonction affine à partir d'un graphique



1. En expliquant votre méthode, déterminer les expressions de chacune des fonctions affines représentées ci-dessus.

2. Déterminer les coordonnées des six points d'intersection visible sur le graphique. On fera une lecture graphique puis une résolution de chacune des équations correspondantes.

Exercice n° 9.1 : Reconnaître une fonction affine et linéaire Correction

1. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est linéaire, affine ou ni l'un ni l'autre. Le cas échéant donner précisant la valeur des coefficients a et b de la fonction.

$$f_1 : x \to -3x+4$$

$\boxed{f_1 \text{ est affine, } a=-3 \text{ et } b=4}$

$$f_2 : x \to 10-x$$

Comme $f_2(x) = 10-x = -x+10$, $\boxed{f_2 \text{ est affine, } a=-1 \text{ et } b=10}$.

$$f_3 : x \to \frac{2x}{7}$$

Comme $f_3(x) = \frac{2}{7}x+0$, $\boxed{f_3 \text{ est linéaire}}$ de coefficient $\frac{2}{7}$ et donc $\boxed{\text{affine de paramètres } a=\frac{2}{7} \text{ et } b=0}$.
Toutes les fonctions linéaires sont des fonctions affines.

$$f_4 : x \to 3x^2+5$$

Le terme en x^2 ne correspond pas aux fonctions affines. $\boxed{f_4 \text{ n'est ni affine ni linéaire}}$ (c'est une fonction polynôme du second degré !).

$$f_5 : x \to 7$$

$f_5(x) = 0x+7$, $\boxed{f_5 \text{ est une fonction affine de paramètres } a=0 \text{ et } b=7}$. Il s'agit d'une fonction constante.

$$f_6 : x \to x$$

$f_6(x) = 1x+0$, $\boxed{f_6 \text{ est linéaire de coefficient 1 et donc affine de paramètres } a=1 \text{ et } b=0}$.

$$f_7 : x \to -\frac{5x}{7}+\frac{2}{3}$$

$f_7(x) = -\frac{5}{7}x+\frac{2}{3}$, $\boxed{f_7 \text{ est une fonction affine de paramètres } a=-\frac{5}{7} \text{ et } b=\frac{2}{3}}$.

$$f_8 : x \to 1-3x+5x+9$$

Comme $f_8(x) = 1-3x+5x+9 = 2x+10$, $\boxed{f_8 \text{ est une fonction affine de paramètres } a=2 \text{ et } b=10}$.

2. Calculer l'image de 0 pour chacune des fonctions ci-dessus.

$f_1(0) = -3\times 0+4 = \boxed{-3}$.
$f_2(0) = 10-0 = \boxed{10}$.

$f_3(0) = \frac{2\times 0}{7} = \boxed{0}$.

$f_4(0) = 3\times 0^2+5 = \boxed{5}$.

$f_5(0) = \boxed{7}$.
$f_6(0) = \boxed{0}$.

$f_7(0) = -\frac{5\times 0}{7}+\frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

$f_8(0) = 2\times 0+10 = \boxed{10}$.

3. Calculer le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions ci-dessus.
Nous allons résoudre chacune des équations du type $f(x) = 0$.

$$f_1(x) = 0$$

$$-3x+4=0$$
$$-3x+4-4=0-4$$
$$-3x=-4$$
$$x=\frac{-4}{-3}$$
$$x=\frac{4}{3}$$

$\boxed{\frac{4}{3} \text{ est l'antécédent de 0 par la fonction } f_1}$.

$$f_2(x)=0$$
$$10-x=0$$
$$10-10-x=0-10$$
$$-x=-10$$
$$x=-10$$

$\boxed{-10 \text{ est l'antécédent de 0 par la fonction } f_2}$.

$$f_3(x)=0$$
$$\frac{2x}{7}=0$$
$$2x=0\times 7$$
$$2x=0$$
$$x=\frac{0}{2}$$
$$x=0$$

$\boxed{0 \text{ est l'antécédent de 0 par la fonction } f_3}$.

$$f_4(x)=0$$
$$3x^2+5=0$$
$$3x^2+5-5=0-5$$
$$3x^2=-5$$

Or un carré est toujours positi, donc il n'y a pas de solution.
$\boxed{0 \text{ n'a pas d'antécédent par la fonction } f_4}$.

$$f_5(x)=0$$
$$7=0$$

Cette équation n'a évidemment pas de solution.
$\boxed{0 \text{ n'a pas d'antécédent par la fonction } f_5}$.

$$f_6(x)=0$$
$$x=0$$

$\boxed{0 \text{ est l'antécédent de 0 par la fonction } f_6}$.

$$f_7(x)=0$$
$$-\frac{5x}{7}+\frac{2}{3}=0$$

$$-\frac{5x}{7}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0-\frac{2}{3}$$
$$-\frac{5}{7}x=-\frac{2}{3}$$
$$x=-\frac{2}{3}\div-\frac{5}{7}$$
$$x=-\frac{2}{3}\times-\frac{7}{5}$$
$$x=\frac{14}{15}$$

$\boxed{\frac{14}{15} \text{ est l'antécédent de 0 par la fonction } f_7}$.

$$f_8(x)=0$$
$$2x+10=0$$
$$2x+10-10=0-10$$
$$2x=-10$$
$$x=\frac{-10}{2}$$
$$x=-5$$

$\boxed{-5 \text{ est l'antécédent de 0 par la fonction } f_8}$.

EXERCICE N° 9.2 : Fonctions affines et équations CORRECTION

On pose $f(x)=3x-7$, $g(x)=1-8x$ et $h(x)=-5x+10$

1. Indiquer les paramètres de chacune des fonctions affines précédentes.

f est une fonction affine de paramètres $\boxed{a=3 \text{ et } b=-7}$.
g est une fonction affine de paramètres $\boxed{a=-8 \text{ et } b=1}$.
h est une fonction affine de paramètres $\boxed{a=-5 \text{ et } b=10}$.

2. Pour chacune des fonctions précédentes, déterminer un antécédent de -5.

Nous allons résoudre chacune des équations :

$$f(x)=-5$$
$$3x-7=-5$$
$$3x-7+7=-5+7$$
$$3x=2$$
$$x=\frac{2}{3}$$

$\boxed{\frac{2}{3} \text{ est l'antécédent de } -5 \text{ par la fonction } f.}$

$$g(x)=-5$$
$$1-8x=-5$$
$$1-8x-1=-5-1$$
$$-8x=-6$$
$$x=\frac{-6}{-8}$$
$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

$\boxed{0,75 \text{ est l'antécédent de } -5 \text{ par la fonction } g.}$

$$h(x) = -5$$
$$-5x + 10 = -5$$
$$-5x + 10 - 10 = -5 - 10$$
$$-5x = -15$$
$$x = \frac{-15}{-5}$$
$$x = 3$$

$\boxed{3 \text{ est l'antécédent de } -5 \text{ par la fonction } h.}$

3. Résoudre les équations suivantes :

(1) $f(x) = g(x)$ (2) $f(x) = h(x)$ (3) $g(x) = h(x)$

Exercice n° 9.3 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Correction

f est une fonction affine telle que $f(0) = 4$ et $f(1) = 9$.

Déterminer l'expression de cette fonction affine puis calculer $f(-5)$.

Exercice n° 9.4 : Déterminer l'expression d'une fonction affine — Épisode 2

Correction

g est une fonction affine telle que $g(2) = 8$ et $g(5) = 17$

Déterminer l'expression de cette fonction affine puis calculer $g(1)$.

Les fonctions affines

Définition

a et b deux nombres quelconques fixés.

La fonction affine de paramètres a et b est la fonction définie ainsi :

$$f(x) = ax + b$$

a s'appelle le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Propriété

Une fonction **linéaire** est une fonction **affine** particulière.

Exemple :

- $f(x) = 5x + 3$ est une fonction affine avec $a = 5$ et $b = 3$;
- $g(x) = -5x - \frac{1}{3}$ est une fonction affine avec $a = -5$ et $b = -\frac{1}{3}$;
- $h(x) = \frac{x}{6} + 1$ est une fonction affine avec $a = \frac{1}{6}$ et $b = 1$;
- $k(x) = -7x$ est une fonction affine avec $a = -7$ et $b = 0$, elle est aussi **linéaire** ;
- $l(x) = 2022$ est une fonction affine avec $a = 0$ et $b = 2022$, elle est **constante** ;
- $p(x) = 7 - 8x$ est une fonction affine avec $a = -8$ et $b = 7$.

Propriété

f une fonction affine de paramètres a et b.
L'image de zéro est égale à b, c'est-à-dire $f(0) = b$.
Sa représentation graphique est une droite passant par le point $M(0; b)$
Si $b = 0$, la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

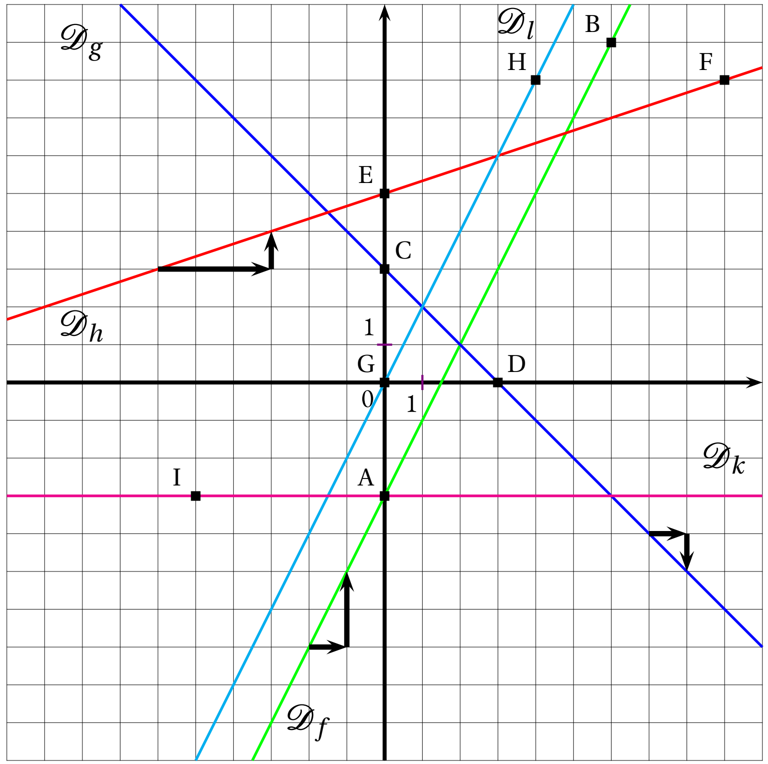
Remarque :
Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine f, il suffit de connaître deux points pour tracer la droite. Voici comment obtenir ces deux points :

- On calcule l'image de zéro, $f(0) = b$,
  la droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$;
- On calcule l'image d'un autre nombre $f(w)$,
  la droite passe par le point de coordonnées $\big(w; f(w)\big)$.

Exemples :

Représentons graphiquement : $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -x + 3$, $h(x) = \frac{x}{3} + 5$, $l(x) = 2x$ et $k(x) = -3$

- $f(0) = -3$ et $f(6) = 9$, la droite représentant f passe par $A(0; -3)$ et $B(6; 9)$;
- $g(0) = 3$ et $g(3) = 0$, la droite représentant g passe par $C(0; 3)$ et $D(3; 0)$;
- $h(0) = 5$ et $h(9) = 8$, la droite représentant h passe par $E(0; 5)$ et $F(9; 8)$;
- $l(0) = 0$ et $l(4) = 8$, la droite représentant l passe par $G(0; 0)$ et $H(4; 8)$;
- $k(0) = -3$ et $k(-5) = -3$, la droite représentant k passe par $A(0; -3)$ et $I(-5; -3)$.



Interprétation graphique :

- l'ordonnée à l'origine b se lit à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ;
- le coefficient directeur a correspond à la pente de la droite :
  - ce coefficient correspond à la variation des ordonnées entre deux points de la droite dont les abscisses varient d'une unité ;
  - il est positif quand « la droite monte » ;
  - il est négatif quand « la droite descend » ;
  - il est nul quand « la droite est horizontale » ;
  - deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.
- le point d'intersection des droites représentant deux fonctions f et g a pour abscisse la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Chapitre X

La trigonométrie

Sommaire

Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Arnaud ? 410
C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ? 410
Situation initiale : Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ? 411
I Vocabulaire du triangle rectangle 413
II Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu 414
III Usage de la trigonométrie 416
IV Quelques propriétés trigonométriques 418
1 Les angles complémentaires et la tangente 418
2 Quelques angles particuliers 419
3 La relation fondamentale 419
4 Trigonométrie et cercle de rayon unité 419
Évaluation : Trigonométrie et calcul littéral 432
Fiche d'exercices : Trigonométrie 437
Activité — Culture : Tables de trigonométrie 441
Troisième — Fiche de synthèse : Trigonométrie 443

« Si vous ne pouvez pas expliquer quelque chose à un étudiant de première année, c'est que vous n'avez pas vraiment compris. » — **Richard Feynman**

C'est quoi un cosinus, un sinus et une tangente ?

Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ?

Troisième

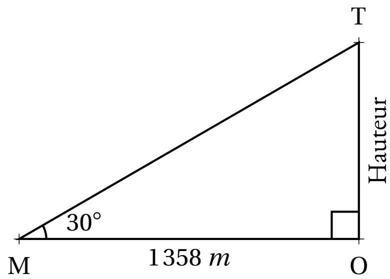
✧✧✧

Situation Initiale

La tour **Burj Khalifa** de Dubaï est la plus haute du monde depuis 2010, elle mesure 828 m. On se souvient de Tom Cruise en 2011 dans Mission Impossible – Protocole fantôme, qui escaladait cette fameuse tour.

Dans cette activité nous allons imaginer nous balader dans Dubaï avec un théodolite (un appareil de géomètre qui permet de mesurer les angles) en plein tournage de Mission Impossible.

Je souhaite mesurer la hauteur à laquelle se trouve Tom Cruise en utilisant la distance horizontale qui nous sépare de la tour et l'angle d'observation de l'acteur.



Première partie

En me positionnant à 1 358 m du pied de la tour (j'utilise un GPS), je constate que l'angle d'observation de l'acteur sur la tour par rapport à l'horizontale est exactement de 30°. Je me demande comment en déduire sa hauteur.

Pour cela j'ai l'idée de tracer cette figure à l'échelle.
Je décide que 100 m dans la réalité seront représentés par 1 cm sur le dessin.
Voici un croquis rapide, dont les côtés ne sont pas tracées en vraies grandeurs, pour m'aider à réaliser cette figure.

1. Exprimez cette échelle sous la forme habituelle, c'est-à-dire un ratio 1 : n puis une fraction $\dfrac{1}{n}$

2. Tracez cette figure à cette échelle puis mesurez la longueur OT.

3. En déduire une valeur approchée au mètre près de la hauteur où se trouve Tom Cruise.

4. Donnez une valeur approchée au millième près du quotient $\zeta = \dfrac{\text{OT}}{\text{OM}}$ en mesurant votre figure à l'échelle.

(ζ est une lettre de l'alphabet grec qui se prononce zéta, elle a donné notre z... cela ne rend pas cette question plus difficile !)

5. Expliquez pourquoi la hauteur de la tour est donnée par l'expression suivante :

$$\text{Hauteur de la tour} = \zeta \times \text{Distance horizontale}$$

Seconde partie

Je me déplace maintenant dans Dubaï jusqu'à me retrouver avec un angle de vision d'exactement 40° avec Tom Cruise.

1. Me suis-je rapproché ou éloigné de la tour ?

2. Je suis en fait à 934 m de la tour.
Reprenez les questions **2.** et **3.** de la première partie avec la même échelle pour déterminer à nouveau la hauteur.

3. Donnez une valeur approchée au millième près du quotient $\zeta = \dfrac{\text{OT}}{\text{OM}}$ en mesurant votre figure à l'échelle.

4. Tracez un triangle MOT rectangle en O représentant la situation en prenant $\widehat{\text{OMT}} = 40°$ et la mesure de votre choix pour la distance MO.

5. Calculez à nouveau ζ au millième près en mesurant cette figure. Que constatez-vous ?
À quelle grandeur de cette figure est lié le quotient ζ ?

Troisième partie

Je me rapproche très près de la tour, l'angle de visée est alors exactement de 80°.

1. En traçant un triangle rectangle ayant un angle aigu de 80°, déterminez une valeur approchée au milième près du quotient ζ en vous inspirant de la méthode de la seconde partie questions **4.** et **5.**.

2. Je constate que je suis exactement à 138 m du pied de la tour.
Calculez à nouveau la hauteur à laquelle se trouve l'acteur et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat.

Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ? — Correction

✧✧✧

Première

Situation Initiale

partie

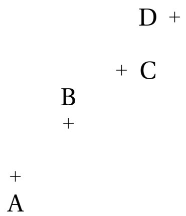
1. Pour cette échelle, 100 m dans la réalité sont représentés par 1 cm sur la carte.

Le quotient $\dfrac{1\ cm}{100\ m} = \dfrac{1\ cm}{10\,000\ cm} = \dfrac{1}{10000}$

Cela signifie que le plan est 10 000 fois plus petit que la réalité.

$\boxed{\text{C'est un plan à l'échelle 1 : 10 000 qui correspond à la fraction } \dfrac{1}{10\,000}.}$

2.



Deuxième partie

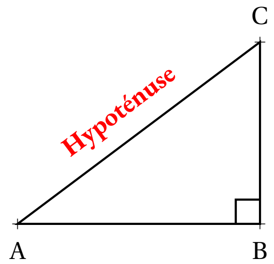
Troisième partie

I — Vocabulaire du triangle rectangle

Théorème 10.1 : Hypoténuse d'un triangle rectangle *(Admis)*

Si un triangle est rectangle **alors** son côté le plus long est opposé à l'angle droit.

Le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle s'appelle l'**hypoténuse** .



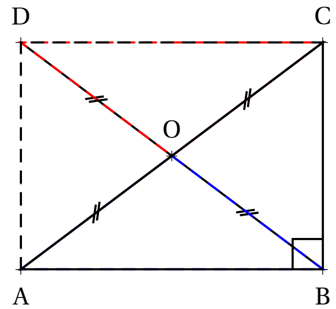
Démonstration :

Il suffit de construire le rectangle qui correspond au triangle rectangle ABC, par exemple en considérant la symétrie centrale de centre O où O est le milieu du segment [AC].

On sait que dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur.

Dans le triangle AOB, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $AB < AO + OB$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $AO + OB = AO + OC = AC$
d'où $AB < AC$

Dans le triangle BOC, **l'inégalité triangulaire** permet d'affirmer que $BC < BO + OC$
Or comme les diagonales ont la même longueur, $OB = OA = OC = OD$ en particulier $BO + OC = AO + OC = AC$
d'où $AC < AC$



Ainsi les deux côtés AB et BC ont des mesures inférieures au côté AC.

Ce résultat est bien lié à l'angle droit. C'est une conséquence des proprités des diagonales du rectangle.

CQFD

Remarque :

Le mot **hypoténuse** est féminin. Il vient du latin *hypotenusa*, lui-même transcrit du grec ancien *hupoteinousa*. Le préfixe *hupo* signifie « sous » et *teino* « tendre ». Hypoténuse signifie donc littéralement « celle qui sous-tend ». Platon, avant Euclide, a utilisé dans le Timée ce terme pour désigner le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.

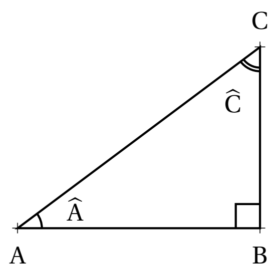
Les deux côtés **adjacent** à l'angle droit sont parfois appelé **cathètes** . Ce terme désigne plus généralement une perpendiculaire et vient du grec ancien *káthetos* qui signifie « mené en bas ».

L'adjectif **adjacent** vient du latin *adjacēre* et signifie « être situé auprès ». Il signifie, ce qui est immédiatement à côté d'un autre. Un côté est adjacent à un angle s'il « touche » l'angle, si c'est un des côtés de l'angle.

Propriété 10.1 : Les angles dans un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en B alors :

- $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles aigus;
- $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont **complémentaires**
  Cela signifie que la somme de leurs mesures est égale à 90°.



Démonstration :

On sait que dans un triangle, la somme des trois angles est égale à 180°.
Comme l'angle droit mesure 90°, il reste 90° pour les deux autres angles.
Par conséquent, les deux autres angles ont une mesure inférieure à 90° et par définition, ils sont **complémentaires** .

CQFD

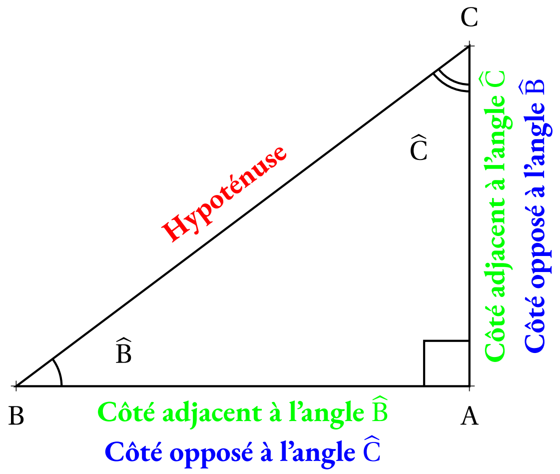
Remarque :

On dit que deux angles sont **complémentaires** si leur somme est égale à un angle droit, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

On dit que deux angles sont **supplémentaires** si leur somme est égale à un angle plat, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Définition 10.1 : Vocabulaire dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.



- [BC] est l'hypoténuse ;
- [AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit ;
- [AC] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$;
- [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.

Remarque :

Dans un triangle rectangle,

- Le **côté adjacent** à un angle aigu est le **côté opposé** de l'angle **complémentaire** .
- Le **côté opposé** à un angle aigu est le **côté adjacent** de l'angle **complémentaire** .
- Un **côté adjacent** à un angle est un côté dont l'une des extrémités est le sommet de l'angle.
- Un **côté opposé** à un angle est un côté dont aucune des extrémités est le sommet de l'angle.

II — Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Propriété 10.2 : Triangles rectangles semblables *(Admise)*

Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils sont semblables.
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils ont des côtés proportionnels.

Démonstration :

Considérons deux triangles rectangles ABC et A′B′C′ rectangle respectivement en A et A′ et tel que $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Comme la somme des angles dans un triangle est égal à 180°, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
Ainsi les trois angles de ces triangles sont égaux. D'après la propriété 3.2, les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables.
Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnels.

CQFD

Remarque :
Considérons deux triangles ABC et A′B′C′ rectangles respectivement en A et A′ semblables.
Il existe donc un nombre positif non nul k tel que $\mathrm{A'B'} = k \times \mathrm{AB}$, $\mathrm{A'C'} = k \times \mathrm{AC}$ et $\mathrm{B'C'} = k \times \mathrm{BC}$.

Le quotient $\dfrac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{B'C'}} = \dfrac{k \times \mathrm{AB}}{k \times \mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$

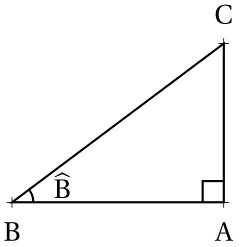
Le quotient $\dfrac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{B'C'}} = \dfrac{k \times \mathrm{AC}}{k \times \mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$

Le quotient $\dfrac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \dfrac{k \times \mathrm{AC}}{k \times \mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

Ces trois quotients ne dépendent donc pas des mesures des triangles rectangles ABC et A′B′C′. Ils ne dépendent donc que d'un des angles aigus de ces triangles, par exemple $\widehat{\mathrm{B}}$.
Cela justifie la définition suivante :

Définition 10.2 : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en A.



On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ de la manière suivante :

$$\cos(\widehat{\mathrm{B}}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{\mathrm{B}}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{\mathrm{B}}) = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{\mathrm{B}}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{\mathrm{B}}) = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{\mathrm{B}}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{\mathrm{B}}}$$

Moyen mnémotechnique :
Ces trois expressions doivent être connues par coeur !
Voici un moyen pour les mémoriser, il suffit de retenir le mot suivant :

COSINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ TANGENTE ADJACENT

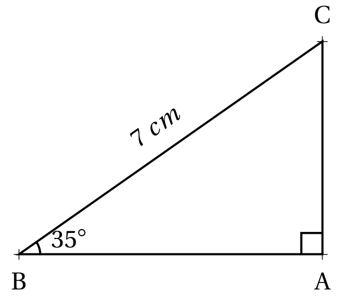
C A H S O H T O A

ADJACENT SINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ

Remarques :
Pour une mesure d'angle aigu donnée, par exemple 75°, $\cos(75°)$, $\sin(75°)$ et $\tan(75°)$ sont des nombres. Ces nombres sont connus, la plupart ne sont pas décimaux mais la calculatrice est capable d'en donner une valeur approchée.
Par exemple $\cos(75°) \approx 0{,}258\,819\,045\,1$ à 10^{-10} près.
Dans les exercices, les cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu doivent être considérés comme des nombres au même titre que π, $\sqrt{2}$, $0,5$ ou 2.

III — Usage de la trigonométrie

MÉTHODE 10 . 1 : Calculer la mesure d'un côté connaissant un angle aigu et l'hypoténuse



On souhaite calculer la mesure exacte des côtés [AB] et [AC].

Calculons AB.

Analyse : [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$.
On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **cosinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté adjacent.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\cos(35°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(35°) = \dfrac{AB}{7\ cm}$.

Ainsi $\boxed{AB = 7\ cm \times \cos(35°) \approx 5,73\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Remarque : Dans l'expression $\cos(35°) = \dfrac{AB}{7\ cm}$ seule la grandeur AB est inconnue.

Pour exprimer AB on a utilisé la **règle de trois**.

Il suffit pour cela d'écrire $\cos(35°)$ sous la forme d'une fraction $\dfrac{\cos(35°)}{1}$

On a ainsi $\dfrac{\cos(35°)}{1} = \dfrac{AB}{7\ cm}$ d'où en utilisant la **règle de trois** : $AB = 7\ cm \times \cos(35°) \div 1$ soit $AB = 7\ cm \times \cos(35°)$

L'expression $7\ cm \cos(35°)$ est la valeur exacte de la mesure du côté [AB].

Calculons AC.

Analyse : On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **sinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté opposé.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\sin(35°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\sin(35°) = \dfrac{AC}{7\ cm}$.

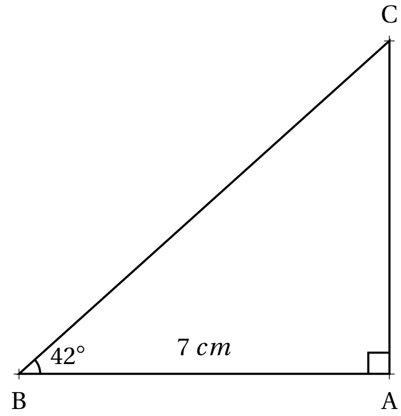
Ainsi $\boxed{AC = 7\ cm \times \sin(35°) \approx 4,01\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

USAGE DE LA CALCULATRICE :
Les nombres $\cos(35°)$ et $\sin(35°)$ sont disponibles avec la calculatrice.
Les touches cos sin et tan permettent d'obtenir le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle.
Pour calculer $\cos(60°)$ il suffit de saisir cos 60. Le symbole ∘ n'est pas nécessaire !

Il faut vérifier que la calculatrice est configurée pour traiter les angles en degrés !

Un bon test consiste à calculer $\cos(60°) = 0,5$. Si la calculatrice ne donne pas cette valeur, c'est qu'elle est mal configurée. Il faut modifier l'unité des angles, en général avec la touche Config ou Setup ou encore Mode ...

MÉTHODE 10 . 2 : Calculer la mesure d'un côté connaissant un angle aigu et un côté de l'angle droit



On souhaite calculer les mesures des côtés [BC] et [AC]

Calcul de BC**.**

Analyse : [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$.
On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **cosinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté adjacent.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\cos(42°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(42°) = \dfrac{7\ cm}{BC}$.

Ainsi $\boxed{BC = \dfrac{7\ cm}{\cos(42°)} \approx 9,42\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Remarque : Pour exprimer BC on a utilisé la **règle de trois**.

Il suffit pour cela d'écrire $\cos(42°)$ sous la forme d'une fraction $\dfrac{\cos(42°)}{1}$

On a ainsi $\dfrac{\cos(42°)}{1} = \dfrac{7\ cm}{BC}$ d'où en utilisant la **règle de trois** : $BC = 7\ cm \times 1 \div \cos(42°)$ soit $BC = \dfrac{7\ cm}{\cos(42°)}$

L'expression $\dfrac{7\ cm}{\cos(42°)}$ est la valeur exacte de la mesure du côté [AB].

Calculons AC.

Analyse : On connaît le **côté adjacent** du triangle et on cherche la mesure du **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seule la **tangente** se calcule en utilisant la mesure du côté opposé et du côté adjacent.

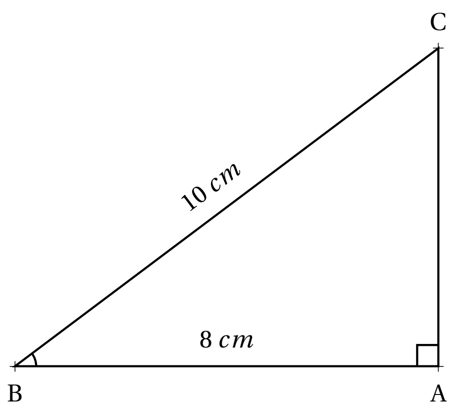
Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\tan(42°) = \dfrac{AC}{AB}$ donc $\tan(42°) = \dfrac{AC}{7\ cm}$.

Ainsi $\boxed{AC = 7\ cm \times \tan(42°) \approx 6,30\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Nous venons de voir que la connaissance de la mesure d'un angle aigu permettait d'obtenir à la calculatrice les nombres sans unités cosinus, sinus ou tangente de cet angle.
Nous allons maintenant remarquer que la connaissance de l'un de ces nombres, cosinus, sinus ou tangente, permet de retrouver la mesure de l'angle.

Méthode 10 . 3 : Calculer la mesure d'un angle connaissant la mesure de deux côtés



Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$

Dans le triangle ABC rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse du triangle et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$.
Nous pouvons donc calculer le cosinus de cet angle.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8$$

À la calculatrice on trouve $\widehat{ABC} \approx 36,87°$ à $0,01°$ près.

On peut obtenir l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant le fait qu'il est complémentaire avec $\widehat{ABC}$.
On a $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC} \approx 53,13°$ à $0,01°$ près.

Vérifions avec la trigonométrie.
Dans le triangle ABC rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse du triangle et [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$.
Nous pouvons donc calculer le sinus de cet angle.

$$\sin\widehat{ACB} = \frac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8$$

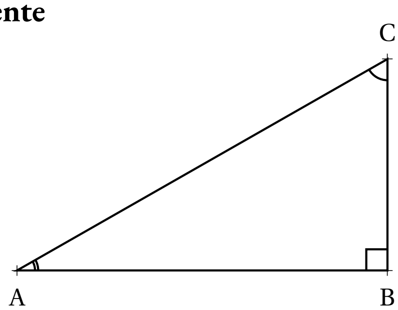
À la calculatrice on trouve $\widehat{ACB} \approx 53,13°$ à $0,01°$ près.

Usage de la calculatrice :
Quand on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, la calculatrice donne la mesure de l'angle en utilisant les séquences suivantes Seconde Cos ou Seconde Sin ou enfin Seconde Tan .
Dans ce cas la calculatrice affiche *Arccos()*, *Arcsin()* ou *Arctan()* (ou encore cos^{-1} sin^{-1} ou tan^{-1})...

IV — Quelques propriétés trigonométriques

Cette section est une extension du programme de troisième.

1 Les angles complémentaires et la tangente



Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$ sont **complémentaires** . Cela signifie que leur somme vaut 90°.
Dans le triangle ABC rectangle en B, on constate que le côté [AB] est adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ et opposé à l'angle $\widehat{BCA}$.
De même le côté [BC] est adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ et opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Ainsi nous avons :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} \qquad \tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\widehat{BCA} = \frac{BC}{AC} \qquad \sin\widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$$

De plus $\dfrac{\sin\widehat{BAC}}{cos\widehat{BAC}} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{BC}{AC} \times \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC \times AC}{AC \times AB} = \dfrac{BC}{AB} = \tan\widehat{BAC}$

Propriété 10.3 : Trigonométrie et angles complémentaires

Dans un triangle rectangle les deux angles aigus $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont complémentaires.
Nous avons de plus les relations suivantes :

$$\cos\widehat{a} = \sin\widehat{b} \qquad \sin\widehat{a} = \cos\widehat{b} \qquad \tan\widehat{a} = \frac{1}{\tan\widehat{b}}$$

Nous avons aussi :

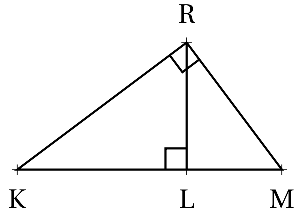
$$\tan\widehat{a} = \frac{\sin\widehat{a}}{\cos\widehat{a}}$$

2 Quelques angles particuliers

3 La relation fondamentale

4 Trigonométrie et cercle de rayon unité

Exercice n° 10.1 : Vocabulaire



1. Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots :
adjacent, opposé ou hypoténuse
Dans le triangle KRM rectangle en R :

— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$

— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$

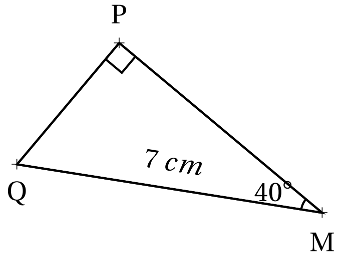
— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$

— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$

— [MK] est ....

2. Recommencer la question **1.** avec le triangle RLK puis RLM en faisant pour chacun 5 phrases du même type.
3. Citer tous les couples d'angles complémentaires de cette figure. En déduire tous les angles égaux de cette figure ?
4. Que peut-on dire des triangles KRM, KRL et RLM ?

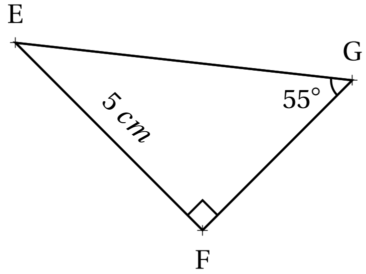
Exercice n° 10.2 : Calcul de deux côtés — Épisode 1



Le triangle QPM est rectangle en P.
On sait que $\widehat{PMQ} = 40°$ et que $QM = 7\ cm$

Calculer les valeurs exactes de PQ et PM.
Donner une valeur approchée au mm près.

Exercice n° 10.3 : Calcul de deux côtés — Épisode 2



Le triangle EFG est rectangle en F.
On sait que $\widehat{FGE} = 40°$ et que $FE = 5\ cm$

Calculer les valeurs exactes de FG et GE.
Donner une valeur approchée au mm près.

Exercice n° 10.4 : Dans quel triangle rectangle ?

Exercice n° 10.5 : L'angle à 30°

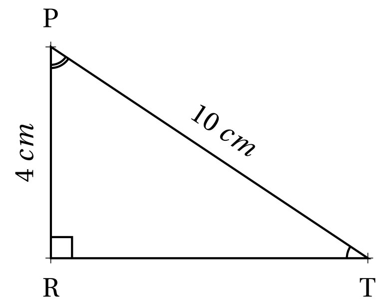
1. Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que :

— $AC = 10\ cm$

— $\widehat{BAC} = 30°$

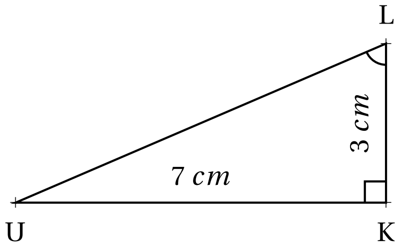
2. Calculer en justifiant votre réponse une valeur approchée au millimètre près des mesures AC et AB
3. Que remarquez-vous pour le côté [BC] ?
4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?
5. En utilisant votre calculatrice calculer $\cos(30°)$, $\sin(30°)$, $\cos(60°)$ et $\sin(60°)$.
Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer cela ?

Exercice n° 10.6 : Calcul d'un angle — Épisode 1



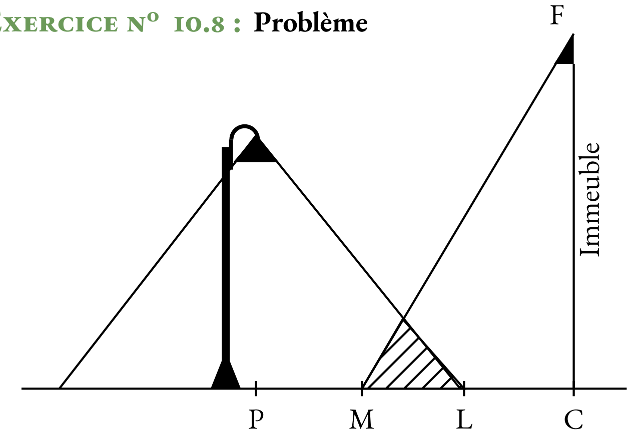
Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{RPT}$ et $\widehat{RTP}$

Exercice n° 10.7 : Calcul d'un angle — Épisode 2

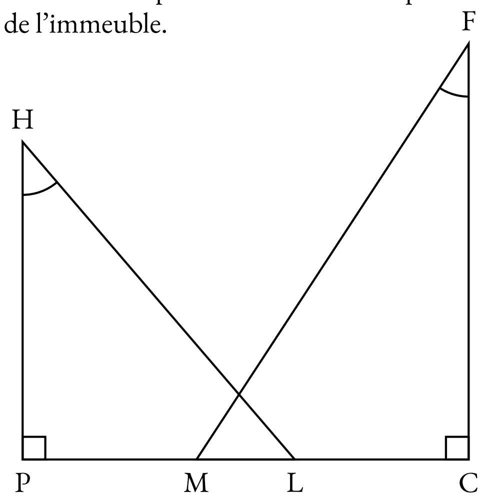


Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{KUL}$ et $\widehat{KLU}$

Exercice n° 10.8 : Problème



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

PC = $5,5\ m$, CF = $5\ m$ et HP = $4\ m$

$\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3,4\ m$.

2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.

3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

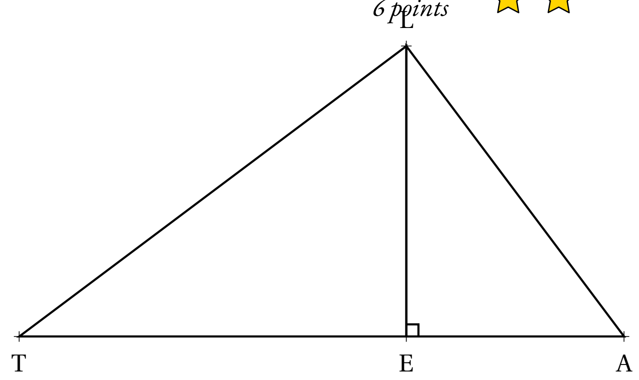
1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points*



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— $E \in [TA]$;

— $(LE) \perp (EA)$;

— $LT = 16\ cm$, $LA = 12\ cm$ et $TA = 20\ cm$.

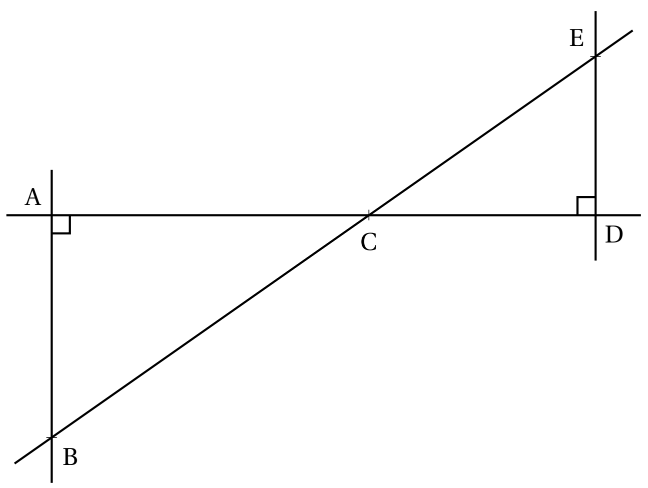
1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

Exercice n° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinées en vraie grandeur, on sait que :

— Les points A, C et D sont alignés;

— les points B, C et E sont alignés;

— $(AB) \perp (AD)$ et $(ED) \perp (AD)$;

— $CD = 5\ m$, $CA = 7\ m$ et $\widehat{ECD} = 35°$.

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

4. Déterminer la mesure de $\widehat{ACB}$.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : CORRECTION

Calcul littéral

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = \left(6x^2 + 21x - 10x - 35\right) - \left(3x - 15x^2 - 5 + 25x\right)$

Il vaut mieux protéger les calculs par des parenthèses pour éviter les erreurs causées par le signe moins.

$f(x) = 6x^2 + 21x - 10x - 35 - 3x + 15x^2 + 5 - 25x$

$\boxed{f(x) = 21x^2 - 17x - 30}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

$\boxed{f(0) = -30}$

$f(\frac{1}{3}) = 21\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 17 \times \frac{1}{3} - 30 = 21 \times \frac{1}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{21}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{7}{3} - \frac{17}{3} - \frac{90}{3} = \boxed{-\frac{100}{3}}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$
$f(x) = (3x-5)\,((2x+7) - (1-5x))$
$f(x) = (3x-5)(2x+7-1+5x)$

$\boxed{f(x) = (3x-5)(7x+6)}$

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

$$(3x-5)(7x+6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 0 \\ 3x-5+5 &= 0+5 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x+6 &= 0 \\ 7x+6-6 &= 0-6 \\ 7x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{5}{3} \text{ et } -\frac{6}{7}}$

Exercice n° 2 : CORRECTION

Trigonométrie

1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

Comparons $LT^2 + LA^2$ et TA^2 :

LT^2+LA^2	TA^2
16^2+12^2	20^2
$256+144$	
400	400

Comme

$$LT^2+LA^2=TA^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle LTA est rectangle en L}}$.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

Dans le triangle LTA rectangle en L, on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

$\cos\widehat{LTA}=\dfrac{16\ cm}{20\ cm}=0,8$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA}\approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\sin\widehat{LTA}=\dfrac{12\ cm}{20\ cm}=0,6$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA}\approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\tan\widehat{LTA}=\dfrac{12\ cm}{16\ cm}=0,75$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA}\approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{LTA}\approx 36,87°}$

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

Dans le triangle LTE rectangle en E on a :

$\cos 36,87° = \dfrac{TE}{16\ cm}$ donc $\boxed{TE=16\ cm\times\cos 36,87°\approx 12,8\ cm \text{ au millimètre près.}}$

$\sin 36,87° = \dfrac{LE}{16\ cm}$ donc $\boxed{LE=16\ cm\times\sin 36,87°\approx 9,6\ cm \text{ au millimètre près.}}$

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

On sait que la somme des angles dans un triangle est égale à 180°.

Dans le triangle TLE :

$\widehat{TLE}+\widehat{LTE}+\widehat{LET}=180°$ donc $\widehat{TLE}+36,87°+90°=180°$ ainsi $\boxed{\widehat{TLE}=180°-90°-36,87°=53,13°}$

Dans le triangle TLA :

$\widehat{TLA}+\widehat{LTA}+\widehat{LAT}=180°$ donc $\widehat{LAT}+36,87°+90°=180°$ ainsi $\boxed{\widehat{LAT}=180°-90°-36,87°=53,13°}$

Dans le triangle LEA :

$\widehat{LEA}+\widehat{LAE}+\widehat{ALE}=180°$ donc $\widehat{ELA}+53,13°+90°=180°$ ainsi $\boxed{\widehat{ELA}=180°-90°-53,13°=36,87°}$

Exercice n° 3 : CORRECTION

Thalès — Trigonométrie

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

Dans le triangle CDE rectangle en D on a :

$\cos 35° = \dfrac{5\ m}{CE}$ donc $\boxed{CE=\dfrac{5\ m}{\cos 35°}\approx 6,11\ m \text{ au centième près.}}$

$\tan 35° = \dfrac{DE}{5\ m}$ donc $\boxed{DE = 5\ m \times \tan 35° \approx 3{,}5\ m \text{ au centième près.}}$

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

Les droites (ED) et (AB) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles.

$\boxed{\text{Les droites (ED) et (AB) sont parallèles.}}$

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C. On sait que (AB)//(ED).
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{5\ m}{7\ m} = \frac{6{,}11\ m}{CB} = \frac{3{,}5\ m}{AB}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$CB = \dfrac{7\ m \times 6{,}11\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{CB \approx 8{,}55\ m}$

$AB = \dfrac{3{,}5\ m \times 7\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{AB \approx 4{,}9\ m}$

4. Déterminer la mesure de $\widehat{ACB}$.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ECD}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux.

$\boxed{\widehat{ACB} = 35°}$

Contrôle de mathématiques

Exercice n° 1 : *7 points* ★★

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) + (7x-1)(6x+3)$

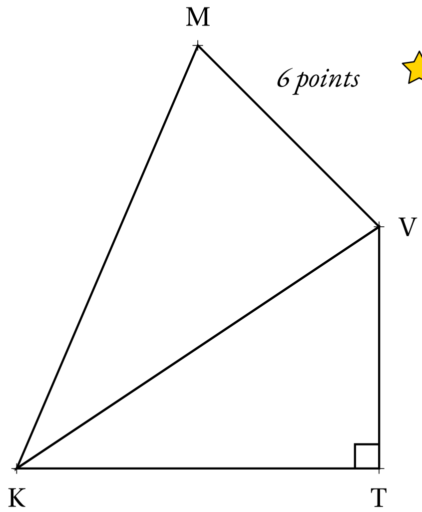
1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points* ★★



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

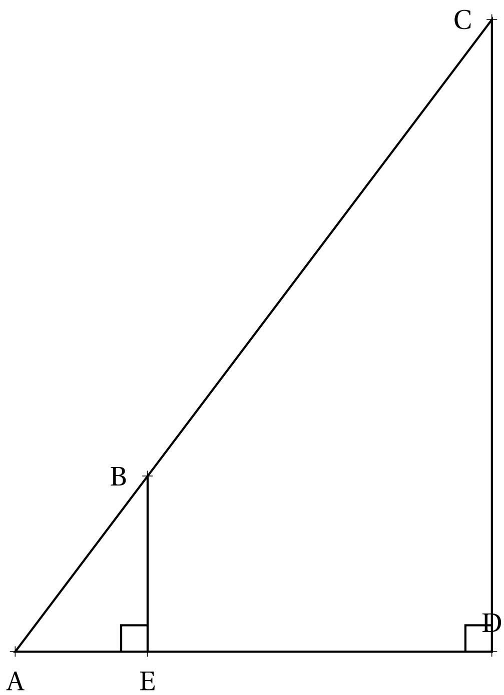
- Le triangle KTV est rectangle en T ;
- $\widehat{VKT} = 39°$;
- $KV = 76\,m$, $VM = 57\,m$ et $MK = 95\,m$

1. Calculer VT et KT. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.

Exercice n° 3 : *7 points* ★★



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

- $E \in [AD]$ et $B \in [AC]$;
- AEB est rectangle en E ;
- ADC est rectangle en D ;
- $\widehat{BAE} = 53°$;
- $AE = 5\,cm$ et $ED = 13\,cm$.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral

Exercice n° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$ et $g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(-3x-1) = 0$.

Exercice n° 2 : *6 points*

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— Le triangle KTV est rectangle en T ;

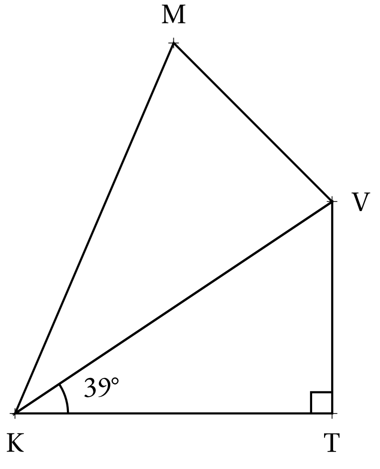
— $\widehat{VKT} = 39°$;

— KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m

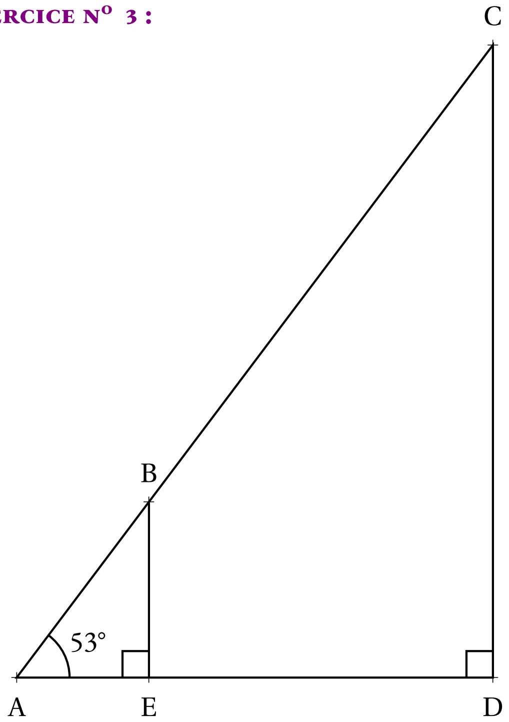
1. Calculer VT et KT.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.



EXERCICE N° 3 : *7 points* ⭐⭐



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— $E \in [AD]$ et $B \in [AC]$;

— AEB est rectangle en E ;

— ADC est rectangle en D ;

— $\widehat{BAE} = 53°$;

— $AE = 5\,\text{cm}$ et $ED = 13\,\text{cm}$.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral — **Correction**

Exercice n° 1 : Calcul littéral Correction

MOYEN

Développer et factoriser

1. $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (21x^2 + 14x - 3x - 2) - (42x^2 + 21x - 6x - 3)$

$f(x) = 21x^2 + 14x - 3x - 2 - 42x^2 - 21x + 6x + 3$

$\boxed{f(x) = -21x^2 - 4x + 1}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = (5x-1)(5x-1) - (4x+3)(4x+3)$

$g(x) = (25x^2 - 5x - 5x + 1) - (16x^2 + 12x + 12x + 9)$

$g(x) = 25x^2 - 5x - 5x + 1 - 16x^2 - 12x - 12x - 9$

$\boxed{g(x) = 9x^2 - 34x - 8}$

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

$f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (7x-1)[(3x+2) - (6x+3)]$

$f(x) = (7x-1)(3x+2-6x-3)$

$\boxed{f(x) = (7x-1)(-3x-1)}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = [(5x-1) + (4x+3)][(5x-1) - (4x+3)]$

$g(x) = (5x-1+4x+3)(5x-1-4x-3)$

$\boxed{g(x) = (9x+2)(x-4)}$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 0 \\ 7x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 7x &= 1 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 5 &= 0 \\ 9x + 5 - 5 &= 0 - 5 \\ 9x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{7} \text{ et } -\frac{5}{9}}$

Exercice n° 2 : Trigonométrie Correction

MOYEN

Calculer un angle ou un côté avec la trigonométrie

1. Dans le triangle VTK, rectangle en T, l'hypoténuse est le côté[VK].

Calcul de VT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté opposé à l'angle à 39°.

$\sin 39° = \dfrac{VT}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{VT = 76\,\text{m} \times \sin 39° \approx 47{,}83\,\text{m} \text{ au centimètre près.}}$

Calcul de KT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté adjacent à l'angle à 39°.

$\cos 39° = \dfrac{KT}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{KT = 76\,\text{m} \times \cos 39° \approx 59{,}06\,\text{m} \text{ au centimètre près.}}$

On pouvait aussi, même si je le déconseille, utiliser le théorème de Pythagore :
Dans le triangle KTV rectangle en T,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TK^2 + TV^2 = KV^2$$

$$\begin{aligned} TK^2 + 47,83^2 &= 76^2 \\ TK^2 + 2287,7089 &= 5776 \\ TK^2 &= 5776 - 2287,7089 \\ TK^2 &= 3488,2911 \\ TK &= \sqrt{3488,2911} \\ TK &\approx 59,06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 59,06^2 + TV^2 &= 76^2 \\ 3488,0836 + TV^2 &= 5776 \\ TV^2 &= 5776 - 3488,0836 \\ TV^2 &= 2287,9164 \\ TV &= \sqrt{2287,9164} \\ TV &\approx 47,83 \end{aligned}$$

2. Comparons $VM^2 + VK^2$ et MK^2 :

$VM^2 + VK^2$	MK^2
$57^2 + 76^2$	95^2
$3249 + 5776$	
9025	9025

Comme $VM^2 + VK^2 = MK^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle VKM est rectangle en V}}$.

3. Dans le triangle VKM rectangle en V, on peut calculer au choix :

$\cos\widehat{MKV} = \dfrac{76\,\text{m}}{95\,\text{m}}$ $\quad$ $\sin\widehat{MKV} = \dfrac{57\,\text{m}}{95\,\text{m}}$ $\quad$ $\tan\widehat{MKV} = \dfrac{57\,\text{m}}{76\,\text{m}}$

$\cos\widehat{MKV} = 0,8$ $\quad$ $\sin\widehat{MKV} = 0,6$ $\quad$ $\tan\widehat{MKV} = 0,75$

Dans tous les cas, à la calculatrice, on arrive à $\boxed{\widehat{MKV} \approx 36,9°}$.

Exercice n° 3 : Trigonométrie, Pythagore et Thalès CORRECTION

MOYEN

Utiliser les grands résultats de la géométrie

1. Dans le triangle AEB, rectangle en E, l'hypoténuse est le côté [AB].

Calcul de EB :

On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{BE}{5\,\text{cm}}$ donc $\boxed{BE = 5\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 6,6\,\text{cm au millimètre près.}}$

Calcul de AB :

On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{5\,\text{cm}}{AB}$ donc $\boxed{AB = \dfrac{5\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 8,3\,\text{cm au millimètre près.}}$

On pouvait aussi utiliser le théorème de Pythagore pour trouver le second côté... mais je le déconseille !

2. Les droites (EB) et (DC) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

$\boxed{\text{Les droites (EB) et (DC) sont parallèles.}}$

3. On pouvait utiliser deux raisonnements :
Avec la trigonométrie :
Dans le triangle ADC, rectangle en D, l'hypoténuse est le côté [AC].

Calcul de CD :

On connaît la mesure du côté adjacent AD = AE + ED = 5 cm + 13 cm = 18 cm et on veut le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{\text{CD}}{18\,\text{cm}}$ donc $\boxed{\text{CD} = 18\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 23{,}9\,\text{cm au millimètre près.}}$

Calcul de AC :

On connaît la mesure du côté adjacent AD et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{18\,\text{cm}}{\text{AD}}$ donc $\boxed{\text{AD} = \dfrac{18\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 29{,}9\,\text{cm au millimètre près.}}$

Avec le théorème de Thalès :
Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A, les droites (BE) et (CD) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AE}}{\text{AD}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{EB}}{\text{DC}}$$

$$\frac{5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} = \frac{8{,}3\,\text{cm}}{\text{AC}} = \frac{6{,}6\,\text{cm}}{\text{DC}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{AC} = \dfrac{8{,}3\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $\text{AC} = \dfrac{149{,}4\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $\text{AC} \approx 29{,}9\,\text{cm}$

$\text{DC} = \dfrac{6{,}6\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $\text{DC} = \dfrac{118{,}8\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $\text{DC} \approx 23{,}8\,\text{cm}$

Évaluation

Troisième

Exercice n° 1

(7 points)

Voici deux fonctions : $f(x) = 3x - \dfrac{3}{4}$ et $g(x) = (5x-1)(2x+3) - (5x-1)(6x-9)$.

1. Calculer $f(1)$ et $f\left(\dfrac{7}{5}\right)$

2. Montrer que $g(x) = -20x^2 + 64x - 12$

3. Calculer $g(-1)$

4. Factoriser $g(x)$

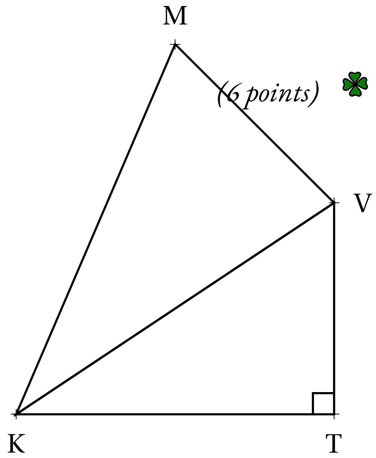
5. Résoudre $(5x-1)(12-4x) = 0$

Exercice n° 2

(6 points)

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

- Le triangle KTV est rectangle en T ;
- $\widehat{VKT} = 39°$;
- KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m



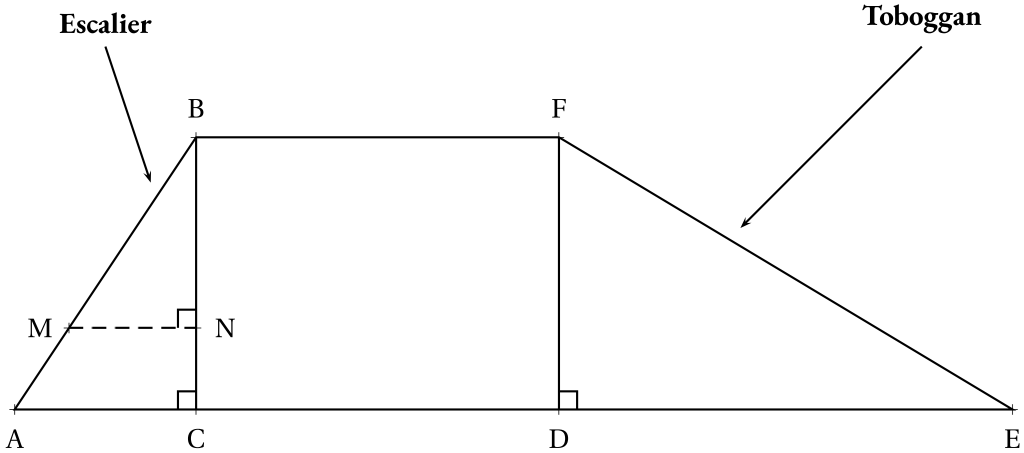
1. Calculer VT et KT. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.
2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.
3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.

Exercice n° 3

(7 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Une famille souhaite installer dans son jardin la cabane ci-dessous.
La partie inférieure de cette cabane, encadrée par des pointillés sur la photo, est modélisée par le schéma à droite :



On précise que :

- AB = 1,3 m, AC = 0,5 m ;
- BC = DF = 1,2 m et DE = 2,04 m ;
- Les triangles ABC, BMN et FDE sont rectangles.

Partie A : Étude du toboggan

1. Pour que le toboggan soit sécurisé, il faut que l'angle $\widehat{DEF}$ mesure 30°, au degré près. Le toboggan de cette cabane est-il sécurisé ?

2. Montrer que la rampe du toboggan, EF, mesure environ 2,37 m.

Partie B : Étude de l'échelle

Pour consolider l'échelle, on souhaite ajouter une poutre supplémentaire [MN], comme indiqué sur le modèle.

1. Démontrer que les droites (AC) et (MN) sont parallèles.

2. On positionne cette poutre [MN] telle que BN = 0,84 m. Calculer sa longueur MN.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 **Correction**

Voici deux fonctions : $(f(x) = 3x - \frac{3}{4}$ et $g(x) = (5x-1)(2x+3) - (5x-1)(6x-9)$.

1. Calculer $f(1)$ et $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

$f(1) = 3 \times 1 - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{9}{4}}$

$f\left(\frac{7}{5}\right) = 3 \times \frac{7}{5} - \frac{3}{4} = \frac{21}{5} - \frac{3}{4} = \frac{21 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{84}{20} - \frac{15}{20} = \boxed{\frac{69}{20}}$

2. Montrer que $g(x) = -20x^2 + 64x - 12$

$g(x) = (5x-1)(2x+3) - (5x-1)(6x-9)$.
$g(x) = (10x^2 + 15x - 2x - 3) - (30x^2 - 45x - 6x + 9)$
$g(x) = 10x^2 + 15x - 2x - 3 - 30x^2 + 45x + 6x - 9$

$\boxed{g(x) = -20x^2 + 64x - 12}$

3. Calculer $g(-1)$

$g(-1) = -20 \times (-1)^2 + 64 \times (-1) - 12 = -20 \times 1 - 64 - 12 = -20 - 64 - 12 = \boxed{-96}$

4. Factoriser $g(x)$

$g(x) = (5x-1)(2x+3) - (5x-1)(6x-9)$.
$g(x) = (5x-1)[(2x+3) - (6x-9)]$
$g(x) = (5x-1)(2x+3-6x+9)$

$\boxed{g(x) = (5x-1)(12-4x)}$

5. Résoudre $(5x-1)(12-4x) = 0$

$$(5x-1)(12-4x) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= 0 \\ 5x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 - 4x &= 0 \\ 12 - 4x - 12 &= 0 - 12 \\ -4x &= -12 \\ x &= \frac{-12}{-4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{5} \text{ et } 3}$

EXERCICE N° 2 — CORRECTION

1. Dans le triangle KTV rectangle en T.

Pour calculer KT, on connaît la mesure de l'hypoténuse KV et on cherche le côté adjacent à l'angle $\widehat{VKT}$.

$\cos 39° = \dfrac{KT}{76\,\text{m}}$, ainsi $\boxed{KT = 76\,\text{m} \times \cos 39° \approx 59{,}06\,\text{m au centimètre près.}}$

Pour calculer VT, on connaît la mesure de l'hypoténuse KV et on cherche le côté opposé à l'angle $\widehat{VKT}$.

$\sin 39° = \dfrac{VT}{76\,\text{m}}$, ainsi $\boxed{VT = 76\,\text{m} \times \sin 39° \approx 47{,}83\,\text{m au centimètre près.}}$

2.
Comparons $VM^2 + VK^2$ et MK^2 :

$VM^2 + VK^2$	MK^2
$57^2 + 76^2$	95^2
$3249 + 5776$	
9025	9025

Comme

$$VM^2 + VK^2 = MK^2$$

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, $\boxed{\text{le triangle VMK est rectangle en V}}$.

3. Dans le triangle KMV rectangle en V.

Pour l'angle $\widehat{KMV}$, on pouvait raisonner de l'une des trois manières suivantes :

On connaît le côté adjacent MV
et l'hypoténuse MK.

$\cos \widehat{KMV} = \dfrac{57\,\text{m}}{95\,\text{m}}$

À la calculatrice on trouve $\widehat{KMV} \approx 53,1°$.

On connaît le côté opposé KV
et l'hypoténuse MK.

$\sin \widehat{KMV} = \dfrac{76\,\text{m}}{95\,\text{m}}$

À la calculatrice on trouve $\widehat{KMV} \approx 53,1°$.

On connaît le côté adjacent MV
et le côté opposé KV.

$\tan \widehat{KMV} = \dfrac{76\,\text{m}}{57\,\text{m}}$

À la calculatrice on trouve $\widehat{KMV} \approx 53,1°$.

Finalement $\boxed{\widehat{VKM} = 90° - 53,1° = 36,9°}$.

Exercice n° 3 **Correction**

Partie A

1. Dans le triangle FDE rectangle en D, on connaît le côté adjacent et le côté opposé à l'angle $\widehat{DEF}$. Nous allons calculer la tangente de cet angle.

$\tan\widehat{DEF} = \dfrac{DF}{DE}$

$\tan\widehat{DEF} = \dfrac{1{,}2\,m}{2{,}04\,m}$

À la calculatrice, on arrive à $\boxed{\widehat{DEF} \approx 30° \text{ au degré près. Le toboggan est donc bien sécurisé.}}$

2. Dans le triangle FDE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DF^2 + DE^2 = FE^2$$
$$1,2^2 + 2,04^2 = FE^2$$
$$1,44 + 4{,}1616 = FE^2$$
$$FE^2 = 5{,}6016$$
$$FE = \sqrt{5{,}6016}$$
$$FE \approx 2,367$$

$\boxed{\text{EF mesure environ 2,37 m au centimètre près.}}$

Partie B

1. Les droites (MN) et (AC) sont perpendiculaires à la droite (BC).
On sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{\text{Les droites (MN) et (AC) sont parallèles.}}$

2. Les droites (MA) et (NC) sont sécantes en B, les droites (MN) et (AC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

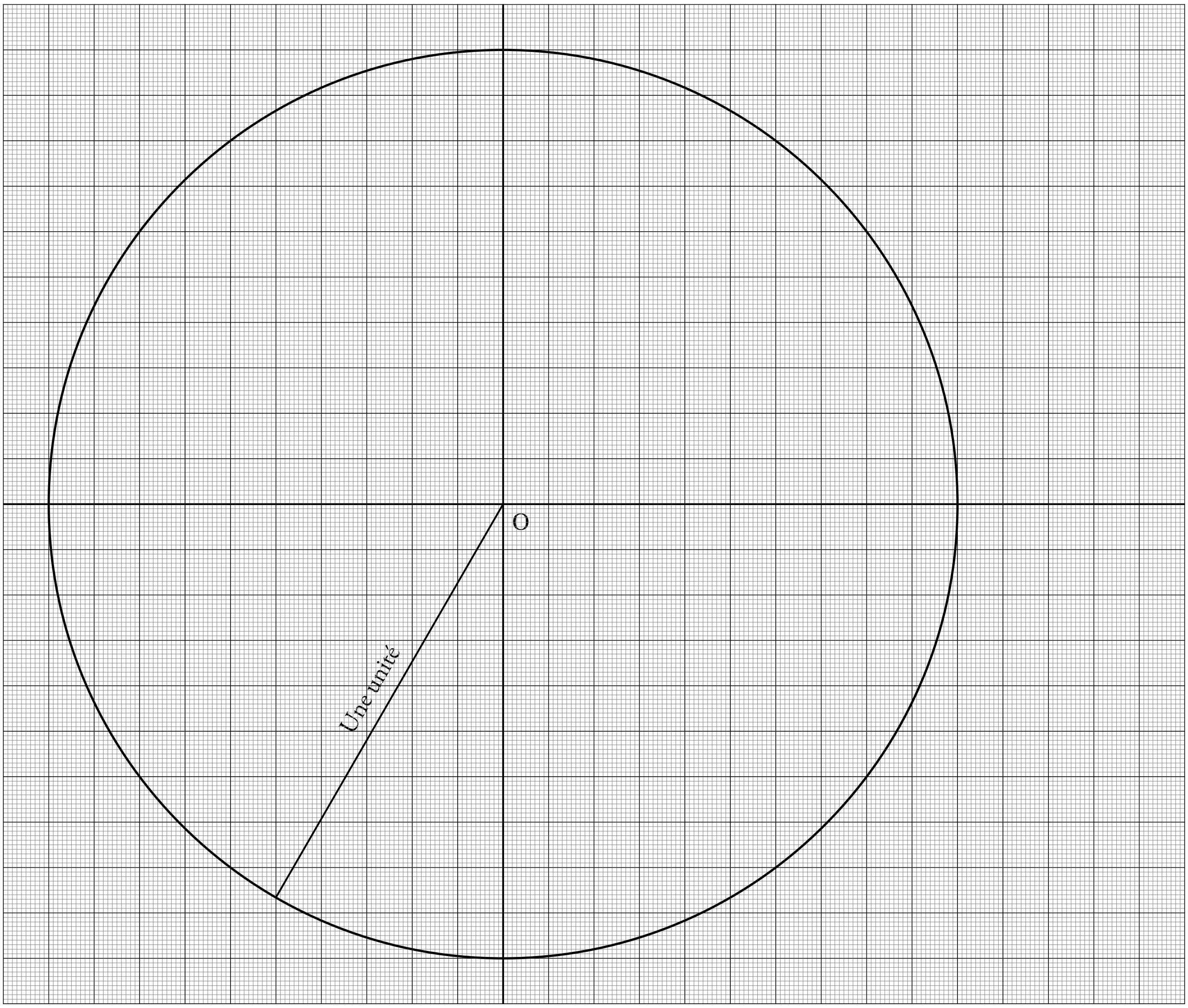
$$\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{NM}{CA}$$
$$\frac{0{,}84\,m}{1{,}2\,m} = \frac{BM}{BA} = \frac{MN}{0{,}5\,m}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$MN = \dfrac{0{,}5\,m \times 0{,}84\,m}{1{,}2\,m}$ d'où $MN = \dfrac{0{,}42\,m^2}{1{,}2\,m}$ et $MN = 0{,}35\,m$

$\boxed{\text{La barre de renfort MN mesure 0,35 m=35 cm}}$

Le cercle trigonométrique



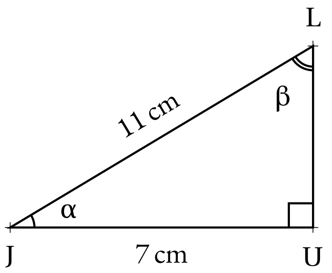
Exercices

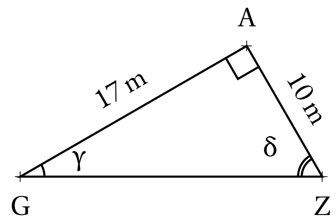
Trigonométrie

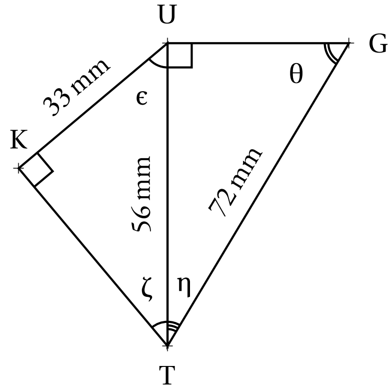
Troisième

Exercice n° 1 : Calculer la mesure d'un angle

Pour chacune des figures suivantes, déterminer, en justifiant votre réponse, une valeur approchée des angles marqués par une lettre grecque, au dixième de degré près. (α : alpha — β : beta — γ : gamma — δ : delta — ϵ : epsilon — ζ : zeta — η : eta — θ : theta)

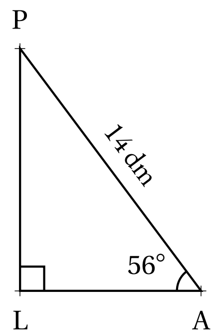


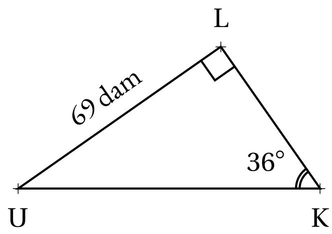


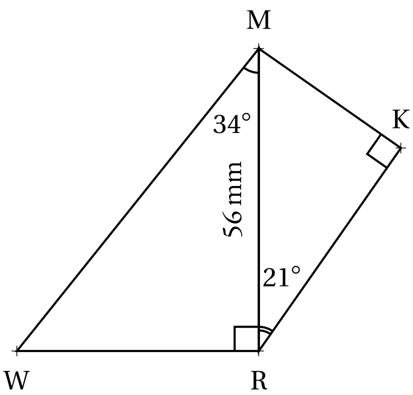


Exercice n° 2 : Calculer la mesure d'un côté

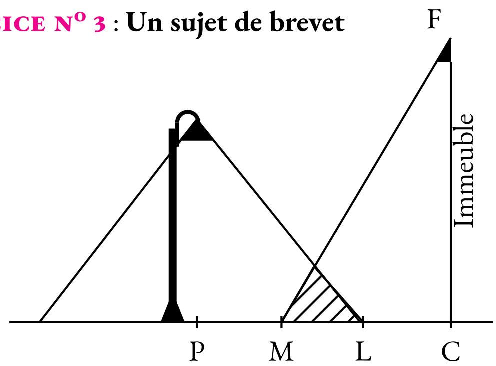
Pour chacune des figures suivantes, déterminer par le calcul, en justifiant votre réponse, la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième d'unité près, de chacune des mesures des côtés des triangles rectangles.



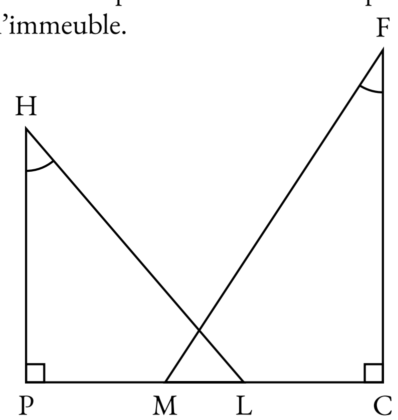




Exercice n° 3 : Un sujet de brevet



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

PC = $5,5\ m$, CF = $5\ m$, HP = $4\ m$ et $\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3,4\ m$.
2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.
3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Exercices — Correction

Exercice n° 1 — Correction

Dans le triangle JLU **rectangle en** U.

On connaît le côté adjacent à l'angle α et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\alpha$
$\cos\alpha = \dfrac{7\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\alpha \approx 50,5°}$

On connaît le côté opposé à l'angle β et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\beta$
$\sin\beta = \dfrac{7\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\beta \approx 39,5°}$

Comme attendu, on constate que α et β sont complémentaires, c'est à dire que $50,5° + 39,5° = 90°$.

Dans le triangle GAZ **rectangle en** A.

On connaît le côté adjacent à l'angle γ et le côté opposé, on peut donc calculer $\tan\gamma$
$\tan\gamma = \dfrac{10\,\text{m}}{17\,\text{m}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\gamma \approx 30,5°}$

On connaît le côté opposé à l'angle δ et le côté opposé, on peut donc calculer $\tan\delta$
$\tan\delta = \dfrac{17\,\text{m}}{10\,\text{m}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\delta \approx 59,5°}$

Comme attendu, on constate que γ et δ sont complémentaires, c'est à dire que $30,5° + 59,5° = 90°$.

Dans le triangle KUT **rectangle en** K.

On connaît le côté adjacent à l'angle ϵ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\epsilon$
$\cos\epsilon = \dfrac{33\,\text{mm}}{56\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\epsilon \approx 53,9°}$

On connaît le côté opposé à l'angle ζ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\zeta$
$\sin\zeta = \dfrac{33\,\text{mm}}{56\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\zeta \approx 36,1°}$

Comme attendu, on constate que ϵ et ζ sont complémentaires, c'est à dire que $53,9° + 36,1° = 90°$.

Dans le triangle TUG **rectangle en** U.

On connaît le côté adjacent à l'angle η et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\cos\eta$
$\cos\eta = \dfrac{56\,\text{mm}}{72\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\eta \approx 38,9°}$

On connaît le côté opposé à l'angle θ et l'hypoténuse du triangle, on peut donc calculer $\sin\theta$
$\sin\theta = \dfrac{56\,\text{mm}}{72\,\text{mm}}$, à la calculatrice on obtient $\boxed{\theta \approx 51,1°}$

Comme attendu, on constate que η et θ sont complémentaires, c'est à dire que $38,9° + 51,1° = 90°$.

Dans le triangle PLA **rectangle en** L

Calculons LA

On connaît la mesure de l'hypoténuse PA.
On cherche la mesure de LA le côté adjacent à l'angle à 56°.

$$\cos 56° = \frac{LA}{14\,dm}$$

Ainsi $\boxed{LA = 14\,dm \times \cos 56° \approx 7{,}8\,dm}$

Calculons PL

On connaît la mesure de l'hypoténuse PA.
On cherche la mesure de PL le côté opposé à l'angle à 56°.

$$\sin 56° = \frac{PL}{14\,dm}$$

Ainsi $\boxed{PL = 14\,dm \times \sin 56° \approx 11{,}6\,dm}$

Dans le triangle ULK **rectangle en** L

Calculons LK

On connaît la mesure de LU le côté opposé à l'angle à 36°.
On cherche la mesure de LK le côté adjacent à l'angle à 36°.

$$\tan 36° = \frac{69\,dam}{LK}$$

Ainsi $\boxed{LK = \frac{69\,dam}{\tan 36°} \approx 95\,dam}$

Calculons UK

On connaît la mesure de LU le côté opposé à l'angle à 36°.
On cherche la mesure de UK, l'hypoténuse du triangle.

$$\sin 36° = \frac{69\,dam}{UK}$$

Ainsi $\boxed{UK = \frac{69\,dam}{\sin 36°} \approx 117{,}4\,dam}$

Dans le triangle WRM **rectangle en** R

Calculons WM

On connaît la mesure de MR le côté adjacent à l'angle à 34°.
On cherche la mesure de WM l'hypoténuse du triangle.

$$\cos 34° = \frac{56\,mm}{WM}$$

Ainsi $\boxed{WM = \frac{56\,mm}{\cos 34°} \approx 67{,}5\,mm}$

Calculons WR

On connaît la mesure de MR le côté adjacent à l'angle à 34°.
On cherche la mesure de WR le côté opposé à l'angle à 34°.

$$\tan 34° = \frac{WR}{56\,mm}$$

Ainsi $\boxed{WR = 56\,mm \times \tan 34° \approx 37{,}8\,mm}$

Dans le triangle MKR **rectangle en** K

Calculons MK

On connaît la mesure de MR l'hypoténuse du triangle.
On cherche la mesure de MK le côté opposé à l'angle à 21°.

$$\sin 21° = \frac{MK}{56\,mm}$$

Ainsi $\boxed{MK = 56\,mm \times \sin 21° \approx 20\,mm}$

Calculons RK

On connaît la mesure de MR l'hypoténuse du triangle.
On cherche la mesure de RK, le côté adjacent de l'angle à 21°.

$$\cos 21° = \frac{RK}{56\,mm}$$

Ainsi $\boxed{RK = 56\,mm \times \cos 21° \approx 52{,}3\,mm}$

Exercice n° 3 Correction

1. Dans le triangle HPL rectangle en P.
On connaît la mesure HP du côté adjacent à l'angle $\widehat{PHL}$.
On cherche la mesure PL du côté opposé à l'angle $\widehat{PHL}$.

$\tan\widehat{PHL} = \dfrac{PL}{HP}$, $\tan 40° = \dfrac{PL}{4\,m}$ d'où $\boxed{PL = 4\,m \times \tan 40° \approx 3{,}4\,m}$

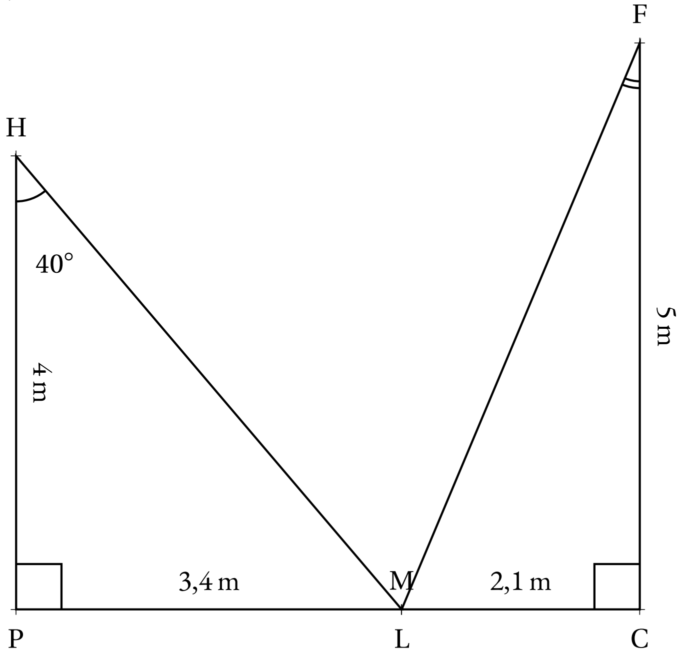
2. On sait que $PC = 5{,}5\,m$ et que $PL \approx 3{,}4\,m$.
On a donc $LC = PC - PL \approx 5{,}5\,m - 3{,}4\,m \approx 2{,}1\,m$.

Il reste à calculer MC.
Dans le triangle FMC rectangle en C.
On connaît la mesure FC du côté adjacent à l'angle $\widehat{MFC}$.
On cherche la mesure MC du côté opposé à l'angle $\widehat{MFC}$.

$\tan\widehat{MFC} = \dfrac{MC}{FC}$, $\tan 33° = \dfrac{MC}{5\,m}$ d'où $\boxed{MC = 5\,m \times \tan 33° \approx 3{,}2\,m}$

Finalement $\boxed{ML = MC - LC \approx 3{,}2\,m - 2{,}1\,m \approx 1{,}1\,m}$

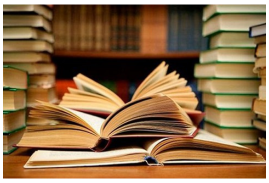
3. On souhaite obtenir la figure suivante :



Dans le triangle FLC rectangle en C.
On connaît la mesure FC du côté adjacent à l'angle $\widehat{MFC}$.
On connaît la mesure LC du côté opposé à l'angle $\widehat{MFC}$.

$\tan\widehat{MFC} = \dfrac{LC}{FC} = \dfrac{2{,}1\,m}{5\,m}$.

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{MFC} \approx 23°}$.



Culture

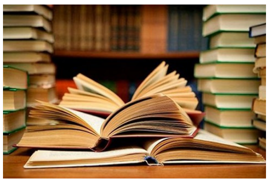
Tables de trigonométrie

Troisième

Avant l'apparition des calculatrices dans les salles de classes dans les années 80, les élèves utilisaient des tables de trigonométrie. Voici les valeurs arrondies au millième près des cosinus, sinus et tangentes des angles compris entre 0° et 90°. En utilisant la calculatrice on obtient un niveau de précision bien supérieur, mais le principe est le même. On peut imaginer que la calculatrice consulte une telle table quand on utilise les touche cosinus, sinus ou tangente.

Angle	Cosinus	Sinus	Tangente
0°	1,0000	0,0000	0,0000
1°	0,9998	0,0175	0,0175
2°	0,9994	0,0349	0,0349
3°	0,9986	0,0523	0,0524
4°	0,9976	0,0698	0,0699
5°	0,9962	0,0872	0,0875
6°	0,9945	0,1045	0,1051
7°	0,9925	0,1219	0,1228
8°	0,9903	0,1392	0,1405
9°	0,9877	0,1564	0,1584
10°	0,9848	0,1736	0,1763
11°	0,9816	0,1908	0,1944
12°	0,9781	0,2079	0,2126
13°	0,9744	0,2250	0,2309
14°	0,9703	0,2419	0,2493
15°	0,9659	0,2588	0,2679
16°	0,9613	0,2756	0,2867
17°	0,9563	0,2924	0,3057
18°	0,9511	0,3090	0,3249
19°	0,9455	0,3256	0,3443
20°	0,9397	0,3420	0,3640
21°	0,9336	0,3584	0,3839
22°	0,9272	0,3746	0,4040
23°	0,9205	0,3907	0,4245
24°	0,9135	0,4067	0,4452
25°	0,9063	0,4226	0,4663
26°	0,8988	0,4384	0,4877
27°	0,8910	0,4540	0,5095
28°	0,8829	0,4695	0,5317
29°	0,8746	0,4848	0,5543
30°	0,8660	0,5000	0,5774
31°	0,8572	0,5150	0,6009
32°	0,8480	0,5299	0,6249
33°	0,8387	0,5446	0,6494
34°	0,8290	0,5592	0,6745
35°	0,8192	0,5736	0,7002
36°	0,8090	0,5878	0,7265
37°	0,7986	0,6018	0,7536
38°	0,7880	0,6157	0,7813
39°	0,7771	0,6293	0,8098
40°	0,7660	0,6428	0,8391
41°	0,7547	0,6561	0,8693
42°	0,7431	0,6691	0,9004
43°	0,7314	0,6820	0,9325
44°	0,7193	0,6947	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

Angle	Cosinus	Sinus	Tangente
45°	0,7071	0,7071	1,0000
46°	0,6947	0,7193	1,0355
47°	0,6820	0,7314	1,0724
48°	0,6691	0,7431	1,1106
49°	0,6561	0,7547	1,1504
50°	0,6428	0,7660	1,1918
51°	0,6293	0,7771	1,2349
52°	0,6157	0,7880	1,2799
53°	0,6018	0,7986	1,3270
54°	0,5878	0,8090	1,3764
55°	0,5736	0,8192	1,4281
56°	0,5592	0,8290	1,4826
57°	0,5446	0,8387	1,5399
58°	0,5299	0,8480	1,6003
59°	0,5150	0,8572	1,6643
60°	0,5000	0,8660	1,7321
61°	0,4848	0,8746	1,8040
62°	0,4695	0,8829	1,8807
63°	0,4540	0,8910	1,9626
64°	0,4384	0,8988	2,0503
65°	0,4226	0,9063	2,1445
66°	0,4067	0,9135	2,2460
67°	0,3907	0,9205	2,3559
68°	0,3746	0,9272	2,4751
69°	0,3584	0,9336	2,6051
70°	0,3420	0,9397	2,7475
71°	0,3256	0,9455	2,9042
72°	0,3090	0,9511	3,0777
73°	0,2924	0,9563	3,2709
74°	0,2756	0,9613	3,4874
75°	0,2588	0,9659	3,7321
76°	0,2419	0,9703	4,0108
77°	0,2250	0,9744	4,3315
78°	0,2079	0,9781	4,7046
79°	0,1908	0,9816	5,1446
80°	0,1736	0,9848	5,6713
81°	0,1564	0,9877	6,3138
82°	0,1392	0,9903	7,1154
83°	0,1219	0,9925	8,1443
84°	0,1045	0,9945	9,5144
85°	0,0872	0,9962	11,4301
86°	0,0698	0,9976	14,3007
87°	0,0523	0,9986	19,0811
88°	0,0349	0,9994	28,6363
89°	0,0175	0,9998	57,2900
90°	0,0000	1,0000	



Culture

Tables de trigonométrie — Correction

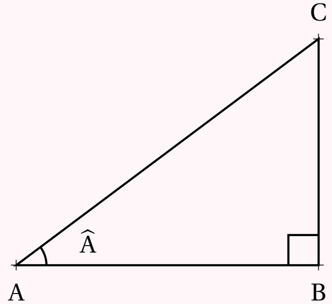
✧✧✧

Trigonométrie

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en B :

- le plus long côté du triangle, opposé à l'angle droit est l'hypoténuse;
- le côté de l'angle droit étant un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
- le côté de l'angle droit n'étant pas un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$.



- [AC] est l'hypoténuse du triangle;
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
- [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$;
- [BC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$;

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en B, il existe trois grandeurs qui ne dépendent que de l'angle $\widehat{A}$ que l'on nomme cosinus, sinus et tangente de l'angle $\widehat{A}$. La connaissance de l'une de ces grandeurs permet de retrouver la mesure de l'angle $\widehat{A}$ ou la longueur d'un côté du triangle ABC. On les définit ainsi :

$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{Côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{Côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}$$

Moyen mnémotechnique :

L'acronyme suivant permet de se souvenir facilement de ces trois définitions :

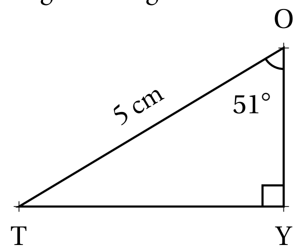
C A H S O H T O A

C pour cosinus, S pour sinus et T pour tangente.
A pour adjacent, O pour opposé et H pour hypoténuse.

Usages :

Pour calculer la longueur d'un côté connaissant un côté et un angle

TOY un triangle rectangle en T.



Calculons la longueur OY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 51°. On utilise donc le **cosinus**.

$\cos 51° = \dfrac{\text{OY}}{5\ cm}$ soit $\boxed{\text{OY} = 5\ cm \times \cos 51°}$

Finalement OY $\approx 3,15\ cm$

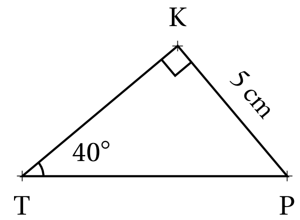
Calculons la longueur TY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté opposé à l'angle à 51°. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 51° = \dfrac{\text{TY}}{5\ cm}$ soit $\boxed{\text{TY} = 5\ cm \times \sin 51°}$

Finalement TY $\approx 3,89\ cm$

KPT un triangle rectangle en K.



Calculons la longueur TP :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle de l'hypoténuse. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 40° = \dfrac{5\ cm}{\text{TP}}$ soit $\boxed{\text{TP} = \dfrac{5\ cm}{\sin 40°}}$

Finalement TP $\approx 7,78\ cm$

Calculons la longueur TK :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 40°. On utilise donc la **tangente**.

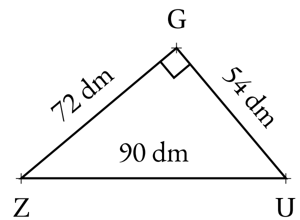
$\tan 40° = \dfrac{5\ cm}{\text{TK}}$ soit $\boxed{\text{TK} = \dfrac{5\ cm}{\tan 40°}}$

Finalement TK $\approx 5,96\ cm$

Pour résoudre une équation du type $5 = \dfrac{x}{7}$ ou $8 = \dfrac{7}{x}$, on écrit chaque membre comme une fraction, $\dfrac{5}{1} = \dfrac{x}{7}$ et $\dfrac{8}{1} = \dfrac{7}{x}$ puis on utilise la règle de trois!

Pour calculer la mesure d'un angle connaissant deux côtés

ZUG un triangle rectangle en G.



Calculons la mesure des angles $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$.

On peut calculer au choix soit le cosinus, le sinus ou la tangente de chacun de ces angles.

Ainsi $\cos\widehat{UZG} = \dfrac{72\ dm}{90\ dm} = 0,8$.

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{UZG} \approx 36{,}87°}$

Il faut saisir seconde cos 0,8

Comme $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$ sont complémentaires, $\widehat{GUZ} = 90° - 36{,}87° = 53{,}13°$

Chapitre XI

Les objets de l'espace

Sommaire

I Vocabulaire . . . 446
II Les prismes droits et le cylindre . . . 446
III Les pyramides et le cône . . . 447
IV La sphère et la boule . . . 447
Troisième — Fiche de synthèse : Arithmétique . . . 449
Cinquième — Fiche de synthèse : Angles et triangles . . . 450
Cinquième — Fiche de synthèse : Les quadrilatères . . . 451
Troisième — Fiche de synthèse : Triangles égaux et semblables . . . 452
Fiche de synthèse : Solides et volumes . . . 453
Fiche de synthèse : Cercle, disque, sphère et boule . . . 455
Fiche de synthèse : Les transformations . . . 456

I — Vocabulaire

❧ Définition II.1 : Solide

Un **solide** est un ensemble de points de l'espace situé à l'intérieur d'une partie fermée.

❧ Définition II.2 : Polyèdre

Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones. Les côtés de ces polygones sont appelés **arêtes** . Les extrémités de ces arêtes sont appelés **sommet**

II — Les prismes droits et le cylindre

❧ Définition II.3 : Prisme droit

Un **Prisme droit** est un solide

Exemples :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$

$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$

$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

Z $m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$

$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.

n est une fonction **constante**.

Propriété II.1 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \to ax$ peut s'écrire $x \to ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

III — Les pyramides et le cône

Définition II.4 : Prisme droit

Un **Prisme droit** est un solide

Exemples :

$f(x) = 3x+5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x-7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \frac{2x}{3} - \frac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{9}{5}$

$k(x) = x-3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7-x$ peut s'écrire $l(x) = -x+7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

Z $m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x+0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x+3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

Propriété II.2 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \rightarrow ax$ peut s'écrire $x \rightarrow ax+b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

IV — La sphère et la boule

Définition II.5 : Prisme droit

Un **Prisme droit** est un solide

Exemples :

$f(x) = 3x+5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x-7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \frac{2x}{3} - \frac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{9}{5}$

$k(x) = x-3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7-x$ peut s'écrire $l(x) = -x+7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

$m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

Propriété II.3 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

Démonstration :

a un nombre quelconque.
La fonction $x \rightarrow ax$ peut s'écrire $x \rightarrow ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

Arithmétique

La division euclidienne

Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$,
Alors il existe un unique couple de nombres entiers naturels q et r tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

a est le **dividende** , b le **diviseur** , q le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** .

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 2021 & 15 \\ \cline{2-2} 52 & 134 \\ 71 & \\ 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2022 & 56 \\ \cline{2-2} 342 & 36 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2021 & 43 \\ \cline{2-2} 301 & 47 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2022 & 6 \\ \cline{2-2} 22 & 337 \\ 42 & \\ 0 & \end{array}$$

$2021 = 15 \times 134 + 11$ $\quad$ $2022 = 56 \times 36 + 6$ $\quad$ $2021 = 43 \times 47$ $\quad$ $2022 = 6 \times 337$

Remarques : un nombre entier est toujours divisible par 1 et par lui-même.
2 est le seul nombre premier pair. Tous les nombres impairs ne sont pas premiers, $9 = 3 \times 3$.

Vocabulaire

Si le reste de la **division euclidienne** est nul, comme quand on divise 2021 par 43, on dit que 2021 est un **multiple** de 43 ou que 2021 est **divisible** par 43 ou encore que 43 est un **diviseur** de 2021.

Exemples :
Un **nombre entier pair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut zéro.
Ainsi tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2 \times n$ où n est un entier naturel.

Un **nombre entier impair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut un.
Ainsi tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2 \times n + 1$ où n est un entier naturel.

Critères de divisibilité

— Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
— Un entier est divisible par **3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
— Un entier est divisible par **4** si le nombre formé par le chiffre de ses dizaines et celui de ses unités est un multiple de 4.
— Un entier est divisible par **5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
— Un entier est divisible par **9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
— Un entier est divisible par **10** si son chiffre des unités est 0.

Nombres premiers

Un nombre entier est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs.
Un nombre entier est **premier** s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même !
Exemple : voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 91 ; 97

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples : $2021 = 43 \times 47$; $2022 = 2 \times 3 \times 337$; $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Fraction irréductible

Une **fraction est irréductible** si elle n'est pas simplifiable. Cela signifie que 1 est le seul diviseur commun à son numérateur et son dénominateur.

Applications :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ $\qquad$ $540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

Ainsi $2 \times 2 = 4$ est un diviseur de 360 ; $3 \times 3 \times 5 = 45$ est un diviseur de 540 ...

$\dfrac{360}{540} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5} = \dfrac{2}{3}$. On a simplifié par $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$.

180 est le plus grand diviseur commun à 360 et 540. On a $360 = 2 \times 180$ et $540 = 3 \times 180$.

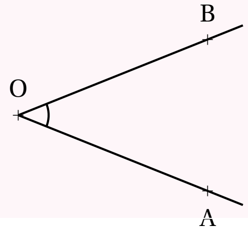
Si nous avons à notre disposition 360 fleurs rouges et 540 fleurs jaunes, nous pouvons au maximum réaliser 180 bouquets tous identiques composés chacun de 2 fleurs rouges et 3 fleurs jaunes.

Angles et triangles

Définition

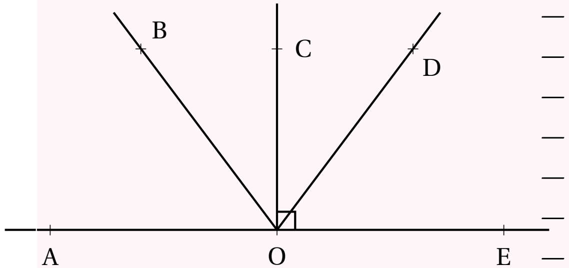
Deux demi-droites ayant la même origine définissent **un angle** .
L'origine commune est **le sommet** de l'angle et les demi-droites sont **les côtés** .

- (O est le sommet de l'angle ;
- ([OA) et [OB) sont des côtés de l'angle
- on note cet angle $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA}$ ou $\widehat{O}$.



Vocabulaire

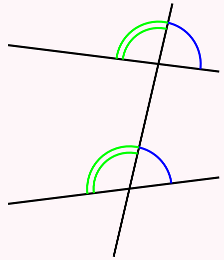
- Un **un angle droit** a ses côtés perpendiculaires, il mesure 90° ;
- un **angle plat** est constitué de deux angles droits, il mesure 180° ;
- un **angle nul** est constitué de deux côtés superposés, il mesure 0° ;
- un **angle aigu** est inférieur à un angle droit, il mesure entre 0° et 90° ;
- un **angle obtus** est supérieur à un angle droit, il mesure entre 90° et 180° ;
- deux angles sont **complémentaires** quand leur somme vaut un angle droit ;
- deux angles sont **supplémentaires** quand leur somme vaut un angle plat ;
- deux angles ayant un côté et le sommet en commun sont **adjacents** .



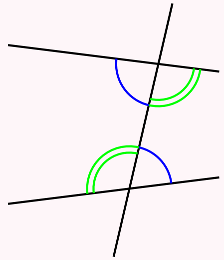
- $\widehat{EOE}$ est nul ;
- $\widehat{EOD}$ est aigu ;
- $\widehat{EOC}$ est droit ;
- $\widehat{EOB}$ est obtus ;
- $\widehat{EOA}$ est plat ;
- $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOC}$ sont complémentaires ;
- $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOA}$ sont supplémentaires ;
- $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOA}$ sont adjacents.

Définitions et propriétés

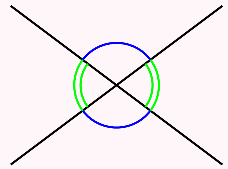
Soient d, d' deux droites et Δ une droite sécante avec d et d'.



Angles correspondants



Angles alternes-internes

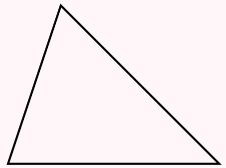


Angles opposés par le sommet

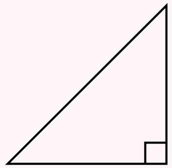
- **Si** $(d)//(d')$ **alors** les angles correspondants sont égaux. La réciproque est vraie.
- **Si** $(d)//(d')$ **alors** les angles alternes-internes sont égaux. La réciproque est vraie.
- Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Définitions et propriétés

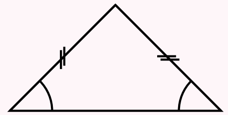
Un **triangle** est un polygone a trois côtés.
Un triangle est **rectangle** si un de ses angles est droit.
Un triangle est **isocèle** si deux côtés sont égaux.
Un triangle est **équilatéral** si les trois côtés sont égaux.



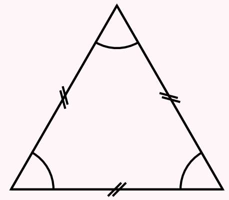
Triangle quelconque



Triangle rectangle



Triangle isocèle



Triangle équilatéral

Propriété

Dans un triangle, la somme des trois angles vaut un angle plat soit 180°.

Conséquences :

- Les trois angles d'un triangle équilatéraux sont égaux à 60°.
- Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.
- Dans un triangle rectangle isocèle, les deux angles aigus sont égaux à 45°.
- Un triangle ne peut possèder qu'un seul angle obtus.

Les quadrilatères

Définition

Un **quadrilatère** est un polygone ayant quatre côtés.
Un **trapèze** est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.
Un **trapèze rectangle** est un trapèze ayant un angle droit (et donc deux !).
Un **parallèlogramme** est un quadrilatère ayant des côtés opposés parallèles.
Un **rectangle** est un quadrilatère ayant quatre angles droits.
Un **losange** est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.
Un **carré** est un quadrilatère rectangle et losange.

Propriétés du parallélogramme

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors :
— ses diagonales se coupent en leur milieu ;
— ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
— ses côtés opposés sont égaux deux à deux.

Propriétés du losange

Si un quadrilatère est un losange alors :
— c'est un parallélogramme ;
— ses diagonales sont perpendiculaires ;
— ses côtés sont égaux.

Propriétés du rectangle

Si un quadrilatère est un **rectangle** alors :
— c'est un parallélogramme ;
— ses diagonales sont de même longueur ;
— il a quatre angles droits.

Propriétés du carré

Si un quadrilatère est un **carré** alors :
— c'est un parallélogramme, c'est rectangle, c'est un losange ;
— ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur ;
— il a quatre angles droits et quatre côtés égaux.

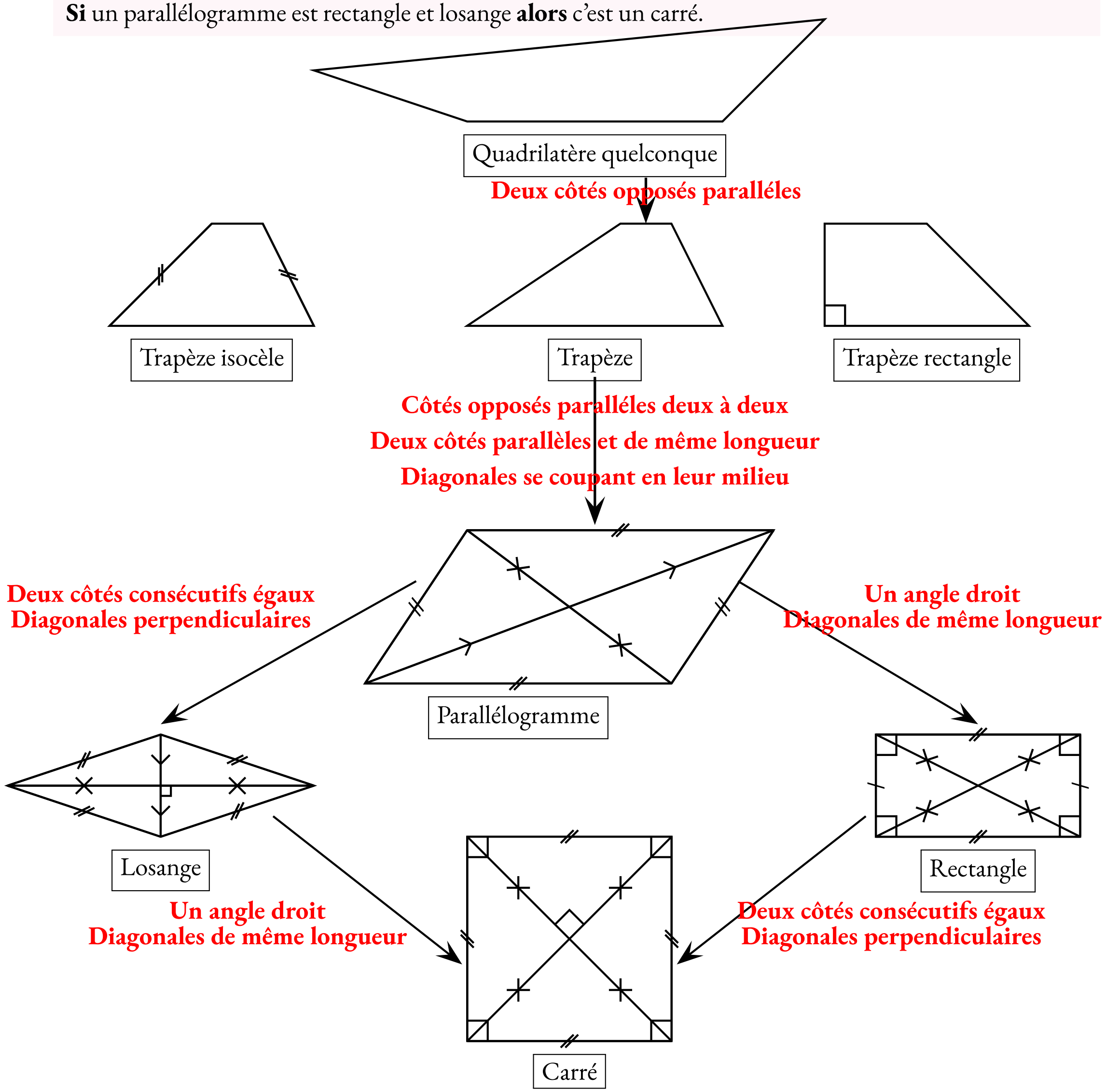
Propriétés caractéristiques

Dans cette propriété, les quadrilatères sont supposés non croisés.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu **alors** c'est un parallélogramme.
Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles deux à deux **alors** c'est un parallélogramme.
Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux deux à deux **alors** c'est un parallélogramme.

Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur **alors** c'est un rectangle.
Si un parallélogramme a un angle droit **alors** c'est un rectangle.
Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires **alors** c'est un losange.
Si deux côtés consécutifs d'un parallélogramme sont égaux **alors** c'est un losange.

Si un parallélogramme est rectangle et losange **alors** c'est un carré.



Triangles égaux et semblables

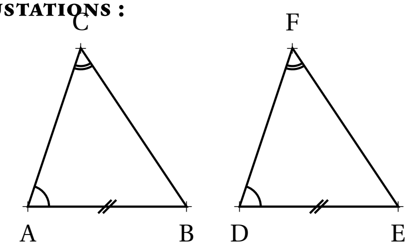
Définition : triangles égaux

Deux triangles sont égaux s'ils sont superposables.
Cela signifie que leurs trois côtés et leurs trois angles sont égaux.

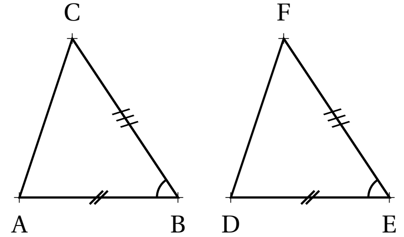
Propriétés

Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté de même longueur et deux angles de même mesure.
Deux triangles sont égaux quand ils ont deux côtés de même longueur et l'angle formé par ces côtés de même mesure.

Illustrations :



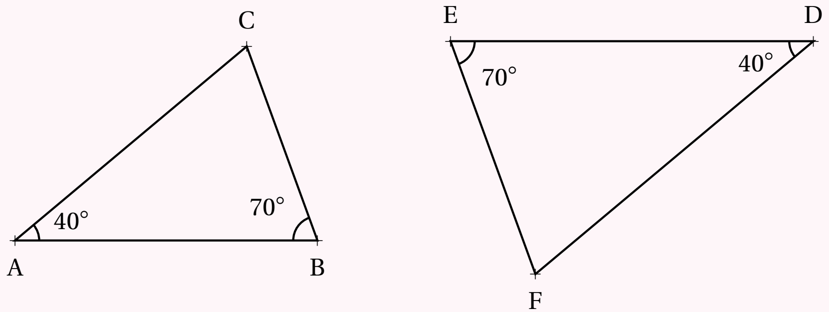
$AB = DE$, $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$
Les triangles ABC et DEF sont égaux.



$AB = DE$, $BC = EF$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$
Les triangles ABC et DEF sont égaux.

Définition : triangles semblables

On dit que **deux triangles sont semblables** quand leurs trois angles sont égaux deux à deux.



Dans ce cas, les côtés sont associés deux à deux, on dit qu'ils sont **homologues** .
Par exemple ci-dessus, [AB] et [ED] sont homologues, ainsi que [BC] et [EF] ou [AC] et [FD].

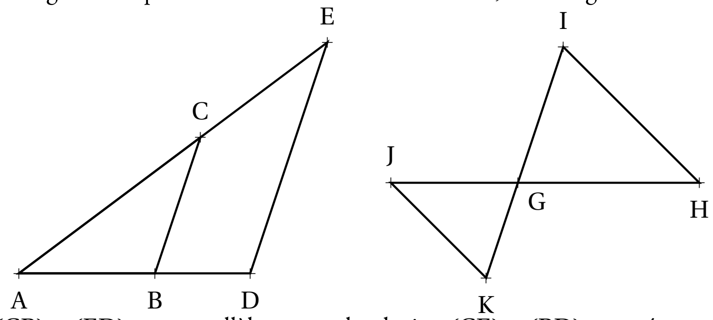
Propriétés

Si deux triangles ont deux angles égaux deux à deux alors ils sont **semblables**.
Si deux triangles sont semblables alors l'un est l'**agrandissement** de l'autre.
Si deux triangles sont semblables alors l'un est la **réduction** de l'autre.
Si deux triangles sont **égaux** alors ils sont **semblables**.
Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont **proportionnels**.

Exemples fondamentaux :

Thalès

Dans une configuration géométrique relevant du théorème de Thalès, les triangles sont semblables.

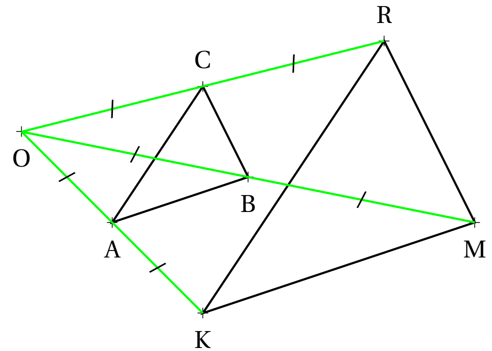


Comme les droites (CB) et (ED) sont parallèles et que les droites (CE) et (BD) sont sécantes,
les triangles ACB **et** AED **sont semblables.**

Comme les droites (JK) et (IH) sont parallèles et que les droites (JH) et (KI) sont sécantes,
les triangles GIH **et** GJK **sont semblables.**

Homothétie

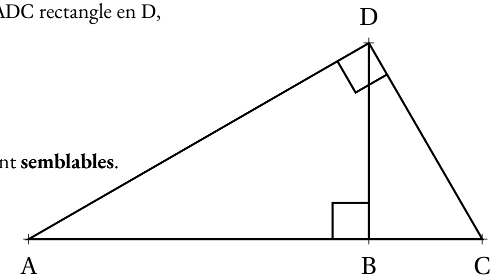
Deux triangles images l'un de l'autre par une **homothétie** sont **semblables**.
On dit aussi qu'ils sont **homothétiques** . Deux triangles dans une situation de Thalès sont **homothétiques**
.



ABC est l'image du triangle KMR par l'homothétie de centre O et de coefficient $\frac{1}{2}$.
Ces triangles sont semblables.

Un grand classique :

Notons $\alpha = \widehat{DAB}$.
Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, dans le triangle ADC rectangle en D,
$\widehat{DCB} = 90° - \alpha$.
On dit souvent que $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ sont **complémentaires** .
Dans le triangle ADB rectangle en B, pour la même raison $\widehat{ADB} = 90° - \alpha$.
Dans le triangle DBC rectangle en B, de même, $\widehat{BDC} = \alpha$
Les triangles ADC, ABD et DBC ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont **semblables**.
Ces trois triangles ont donc des côtés proportionnels.
Ils sont des agrandissements/réductions les uns des autres.



Solides et volumes

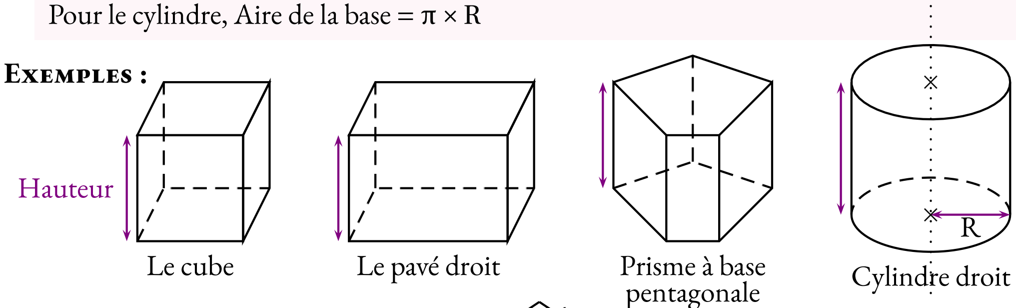
Les prismes droits et le cylindre

Un **prisme droit** est un polyèdre constitué par deux faces polygonales parallèles et superposables reliées par des faces rectangulaires.
Un **cylindre** est un solide constitué par deux disques parallèles, de même rayon, reliés par une surface de révolution.
Les deux faces parallèles sont **les bases** du solide.
La distance entre les base est **la hauteur** du solide.
Le volume d'un cylindre ou d'un prisme droit est donné par la formule :

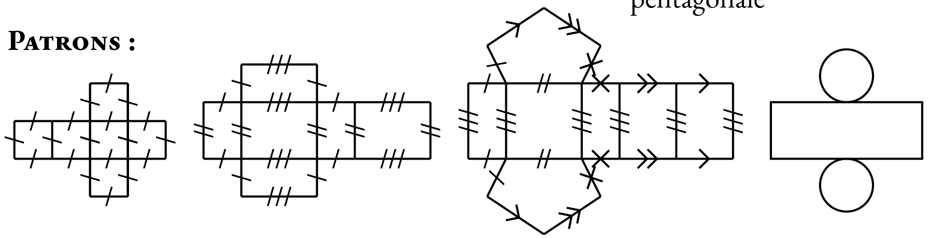
$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

Pour le cylindre, Aire de la base = $\pi \times R$

Exemples :



Patrons :



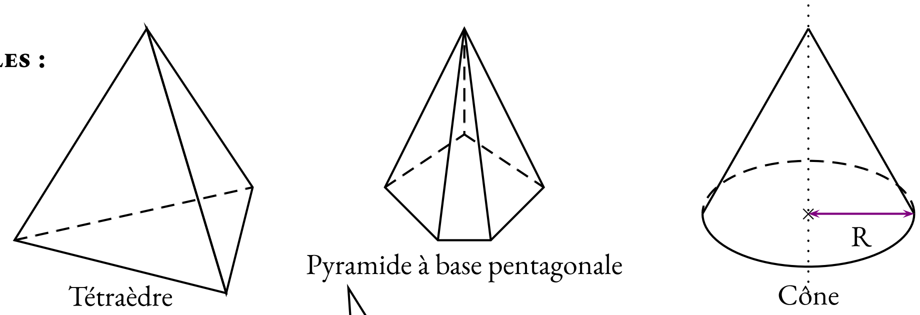
Les pyramides et le cône

Une **pyramide** est un polyèdre constitué d'une base polygonale et d'un sommet principal reliés par des faces triangulaires.
Un **cône** est un solide constitué d'une base circulaire et d'un sommet principal relié par une surface de révolution.
La **hauteur** est la distance entre la base et le sommet principal.
Dans un cône, un segment reliant le sommet principal et un point du cercle de base s'appelle **une génératrice** .

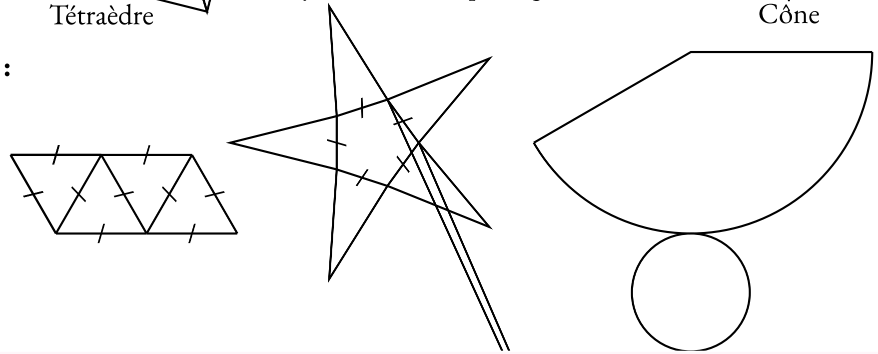
$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

Dans le cas du cône, Aire de la base = $\pi \times R$.

Exemples :



Patrons :

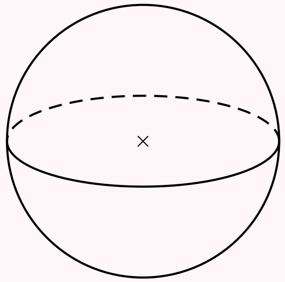


La sphère et la boule

Une **sphère** de centre O et de rayon R est une surface constituée des points situés exactement à la distance R du centre O.
Une **boule** de centre O et de rayon R est un solide constitué des point situées à une distance inférieure ou égale à R du centre O.
La sphère ne possède pas de patron.

$$\text{Aire de la sphère} = 4\pi R^2$$

$$\text{Volume de la boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Unités et conversion

Un mètre cube (1 m^3) est le volume d'un cube de 1 m de côté.

1 m^3=1000 dm^3	1 L=1 dm^3	1 L=1000 mL
1 m^3=1 000 000 cm^3	1 L=1000 cm^3	1 cm^3=1 cm^3
1 m^3=1 000 000 000 mm^3	1 m^3=1000 L	1 mL=1000 mm^3

Coefficient d'agrandissement/réduction

Si on multiplie les longueurs d'une figure par un nombre $k > 0$ alors les aires sont multpliées par k^2 et les volumes par k^3.

Cercle, disque, sphère et boule

Le plan : cercle et disque

R un nombre positif ou nul, O un point du plan.

Le cercle de centre O et de rayon R est un **courbe** constituée de tous les points du plan situés à exactement la distance R du centre O.

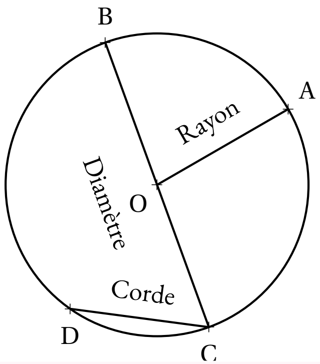
Le disque de centre O et de rayon R est une **surface** constituée de tous les points du plan situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

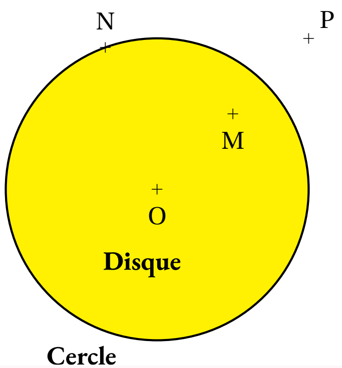
Vocabulaire

Un **rayon** est un segment joignant le centre à un point quelconque du cercle.
Une **code** est un segment joignant deux points du cercle.
Un **diamètre** est une corde passant par le centre du cercle.

La longueur d'un rayon s'appelle **le rayon du cercle** , on utilise le même nom pour le segment et sa longueur.
Le diamètre a une longueur égale au double du rayon du cercle.
La longueur maximale d'une corde est égale au diamètre du cercle.

Illustrations :





$OM < R$

$ON = R$

$OP > R$

Périmètre et aire

Le **périmètre** d'un cercle de rayon R mesure sa longueur, il vaut : $\mathbf{2\pi R}$.
L'**aire** d'un disque de rayon R mesure sa surface, elle vaut : $\mathbf{\pi R^2}$

L'espace : sphère et boule

R un nombre positif ou nul, O un point de l'espace.

La **sphère** de centre O et de rayon R est une **surface** constituée de tous les points de l'espace situés à exactement la distance R du centre O.

La **boule** de centre O et de rayon R est un **volume** constitué de tous les points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

Aire et volume

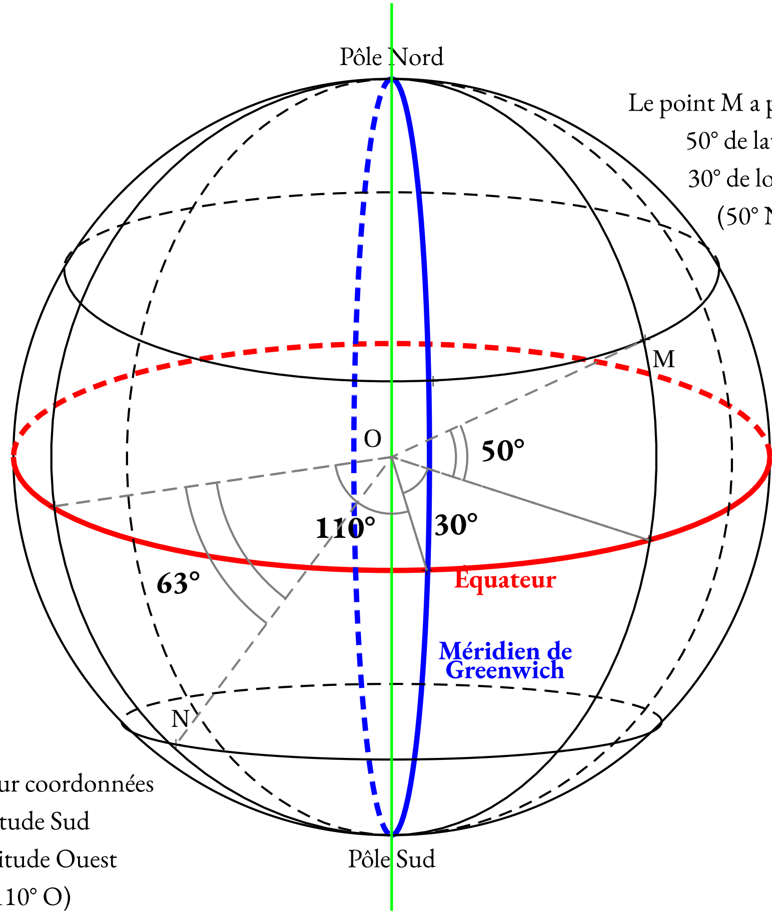
L'**aire** d'une sphère R mesure sa surface, elle vaut : $\mathbf{4\pi R^2}$.

Le **volume** d'une boule de rayon R mesure son volume, elle vaut : $\mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Coordonnées géographique

Soit une sphère de rayon R et de centre O.
Un **grand cercle** de la sphère est un cercle de rayon R et de centre O.
Un grand cercle partage la sphère en deux **hémisphères** .
Sur la **sphère terrestre** , l'**équateur** et les **méridiens** sont des grands cercles.
Un **parallèle** est un cercle de la sphère terrestre situé à l'intersection avec un plan parallèle au plan équatorial.
Tout les points de la sphère situés sur un même parallèle sont à la même **latitude** .
Un **méridien** est un cercle de la sphère terrrestre passant par les pôle Nord et Sud.
Tous les points de la sphère situés sur un même méridien sont à la même **longitude** .

Exemples :



Le point M a pour coordonnées
50° de latitude Nord
30° de longitude Est
(50° N; 30° E)

Le point N a pour coordonnées
63° de latitude Sud
110° de longitude Ouest
(63° S; 110° O)

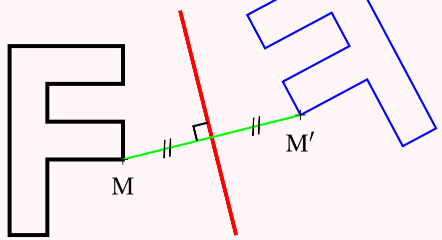
Les transformations

La symétrie axiale

(d) une droite et M un point du plan.

L'image du point M par la **symétrie d'axe** la droite (d) est l'unique point M′ vérifiant :
$(d) \perp (MM')$ et (d) coupe $[MM']$ en son milieu.
Cela revient à dire que (d) est la **médiatrice** de $[MM']$.

C'est le résultat d'un **pliage** le long de la droite (d).

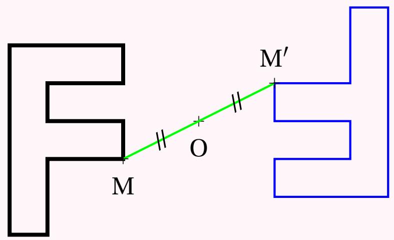


La symétrie centrale

O et M deux points du plan.

L'image du point M par la **symétrie de centre** O est l'unique point M′ vérifiant O est le milieu de $[MM']$.

C'est le résultat d'un **demi-tour** autour du point O.

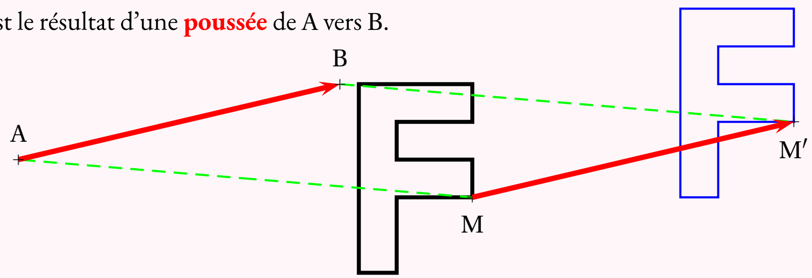


La translation

A, B et M trois points du plan.

L'image du point M par la **translation** qui transforme A en B est l'unique point M′ vérifiant ABM′M est un parallélogramme.

C'est le résultat d'une **poussée** de A vers B.



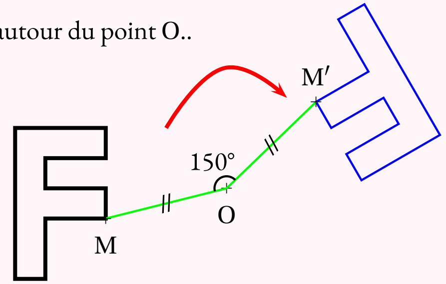
La rotation

O, et M deux points du plan.

L'image du point M par la **rotation** d'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre l'unique point M′ vérifiant $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

C'est le résultat d'une **rotation** autour du point O..

Rotation d'angle $\alpha = 150°$
dans le sens des aiguilles
d'une montre



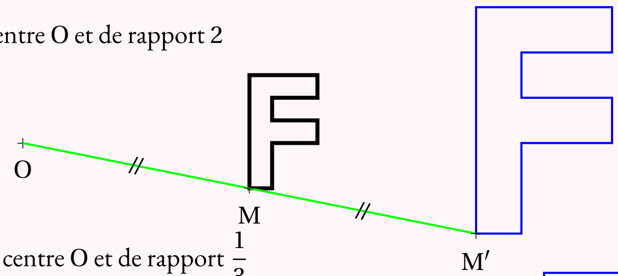
L'homothétie

O, et M deux points du plan.

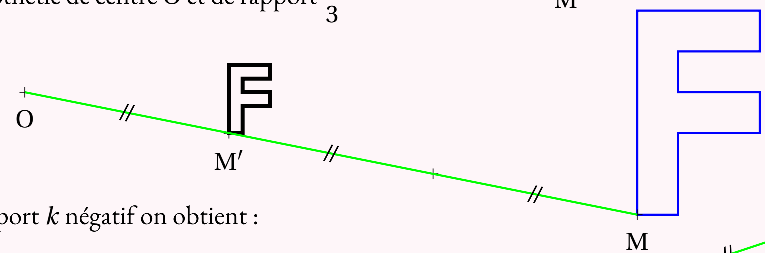
L'image du point M par l'**homothétie** de centre O et de rapport $k > 0$ est l'unique point M′ vérifiant $OM = kOM'$ et $M' \in [OM)$.

C'est le résultat d'un **agrandissement/réduction** de rapport k depuis le point O.

Homothétie de centre O et de rapport 2

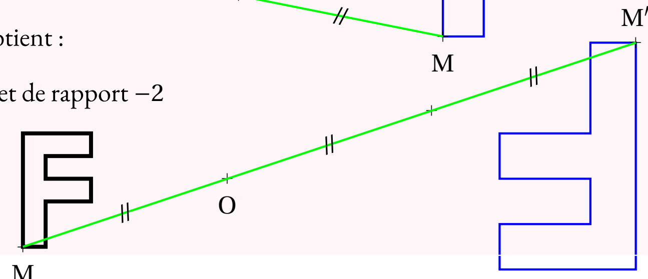


Homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$



Pour un rapport k négatif on obtient :

Homothétie de centre O et de rapport -2



Propriétés

La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et la rotation sont des **isométries** : elles ne modifient pas les angles et les longueurs.
L'homothétie ne modifie pas les angles. Elle agrandit ou réduit les longueurs.

Chapitre XII

Algorithmique

Sommaire

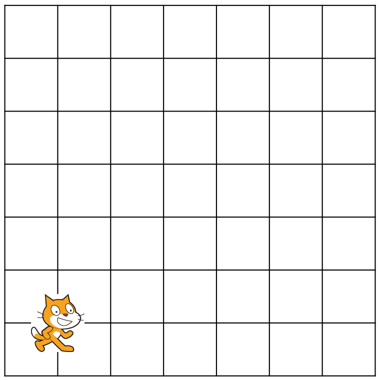
Exercices 460
Fiche de synthèse 470
Fiche de synthèse : Tableur 470

Exercices

Exercice n° 12.1 : Déplacement

Sur le quadrillage ci-dessous, les carreaux font **20 unités** de côté. À l'aide du script ci-dessous, dessiner le chemin du lutin chat. La position initiale du lutin chat est à l'intersection des segments qu'il cache.

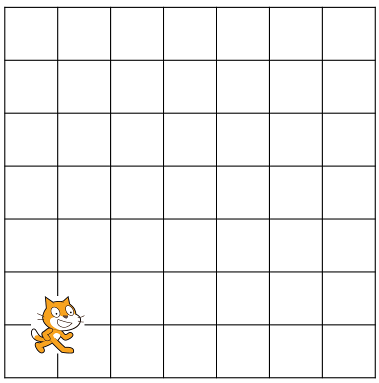
```
quand 🏁 est cliqué
répéter 3 fois
    avancer de 40
    tourner ↺ de 90 degrés
    avancer de 40
    tourner ↻ de 90 degrés
```



Exercice n° 12.2 : Déplacement — Épisode 2

Sur le quadrillage ci-dessous, les carreaux font **40 unités** de côté. À l'aide du script ci-dessous, dessiner le chemin du lutin chat. La position initiale du lutin chat est à l'intersection des segments qu'il cache.

```
quand 🏁 est cliqué
mettre longueur à 80
avancer de longueur
tourner ↺ de 90 degrés
ajouter 120 à longueur
avancer de longueur
tourner ↻ de 90 degrés
mettre longueur à 40
avancer de longueur
```



Exercice nº 12.3 : Déplacement — Épisode 3

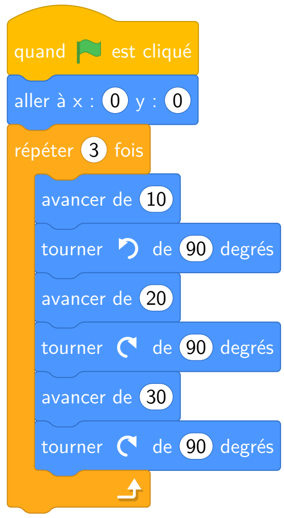
☆ ☆

Pour chacun des trois scripts ci-dessous, donner les coordonnées de la position finale du lutin chat sachant que sa position de départ est donnée par les coordonnées $(0;0)$.

Script nº 1

Script nº 2

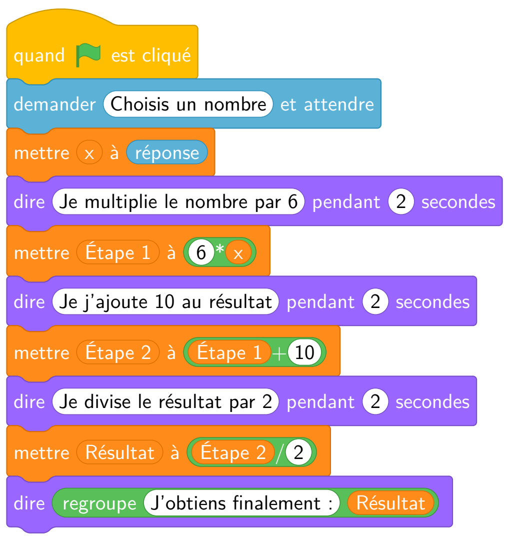
Script nº 3



Exercice nº 12.4 : Programme de calcul

☆ ☆

On considère le programme de calcul rédigé sous forme d'un algorithme Scratch.



1.a. Julie fait fonctionner ce programme en choisissant au départ le nombre 5.
Vérifier que ce qui est dit à la fin est :
« J'obtiens finalement 20. »

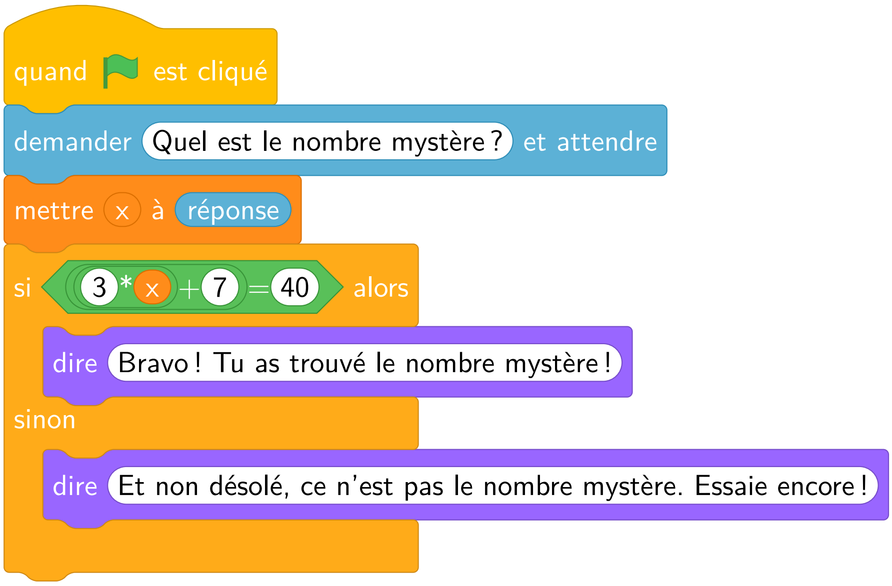
1.b. Que dit le programme si Julie le fait fonctionner en choisissant au départ le nombre 7 .

2. Julie fait fonctionner le programme et ce qui est dit à la fin est :
« J'obtiens finalement 8. »
Quel nombre Julie a-t-elle choisi au départ ?

3. Si on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l'expression obtenue à la fin du programme puis réduire cette expression autant que possible.

Exercice n° 12.5 : Programme de calcul — Épisode 2

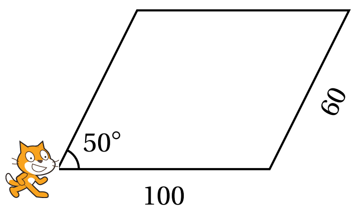
Un élève utilise le programme ci-dessous :

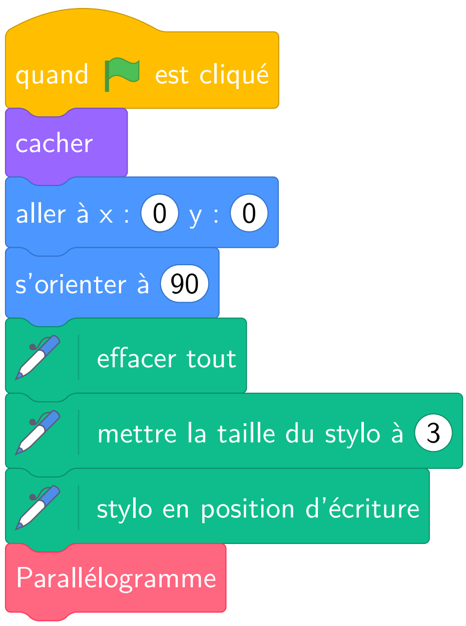


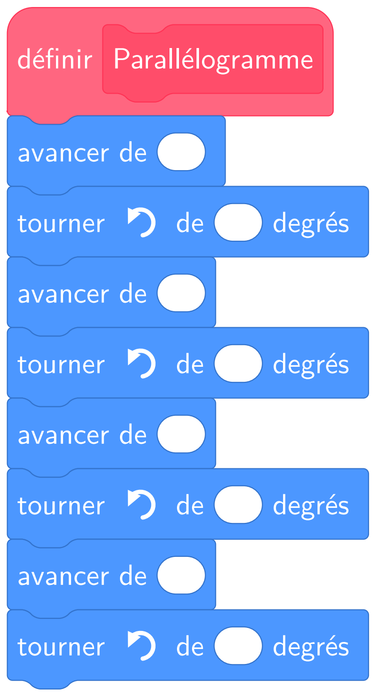
1. Quelle réponse le logiciel va-t-il afficher si l'élève entre la valeur 5 ? Expliquer pourquoi.
2. Quel nombre l'élève doit-il saisir pour obtenir en retour « Bravo ! Tu as trouvé le nombre mystère. » ?

Exercice n° 12.6 : Construction géométrique

Le programme ci-contre permet de tracer le parallélogramme ci-dessous.







Exercice n° 12.7 : Construction géométrique — Épisode 2

☆ ☆ ☆

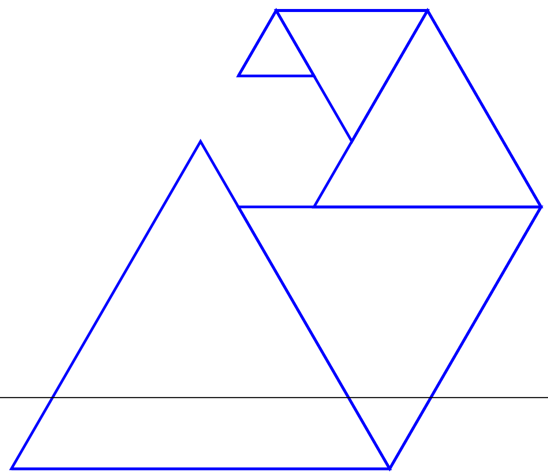
On donne le programme suivant qui permet de tracer plusieurs triangles équilatéraux de tailles différentes.
Ce programme comporte une variable **côté**. Les longueurs sont données en pixels.

On rappelle que l'instruction `s'orienter à (90)` signifie que l'on se dirige vers la droite.

```
1  quand 🏴 est cliqué
2  effacer tout
3  aller à x : (-200) y : (-100)
4  s'orienter à (90)
5  mettre (côté) à (100)
6  répéter (5) fois
7      triangle
8      avancer de (côté)
9      Ajouter à (côté) (-20)
   fin
```

```
définir triangle
stylo en position d'écriture
répéter (3) fois
    avancer de (côté)
    tourner ↺ de (120) degrés
fin
relever le stylo
```

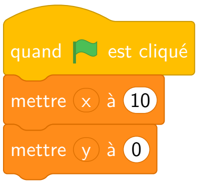
1. Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?
2. Combien de triangles sont dessinés par ce script ?
3.a. Quelle est la longueur (en pixels) du côté du deuxième triangle tracé ?
3.b. Tracer à main levée l'allure de la figure obtenue quand on exécute ce script.
4. On modifie le script initial pour obtenir la figure ci-contre.
Indiquer le numéro d'une instruction du script **après laquelle** on peut placer l'instruction `tourner ↺ (60) degrés` pour obtenir cette nouvelle figure.

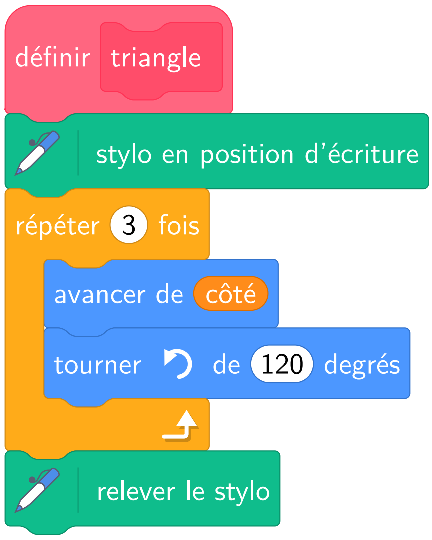


Exercice n° 12.8 : **Algorithme — En cours de rédaction**

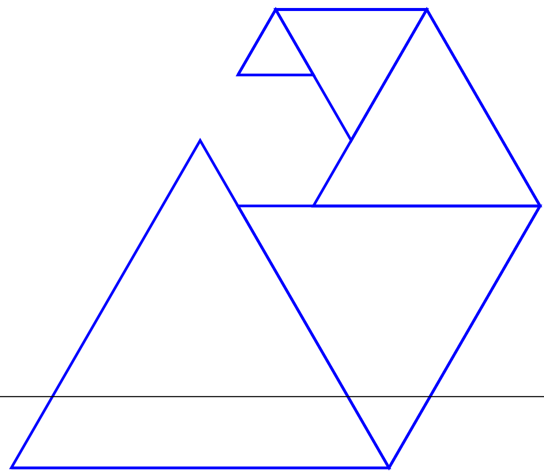
Voici un algorithme de calcul.

Quelles valeurs de x et de y sont affichés à la fin de ce programme.





1. Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?
2. Combien de triangles sont dessinés par ce script ?
3.a. Quelle est la longueur (en pixels) du côté du deuxième triangle tracé ?
3.b. Tracer à main levée l'allure de la figure obtenue quand on exécute ce script.
4. On modifie le script initial pour obtenir la figure ci-contre.
Indiquer le numéro d'une instruction du script **après laquelle** on peut placer l'instruction tourner 60 degrés pour obtenir cette nouvelle figure.

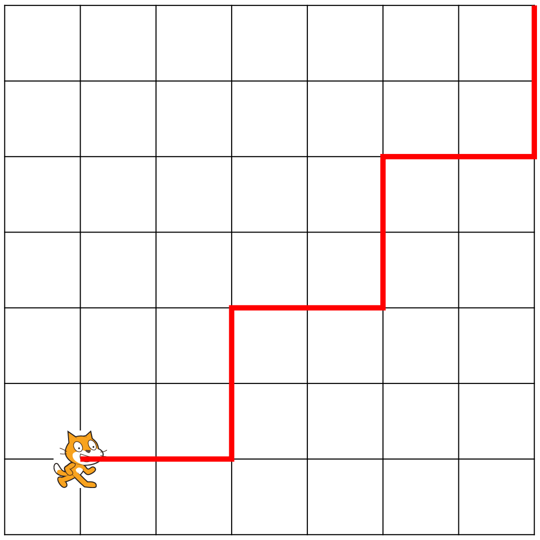


Exercice n° 12.1 : Déplacement

Correction

Scratch

Une des difficultés se trouve dans la commande tourner vers la droite ou la gauche de 90°. Il faut « se mettre à la place » du chat pour déterminer ce que signifie cette commande. On peut aussi « faire tourner » la feuille pour l'orienter dans le bon sens.

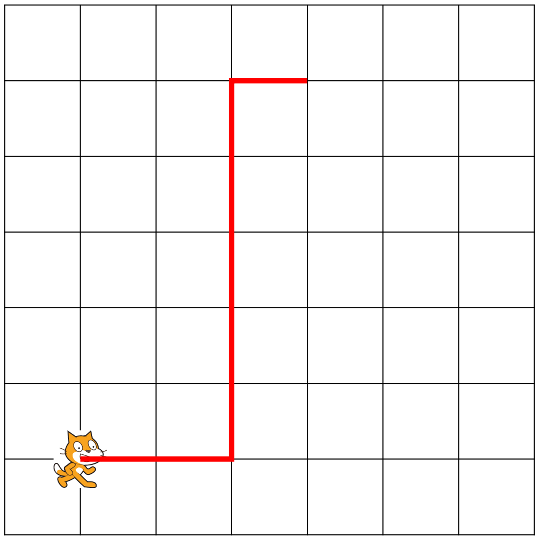


Exercice n° 12.2 : Déplacement — Épisode 2

Correction

Scratch

Une des difficultés se trouve dans la commande tourner vers la droite ou la gauche de 90°. Il faut « se mettre à la place » du chat pour déterminer ce que signifie cette commande. On peut aussi « faire tourner » la feuille pour l'orienter dans le bon sens.



Exercice n° 12.3 : Déplacement — Épisode 3

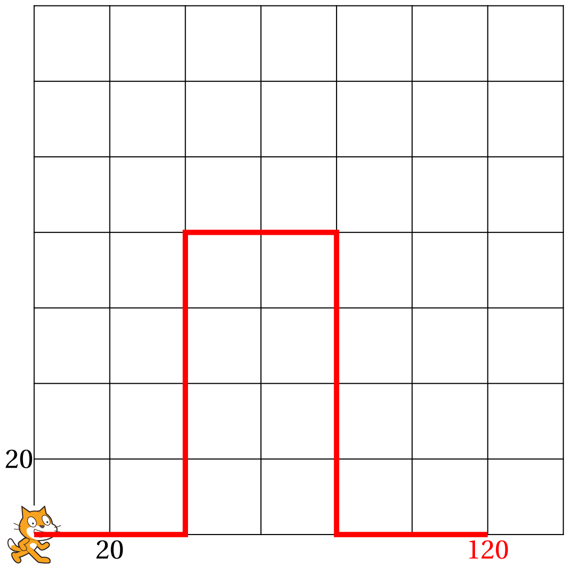
Correction

Scratch

Une des difficultés se trouve dans la commande tourner vers la droite ou la gauche de 90°. Il faut « se mettre à la place » du chat pour déterminer ce que signifie cette commande. On peut aussi « faire tourner » la feuille pour l'orienter dans le bon sens.

Script n° 1

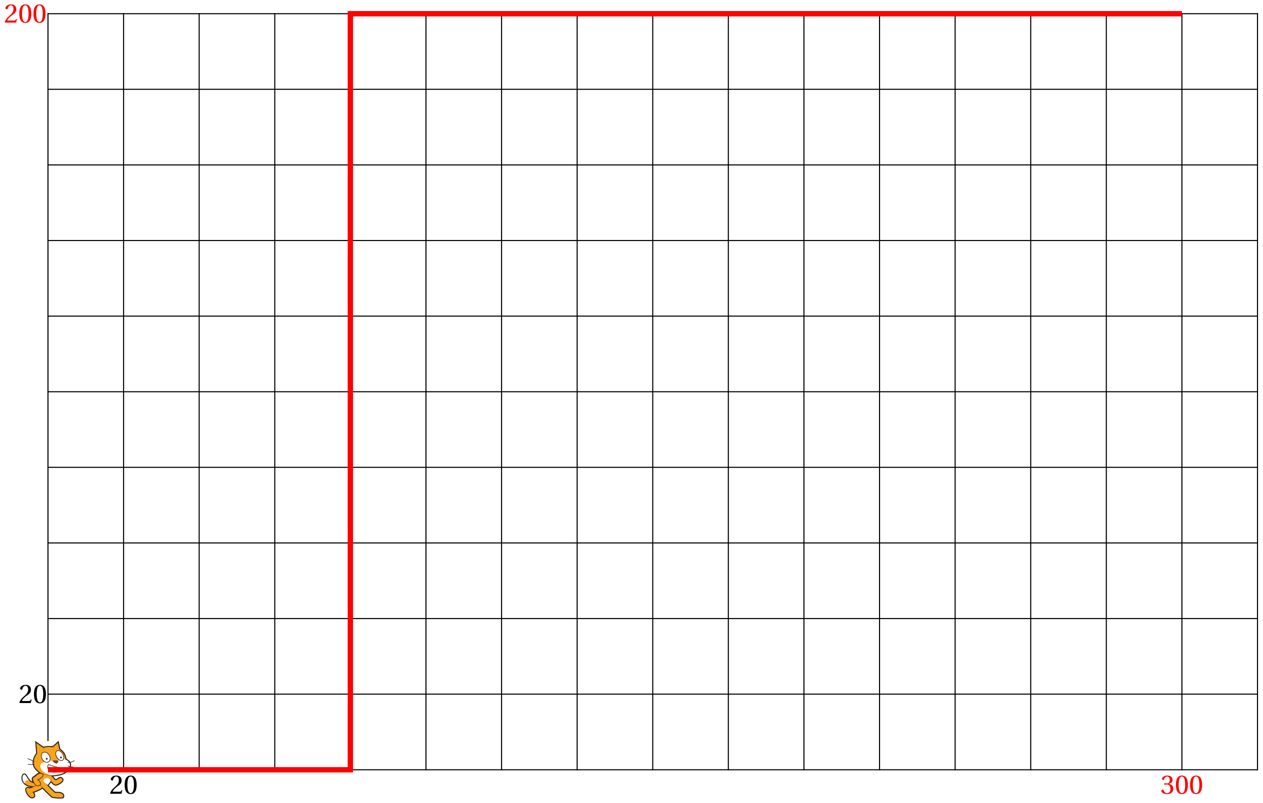
On choisit ici un repère où un carreau correspond à 20 unités.



Les coordonnées du point d’arrivée sont $(120;0)$.

Script n° 2

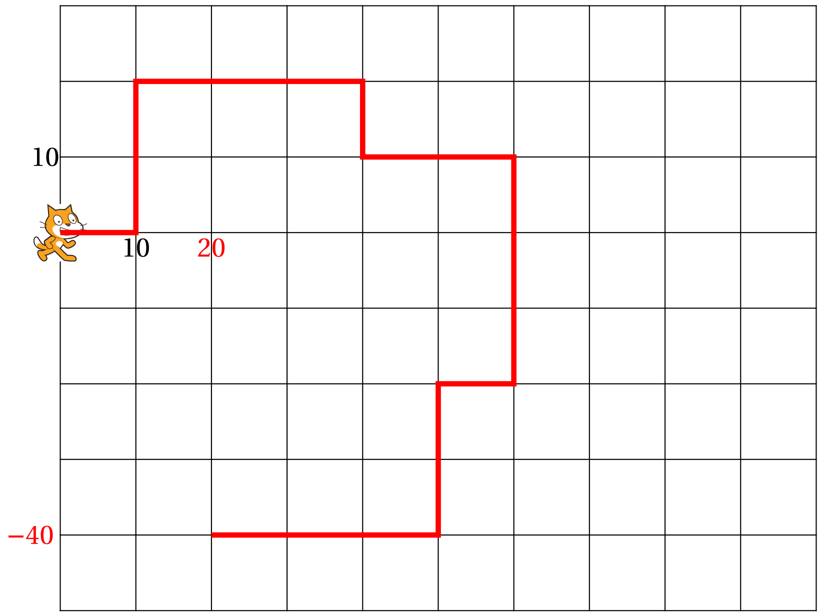
On choisit ici un repère où un carreau correspond à 20 unités.



Les coordonnées du point d’arrivée sont $(300;200)$.

Script n° 3

On choisit ici un repère où un carreau correspond à 10 unités.



Les coordonnées du point d'arrivée sont $(20; -40)$.

Exercice n° 12.4 : Programme de calcul

Correction

Scratch

1.a. En partant du nombre 5 on obtient successivement :
5 puis $5 \times 6 = 30$, $30 + 10 = 40$ et $40 \div 2 = 20$.

Le programme dit : « J'obtiens finalement 20 ».

1.b. En partant du nombre 7 on obtient successivement :
7 puis $7 \times 6 = 42$, $42 + 10 = 52$ et $52 \div 2 = 26$.

Le programme dit : « J'obtiens finalement 26 ».

2. On peut remonter le programme de calcul.
On obtient 8 à la fin après avoir divisé par 2 donc on a effectué : $16 \div 2$.
On obtient 16 après avoir ajouté 10 donc on a effectué : $6 + 10 = 16$.
On obtient 6 après avoir multiplié par 6 donc on a effectué : $1 \times 6 = 6$.

On pouvait aussi résoudre une équation en partant d'une expression littéral, voir ci-dessous.

En partant de 1 on obtient 8 à la fin.

Vérifions : avec 1 au départ on obtient successivement :
1 puis $1 \times 6 = 6$, $6 + 10 = 16$ et $16 \div 2 = 8$. C'est bon !

3. En partant d'un nombre générique x au départ on obtient successivement :
x puis $X \times 6$, $X \times 6 + 10$ et $(x \times 6 + 10) \div 2$.

$x \times 6 + 10 = 6x + 10$ et $(6x + 10) \div 2 = 3x + 5$.

L'expression attendue est $3x + 5$.

On peut ainsi résoudre la question **2.** avec une équation :

$$3x+5=8$$
$$3x+5-5=8-5$$
$$3x=3$$
$$x=\frac{3}{3}$$
$$x=1$$

Cela confirme la réponse précédente !

Exercice n° 12.5 : Programme de calcul — Épisode 2 Correction

Scratch

1. En partant du nombre 5 on obtient :
5 puis $3\times5+7=15+7=22$.
Le programme teste si le calcul obtenu vaut 40.

Le programme va dire : « Et non désolé, ce n'est pas le nombre mystère. Essaie encore ! »

2. Cela revient à résoudre l'équation suivante :

$$3x+7=40$$
$$3x+7-7=40-7$$
$$3x=33$$
$$x=\frac{33}{3}$$
$$x=11$$

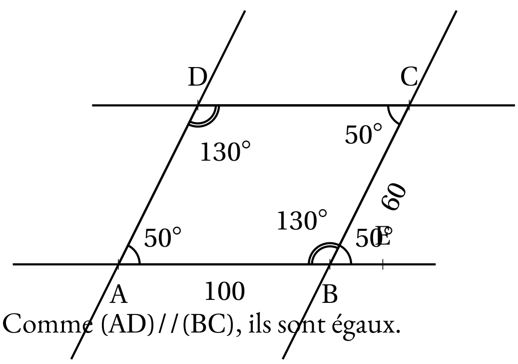
Vérifions. En partant de 11 au départ on obtient :
$3\times11+7=33+7=40$. C'est la bonne réponse !

En partant du nombre 11 le programme répond « Bravo. Tu as trouvé le nombre mystère !

Exercice n° 12.6 : Construction géométrique Correction

Scratch

Il faut étudier la géométrie du parallélogramme.



Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBE}$ sont correspondants. Comme (AD)//(BC), ils sont égaux.
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBE}$ sont supplémentaires.
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont correspondants et égaux.

```
définir Parallélogramme
avancer de 100
tourner ↺ de 50 degrés
avancer de 60
tourner ↺ de 130 degrés
avancer de 100
tourner ↺ de 130 degrés
avancer de 60
tourner ↺ de 50 degrés
```

Exercice n° 12.7 : Construction géométrique — Épisode 2 Correction

Scratch

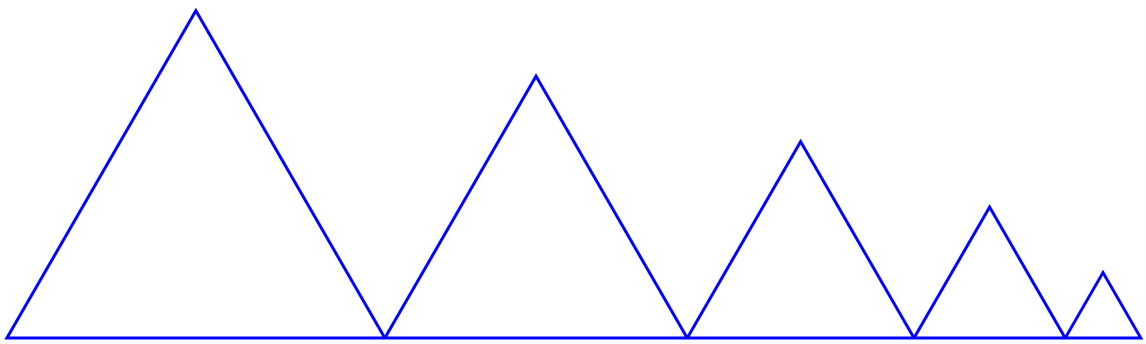
1. $\boxed{\text{Le point de départ a pour coordonnées } (-200\,;-100).}$

2. $\boxed{\text{Il répéte 5 fois la construction d'un triangle.}}$

3.a. À chaque répétition, on ajoute -20 à la variable **côté**, c'est-à-dire on enlève 20 pixels.
Le premier triangle mesure 100 pixels de côté et le deuxième $100 - 20 = 80$.

$\boxed{\text{Le deuxième triangle a un côté de 80 pixels.}}$

3.b.

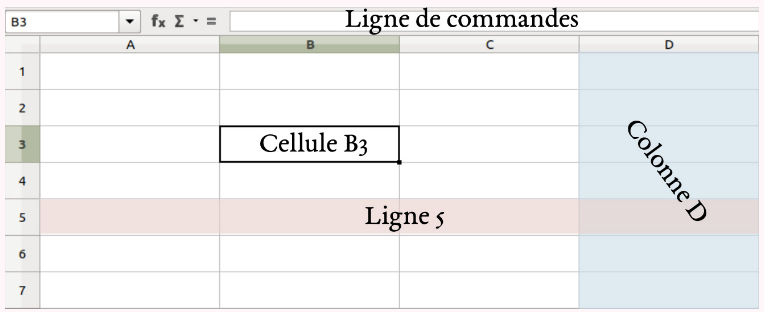


4. On peut placer cette instruction en début de la boucle de répétition avant le **7** ou après le block **8** ou le block **9**.

Tableur

Description générale

Un **tableur** est logiciel capable de manipuler des **feuilles de calcul**. Une feuille de calcul est un tableau constitué de lignes numérotées par un nombre et de colonnes reperées par une lettre.



Une case d'une feuille de calcul s'appelle une **cellule**.
Une cellule est repérée par la lettre de la colonne et le nombre de la ligne.
Dans une case on peut saisir une information numérique ou textuelle.
On peut aussi saisir une formule de calul qu'il est possible de recopier dans d'autres cases. La ligne de commande permet de saisir des informations.

Les formules

Pour programmer une cellule d'une feuille de calcul, il faut saisir une formule qui permet par exemple de modéliser une fonction ou une expression littérale.

MOYENNE =5*B1-3

	A	B	C	D
1	*x*	*0*	*1*	*2*
2				
3	*5x-3*	=5*B1-3		
4				

Dans une feuille de calcul, une formule s'écrit en commençant par le symbole =.
Une formule s'exprime en utilisant les coordonnées de la cellule, par exemple B1.
Les opérations mathématiques peuvent être codées d'une manière différente :

— addition, soustraction : + et − ;

— multiplication : ∗ ;

— division : ;

— parenthèses : ( ) ;

Exemple :
On considère le programme de calcul suivant :

— Choisir un nombre;

— Ajouter 5;

— Mettre ce résultat au carré;

— Enlever 16.

On note f la fonction qui a x un nombre de départ associe $f(x)$ le résultat final du programme.
Voici une feuille de calcul obtenue à partir de ce programme de calcul et la fonction f.
Analysons cette feuille de calcul :

E8 =E1^2+10*E1+9

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Étape n°1	2	3	4	5	6	7	8
3	Étape n°2	4	9	16	25	36	49	64
4	Étape n°3	-12	-7	0	9	20	33	48
5								
6	f(x)	-12	-7	0	9	20	33	48
7								
8	g(x)	-12	-7	0	9	20	33	48

Notons x le nombre de départ, à l'étape 1 on obtient $x+5$.
Dans la cellule B2 on a saisi la formule : $= \text{B}1+5$.
À l'étape 2 on obtient $(x+5)^2$.
Dans la cellule B3 on a saisi la formule $= \text{B}2 * \text{B}2$ ou $= \text{B}2^2$ ou $= \text{B}2^2$
À l'étape 3 on obtient $(x+5)^2-16$.
Dans la cellule B4 on a saisi la formule $= \text{B}3-16$.

La fonction f s'exprime donc sous la forme $f(x) = (x+5)^2-16$
Dans la cellule B6 on a saisi la formule $= (\text{B}1+5)^2-16$ ou $= (\text{B}1+5)*(\text{B}1+5)-16$

On remarque que dans la case E8 a été saisi $= \text{E}1^2+10*\text{E}1+9$
En effet si on développe $f(x) = (x+5)^2-16$
$f(x) = (x+5)(x+5)-16$
$f(x) = x^2+5x+5x+25-16$
$f(x) = x^2+10x+9$ cela correspond bien à la formule saisie en E8!

Chapitre XIII

Le reste

Sommaire

Prépa brevet 488
Instruction en famille : Le robot Sora-Q 511
Tâche complexe : La salle de classe 516
Curiosité mathématique : Le polyèdre de Szilassi 518
Exercices 526
Fiche de synthèse : Grandeurs simples et composées 527
Fiche de synthèse : Tableur 528

En attendant le brevet ... — Épisode 1

Exercice n° 1 — Calcul littéral — Fonctions, développer, factoriser et résoudre

Première partie : On pose $h(x) = 7x - 9$

1. Calculer l'image de 0 et l'image de 5 par la fonction h.

2. Calculer $h(-3)$ et $h(8)$.

3. Déterminer l'antécédent de 40 par la fonction h.

4. Déterminer l'antécédent de 0 par la fonction h.

Deuxième partie : On pose $f(x) = (5x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-1)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$ en justifiant vos calculs.

3. À l'aide de la calculatrice et de la forme développée, compléter le tableau suivant :

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$															

4. Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite ?

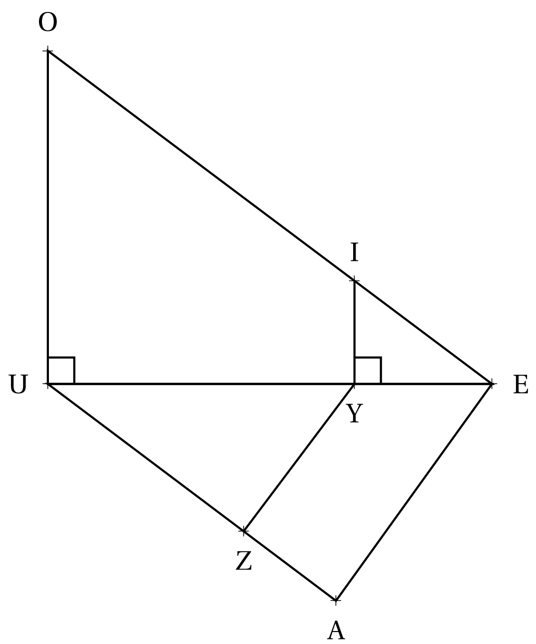
	A	B	C	D	E	F
1	x	6	7	8	9	10
2	f(x)	-348	-510	-702	-924	-1176

5. Factoriser $f(x)$.

6. Résoudre l'équation $(5x-1)(-3x+6) = 0$

7. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

Exercice n° 2 — Géométrie plane — Théorème de Pythagore et Thalès, réciproque et contraposé



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

- IYE est un triangle rectangle en Y ;
- EUO est un triangle rectangle en U ;
- les points E, Y et U sont alignés ;
- les points E, I et O sont alignés ;
- YE = 52 m, IE = 65 m et UE = 168 m ;
- UZ = 94 m, AE = 102 m et AU = 136 m.

1. Démontrer que IY = 39 m.

2. Expliquer pourquoi (IY)//(UO).

3. Calculer UO et EO.

4. Le triangle UAE est-il rectangle ?

5. Les droites (YZ) et (AE) sont-elles parallèles ?

En attendant le brevet ... — Épisode 1 — Correction

Exercice n° 1 : Fonctions, développer, factoriser et résoudre Correction

Calcul littéral

Première partie : On pose $h(x) = 7x - 9$

1. $\boxed{h(0) = 7 \times 0 - 9 = -9}$ et $\boxed{h(5) = 7\text{ă} \times 5 - 9 = 35 - 9 = 46}$

2. $\boxed{h(-3) = 7 \times (-3) - 9 = -21 - 9 = -30}$ et $\boxed{h(8) = 7 \times 8 - 9 = 56 - 9 = 47}$

3. Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
h(x) &= 40 \\
7x - 9 &= 40 \\
7x - 9 + 9 &= 40 + 9 \\
7x &= 49 \\
x &= \frac{49}{9} \\
x &= 7
\end{aligned}$$

Deuxième partie : On pose $f(x) = (5x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-1)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = (5x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-1)$
$f(x) = (15x^2 + 25x - 3x - 5) - (30x^2 - 6x - 5x + 1)$
$f(x) = 15x^2 + 25x - 3x - 5 - 30x^2 + 6x + 5x - 1$

$\boxed{f(x) = -15x^2 + 33x - 6}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$ en justifiant vos calculs.

$f(0) = -15 \times 0^2 + 33 \times 0 - 6 = -6$ donc $\boxed{f(0) = -6}$

$f(-2) = -15 \times (-2)^2 + 33 \times (-2) - 6 = -15 \times 4 - 66 - 6 = -60 - 72 = -132$ donc $\boxed{f(-2) = -132}$

3. À l'aide de la calculatrice et de la forme développée, compléter le tableau suivant :

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-972	-744	-546	-378	-240	-132	-54	-6	12	0	-42	-114	-216	-348	-510

4. Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite ?

	A	B	C	D	E	F
1	x	6	7	8	9	10
2	f(x)	-348	-510	-702	-924	-1176

$\boxed{= -15 * B2^2 + 33 * B2 - 6 \text{ ou } = -15 * B2 * B2 + 33 * B2 - 6 \text{ ou encore } = (5 * B2 - 1) * (3 * B2 + 5) - (6 * B2 - 1) * (5 * B2 - 1)}$

5. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (5x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-1)$
$f(x) = (5x-1)\left[(3x+5) - (6x-1)\right]$
$f(x) = (5x-1)(3x+5-6x+1)$
$\boxed{f(x) = (5x-1)(-3x+4)}$

6. Résoudre l'équation $(5x-1)(-3x+6) = 0$

$$(5x-1)(-3x+6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x-1 &= 0 \\ 5x-1+1 &= 0+1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \\ x &= 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x+6 &= 0 \\ -3x+6-6 &= 0-6 \\ -3x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{-3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0,2 \text{ et } 2}$

7. Quels sont les antécédents par la fonction f ?

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par la fonction } f \text{ sont } 0,2 \text{ et } 2.}$

Exercice n° 2 : Théorème de Pythagore et Thalès, réciproque et contraposé CORRECTION

Géométrie

1. Dans le triangle EYI rectangle en Y,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned} YE^2 + YI^2 &= EI^2 \\ 52^2 + YI^2 &= 65^2 \\ 2\,704 + YI^2 &= 4\,225 \\ YI^2 &= 4\,225 - 2\,704 \\ YI^2 &= 1\,521 \\ YI &= \sqrt{1\,521} \\ YI &= 39 \end{aligned}$$

$\boxed{YI = 39\ m}$

2. Les droites (IY) et (UO) sont perpendiculaires à la droite (UE).
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{(IY) // (UO)}$

3. Les droites (OE) et (UE) sont sécantes en E, les droites (IY) et (UO) sont parallèles, D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{EY}}{\mathrm{EU}}=\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EO}}=\frac{\mathrm{YI}}{\mathrm{UO}}$$

$$\frac{52\ m}{168\ m}=\frac{65\ m}{\mathrm{EO}}=\frac{39\ m}{\mathrm{UO}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\mathrm{EO}=\dfrac{65\ m\times 168\ m}{52\ m}$ d'où $\mathrm{EO}=\dfrac{10\,920\ m^2}{52\ m}$ et $\mathrm{EO}=210\ m$

$\mathrm{UO}=\dfrac{39\ m\times 168\ m}{52\ m}$ d'où $\mathrm{UO}=\dfrac{6\,552\ m^2}{52\ m}$ et $\mathrm{UO}=127\ m$

$\boxed{\mathrm{UO}=127\ m \text{ et } \mathrm{EO}=210\ m}$

4. Comparons $\mathrm{AU}^2+\mathrm{AE}^2$ et UE^2 :

$\mathrm{AU}^2+\mathrm{AE}^2$	UE^2
136^2+102^2	168^2
$18\,496+10\,404$	
$28\,900$	$28\,224$

Comme $\mathrm{AU}^2+\mathrm{AE}^2\neq\mathrm{UE}^2$, d'après **le théorème contraposé de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle UAE n'est pas rectangle}}$.

5.
Comparons $\dfrac{\mathrm{UY}}{\mathrm{UE}}$ et $\dfrac{\mathrm{UZ}}{\mathrm{UA}}$.

$\dfrac{\mathrm{UY}}{\mathrm{UE}}=\dfrac{168\ m-52\ m}{168\ m}=\dfrac{116\ m}{168\ m}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{UZ}}{\mathrm{UA}}=\dfrac{94\ m}{136\ m}$

Calculons les produits en croix : $116\times 136=15\,776$ et $168\times 94=15\,792$

Comme $116\times 136\neq 168\times 94$, $\dfrac{116}{168}\neq\dfrac{94}{136}$.

Ainsi, $\dfrac{\mathrm{UY}}{\mathrm{UE}}\neq\dfrac{\mathrm{UZ}}{\mathrm{UA}}$, d'après **le théorème contraposé de Thalès**, $\boxed{\text{les droites (YZ) et (AE) ne sont pas parallèles.}}$

En attendant le brevet ... — Épisode 2

Exercice n° 1 — Probabilités et arithmétique — Expérience aléatoire à deux épreuves

Arthur et Nadia ont préparé deux dés particuliers :

- Le premier dé est cubique, six faces équilibrées, sur lesquelles sont écrits les nombres suivants : 13, 16, 25, 29, 31 et 57 ;
- Le second dé est tétraédrique, quatre faces équilibrées, sur lesquelles sont écrits les nombres suivants : 2, 3, 5 et 7.

Ils inventent la règle du jeu suivante :

- On lance les deux dès simultanément ;
- Si l'un des nombres est un diviseur de l'autre, alors on effectue la division ;
- Sinon, on ajoute les deux nombres ;
- JOKER : si les deux nombres sont premiers, on multiplie les deux nombres.

1. Présenter dans un tableau à double entrées toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.

2. Arthur et Nadia lance les deux dés équilibrés.

2.a Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre supérieur à 150 ?
2.b Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre compris entre 50 et 70 ?
2.c Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre premier ?
2.d Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un multiple de 11 ?
2.e Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre impair ?

3. En observant les résultats obtenus, Nadia affirme « J'ai plus de chance d'obtenir un multiple de 3 qu'un diviseur de 364 ». A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.

Exercice n° 2 — Vitesse — Vitesse et coût essence

Indira, qui habite Toulouse, souhaite se rendre à Clermont-Ferrand pendant les vacances d'hiver.

À l'aller, elle est pressée, elle va prendre l'autoroute A20. Le trajet fait alors 376 km. Le péage coûte 33 € . Elle pourra rouler à 130 km/h. À cette vitesse, sa voiture consomme $6,3$ L pour 100 km.

Au retour, elle a plus de temps, elle va passer par la A75 et la N88. Le trajet fait alors 359 km. Il n'y a pas de péage. Sur l'A75, elle pourra rouler à 130 km/h pendant 189 km. Sur la fin du trajet, sur la N88, la vitesse est limitée à 80 km/h. À cette vitesse, sa voiture consomme $4,5$ L pour 100 km.

1. Combien de temps, à la seconde près, va-t-elle mettre pour se rendre à Clermont-Ferrand à l'aller ?

2. Combien de temps, à la seconde près, va-t-elle mettre pour rentrer à Toulouse au retour ?

3. Quelle est sa vitesse moyenne, au kilomètre heure près, sur l'aller-retour ?

4. Sachant que le SP95 coûte $1,825$ € le litre à la station en bas de chez elle, combien va lui coûter ce voyage aller-retour ? Penser à tenir compte du péage.

Exercice n° 1 : Probabilités, expérience aléatoire à deux épreuves, arithmétique Correction

Probabilités et arithmétique

1. Présenter dans un tableau à double entrées toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.

Dé tétraèdrique \ Dé Cubique	13	16	25	29	31	57
2	26	8	27	58	62	59
3	39	19	28	87	93	19
5	65	21	5	145	155	62
7	91	23	32	203	217	64

Il y a 24 issues équiprobables.

2. Arthur et Nadia lance les deux dés équilibrés.

Nous sommes dans une expérience aléatoire pour laquelle il y a 24 issues équiprobables.

2.a Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre supérieur à 150 ?

Les issues correspondantes sont : 155, 203 et 217.

La probabilité cherchée est $\dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8} = 0,125 = 12,5\ \%$

2.b Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre compris entre 50 et 70 ?

Les issues correspondantes sont : 58, 62, 59, 65, 62 et 64.

La probabilité cherchée est $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4} = 0,25 = 25\ \%$

2.c Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre premier ?

Les issues correspondantes sont : 59, 19, 19, 5, 23.

La probabilité cherchée est $\dfrac{5}{24} \approx 0,208 \approx 20,8\ \%$

2.d Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un multiple de 11 ?

Il n'y a pas de multiple de 11 dans le tableau.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est 0, c'est l'événement impossible.}}$

2.e Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent un nombre impair ?

Les issues correspondantes sont : 27, 59, 39, 19, 87, 93, 19, 65, 21, 5, 145, 155, 91, 23, 203 et 217.

$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3} \approx 0,667 \approx 66,7\ \%}$

3. En observant les résultats obtenus, Nadia affirme « J'ai plus de chance d'obtenir un multiple de 3 qu'un diviseur de 182 ».
A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.

Les multiples de trois se repèrent en appliquant la règle de divisibilité par trois :
« Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiples de 3. »

Les issues correspondantes sont : 27, 39, 87, 93 et 21.

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est donc de $\dfrac{5}{24} \approx 0,208 \approx 20,8\ \%$.

$$\begin{array}{c|c} 364 & 2 \\ 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $364 = 2 \times 2 \times 7 \times 13$.
Les diviseurs de 364 sont : 1 ; ;2 ; 4 ; 7 ; 13 ; 14 ; 26 ; 28 ; 52 ; 91 ; 182 ; 364

Les issues correspondantes sont : 26, 28 et 91

La probabilité d'obtenir un diviseur de 364 est donc de $\dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8} = 0,125 = 12,5\ \%$.

$\boxed{\text{Nadia a raison.}}$

Exercice n° 2 : Vitesse et coût essence Correction

Vitesse

Indira, qui habite Toulouse, souhaite se rendre à Clermont-Ferrand pendant les vacances d'hiver.

À l'aller, elle est pressée, elle va prendre l'autoroute A20. Le trajet fait alors 376 km. Le péage coûte 33 € . Elle pourra rouler à 130 km/h. À cette vitesse, sa voiture consomme 6,3 L pour 100 km.

Au retour, elle a plus de temps, elle va passer par la A75 et la N88. Le trajet fait alors 359 km. Il n'y a pas de péage. Sur l'A75, elle pourra rouler à 130 km/h pendant 189 km. Sur la fin du trajet, sur la N88, la vitesse est limitée à 80 km/h. À cette vitesse, sa voiture consomme 4,5 L pour 100 km.

1. Combien de temps, à la seconde près, va-t-elle mettre pour se rendre à Clermont-Ferrand à l'aller ?

Elle va parcourir 359 km à la vitesse de 130 km/h.
On sait que la distance et le temps sont proportionnels quand la vitesse est constante.

Distance	$359\ km$	$130\ km$
Temps	$\dfrac{3600\ s \times 359\ km}{130\ km} \approx 9942\ s$	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$

Or $9942\ s = 165 \times 60\ s + 42\ s = 165\ min\ 42\ s$ et $165\ min = 2 \times 60\ min + 45\ min$.

$\boxed{\text{Elle va mettre } 2\ h\ 45\ min\ 42\ s \text{ pour aller à Clermont-Ferrand.}}$

2. Combien de temps va-t-elle mettre pour rentrer à Toulouse au retour ?

Il y a deux vitesse différentes sur le trajet retour : $189\ km$ à $130\ km/h$ puis $359\ km - 189\ km = 170\ km$ à $80\ km/h$.

Distance	$189\ km$	$130\ km$
Temps	$\dfrac{3600\ s \times 189\ km}{130\ km} \approx 5234\ s$	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$

Distance	$170\ km$	$80\ km$
Temps	$\dfrac{3600\ s \times 170\ km}{80\ km} = 7650\ s$	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$

Au total elle aura mis $5234\ s + 7650\ s = 12884\ s$.

$12884\ s = 214 \times 60\ s + 44\ s = 214\ min + 44\ s = 3\ h\ 34\ min\ 44\ s$

$\boxed{\text{Elle va mettre } 3\ h\ 34\ min\ 44\ s \text{ pour rentrer à Toulouse.}}$

3. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ?

Elle a mis $12884\ s + 9942\ s = 22826$ pour parcourir $376\ km + 359\ km = 735\ km$.

Distance	$735\ km$	$\dfrac{3600\ s \times 735\ km}{22826\ s} \approx 116\ km$
Temps	$22826\ s$	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$

$\boxed{\text{Sa vitesse moyenne sur l'aller-retour est d'environ } 116\ km/h.}$

4. Sachant que le SP95 coûte $1,825$ € le litre à la station en bas de chez elle, combien va lui coûter ce voyage aller-retour ? Penser à tenir compte du péage.

À l'aller et sur le début du retour, la voiture va rouler à 130 km/h. Elle consomme à cette vitesse 6,3 L pour 100 km.
La distance parcourue à cette vitesse est 376 km + 189 km = 565 km.
Or 565 $km = 5,65 \times 100$ km. La voiture va consommer $5,65 \times 6,3$ L = 35,595 L.

Sur la partie finale du retour, soit 170 km, elle va rouler à 80 km/h et la voiture consomme à cette vitesse 4,5 L pour 100 km.
Or 170 $km = 1,70 \times 100$ km. La voiture va consommer $1,70 \times 4,5$ L = 7,65 L.

Au total, elle aura consommé 35,595 L + 7,65 L = 43,245 L à 1,825 € le litre.

$43,245 \times 1,825$ € $\approx 78,92$ €.

$\boxed{\text{Au total cet aller-retour va coûter } 78,92 \text{ €} + 33 \text{ €} = 111,92 \text{ €}.}$

En attendant le brevet ... — Épisode 3

Exercice n° 1 — Pourcentage — Inflation

☆ ☆

D'après l'INSEE, en France, l'inflation des prix entre 2010 et 2020 a été d'environ 12,3 %. Cela signifie que l'augmentation moyenne des prix des biens de consommation courante sur cette période de 10 ans a été d'environ 12,3 %.

1. À la boulangerie, une baguette coûtait 0,84 € en 2010. Quel est son prix, au centime près, en 2020 ?

2. En 2020, une litre d'huile d'olive coûtait 5,43 €. Quel était son prix, au centime près, en 2010 ?

3. En avril 2020, un litre de gazoil coûtait environ 1,24 € . Début mars 2023, ce même litre de gazoil est passé à 1,82 € . Quel est le pourcentage d'augmentation sur ce carburant ?

D'après l'INSEE, l'inflation, l'augmentation des prix, a été d'environ 2,6 % entre 2020 et 2022. En 2023, les estimations disent que l'inflation sera d'environ 5,5 % en fin d'année.

4. Quel est le taux d'inflation, en pourcentage, au dixième près, entre 2020 et fin 2023 ?

Exercice n° 2 — Scratch — Géométrie et Scratch

☆ ☆

On donne le programme suivant qui permet de tracer plusieurs triangles équilatéraux de tailles différentes.
Ce programme comporte une variable **côté**. Les longueurs sont données en pixels.

On rappelle que l'instruction `s'orienter à (90)` signifie que l'on se dirige vers la droite.

```
1  quand [drapeau] est cliqué
2  effacer tout
3  aller à x : (-200) y : (-100)
4  s'orienter à (90)
5  mettre (côté) à (100)
6  répéter (5) fois
7      triangle
8      avancer de (côté)
9      Ajouter à (côté) (-20)
```

```
définir triangle
stylo en position d'écriture
répéter (3) fois
    avancer de (côté)
    tourner ↻ de (120) degrés
relever le stylo
```

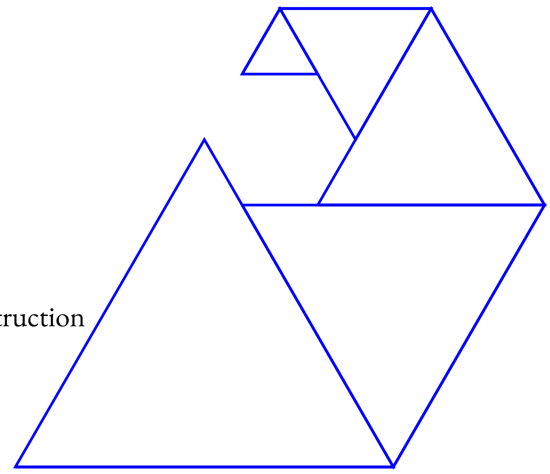
1. Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?

2. Combien de triangles sont dessinés par ce script ?

3. Quelle est la longueur (en pixels) du côté du deuxième triangle tracé ?

4. Tracer à main levée l'allure de la figure obtenue quand on exécute ce script.

5. On modifie le script initial pour obtenir la figure ci-contre.
Indiquer le numéro d'une instruction du script **après laquelle** on peut placer l'instruction `tourner ↺ (60) degrés` pour obtenir cette nouvelle figure.



Exercice n° 1 : Inflation Correction

Pourcentage

1. Augmenter une grandeur de 12,3 % revient exactement à multiplier cette grandeur par $1+\dfrac{12,3}{100}=1,123$.

$0,84$ € $\times 1,123 = 0,943\,32$. $\boxed{\text{La baguette coûtait environ } 0,94 \text{ € en 2020}}$

2. Si on note x son prix en 2020, x vérifie :

$$\begin{aligned} x\times 1,123 &= 5,23€\\ x &= \frac{5,23€}{1,123}\\ x &\approx 4,84€ \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le prix de l'huile d'olive en 2020 était d'environ } 4,84 \text{ €.}}$

3. On cherche le taux d'augmentation t vérifiant :

$$\begin{aligned} 1,24\text{ €}\times t &= 1,82\text{ €}\\ t &= \frac{1,82€}{1,24€}\\ t &\approx 1,468 \end{aligned}$$

Comme $1,468 = 1+0,468 = 1+\dfrac{46,8}{100}$ cela correspond à $\boxed{\text{une augmentation d'environ } 46,8\ \%.}$

4. Les prix ont augmenté d'environ 2,6 % entre 2020 et 2022 puis de 5,5 % en 2023.
Un prix P a donc été multiplié de $1+\dfrac{2,6}{100}=1,026$ entre 2020 et 2022 puis multiplié de $1+\dfrac{5,5}{100}=1,055$ entre 2022 et 2023.
Finalement ce prix P a été multiplié par $1,026\times 1,055 = 1,082\,43 \approx 1,082$.

Or $1,082 = 1+0,82 = 1+\dfrac{8,2}{100}$ soit $\boxed{\text{une augmentation d'environ } 8,2\ \%.}$

Exercice n° 2 : Géométrie et Scratch Correction

Scratch

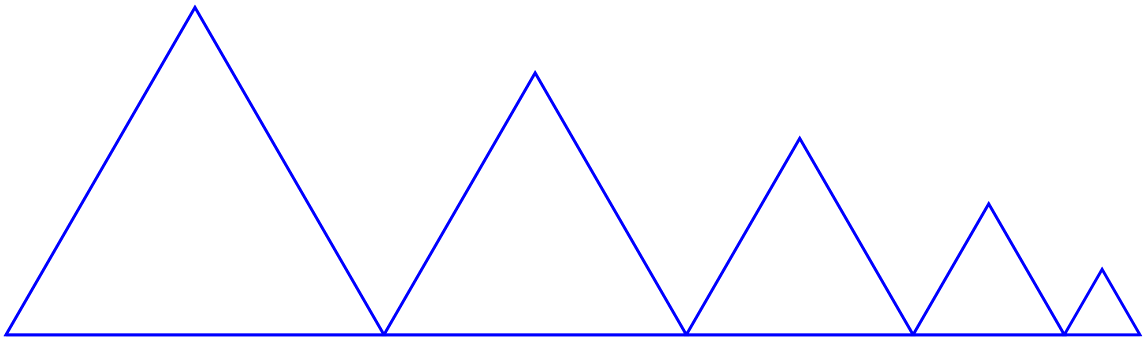
1. $\boxed{\text{Le point de départ a pour coordonnées } (-200;-100).}$

2. $\boxed{\text{Il répéte 5 fois la construction d'un triangle.}}$

3.a. À chaque répétition, on ajoute -20 à la variable **côté**, c'est-à-dire on enlève 20 pixels.
Le premier triangle mesure 100 pixels de côté et le deuxième $100-20=80$.

$\boxed{\text{Le deuxième triangle a un côté de 80 pixels.}}$

3.b.



4. On peut placer cette instruction en début de la boucle de répétition avant le **7** ou après le block **8** ou le block **9**.

En |attendant le brevet ... — Épisode 4

Exercice n° 1 — Statistiques — Médiane, moyenne, étendue, pourcentages

Voici les résultats en mathématiques, sur 100, au dernier brevet blanc du collège Srinivasa Ramanujan de Pondichéry :

Les notes des 3A : 25 — 22 — 30 — 98 — 62 — 08 — 45 — 35 — 25 — 35 — 75 — 92 — 97 — 13 — 17 — 85 — 92 — 98

Les résultats des 3B : **Moyenne :** 53 — **Médiane :** 54 — **Étendue :** 60

1. Pour la classe de 3A :

1.a. Calculer la moyenne des notes.

1.b. Calculer l'étendue de cette série statistique.

1.c. Déterminer la médiane de cette série de notes. Interpréter ce résultat.

2. On sait que la note la plus basse de 3B est 18. Comparer les résultats des classes de 3A et de 3B (on peut comparer les notes maximale, les moyennes, les médianes, l'étendue et faire à chaque fois un commentaire.)

Voici les résultats de tous les élèves du collège à cette épreuve :

Notes	[0;10[	[10;20[	[20;30[	[30;40[	[40;50[	[50;60[	[60;70[	[70;80[	[80;90[	[90;100]	
Effectifs	4	11	17	27	37	29	17	19	11	7	179

3. En observant le tableau des effectifs ci-dessus :

3.a. Est-il vrai que 25 % des élèves ont une note inférieur strictement à 40 ? Justifier soigneusement sa réponse.

3.b. Calculer la moyenne des notes sur l'ensemble du collège.

3.c. Déterminer une valeur approximative de la médiane de cette série.

3.d. Que peut-on dire de l'étendue de cette série ?

3.e. Comparer les résultats des 3A et des 3B avec l'ensemble des élèves du collège. On utilisera la moyenne, la médiane et l'étendue pour justifier sa réponse.

Exercice n° 2 — Fonction linéaire — Expression d'une fonction linéaire, vitesse, image, antécédent

1. $f(x) = 7x$, $g(x) = -3x$, $h(x) = -2x+3$, $m(x) = -x$, $p(x) = 9$, $r(x) = x+9$, $s(x) = \dfrac{5x}{7}$ et $t(x) = 4x^2$

Lesquelles de ces fonctions sont linéaires ? Indiquer dans ce cas la valeur du coefficient.

2. Déterminer l'expression de la fonction linéaire q telle que $q(6) = -5$.

3. Un véhicule circule à 90 km/h.

3.a. Déterminer l'expression de la fonction v qui a un temps x en seconde associe la distance $v(x)$ parcourue en mètre.

3.b. Calculer les images de 3 600, de 100 et de 23.

3.c. Déterminer l'antécédent de 10 000 et de 575 par cette fonction.

3.d. Que dire de cette fonction ?

3.e. Quelle distance parcourt-on en 1 min 40 s à 90 km/h ?

3.f. Combien de temps faut-il pour parcourir 10 km à 90 km/h ?

Exercice n° 1 : Statistiques

CORRECTION

Médiane, moyenne, étendue

1.a. $M = \dfrac{25+22+30+98+62+08+45+35+25+35+75+92+97+13+17+85+92+98}{18} = \dfrac{954}{18} = 53$

La classe de 3A a une moyenne de 53/100 à l'épreuve de mathématiques.

1.b. La note la plus basse est 8, la note la plus élevée est 98.

L'étendue des notes pour ce groupe vaut $98-8=90$. Les notes sont très dispersées !

1.c. Il faut classe ces 18 notes dans l'ordre croissant. Comme 18 est un nombre pair, $18 \div 2 = 9$, la médiane est la moyenne de la neuvième et de la dixième note.

Voici le classement : $\underbrace{8<13<17<22<25\leqslant 25<30<35\leqslant 35}_{\text{Les neufs notes les plus basses}} \quad < \quad \underbrace{45<62<75<85<92\leqslant 92<97<98}_{\text{Les neufs notes les plus élevées}}$

La neuvième note est 35, la dixième 45. La moyenne des ces deux notes vaut $\dfrac{35+45}{2} = \dfrac{80}{2} = 40$

La note médiane de cette série statistiques est 40.

La moitié des élèves de ce groupe ont une note inférieure ou égale à 40, l'autre moitié a une note supérieure ou égale à 40.

L'écart important entre la moyenne, 53, et la médiane, 40, est un indicateur d'une forte dispersion.

2. Les deux classes ont exactement la même moyenne arithmétiques, 53.
En revanche, les médianes sont très différentes. En 3A, la moitié des élèves à une note inférieure ou égale à 40 alors qu'en 3B, la moitié à une note inférieure à 54.
Les élèves de 3B ont des notes beaucoup moins dispersées autour de la moyenne.
Comme on sait que la note minimale des 3B vaut 18. Ainsi la note maximale est égale à $18+60=78$.
Les écarts entre élèves sont plus importants en 3A qu'en 3B.
La meilleure note en 3A est supérieure à celle des 3B. La note la plus basse est inférieure à celle des 3A.
Les comparaisons des étendues, 60 et 90, confirme encore cette dispersion.
On peut dire que les notes de 3B sont homogènes autour de la moyenne alors que celle des 3A sont très hétérogène.

3. Pour calculer la moyenne, la médiane ou l'étendue, il est habituelle d'utiliser les centres des classes.
Par exemple, pour la classe $[0;10[$, le centre est $dfrac0+102=5$.

3.a. Le nombre d'élèves ayant une note inférieure strictement à 40 se calcule ainsi : $4+11+17+27=59$.

Or $\dfrac{59}{179} \approx 0,33$ soit 33 %.

Il est faux de dire que 25 % des élèves a eu moins de 40. En réalité c'est environ 33 %.

3.b. On calcule la moyenne des centres des classes pondérée par les effectifs :

$$M = \frac{5\times4+15\times11+25\times17+35\times27+45\times37+55\times29+65\times17+75\times19+85\times11+95\times7}{4+11+17+27+37+29+17+19+11+7} = \frac{8\,945}{179} \approx 49,97.$$

La moyenne pour l'ensemble du collège est d'environ 49,97.

3.c. Il y a 179 élèves en troisième et $179 \div 2 = 89,5$. Ainsi $179 = 89+1+89$. La médiane est la note du 90^{e}élève classé dans l'ordre croissant.
On peut consulter le tableau des effectifs croissant :

Notes	[0;10[	[10;20[	[20;30[	[30;40[	[40;50[	[50;60[	[60;70[	[70;80[	[80;90[	[90;100]
Effectifs	4	11	17	27	37	29	17	19	11	7
Effectifs cumulés croissants	4	15	32	59	96	125	142	161	172	179

On constate que la 90ᵉnotes se trouve dans l'intervalle [40;50[.

La médiane de cette série statistique est un nombre quelconque compris dans l'intervalle [40;50[, par exemple son centre 45.

3.d. Il y a 4 notes dans l'intervalle [0;10[et 7 notes dans l'intervalle [90;100].

L'étendue vaut donc entre 90 et 100. On ne peut pas en dire plus.

3.e. Pour ce collège, la moyenne vaut environ 50, la médiane 45 et l'étendue entre 90 et 100.
La classe de 3B est plus homogène que l'ensemble de l'établissement.
La classe de 3A est beaucoup plus hétérogène. Il y a de nombreux élèves faibles.

Exercice n° 2 : Fonctions linéaires, vitesse Correction

Fonctions linéaires

1. On sait qu'une fonction linéaire s'écrit sous la forme $f(x) = ax$ où a est une nombre fixé connu.

f est linéaire de coefficient $a = 7$

g est linéaire de coefficient $a = -3$

h n'est pas linéaire, elle s'écrit sous la forme $ax + b$. On dira plus tard qu'elle est affine !

m est linéaire de coefficient $a = -1$

p n'est pas linéaire, elle s'écrit sous la forme a. Elle est constante, c'est aussi une fonction affine !

r n'est pas linéaire, elle s'écrit sous la forme $ax + b$. Elle est affine !

s est linéaire, de coefficient $a = \frac{5}{7}$ car $\frac{5x}{7} = \frac{5}{7}x$

t n'est pas linéaire, elle s'écrit sous la forme ax^2. Vous en parlerez en seconde !

2. q est une fonction linéaire de coefficient a, elle s'écrit sous la forme $q(x) = ax$. On cherche la valeur de a.

Résolvons l'équations en a :

$$\begin{aligned} q(6) &= -5 \\ a \times 6 &= -5 \\ 6a &= -5 \\ a &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } q \text{ s'écrit sous la forme } q(x) = -\frac{5}{6}.}$

3. ☆☆☆ : cet exercice est **très** difficile et dépasse largement les attendus de troisième !

3.a. Un véhicule circule à 90 km/h. Commençons par un exemple. Demandons-nous quelle distance en mètres est parcourue pendant 56 s.
On sait que la distance et le temps sont deux grandeurs proportionnelles quand la vitesse est constante.

Distance	$90\ km = 90\,000\ m$	$\frac{56\ s \times 90\,000\ m}{3\,600\ s} = \frac{90\,000}{3\,600} \times 56\ s = 25 \times 56\ s = 1\,400\ s$
Temps	$1\ h = 3\,600\ s$	$56\ s$

Ainsi, pour un nombre générique x désignant un temps en seconde,
$\boxed{\text{la distance en mètre parcourue s'exprime sous la forme } v(x) = 25x}$

3.b. $\boxed{v(3\,600) = 25 \times 3\,600 = 90\,000 : \text{réponse très intuitive, non ?}}$

$\boxed{v(100) = 25 \times 100 = 2\,500}$

$\boxed{v(23) = 25 \times 23 = 575}$

3.c. Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} v(x) &= 10\,000 \\ 25x &= 10\,000 \\ x &= \frac{10\,000}{25} \\ x &= 400 \end{aligned}$$

$\boxed{400 \text{ est l'antécédent de } 10\,000 \text{ par } v.}$

Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} v(x) &= 575 \\ 25x &= 575 \\ x &= \frac{575}{25} \\ x &= 23 \end{aligned}$$

$\boxed{23 \text{ est l'antécédent de } 575 \text{ par } v.}$

On pouvait, surtout, regarder les réponses de la question **3.b.** !!

3.d. $\boxed{\text{Cette fonction s'écrit sous la forme } ax \text{ avec } a = 25 : \text{elle est linéaire.}}$

3.e. Comme $1\ min\ 40\ s = 60\ s + 40\ s = 100\ s$ et comme $v(100) = 2\,500$, $\boxed{\text{on parcourt } 2\,500\ m \text{ en } 1\ min\ 40\ s.}$

3.f. Comme $10\ km = 10\,000\ m$ et comme 400 est l'antécédent de 10 000 par v d'après **3.c.**, on en déduit qu'il faut 400 s.

Or $400\ s = 6 \times 60\ s + 40\ s$, $\boxed{\text{il faut } 6\ min\ 40\ s \text{ pour parcourir } 10\ km \text{ à } 90\ km/h.}$

En attendant le brevet … — Spécial brevet blanc

Troisième

Exercice n° 1

On pose $f(x) = (5x-1)(3x+2) + (5x-1)(6x-7)$ et $g(x) = (7x-3)(6x-1) - (7x-3)(-4x+1)$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$

2. Calculer $f(0)$, $g(0)$, $f\left(\frac{1}{5}\right)$ et $g\left(\frac{3}{7}\right)$.

3. Factoriser au maximum $f(x)$ et $g(x)$

4. Résoudre $(5x-1)(9x-5) = 0$ puis $(7x-3)(10x-2) = 0$

5. Démontrer que $f(x) - g(x) = (5x-1)(1-5x)$

6. En utilisant la question **5.**, résoudre $f(x) = g(x)$.

Exercice n° 2

Une molécule de dioxygène à un masse d'environ 0,000 000 000 000 000 000 000 053 g.
Une molécule de diazote à une masse d'environ 0,000 000 000 000 000 000 000 046 g.

1. Donner l'écriture scientifique de ces deux masses.

On sait qu'au niveau de la mer, la masse de 1 m^3 d'air est d'environ 1,22 kg.
On sait aussi que l'air est composé d'environ 20 % de dioxygène et de 80 % de diazote.

2. Combien y-a-t-il de molécules de dioxygène et de diazote dans 1 m^3 d'air ? Donner ces résultat sous forme scientifique.

3. Une salle de classe mesure 10 m de long, 8 m de large et 2,50 m de haut. Quelle est la masse de l'air contenu dans cette classe ?

Exercice n° 3

Voici les effectifs classés par âge et par genre d'un club de tennis à proximité de Toulouse :

Âges (en années)	$[10;18[$	$[18;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60]$
Hommes	16	24	13	9	6
Femmes	12	35	15	7	1

1. Quelle est la proportion, en pourcentage arrondi à l'unité près, de membres du club ayant plus de 50 ans ?
2. Calculer la moyenne des âges des hommes puis des femmes de ce club.
3. Déterminer la médiane des âges des membres de ce club.
4. On choisit au hasard, une femme de ce club. Quelle est la probabilité qu'elle soit mineure ?
5. On choisit au hasard un membre du club. Quelle est la probabilité que ce soit un homme de plus de 30 ans ?
6. On choisit au hasard un membre du club âgé de plus de 40 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
7. On choisit au hasard un membre du club. Quelle est la probabilité que ce ne soit pas un mineur ?

Exercice n° 4

1. Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres : 2024, 2208, 2254 et 2944.

2. Calculer ensuite à la main l'expression suivante : $\frac{2208}{2944} - \frac{2254}{2024}$

Exercice n° 1 : La régate Correction

Théorème de Thalès — Réciproque de Pythagore — Vitesse

1.
Les droites (AE) et (BD) sont sécantes en C, les droites (AB) et (DE) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED}$$

$$\frac{300\ m}{CE} = \frac{500\ m}{700\ m} = \frac{400\ m}{ED}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{ED} = \dfrac{400\ m \times 700\ m}{500\ m}$ d'où $\text{ED} = \dfrac{280\,000\ m^2}{500\ m}$ et $\text{ED} = 560\ m$.

$\boxed{\text{DE} = 560\ m.}$

2. Comparons $AB^2 + AC^2$ et BC^2 :

$AB^2 + AC^2$	BC^2
$400^2 + 300^2$	500^2
$160\,000 + 90\,000$	
$250\,000$	$250\,000$

Comme

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A}}$.

3. Dans le triangle ABC rectangle en A on a :

On peut calculer le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$	$\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$	$\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$
$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{400\ m}{500\ m}$	$\sin\widehat{ABC} = \dfrac{300\ m}{500\ m}$	$\tan\widehat{ABC} = \dfrac{300\ m}{400\ m}$
$\cos ă\widehat{ABC} = \dfrac{4}{5}$	$\sin ă\widehat{ABC} = \dfrac{3}{5}$	$\tan ă\widehat{ABC} = \dfrac{3}{4}$
$\cos\widehat{ABC} = 0,8$	$\sin\widehat{ABC} = 0,6$	$\tan\widehat{ABC} = 0,75$

Dans tous les cas, à la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{ABC} \approx 37° \text{ à } 1° \text{ près.}}$

4. Cinq tours de $2\,880\ m$ chacun. $2\,880\ m \times 5 = 14\,400\ m$.

$\boxed{\text{La distance totale parcourue mesure } 14\,400\ m.}$

5. Mattéo a parcouru les $14\,400\ m$ en $1\ h\ 48\ min$.
Calculons la vitesse moyenne en considérant que la distance parcourue et le temps sont proportionnels.

Distance	$14\,400\ m$	$\dfrac{60\ min \times 14\,400\ m}{108\ min} = 8\,000\ m$
Temps	$1\ h\ 48\ min = 108\ min$	$1\ h = 60\ min$

Comme $8\,000\ m = 8\ km$, $\boxed{\text{Mattéo a effectué le parcours à la vitesse moyenne de } 8\ km/h.}$

Exercice n° 2 : La corde CORRECTION

Théorème de Pythagore

1. Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{BA}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$$

$$5^2 + \text{BC}^2 = 5,25^2$$

$$25 + \text{BC}^2 = 27{,}5625$$

$$\text{BC}^2 = 275\,625 - 25$$

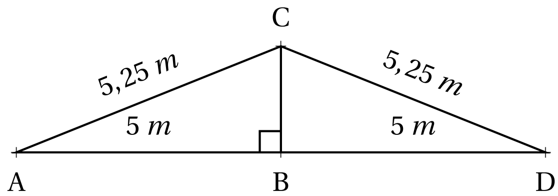
$$\text{BC}^2 = 2{,}5625$$

$$\text{BC} = \sqrt{2{,}5625}$$

$$\text{BC} \approx 1,6$$

$\boxed{\text{Au dixième de mètre près, BC} \approx 1,60\ m.}$

2. Les poteaux sont distants de $10\ m$. Melvin se place au milieu, donc à $5\ m$ des extrémités.
Melvin se tient debout, donc son corps est perpendiculaire (vertical) au sol (horizontal).
La corde non élastique mesure $10,5\ m$ de long, sa moitié mesure donc $10,5\ m \div 2 = 5,25\ m$.
La situation peut se modéliser de la manière suivante :



On constate qu'il s'agit de la situation géométrique de la question **1.**. Nous avons vu que BC $\approx 1,60\ m$.
Comme Melvin mesure $1,55\ m$, un peu moins que $1,60\ m$,

$\boxed{\text{Il peut passer sous la corde sans se baisser.}}$

Exercice n° 3 : Les étiquettes CORRECTION

Arithmétique

1. On constate que $102 = 3 \times 34$. $\boxed{102 \text{ est donc divisible par } 3}$.

On peut aussi utiliser le critère de divisibilité par 3 : $1 + 0 + 2 = 3$ et 3 est un multiple de 3.

2.

$$\begin{array}{c|c} 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{102 = 2 \times 3 \times 17}$

3. Il faut combiner les produits de nombres premiers de la décomposition de 102.

$\boxed{2 \times 3 = 6 ; 2 \times 17 = 34 \text{ et } 3 \times 17 = 51 \text{ sont des diviseurs non premier de } 102}$.

1 et 102 sont deux autres diviseurs non premiers de 102 !

4. Il faut vérifier si 34 est un diviseur commun de 102 et 85.
Comme $102 = 34 \times 3$, 34 est un diviseur de 102.
Par contre $85 = 34 \times 2 + 17$ donc 34 ne divise pas 85.

$\boxed{\text{Les étiquettes ne peuvent pas avoir un côté qui mesure } 34\ cm.}$

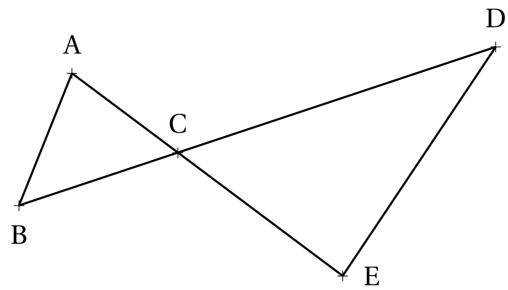
5. 17 est un diviseur commun de 102 et 85.
On a $102 = 17 \times 6$ et $85 = 17 \times 5$.

On peut donc découper 6 étiquettes sur la longueur et 5 étiquettes sur la largeur. Soit $6 \times 5 = 30$ étiquettes.

$\boxed{\text{Il pourra découper 30 étiquettes.}}$

En attendant le brevet ... — Épisode 5

EXERCICE N° 1 — LA RÉGATE — Théorème de Thalès — Réciproque de Pythagore — Vitesse



Sur la figure suivante, on donne les distances en mètres :
AB = 400 m, AC = 300 m, BC = 500 m et CD = 700 m.

Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.

Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

1. Calculer la longueur DE.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Arrondir au degré près.

Lors d'une course les concurrents doivent effectuer plusieurs tours du parcours représenté ci-dessus. Ils partent du point A puis passent par les points B, C, D et E dans cet ordre puis de nouveau par le point C pour ensuite revenir au point A.

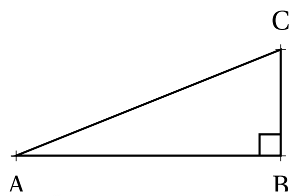
Mattéo, le vainqueur, a mis 1 h 48 min pour effectuer 5 tours du parcours. La distance parcourue pour faire un tour est 2 880 m.

4. Calculer la distance totale parcourue pour effectuer les 5 tours du parcours.

5. Calculer la vitesse moyenne de Mattéo. Arrondir à l'unité.

EXERCICE N° 2 — LA CORDE — Théorème de Pythagore

Le triangle ABC rectangle en B ci-après est tel que AB = 5 m et AC = 5,25 m.

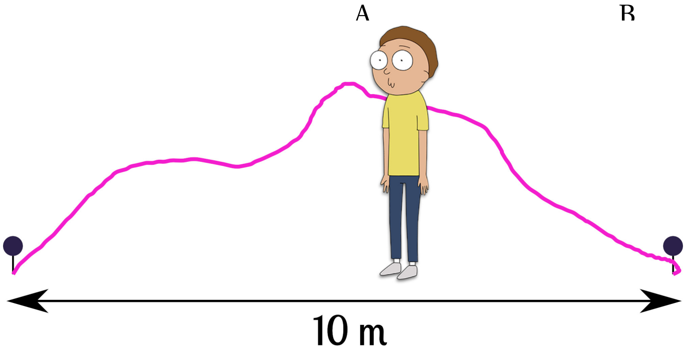


1. Calculer en mètre la longueur de BC. Arrondir au dixième.

Une corde non élastique de 10,5 m de long est fixée au sol par ses extrémités entre deux poteaux distants de 10 m.

2. Melvin qui mesure 1,55 m pourrait-il passer sous cette corde sans se baisser en la soulevant par le milieu ?

Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans la notation.



EXERCICE N° 3 — LES ÉTIQUETTES — Arithmétique

1. Justifier que le nombre 102 est divisible par 3.

2. On donne la décomposition en produit de facteurs premiers de 85 : 85 = 5 × 17.
Décomposer 102 en produit de facteurs premiers.

3. Donner 3 diviseurs non premiers du nombre 102.

Un libraire dispose d'une feuille cartonnée de 85 cm × 102 cm. Il souhaite découper dans celle-ci, en utilisant toute la feuille, des étiquettes carrées. Les côtés de ces étiquettes ont tous la même mesure.

4. Les étiquettes peuvent-elles avoir 34 cm de côté ? Justifier votre réponse.

5. Le libraire découpe des étiquettes de 17 cm de côté. Combien d'étiquettes pourra-t-il découper dans ce cas ?

Exercice n° 1 : La régate CORRECTION

Théorème de Thalès — Réciproque de Pythagore — Vitesse

1.

Les droites (AE) et (BD) sont sécantes en C, les droites (AB) et (DE) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{CA}}{\text{CE}} = \frac{\text{CB}}{\text{CD}} = \frac{\text{AB}}{\text{ED}}$$

$$\frac{300\ m}{\text{CE}} = \frac{500\ m}{700\ m} = \frac{400\ m}{\text{ED}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{ED} = \dfrac{400\ m \times 700\ m}{500\ m}$ d'où $\text{ED} = \dfrac{280\,000\ m^2}{500\ m}$ et $\text{ED} = 560\ m$.

$\boxed{\text{DE} = 560\ m.}$

2. Comparons $\text{AB}^2 + \text{AC}^2$ et BC^2 :

$\text{AB}^2 + \text{AC}^2$	BC^2
$400^2 + 300^2$	500^2
$160\,000 + 90\,000$	
$250\,000$	$250\,000$

Comme

$$\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = \text{BC}^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A}}$.

3. Dans le triangle ABC rectangle en A on a :

On peut calculer le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$.

$$\cos\widehat{\text{ABC}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} \qquad \sin\widehat{\text{ABC}} = \frac{\text{AC}}{\text{BC}} \qquad \tan\widehat{\text{ABC}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$$

$$\cos\widehat{\text{ABC}} = \frac{400\ m}{500\ m} \qquad \sin\widehat{\text{ABC}} = \frac{300\ m}{500\ m} \qquad \tan\widehat{\text{ABC}} = \frac{300\ m}{400\ m}$$

$$\cos ă\widehat{\text{ABC}} = \frac{4}{5} \qquad \sin ă\widehat{\text{ABC}} = \frac{3}{5} \qquad \tan ă\widehat{\text{ABC}} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\widehat{\text{ABC}} = 0,8 \qquad \sin\widehat{\text{ABC}} = 0,6 \qquad \tan\widehat{\text{ABC}} = 0,75$$

Dans tous les cas, à la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{\text{ABC}} \approx 37° \text{ à } 1° \text{ près.}}$

4. Cinq tours de $2\,880\ m$ chacun. $2\,880\ m \times 5 = 14\,400\ m$.

$\boxed{\text{La distance totale parcourue mesure } 14\,400\ m.}$

5. Mattéo a parcouru les $14\,400\ m$ en $1\ h\ 48\ min$.
Calculons la vitesse moyenne en considérant que la distance parcourue et le temps sont proportionnels.

Distance	$14\,400\ m$	$\dfrac{60\ min \times 14\,400\ m}{108\ min} = 8\,000\ m$
Temps	$1\ h\ 48\ min = 108\ min$	$1\ h = 60\ min$

Comme $8\,000\ m = 8\ km$, $\boxed{\text{Mattéo a effectué le parcours à la vitesse moyenne de } 8\ km/h.}$

Exercice n° 2 : La corde Correction

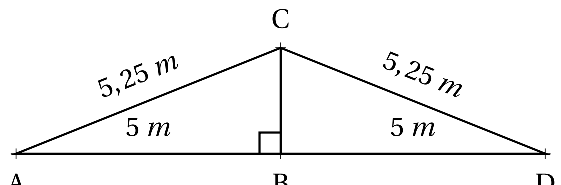
Théorème de Pythagore

1. Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{BA}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$$
$$5^2 + \text{BC}^2 = 5,25^2$$
$$25 + \text{BC}^2 = 27{,}5625$$
$$\text{BC}^2 = 275625 - 25$$
$$\text{BC}^2 = 2{,}5625$$
$$\text{BC} = \sqrt{2{,}5625}$$
$$\text{BC} \approx 1,6$$

$\boxed{\text{Au dixième de mètre près, BC} \approx 1,60\ m.}$

2. Les poteaux sont distants de $10\ m$. Melvin se place au milieu, donc à $5\ m$ des extrémités.
Melvin se tient debout, donc son corps est perpendiculaire (vertical) au sol (horizontal).
La corde non élastique mesure $10,5\ m$ de long, sa moitié mesure donc $10,5\ m \div 2 = 5,25\ m$.
La situation peut se modéliser de la manière suivante :



On constate qu'il s'agit de la situation géométrique de la question **1.**. Nous avons vu que $\text{BC} \approx 1,60\ m$.
Comme Melvin mesure $1,55\ m$, un peu moins que $1,60\ m$,

$\boxed{\text{Il peut passer sous la corde sans se baisser.}}$

Exercice n° 3 : Les étiquettes Correction

Arithmétique

1. On constate que $102 = 3 \times 34$. $\boxed{\text{102 est donc divisible par 3}}$.

On peut aussi utiliser le critère de divisibilité par 3 : $1 + 0 + 2 = 3$ et 3 est un multiple de 3.

2.

$$\begin{array}{c|c} 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{102 = 2 \times 3 \times 17}$

3. Il faut combiner les produits de nombres premiers de la décomposition de 102.

$\boxed{2 \times 3 = 6 ; 2 \times 17 = 34 \text{ et } 3 \times 17 = 51 \text{ sont des diviseurs non premier de } 102}$.

1 et 102 sont deux autres diviseurs non premiers de 102 !

4. Il faut vérifier si 34 est un diviseur commun de 102 et 85.
Comme $102 = 34 \times 3$, 34 est un diviseur de 102.
Par contre $85 = 34 \times 2 + 17$ donc 34 ne divise pas 85.

$\boxed{\text{Les étiquettes ne peuvent pas avoir un côté qui mesure } 34\ cm.}$

5. 17 est un diviseur commun de 102 et 85.
On a $102 = 17 \times 6$ et $85 = 17 \times 5$.

On peut donc découper 6 étiquettes sur la longueur et 5 étiquettes sur la largeur. Soit $6 \times 5 = 30$ étiquettes.

$\boxed{\text{Il pourra découper 30 étiquettes.}}$

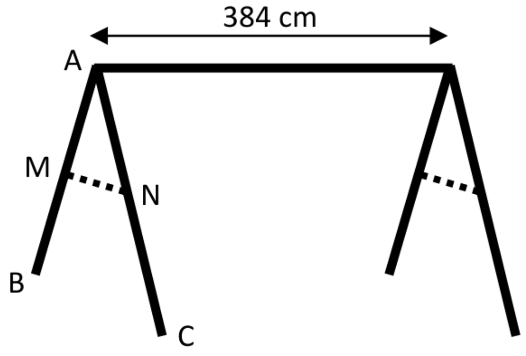
En attendant le brevet ... — Épisode 6

Exercice n° 1 — Le portique de balançoires — Thalès — Pythagore — Trigonométrie

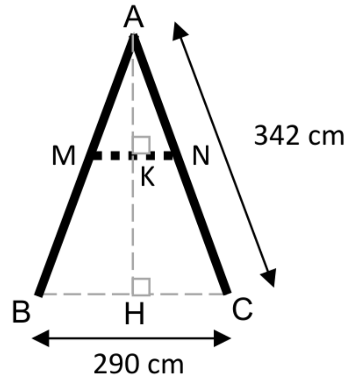
Une entreprise fabrique des portiques pour installer des balançoires sur des aires de jeux.

Document 1 : croquis d'un portique

Vue d'ensemble



Vue de côté



: poutres en bois de diamètre 100 mm
: barres de maintien latérales en bois.

ABC est un triangle isocèle en A.
H est le milieu de [BC]
(MN) est parallèle à (BC).

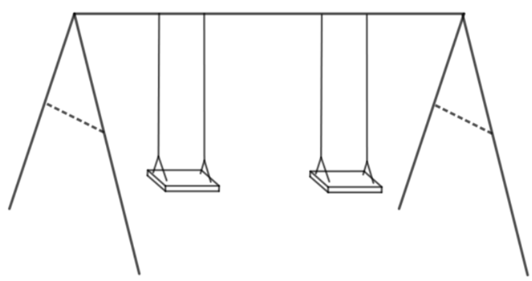
Document 2 : coût du matériel.

Poutres en bois de diamètre 100 mm :

- Longueur 4 m : 12,99 € l'unité;
- Longueur 3,5 m : 11,75 € l'unité;
- Longueur 3 m : 10,25 € l'unité.

Barres de maintien latérales en bois :

- Longueur 3 m : 6,99 € l'unité;
- Longueur 2 m : 4,75 € l'unité;
- Longueur 1,5 m : 3,89 € l'unité.



Ensemble des fixations pour un portique : 80 €.
Ensemble de deux balançoires pour un portique : 50 €.

1. Déterminer la hauteur AH du portique, arrondie au cm près.

2. Les barres de maintien doivent être fixées à 165 cm du sommet (AN = 165 cm).
Montrer que la longueur MN de chaque barre de maintien est d'environ 140 cm.

3. Montrer que le coût minimal d'un tel portique équipé de balançoires s'élève à 196,98 €.

4. L'entreprise veut vendre ce portique équipé 20 % plus cher que son coût minimal.
Déterminer ce prix de vente arrondi au centime près.

5. Pour des raisons de sécurité, l'angle $\widehat{BAC}$ doit être compris entre 45° et 55°. Ce portique respecte-t-il cette condition ?

Exercice n° 2 — Un peu de technique — Développer — Factoriser — Résoudre

On pose $f(x) = (4x-7)^2 - (3x+9)^2$ et $g(x) = (3+7x)^2 - (3+7x)(6x-8)$.

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3. Calculer les images de 0 et -2 par les fonctions f et g.
4. Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions f et g.
5. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice n° 1 : Le portique de balançoires CORRECTION

Théorème de Thalès — Théorème de Pythagore — Trigonométrie

1. Le triangle ABH est rectangle en H.
Comme H est le milieu de [BC] on a HB = 290 $cm \div 2 = 145$ cm
Comme ABC est isocèle en A, AB = AC = 342 cm.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HA^2 + HB^2 = AB^2$$
$$HA^2 + 145^2 = 342^2$$
$$HA^2 + 21\,025 = 116\,964$$
$$HA^2 = 116\,964 - 21\,025$$
$$HA^2 = 95\,939$$
$$HA = \sqrt{95\,939}$$
$$HA \approx 310$$

La hauteur du portique est d'environ 310 cm

2. Dans le triangle ABC, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$
$$\frac{AM}{342\ cm} = \frac{165}{342\ cm} = \frac{MN}{290\ cm}$$

Ainsi $MN = \dfrac{165\ cm \times 290\ cm}{342\ cm} \approx 140\ cm$

La longueur de la barre est bien d'environ 140 cm.

3. Pour construire ce portique, il faut :

— 1 poutre de longueur 4 m de diamètre 100 mm à 12,99 € ;
— 4 poutres de longueur 3,5 m de diamètre 100 mm à 11,75 € ;
— 2 barre latérale de maintien en bois de longueur 1,5 m à 3,89 € ;
— 1 ensemble de fixations pour le portique à 80 € ;
— 1 ensemble de balançoires à 50 €.

12,99 € +4 × 11,75 € +2 × 3,89 € +80 € +50 € = 197,77 € .
On n'obtient pas le montant de l'énoncé !
L'astuce consiste à remarquer qu'il est possible de prendre une seule barre latérale de 3 m à 6,99 € puis de couper les barres de maintiens qui font chacune 1,40 m.
On a alors :
12,99 € +4 × 11,75 € +6,99 € +80 € +50 € = 196,98 € .

Oui le montant minimal pour construire ce portique est bien 196,98 € .

4. Il faut ajouter 20 % au prix.
On sait qu'ajouter 20 % à un nombre revient à multiplier ce nombre par $1 + \dfrac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$.

$1,20 \times 196,98$ € $\approx 236,38$ € .

On peut aussi calculer les 20 % de 196,98 € : $196,98$ € $\times \dfrac{20}{100} \approx 39,40$ € .

Puis on ajoute : 196,98 € +39,40 € = 236,38 € .

$\boxed{\text{Le prix augmenté est } 236,38 \text{ € .}}$

5. Comme ABC est isocèle en A, la droite (AH) est un axe de symétrie du triangle.
Ainsi l'angle $\widehat{BAC}$ vaut exactement le double de l'angle $\widehat{BAH}$.

Dans le triangle BAH rectangle en H nous avons :

$sin(\widehat{BAH}) = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{145\ cm}{342\ cm}$

À la calculatrice on trouve ainsi l'angle dont le sinus est égal à $\dfrac{145}{243}$.

$\widehat{ABH} \approx 25°$.

Finalement $\widehat{ABC} \approx 50°$.

$\boxed{\text{Ce portique respecte les conditions de sécurité.}}$

Exercice n° 2 : Un peu de technique CORRECTION

Développer — Factoriser — Résoudre

On pose $f(x) = (4x-7)^2 - (3x+9)^2$ et $g(x) = (3+7x)^2 - (3+7x)(6x-8)$.

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

$f(x) = (4x-7)^2 - (3x+9)^2$
$f(x) = (4x-7)(4x-7) - (3x+9)(3x+9)$
$f(x) = (16x^2 - 28x - 28x + 49) - (9x^2 + 27x + 27x + 81)$
$f(x) = 16x^2 - 28x - 28x + 49 - 9x^2 - 27x - 27x - 81$

$\boxed{f(x) = 7x^2 - 110x - 32}$

$g(x) = (3+7x)^2 - (3+7x)(6x-8)$.
$g(x) = (3+7x)(3+7x) - (18x - 24 + 42x^2 - 56x)$
$g(x) = 9 + 21x + 21x + 49x^2 - 18x + 24 - 42x^2 + 56x$

$\boxed{g(x) = 7x^2 + 80x + 33}$

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

$f(x) = (4x-7)^2 - (3x+9)^2$
$f(x) = [(4x-7) + (3x+9)]\,[(4x-7) - (3x+9)]$
$f(x) = (4x - 7 + 3x + 9)(4x - 7 - 3x - 9)$

$\boxed{f(x) = (7x+2)(x-16)}$

$g(x) = (3+7x)^2 - (3+7x)(6x-8)$.
$g(x) = (3+7x)(3+7x) - (3+7x)(6x-8)$
$g(x) = (3+7x)\,[(3+7x) - (6x-8)]$
$g(x) = (3+7x)(3+7x-6x+8)$

$\boxed{g(x) = (3+7x)(x+11)}$

3. Calculer les images de 0 et -2 par les fonctions f et g.

$f(x) = 7x^2 - 110x - 32$
$f(0) = -32$

$f(-2) = 7 \times (-2)^2 - 110 \times (-2) - 32 = 7 \times 4 + 220 - 32 = 28 + 220 - 32 = 216$

$\boxed{f(0) = -32 \text{ et } f(-2) = 216}$

$g(x) = 7x^2 + 80x + 33$.
$g(0) = 33$

$g(-2) = 7 \times (-2)^2 + 80 \times (-2) + 33 = 7 \times 4 - 160 + 33 = 28 - 160 + 33 = -99$

$\boxed{g(0) = 33 \text{ et } g(-2) = -99}$

4. Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions f et g.

$f(x) = (7x+2)(x-16)$

$$(7x+2)(x-16) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 7x+2 &= 0 \\ 7x+2-2 &= 0-2 \\ 7x &= -2 \\ x &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-16 &= 0 \\ x-16+16 &= 0+16 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Il y a donc deux antécédents : $\boxed{-\frac{2}{7} \text{ et } 16}$

$g(x) = (3+7x)(x+11)$

$$(3+7x)(x+11) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3+7x &= 0 \\ 3+7x-3 &= 0-3 \\ 7x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+11 &= 0 \\ x+11-11 &= 0-11 \\ x &= -11 \end{aligned}$$

Il y a donc deux antécédents : $\boxed{-\frac{3}{7} \text{ et } -11}$

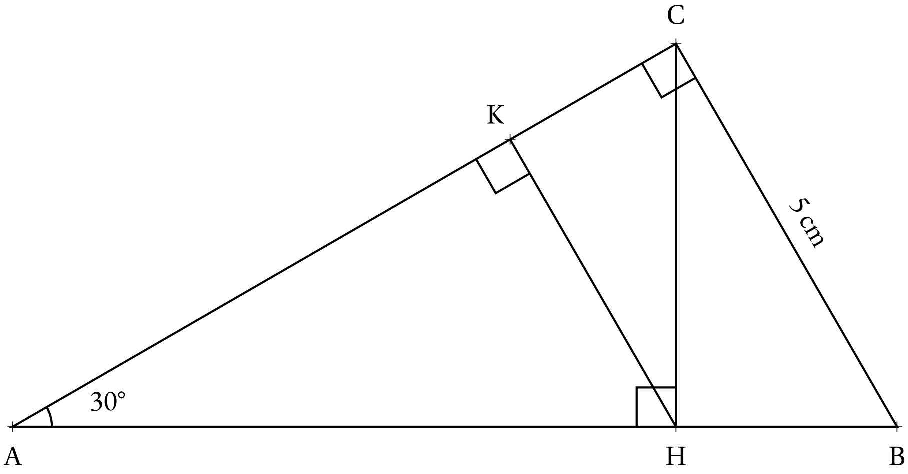
5. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 7x^2-110x-32 &= 7x^2+80x+33 \\ 7x^2-110x-32-7x^2 &= 7x^2+80x+33-7x^2 \\ -110x-32 &= 80x+33 \\ -110x-32+32 &= 80x+33+32 \\ -110x &= 80x+65 \\ -110x-80x &= 80x+65-80x \\ -190x &= 65 \\ x &= -\frac{65}{190} \\ x &= -\frac{13}{38} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a une solution } -\frac{13}{38}.}$

En attendant le brevet ... — Épisode 7

Exercice n° 1 — Les triangles semblables — Thalès — Pythagore — Trigonométrie



1. Montrer que AB = 10 cm.

2.a Calculer AC au dixième de millimètre près en utilisant la trigonométrie.
2.b. Montrer que la valeur exacte de AC vaut $\sqrt{75}$ cm en utilisant le théorème de Pythagore.

3. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle ABC.

4.a. Calculer au dixième de millimètre près les longueurs CH et AH.
4.b. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle AHC.

5.a. Calculer au dixième de millimètre près la longueur HB.
5.b. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle BHC.

6.a. Démontrer que les droites (KH) et (BC) sont parallèles.
6.b. Calculer au dixième de millimètre près les longueurs KH, AK et KC.
6.c. Calculer au millimètre carré près, l'aire du triangle rectangle KHC et AKH.

7. Indiquer la mesure des angles des triangles ABC, AHC, HBC, HKC et AKH. Que peut-on dire de ces triangles ?

8.a. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer des mesures du triangles BHC à celles du triangle ABC ?
8.b. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer des mesures du triangles AHC à celles du triangle KHC ?
8.c. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'aire du triangle BHC à celle du triangle ABC ?
8.d. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'aire du triangle AHC à celle du triangle KHC ?

Exercice n° 2 — Les chocolats blancs et noirs — Arithmétique

1. Décomposer en produit facteurs premiers les nombres 7980 et 7140.

2. Simplifier au maximum la fraction $\dfrac{7140}{7980}$.

3. Un chocolatier vient de préparer 7980 chocolats blancs et 7140 chocolats noirs. Il souhaite préparer des sachets tous identiques contenant la même répartition de chocolats.
Combien de sachets pourra-t-il au maximum confectionner et quel sera la répartition dans chaque sachet.

Exercice n° 1 : Les triangles semblables CORRECTION

Théorème de Thalès — Théorème de Pythagore — Trigonométrie

1. Le triangle ABC est rectangle en C.
On connaît le côté opposé à l'angle $\widehat{CAB}$ et on cherche l'hypoténuse.

$\sin 30° = \dfrac{5\,\text{cm}}{\text{AB}}$ donc $\text{AB} = \dfrac{5\,\text{cm}}{\sin 30°} = 10\,\text{cm}$.

$\boxed{\text{AB} = 10\,\text{cm}}$

2.a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on connaît la mesure de l'hypoténuse et on cherche la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.

$\cos 30° = \dfrac{\text{AC}}{10\,\text{cm}}$ donc $\text{AC} = 10\,\text{cm} \times \cos 30° \approx 8{,}66\,\text{cm}$.

$\boxed{\text{AC} \approx 8{,}66\,\text{cm au dixième de millimètre près.}}$

2.b. Dans le triangle ABC rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{CA}^2 + \text{CB}^2 = \text{AB}^2$$
$$\text{CA}^2 + 5^2 = 10^2$$
$$\text{CA}^2 + 25 = 100^2$$
$$\text{CA}^2 = 100 - 25$$
$$\text{CA}^2 = 75$$
$$\text{AC} = \sqrt{75}$$
$$\text{AC} \approx 8,66$$

$\boxed{\text{AC} = \sqrt{75}\ \text{cm} \approx 8{,}66\,\text{cm}}$

3. $\boxed{\text{Aire(ABC)} = \dfrac{\text{CA} \times \text{CB}}{2} \approx \dfrac{8{,}66\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{86{,}6\,\text{mm} \times 50\,\text{mm}}{2} \approx 2165\,\text{mm}^2}$

4.a. Dans le triangle AHC rectangle en H, on connaît l'hypoténuse et on veut le côté opposé.

$\sin 30° = \dfrac{\text{CH}}{8{,}66\,\text{cm}}$ soit $\boxed{\text{CH} \approx 8{,}66\,\text{cm} \times \sin 30° \approx 4{,}33\,\text{cm}}$

Dans le triangle AHC rectangle en H, on connaît l'hypoténuse et on veut le côté adjacent.

$\cos 30° = \dfrac{\text{AH}}{8{,}66\,\text{cm}}$ soit $\boxed{\text{AH} \approx 8{,}66\,\text{cm} \times \cos 30° \approx 7{,}50\,\text{cm}}$

4.b. $\boxed{\text{Aire(AHC)} = \dfrac{\text{HA} \times \text{HC}}{2} \approx \dfrac{7{,}50\,\text{cm} \times 4{,}33\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{75\,\text{mm} \times 43{,}3\,\text{mm}}{2} \approx 1624\,\text{mm}^2}$

5.a. $\boxed{\text{HB} = \text{AB} - \text{AH} = 10\,\text{cm} - 7{,}50\,\text{cm} = 2{,}50\,\text{cm}}$

5.b. $\boxed{\text{Aire(BHC)} = \dfrac{\text{HB} \times \text{HC}}{2} \approx \dfrac{2{,}50\,\text{cm} \times 4{,}33\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{25\,\text{mm} \times 43{,}3\,\text{mm}}{2} \approx 541\,\text{mm}^2}$

6.a. Les droites (KH) et (CB) sont perpendiculaires à la droite (AC). On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**.

$\boxed{(KH)//(CB)}$

6.b. Les droites (KC) et (HB sont sécantes en A, les droites (KH) et (CB) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{HK}{BC}$$

$$\frac{7{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{AK}{8{,}66\,\text{cm}} = \frac{HK}{5\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$AK = \dfrac{8{,}66\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$ d'où $AK = \dfrac{64{,}95\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}}$ et $AK \approx 6{,}50\,\text{cm}$
$HK = \dfrac{5\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$ d'où $HK = \dfrac{37{,}5\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}}$ et $HK \approx 3{,}75\,\text{cm}$

$\boxed{HK \approx 3{,}75\,\text{cm},\ AK \approx 6{,}50\,\text{cm et } KC = AC - AK \approx 8{,}66\,\text{cm} - 6{,}50\,\text{cm} \approx 2{,}16\,\text{cm.}}$

6.c. $\boxed{\text{Aire}(AKH) = \dfrac{KA \times KH}{2} \approx \dfrac{6{,}50\,\text{cm} \times 3{,}75\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{65\,\text{mm} \times 37{,}5\,\text{mm}}{2} \approx 1219\,\text{mm}^2}$

$\boxed{\text{Aire}(KHC) = \dfrac{KH \times KC}{2} \approx \dfrac{3{,}75\,\text{cm} \times 2{,}16\,\text{cm}}{2} \approx \dfrac{37{,}5\,\text{mm} \times 21{,}6\,\text{mm}}{2} \approx 405\,\text{mm}^2}$

7. Dans le triangle ABC rectangle en C,
$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$
$30° + \widehat{ABC} + 90° = 180°$ donc $\widehat{ABC} = 60°$.
Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont complémentaires.

Dans le triangle BHC rectangle en H, les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{BCH}$ sont complémentaires, donc $\widehat{BCH} = 60°$.

Dans le triangle AKH rectangle en K, les angles $\widehat{KAH}$ et $\widehat{AHK}$ sont complémentaires, donc $\widehat{AHK} = 60°$.

Dans le triangle KCH, $\widehat{KHC} = 90° - \widehat{AHK} = 90° - 60° = 30°$.
De plus $\widehat{KHC}$ et $\widehat{KCH}$ sont complémentaires, $\widehat{KCH} = 60°$.

$\boxed{\text{Les triangles ABC, AHC, CHB, KCH et AKH ont des angles à 90°, 60° et 30°, ils sont semblables.}}$

8.abcd Les triangles étant semblables, ils sont des agrandissements ou des réductions les uns des autres.

8.a. $\boxed{\text{En termes de mesures, ABC est deux fois plus grand que le triangle BHC.}}$

8.b. $\boxed{\text{En termes de mesures, KHC est deux fois plus grand que le triangle AHC.}}$

8.c. $\boxed{\text{En termes d'aires, ABC est quatre fois plus grand que le triangle BHC.}}$

8.d. $\boxed{\text{En termes d'aires, KHC est deux fois plus grand que le triangle AHC.}}$

Exercice n° 2 : Les chocolats blancs et noirs

Correction

Arithmétique

1.

$$\begin{array}{r|c} 7\,980 & 2 \\ 3\,990 & 2 \\ 1\,995 & 3 \\ 665 & 5 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 7\,140 & 2 \\ 3\,570 & 2 \\ 1\,785 & 3 \\ 595 & 5 \\ 119 & 7 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{7\,980 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19 \text{ et } 7\,140 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17}$

2. $\dfrac{7140}{7980} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19} = \boxed{\dfrac{17}{19}}$

3. Nous venons de voir que le nombre $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ est le plus grand diviseur commun de ces deux nombres.
En effet, $7140 = 420 \times 17$ et $7980 = 420 \times 19$.

$\boxed{\text{Il pourra constituer 420 sachets contenant chacun 17 chocolats noirs et 19 chocolats blancs.}}$

EXERCICE N° 1 — CORRECTION

Situation n° 1

Comparons les quotients $\frac{LA}{LG}$ et $\frac{LF}{LD}$.

$\frac{LA}{LG} = \frac{29\,\text{cm}}{34\,\text{cm}}$

$\frac{LA}{LG} \approx 0,85$

$\frac{LF}{LD} = \frac{46\,\text{cm}}{53\,\text{cm}}$

$\frac{LF}{LD} \approx 0,87$

Une autre méthode consiste à comparer les produits en croix : on a $29 \times 53 = 1378$ et $46 \times 34 = 1564$

Avec l'une ou l'autre méthode, on constate que $\frac{LA}{LG} \neq \frac{LF}{LD}$.

D'après **le théorème de Thalès contraposé**, les droites (FA) et (GD) ne sont pas parallèles.

Situation n° 2

Comparons $MB^2 + MV^2$ et BV^2 :

$MB^2 + MV^2$	BV^2
$48^2 + 55^2$	73^2
$2304 + 3025$	
5329	5329

Comme $MB^2 + MV^2 = BV^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle MBV est rectangle en M .

Situation n° 3

Dans le triangle HCK rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CH^2 + CK^2 = HK^2$$
$$35^2 + CK^2 = 37^2$$
$$1225 + CK^2 = 1369$$
$$CK^2 = 1369 - 1225$$
$$CK^2 = 144$$
$$CK = \sqrt{144}$$
$$CK = 12$$

Le segment [KC] mesure bien 12 mm.

Situation n° 4

$$7x - 5 = 3x + 8$$
$$7x - 5 + 5 = 3x + 8 + 5$$
$$7x = 3x + 13$$
$$7x - 3x = 3x + 13 - 3x$$
$$4x = 13$$
$$x = \frac{13}{4}$$
$$x = 3,25$$

3,25 est la solution de cette équation.

Exercice n° 2 — Correction

1.a.

170	2
85	5
17	17
1	

65	2
13	13
1	

$\boxed{170 = 2 \times 5 \times 17}$ $\boxed{65 = 3 \times 13}$

1.b. On constate que $85 = 5 \times 17$, que $170 = 2 \times 5 \times 17$ et que $65 = 5 \times 13$.

Le nombre de panier est un diviseur commun à ces trois nombres. On cherche le plus grand diviseur commun.
En observant les décompositions en facteurs premiers, on constate que 5 est le plus grand diviseur commun de ces trois nombres.

José peut préparer au maximum 5 paniers.

1.c. On peut écrire $85 = 5 \times 17$, $170 = 5 \times 34$ et $65 = 5 \times 13$.
Il suffit de diviser chaque nombre par 5 ou d'observer attentivement les décompositions en produit de facteurs premiers.

Dans chaque panier, il y aurait 17 salades, 34 carottes et 13 aubergines.

2.a. Il y a 65 aubergines. On peut effectuer la division euclidienne de 65 par 17.

$$\begin{array}{r|l} 6\ 5 & 1\ 7 \\ \cline{2-2} 1\ 4 & 3 \end{array}$$

Ainsi $65 = 17 \times 3 + 14$. 14 aubergines ne seront pas utilisées.

2.b. Il faudrait atteindre un multiple de 17. Le plus petit supérieur à 14 est 17. Il faut cueillir 3 aubergines supplémentaires.

3. Il faut que le nombre de tomates soit un multiple de 17.
On cherche le plus grand multiple de 17 compris entre 105 et 125.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0\ 5 & 1\ 7 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array}$$

donc $105 = 17 \times 6 + 3$

Calculons $17 \times 7 = 119$ et $17 \times 8 = 136$.

Il doit récolter au maximum 119 tomates pour éviter les pertes.

Exercice n° 3 — Correction

1.a. L'image de 1 par la fonction f est -1.

1.b. -1 a pour image 3 par la fonction f.

1.c. -2 est un antécédent de 5 par la fonction f.

2.a. En prenant 1 comme nombre de départ on obtient successivement : 1 puis $1^2 = 1$, $1 + 3 \times 1 = 1 + 3 = 4$ et enfin $4 + 5 = 9$.

En prenant 1 au départ, on obtient bien 9.

2.b. En prenant -2 comme nombre de départ on obtient successivement : -2 puis $(-2)^2 = 4$, $4 + 3 \times (-2) = 4 - 6 = -2$ et enfin $-2 + 5 = 3$.

En prenant -2 au départ, on obtient 3.

2.c. En partant d'un nombre générique x on obtient successivement :
x puis x^2, $x^2 + 3x$ et enfin $x^2 + 3x + 5$.

La fonction qui correspond à ce programme de calcul est $g(x) = x^2 + 3x + 5$.

3. On a $h(x) = 2x - 3$.

3.a. $h(1) = 2 \times 1 - 3 = 2 - 3 = -1$

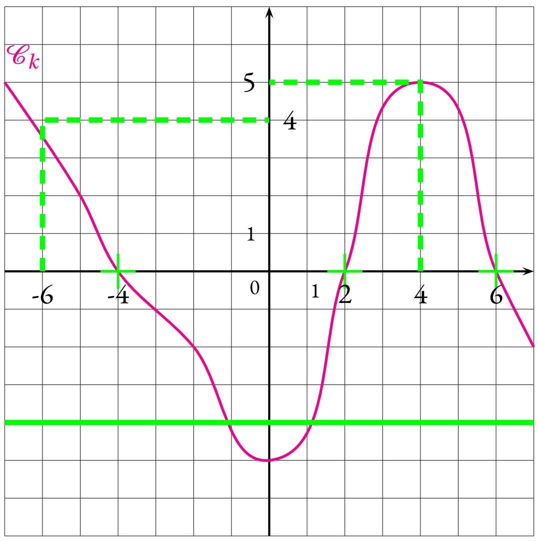
3.b. $h(-2) = 2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

3.c. Pour déterminer un antécédent de 7 par la fonction h, il faut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} h(x) &= 7 \\ 2x - 3 &= 7 \\ 2x - 3 {\color{red}+3} &= 7 {\color{red}+3} \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

On pouvait aussi tenter quelques essais pour déterminer cet antécédent.

2 est l'antécédent de 7 par la fonction h.



4.a. L'image de -6 par la fonction k vaut 4.

4.b. $k(4) = 5$

4.c. Les antécédents de 0 par k sont -4, 2 et 6

4.d. -4 possède 2 antécédents

Exercice n° 4 — Correction

1. Les droites (PN) et (VM) sont perpendiculaires à la même droite (DM).
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Les droites (PN) et (VM) sont parallèles.

2. Les droites (VP) et (MN) sont sécantes en D.
Les droites (PN) et (VM) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{DN}{DM} = \frac{DP}{DV} = \frac{NP}{MV}$$

$$\frac{DN}{DM} = \frac{3\,\text{km}}{3{,}8\,\text{km}} = \frac{PN}{0{,}741\,\text{km}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$PN = \frac{0{,}741\,\text{km} \times 3\,\text{km}}{3{,}8\,\text{km}} \quad \text{d'où} \quad PN = \frac{2{,}233\,\text{km}^2}{3{,}8\,\text{km}} \quad \text{et} \quad PN = 0{,}585\,\text{km}$$

Arrivée en P, Fabienne se situe à 0,585 km=585 m.

3. Fabienne a parcouru 3 km en 2 h. En 1 h, elle a parcouru $3\,\text{km} \div 2 = 1{,}5\,\text{km}$.

De manière plus complexe, il était possible d'utiliser l'égalité des produits en croix entre les deux grandeurs proportionnelles, distance et temps.

Distance	3 km	$\frac{1\ h \times 3\,\text{km}}{2\ h} = 1{,}5\,\text{km}$
Temps	2 h	1 h

Fabienne a atteint le point P à la vitesse de 1,5 km/h.

4. La distance PV restant à parcourir mesure $3{,}8\,\text{km} - 3\,\text{km} = 0{,}8\,\text{km}$.
Fabienne a parcouru cette distance à la vitesse moyenne de 1,2 km/h.

Distance	1,2 km	0,8 km
Temps	1 h	$\frac{0{,}8\,\text{km} \times 1\ h}{1{,}2\,\text{km}} \approx 0,667\ h$

Comme $1\ h = 60\ min$, $0,667\ h \approx 0,667 \times 60\ min \approx 40\ min$.

Il était conseillé d'utiliser des minutes dans le tableau ci-dessus :

Distance	1,2 km	0,8 km
Temps	1 h= 60 min	$\frac{0{,}8\,\text{km} \times 60\ min}{1{,}2\,\text{km}} = 40\ min$

Fabienne a mit 40 min pour parcourir la fin du circuit soit 2 h 40 min en tout.

Fabienne a dépassé la durée attendue de 10 min.

Exercice n° 5 — Correction

1. Il faut classer ces temps dans l'ordre croissant pour déterminer le troisième :

$$47,15\ s < 47,31\ s < 47,42\ s < 47,43\ s < 47,45\ s < 47,83\ s < 47,94\ s < 48,17\ s$$

Maxime Grousset est arrivé troisième en 47,42 s.

2. Ce nageur a parcouru 100 m en 47,31 s.
Comme $100\,\text{m} \div 47,31\ s \approx 2,1$, sa vitesse moyenne est de 2,1 m/s.

On pouvait aussi utiliser un tableau :

Distance	100 m	$\dfrac{100\,\text{m} \times 1\ s}{47,31\ s} \approx 2,1\ s$
Temps	47,31 s	1 s

Sa vitesse moyenne au dixième près est de 2,1 m/s.

3. Il faut calculer : $\dfrac{47,45\ s + 47,42\ s + 47,94\ s + 47,15\ s + 47,83\ s + 47,31\ s + 48,17\ s + 47,43\ s}{8} = \dfrac{380,7\ s}{8} = 47,5875\ s.$

La moyenne de cette série vaut 45,5875 s soit environ 45,59 s au centième de seconde près.

4. Cette série statistique comprend 8 valeurs. La médiane de cette série est donc la moyenne de la quatrième et cinquième valeur.
On utilise le classement de la question **1.**.
Le temps du quatrième est 47,43 s et le temps du cinquième est 47,45 s.

La médiane de cette série vaut $\dfrac{47,43\ s + 47,45\ s}{2} = 47,44\ s.$

5. D'après le tableau, la Chine a obtenu 20 médailles d'or et les États-Unis 7. Soit 27 à eux deux. Or l'Australie n'en a obtenu que 15.

L'affirmation est fausse.

6. Le Japon a gagné 10 médailles dont 4 en or. $\dfrac{4}{10} = 0,40 = 40\ \%$ des médailles du Japon son en or. L'affirmation est vraie.

7. Il faut faire la somme des médailles d'or, d'argent et de bronze. Dans la cellule **F2** a été saisi : **=C2+D2+E2**.

Exercice n° 6 **Correction**

1. Pour une personne, l'aller-retour au départ de Nantes coûte 530 €. Au départ de Paris il coûte 350 €.
L'écart de prix pour une personne est de 530 €- 350 €= 180 €.

Pour le couple, la différence de prix est de 180 €+ 180 €= 360 €.

2.a. Il faut arriver à l'aéroport au moins 2 h avant le décollage. L'avion part de Paris à 11 h 55 min, ils doivent donc arriver avant 9 h 55 min.
Le trajet entre Nantes et Paris prend 4 h 24 min.

Comme 9 h 55 min - 4 h 24 min = 5 h 31 min, ils doivent partir de Nantes au plus tard à 5 h 31 min.

2.b. La distance entre Nantes et Paris vaut 409 km. La voiture consomme 6 L pour 100 km.
Comme $409\,\text{km} = 100\,\text{km} \times 4,09$, la voiture consomme $4,09 \times 6\,\text{L} = 24,54\,\text{L}$ pour ce trajet.

Le carburant coûte 1,80 €par litre. Le coût du carburant est donc $24,54 \times 1,80$ € $= 44,172$ €soit environ $44,17$ €.

3. Il faut comparer le coût du voyage en voiture, carburant, péage et parking inclus avec le coût du train.

Coût du voyage en voiture

Carburant : 44,17 €pour l'aller et 44,17 €pour le retour.
Péage : 39,20 €à l'aller et au retour.
Parking : 119 €
Total pour l'aller et le retour : $44,17$ € $\times 2 + 39,20$ € $\times 2 + 119$ € $= 88,34$ € $78,4$ € $+119$ € $= 285,74$ €

Coût du voyage en train

Aller pour un passager : 66 €
Retour pour un passager : 39 €
Aller-retour pour un passager : 66 €+ 39 €=105 €.
Aller-retour pour deux passagers : 105 €+ 105 €= 210 €.

Le train est le plus économique, il revient 285,75 € -210 € =75,75 € moins cher que la voiture.

Le robot Sora-Q

Troisième

✧✧

Sora-Q est un robot lunaire japonais conçu par le fabricant de jouets Tomy. C'est un mini robot transformable fabriqué à partir d'un type spécial d'aluminium et de plastique spécialement conçu pour résister aux températures lunaires extrêmes (entre $-274°$ F et $248°$ F). Il ne pèse que 255 grammes. Grâce à lui, l'agence spatiale japonaise, la JAXA, souhaite comprendre comment déplacer un robot sur la lune.

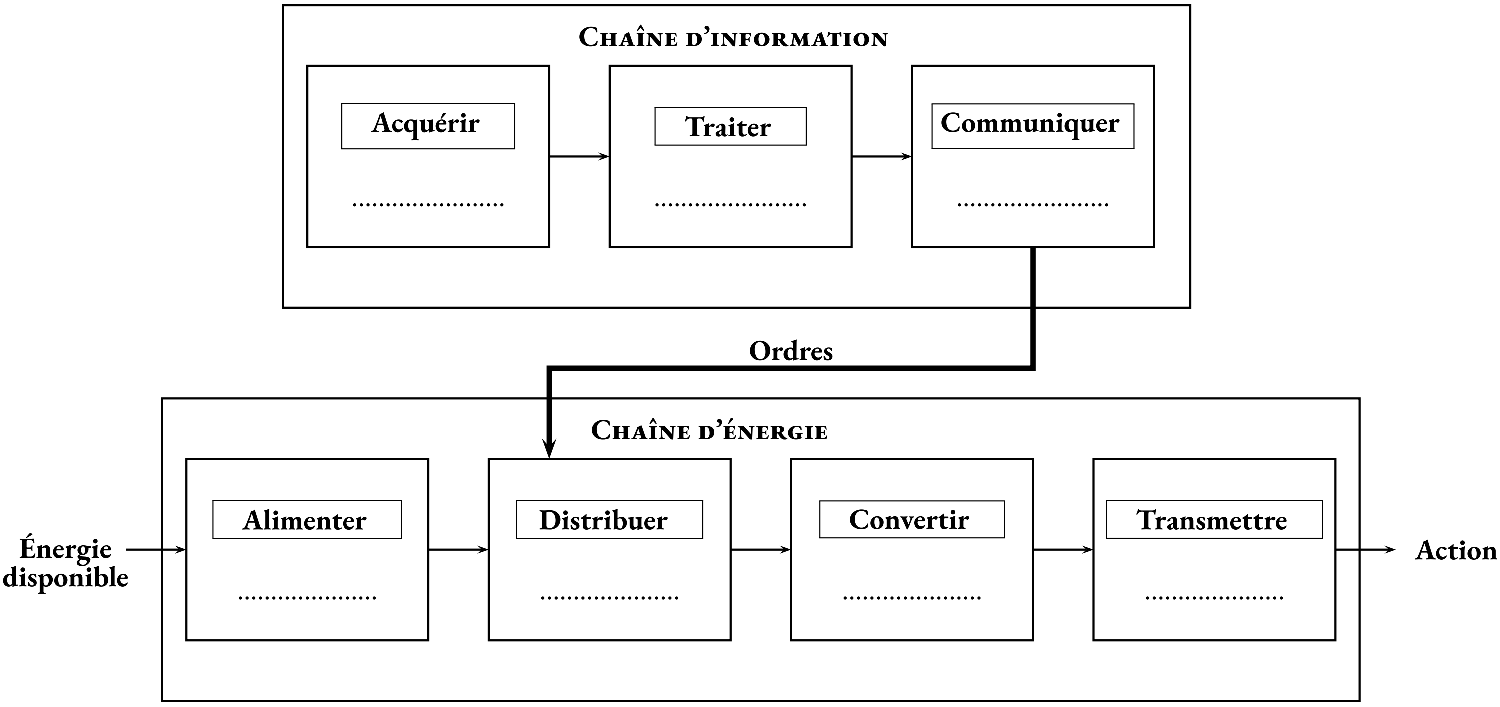
Sora-Q, fonctionne sur deux roues, il se déforme après l'atterrissage et fonctionne automatiquement avec deux moteurs qui pilotent chacune des roues. Équipé de deux caméras, il peut prendre des photos devant et derrière lui pour observer l'environnement sélénite. Il est adapté à tout type de terrain. Il est capable de résister au régolithe lunaire qui est connu pour être très abrasif et insidieux. Il est réputé pour endommager rapidement les équipements. La mission de Sora-Q consiste d'ailleurs à mieux comprendre la composition et le fonctionnement de cette poudre qui parsème le sol de notre satelite.

Il a la possibilité de se changer en une sphère d'un diamètre d'environ 8 cm. Son mécanisme de déformation est né du savoir-faire de la société de fabrication de jouets Tomy qui s'est directement inspiré des Transformers pour la conception. En se transformant en une boule, Sora-Q devient plus résistant au chocs. Comme le nombre de pièces est réduit, il est léger et difficile à casser. Le robot pourra évoluer sur plusieurs kilomètres à la vitesse moyenne de 35 cm/s. Sa batterie Li-ion lui assure une autonomie de deux heures. Passé ce temps, Sora-Q restera définitivement inactif sur la lune!

1. Qu'est-ce que la Lune? Faire la liste de quelques planètes du système solaire. Nommer deux étoiles.

2. Faire la liste de toutes les grandeurs dont le texte ci-dessus fait mention.

3. Compléter la chaîne d'énergie et la chaîne d'informations du robot.



4. Quelle est la masse en kilogrammes d'un carton contenant 16 robots Sora-Q ?

5. Pour convertir une température en degré Fahrenheit en degré Celsius il suffit d'appliquer la formule suivante :

$$\text{Température en degrés Celsius} = 5\left(\text{Température en degrés Fahrenheit} - 32\right) \div 9$$

Exprimer les deux températures du texte en degrés Celsius à l'aide de la calculatrice.

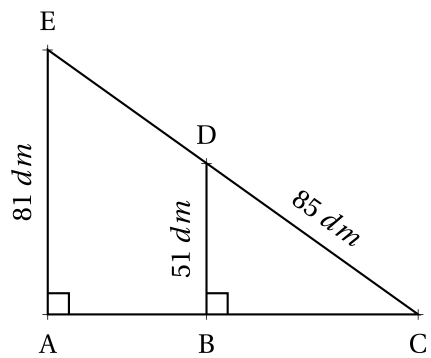
6.a. Depuis le 12 avril 1961, quand Youri Gagarine a été le premier être humain à effectuer un vol dans l'espace, 560 astronautes ont effectué cette expérience. Parmi eux, seulement 64 femmes soit 11 % des vols spaciaux. Comment expliquer cette proportion aussi faible de femmes dans ce métier ?

6.b. 10 % des français pensent que la mission Apollo 11 est une fausse information et que par conséquent l'homme n'est jamais allé sur la lune. Comment expliques-tu qu'autant de gens puissent croire cela ?

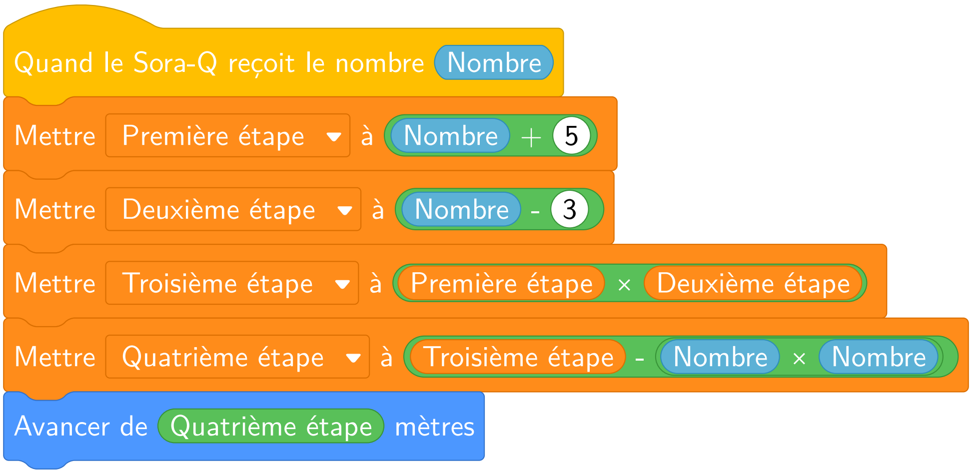
7. Voici le trajet effectué par Sora-Q :

Sora-Q est parti du point C puis il est passé par les points B, D, E, A et il revenu au point C.

Quelle distance a parcouru Sora-Q ?



8. Un ingénieur de la JAXA à injecté le programme suivant dans la carte programmable du Sora-Q :



8.a. Quelle distance va parcourir Sora-Q si le nombre envoyé est 7 ?

8.b. En notant x le nombre envoyé, écrire une expression littérale qui correspond à la distance à parcourir.

8.c. Développer et réduire l'expression précédente.

8.d. Quel nombre doit on envoyer à Sora-Q pour qu'il parcoure 10 m.

9. Combien de temps met Sora-Q pour parcourir 10 m ?

Bilan des compétences

D1.3 — Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques

Élément signifiant	Exercice	Remarque	Maîtrise
Utiliser les nombres entiers	**5.**	Usage des nombres relatifs	
	8.a.	Programme de calcul	
Utiliser le calcul littéral	**8.b.**	Écrire une expression littérale	
	8.c.	Développer et réduire une expression	
Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée	**8.d.**	Calcul de vitesse	
Utiliser et produire des représentations d'objets	**7.**	Théorème de Pythagore Perpendiculaire à une même droite Thalès	
Utiliser l'algorithmique et la programmation pour créer des applications simples	**8.**	Algorithme de calcul	

D3 — La formation de la personne et du citoyen

Élément signifiant	Exercice	Remarque	Maîtrise
Distinguer ce qui relève d'une croyance ou d'une opinion et ce qui constitue un savoir (ou un fait) scientifique.	**6.**	Dépasser des clichés et des stéréotypes.	

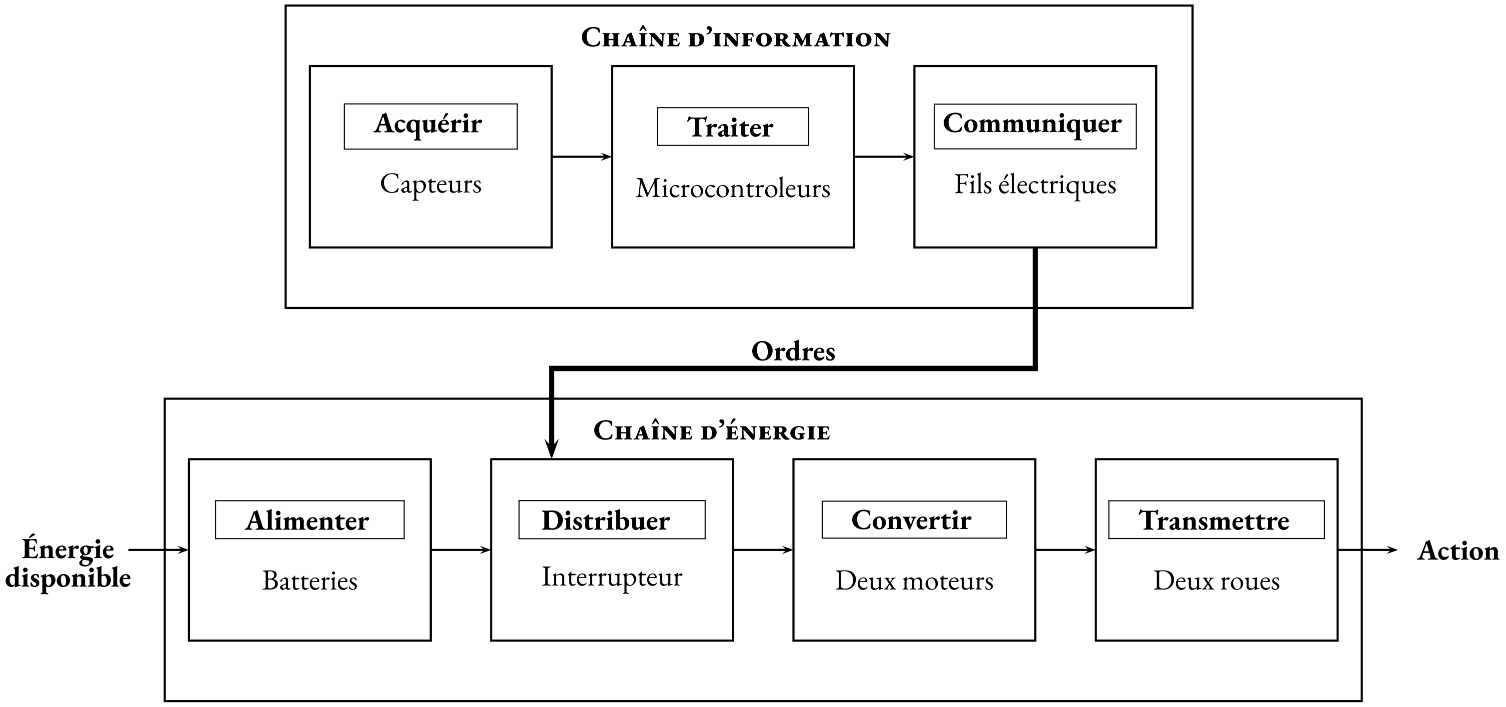
D4 — Les systèmes naturels et les systèmes techniques

Élément signifiant	Exercice	Remarque	Maîtrise
Mener une démarche scientifique ou technologique, résoudre des problèmes simples		Repérer les informations utiles pour chaque question Extraire, organiser les informations utiles et les transcrire dans un langage adapté. Mettre en œuvre un raisonnement logique simple. Communiquer sur ses démarches, ses résultats	

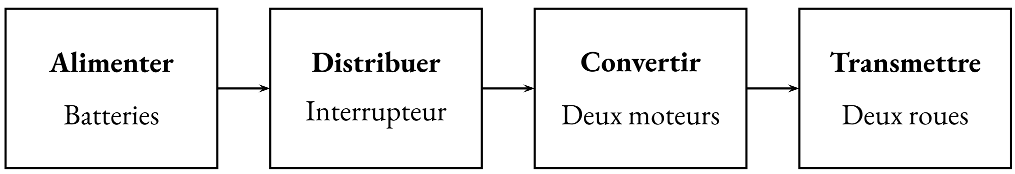
Remarques :

Questions supplémentaires :

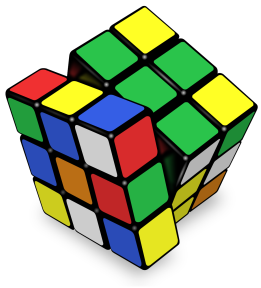
3. Version technologie



Version physique



Energie électrique -> Transformateur (moteur) -> Énergie de mouvement ou mécanique
Il y a des pertes, échauffement chaleur.
Imaginer la chaîne d'information :
Acquérir Capteurs
Traiter
Communiquer
6.a. Que signifie l'information : « la vitesse moyenne de 35 cm/s. »
0.a



Tâche complexe

La salle de classe

✧✧✧

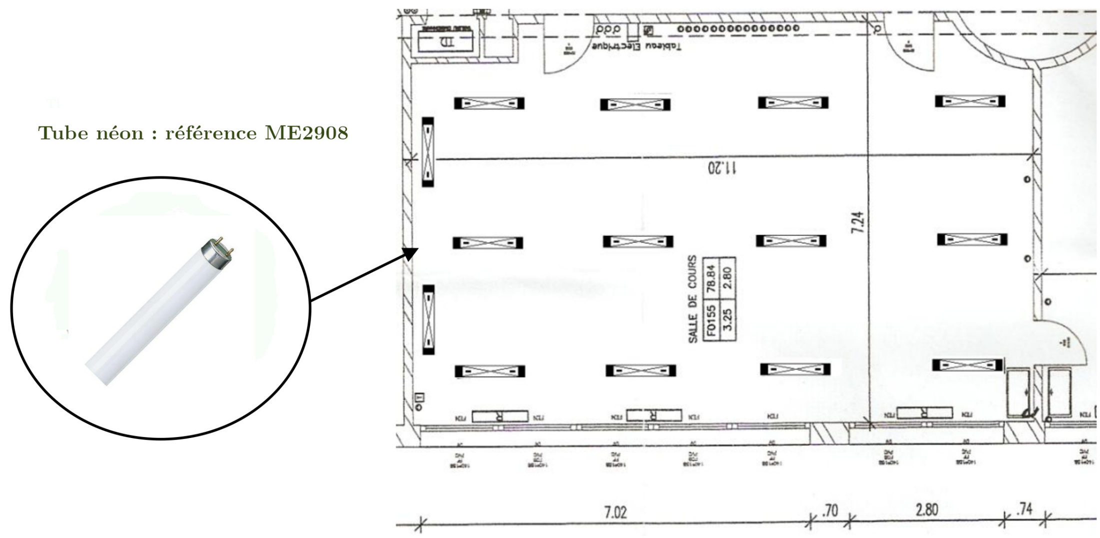
Dans la salle 12 du collège, l'éclairage est défectueux : les tubes néons restent allumés en permanence car l'interrupteur qui commande leur fonctionnement est en panne.
Quel est le montant de la consommation d'électricité liée à ce dysfonctionnement pendant les congés de Toussaint de l'année en cours (weekend compris) ?
Tu utiliseras les ressources données et présenteras ta démarche et tes calculs.

Document 1 : Calcul de l'énergie électrique
L'énergie électrique consommée par un système électrique se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$E = P \times t$$

- E est l'énergie électrique consommée en Wattheures (Wh) ;
- P est la puissance de l'appareil électrique en Watts (W) ;
- t est le temps en heures (h).

Document 2 : Schéma de l'installation électrique de la salle 12

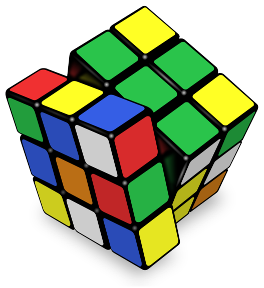


Document 3 : Extrait du catalogue des tubes néons

Modèle	Longueur	Lumens	Puissance	Par 1 et +	Par 5 et +	Par 25 et +
ME2906	590 mm	1 300	16 W	4,75 €	4,55 €	4,39 €
ME2907	1 200 mm	3 200	32 W	6,00 €	5,80 €	5,55 €
ME2908	1 500 mm	5 000	51 W	6,60 €	6,35 €	6,15 €

Document 4 : Tarifs pratiqués par le fournisseurs d'électricité du collège.

	Heures pleines (5h30 - 21h30) Prix TTC	Heures creuses (21h30 - 5h30) Prix TTC
Prix pour 1 kWh	0,184 1 €	0,147 0 €

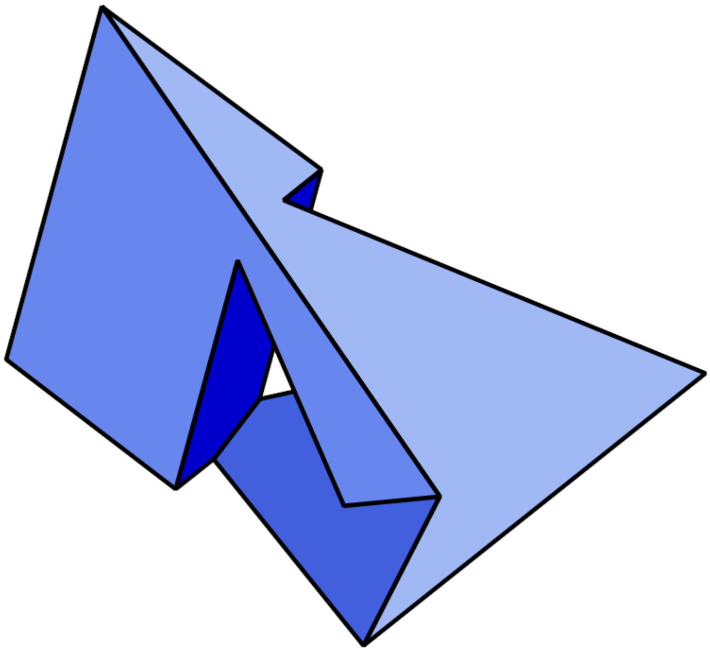


Tâche complexe

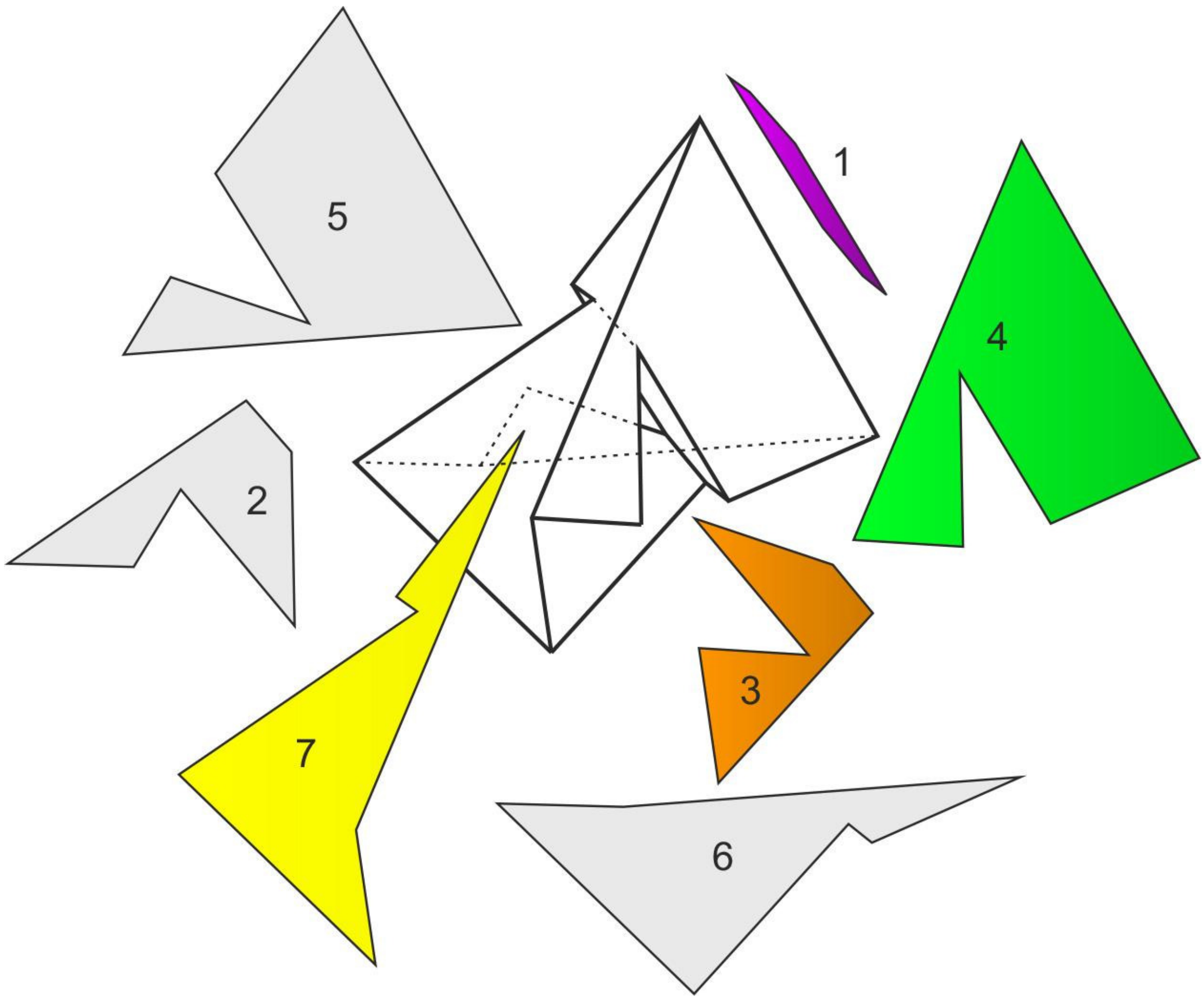
La salle de classe — Correction

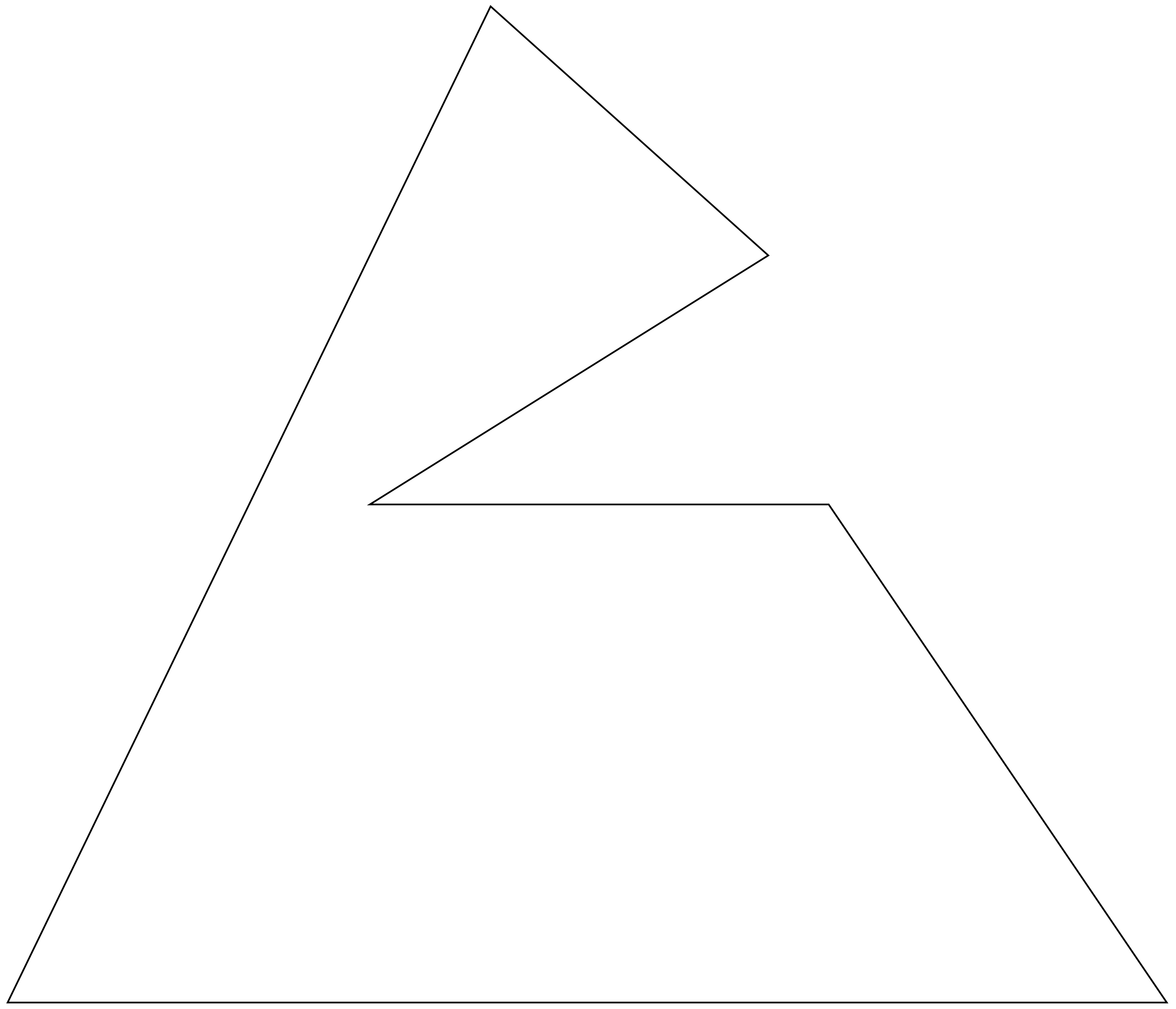
Le polyèdre de Szilassi

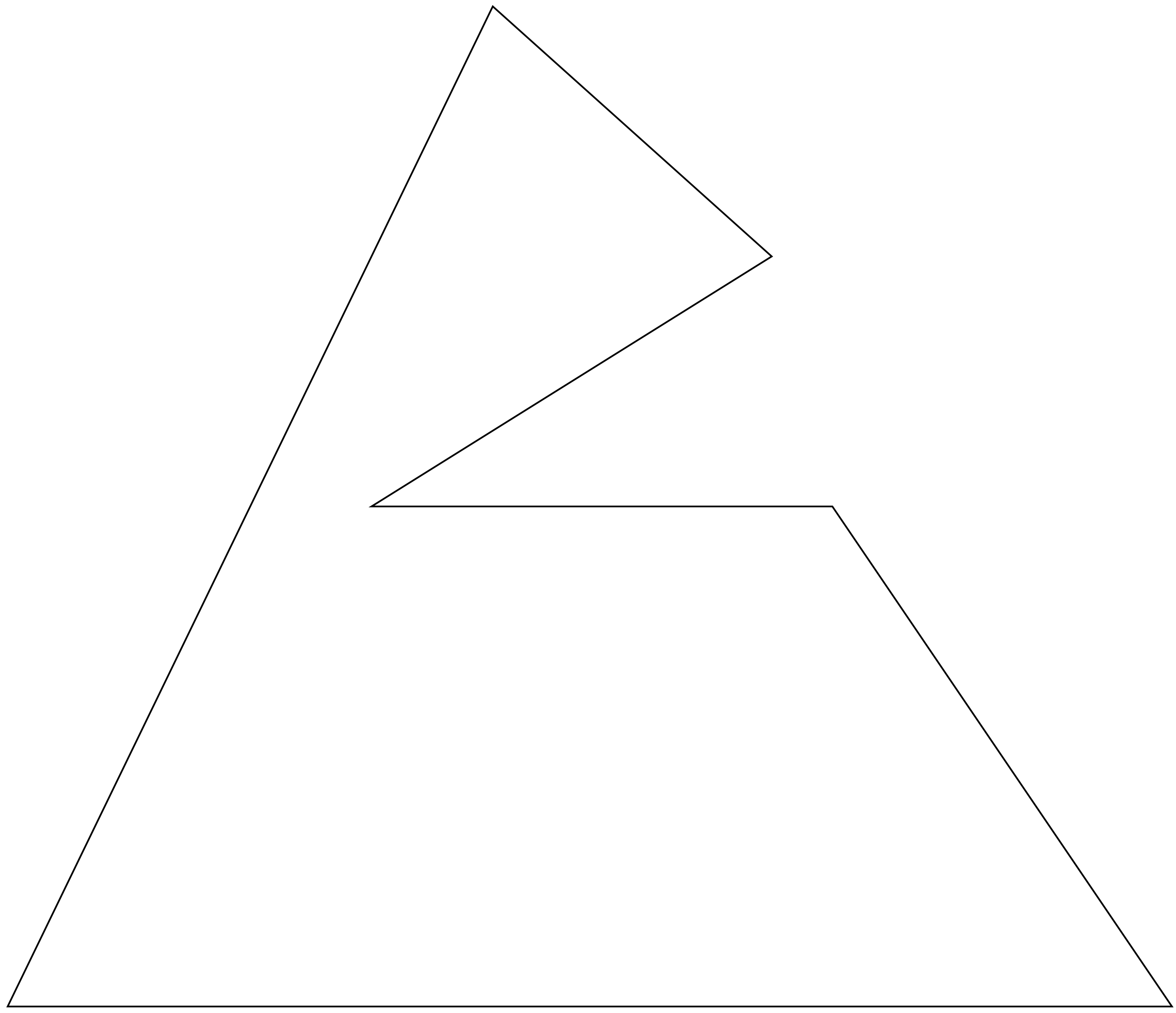
Troisième

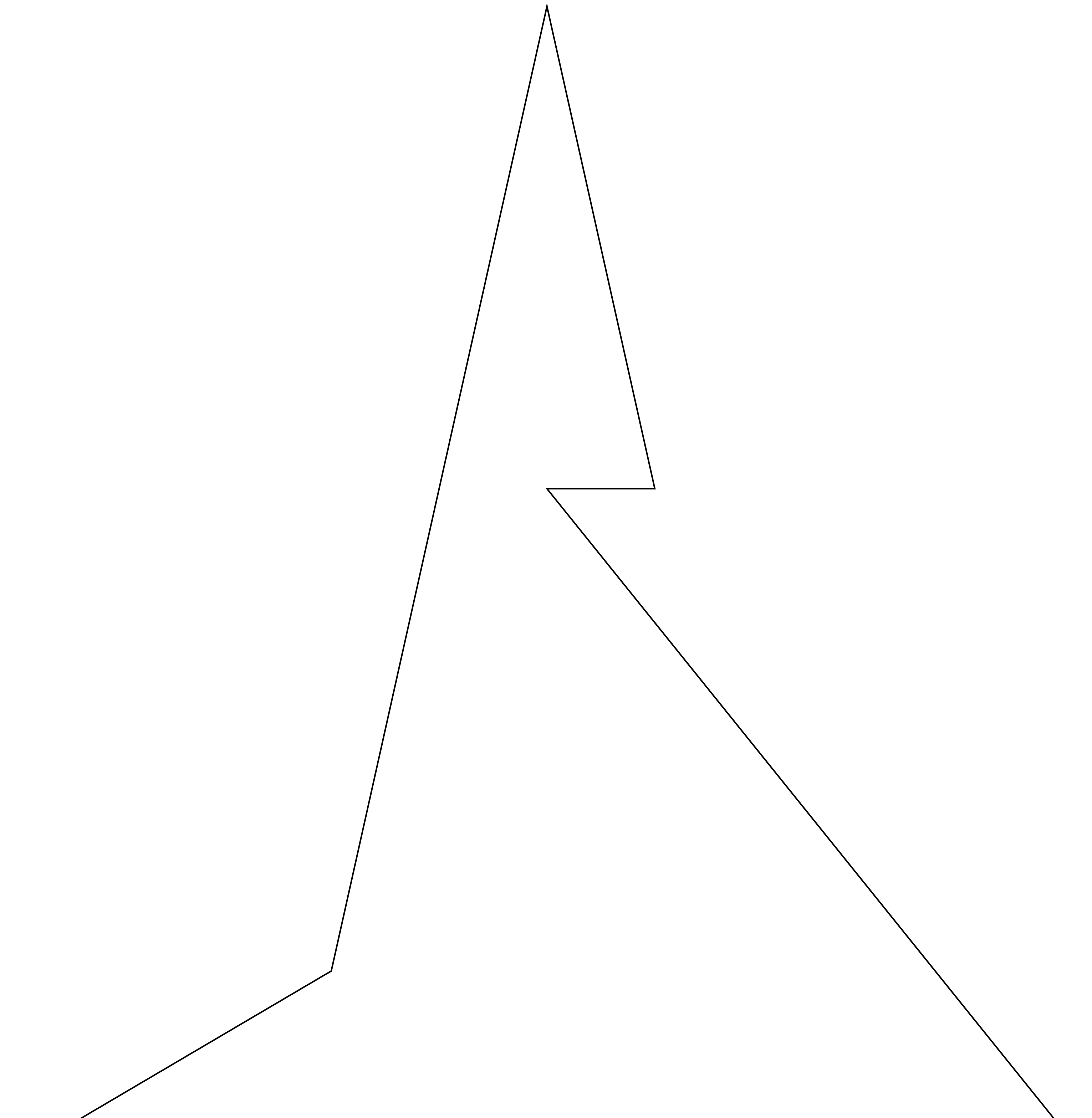


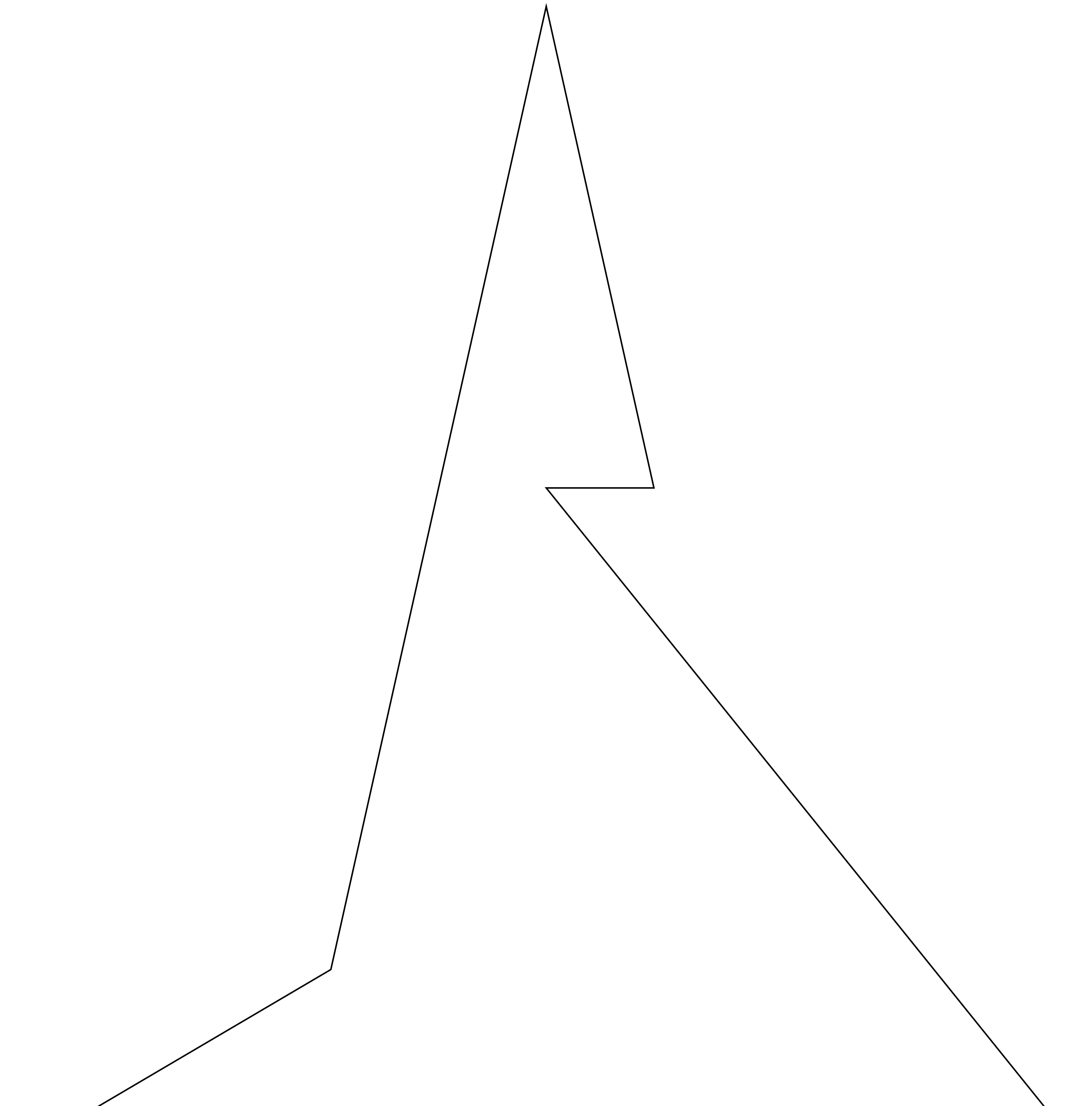
Le polyèdre de Szilassi

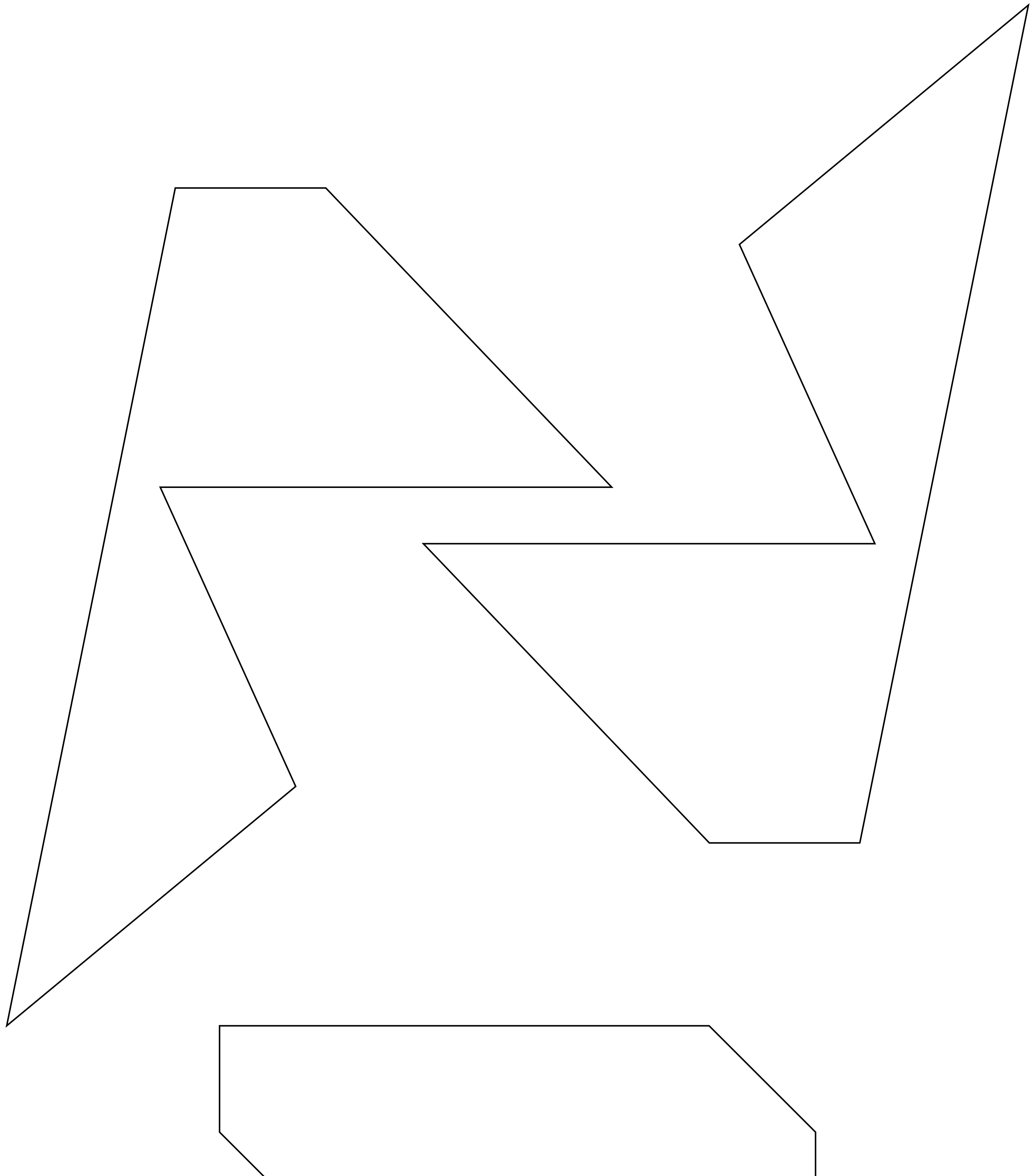












Curiosité mathématique

Le polyèdre de Szilassi — Correction

✧✧✧

Devoir maison : Vitesse — **Les plots du prof d'EPS**

Pour mesurer sa vitesse moyenne en km/h pendant le cours d'EPS, le professeur utilise les deux méthodes ci-dessous :

- **Méthode des** $3\ min\ 36\ s$
  - Courir sans s'arrêter pendant $3\ min\ 36\ s$;
  - compter le nombre de plots franchis (les plots sont espacés de $20\ m$) ;
  - diviser ce nombre de plots par 3.
- **Méthode des** $9\ min\ 36\ s$
  - Courir sans s'arrêter pendant $9\ min\ 36\ s$;
  - compter le nombre de plots franchis (les plots sont espacés de $20\ m$) ;
  - diviser ce nombre de plots par 8.

Le but de cet exercice est de justifier les méthodes utilisées en EPS.

Étude de la méthode des $3\ min\ 36\ s$

1.a Un élève parcoure $540\ m$ en $3\ min\ 36\ s$. Quelle est sa vitesse moyenne exprimée en km/h ?
1.b Combien de plots a-t-il franchis ? La méthode du professeur est-elle efficace ?

2. Montrer que $3\ min\ 36\ s = \dfrac{3}{50}\ h$.

On note maintenant d la distance en mètres parcourue par un élève pendant $3\ min\ 36\ s$.

3.a Montrer en vous inspirant des questions **1.a** et **2.** que la vitesse en m/h s'exprime alors sous la forme $\dfrac{50}{3} \times d$

3.b En déduire que la vitesse en km/h s'exprime sous la forme $\dfrac{1}{60} \times d$ ou encore $\dfrac{d}{60}$
3.c En parcourant d mètres, combien de plots ont été franchis ?
3.d Diviser par 3 ce nombre de plots et en déduire une explication de la méthode du professeur.

Étude de la méthode des $9\ min\ 36\ s$

4.a Un élève parcoure $1\,740\ m$ en $9\ min\ 36\ s$. Quelle est sa vitesse moyenne exprimée en km/h ?
4.b Combien de plots a-t-il franchis ? La méthode du professeur est-elle efficace ?

5. Montrer que $9\ min\ 36\ s = \dfrac{4}{25}\ h$

On note maintenant d la distance en mètres parcourue par un élève pendant $9\ min\ 36\ s$.

6. En vous inspirant des questions **3.abcd** expliquer mathématiquement la méthode du professeur.

❈ Exercices ❈

Exercice n° 1 : Seconde — Pourcentages

L'air est constitué principalement d'azote et d'oxygène.
Dans un volume d'air donné, le volume d'azote correspond à $78,6$ % du volume total et celui d'oxygène à $20,9$ %.
Sachant qu'une salle de classe a un volume de 125 m^3, calculer le volume, en m3, de chacun des gaz présents dans cette salle.

Exercice n° 2 : Seconde — Calcul littéral — Volume

Le volume V d'un tonneau est donné par la formule suivante :

$$V = \pi \left[\frac{d}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \right]^2$$

1. Calculer le volume de ce tonneau en m^3.
Donner la valeur approchée à 0,001 m3 par excès, puis en litres, à 1 litre près par excès, sachant que :

$$L = 1,60\ m \quad ; \quad d = 0,85\ m \quad ; \quad D = 1,34\ m$$

2. Un viticulteur décide d'utiliser ce tonneau pour faire fermenter son raisin.
Combien de bouteilles de 75 cL pourra-t-il remplir pour commercialiser son vin rouge ?

Grandeurs simples et composées

Les grandeurs simples

Il y a sept grandeurs simples qui correspondent à des propriétés des objets de la nature. On peut les mesurer ou les calculer. À chacune de ses grandeurs correspond une unité de mesure :

La longueur mesurée en mètre (m).
Le temps mesuré en seconde (s).
La masse mesurée en gramme (g).
La température mesurée en kelvin (K).

Le courant électrique mesuré en ampère (A).
La quantité de matière mesurée en mole (mol).
L'intensité lumineuse mesurée en candela (cd).

Remarque :
Au collège, en mathématique, on utilise le plus souvent les quatre premières grandeurs.
La température est habituellement mesurée en degré Celsius, $T(°C) = T(K) - 273,15$

Multiples et sous-multiples d'une grandeur simple

On utilise les préfixes et les abréviations suivantes pour désigner les multiples et sous-multiples d'une unité simple :

giga — **G** — milliard — $10^9 = 1\,000\,000\,000$;
mega — **M** — million — $10^6 = 1\,000\,000$;
kilo — **k** — mille — $10^3 = 1000$;
hecto — **h** — cent — $10^2 = 100$;
deca — **da** — dix — $10^1 = 10$;

nano — **n** — milliardième — $10^{-9} = 0,000\,000\,001$;
micro — **µ** — millionième — $10^{-6} = 0,000\,001$;
milli — **m** — millième — $10^{-3} = 0,001$;
centi — **c** — centième — $10^{-2} = 0,01$;
deci — **d** — dixième — $10^{-1} = 0,1$;

Les grandeurs composées

Ce sont des grandeurs obtenues par produit ou quotient de grandeurs simples. Voici les plus courantes au collège :

- la superficie mesurée en mètre carré (m^2)
  $1\,m^2$ est la superficie d'un carré de 1 m de côté.
- le volume mesuré en mètre cube (m^3)
  $1\,m^3$ est le volume d'un cube de 1 m de côté.
- la vitesse mesurée en mètre par seconde ($m\,s^{-1}$)
  $1\,m\,s^{-1}$ correspond à la distance de 1 m parcourue en 1 s
- la masse volumique mesurée en kilogramme par mètre cube ($kg\,m^{-3}$)
  $1\,kg\,m^{-3}$ correspond à un volume de $1\,m^3$ dont la masse est 1 kg.
- l'énergie mesurée en kilowatt-heure (kW h)
  1 kW h correspond à une puissance de 1 W utilisée pendant 1 h.
- le débit volumique mesuré en mètre cube par seconde ($m^3\,s^{-1}$)
  $1\,m^3\,s^{-1}$ correspond à un transfert de $1\,m^3$ de matière en 1 s.

Remarques importantes :

$1\,mm^3$ ne vaut pas un millième de $1\,m^3$. Ce n'est vrai que pour les unités simples !
Il est conseillé de faire les conversions avec des unités simples.
Par exemple, 1 m=1000 mm.
Ainsi $1\,m^3 = 1\,m \times 1\,m \times 1\,m = 1000\,mm \times 1000\,mm \times 1000\,mm = 1\,000\,000\,000\,mm^3$.
$1\,m^2 = 100\,dm^2$ ou encore $1\,km^2 = 1\,000\,000\,m^2$.
Par définition : un hectare — $1\,ha = 10\,000\,m^2$: un carré de 100 m de côté.
$1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1\,000\,000\,cm^3$.
Définition du litre : $1\,L = 1\,dm^3 = 1000\,cm^3$ ou encore $1\,m^3 = 1000\,L$
Il est utile de se souvenir que 1 h=60 min, que 1 min=60 s ou encore 1 h=3600 s.
Une année ordinaire dure 365 jours, une année bissextile 366 jours. Un jour dure 24 h.
Pour les masses : la tonne : 1 t=1000 kg
La notation $km\,h^{-1}$ peut aussi s'écrire km/h ce qui signifie kilomètre par heure.
$m\,s^{-1}$ peut s'écrire m/s ce qui signifie mètre par seconde.
De même $kg\,m^{-3}$ peut s'écrire kg/m^3.

Exemple d'usage des vitesses :
J'ai mis 37 min pour venir au collège ce matin à la vitesse moyenne de $58\,km\,h^{-1}$. Au retour je n'ai mis que 28 min. Quelle a été ma vitesse au retour et ma vitesse moyenne sur l'aller-retour ?

Quand on utilise une vitesse moyenne, on considère que le temps et la distance sont des grandeurs proportionnelles.

Distance	58 km	$\dfrac{37\,min \times 58\,km}{60\,min} \approx 37,767\,km$
Temps	1 h=60 min	37 min

La distance entre le collège est chez moi est d'environ 37,767 km.

Distance	37,767 km	$\dfrac{37,767\,km \times 60\,min}{28\,min} \approx 80,93\,km$
Temps	28 min	1 h=60 min

J'ai roulé à environ la vitesse de $81\,km\,h^{-1}$ au retour.

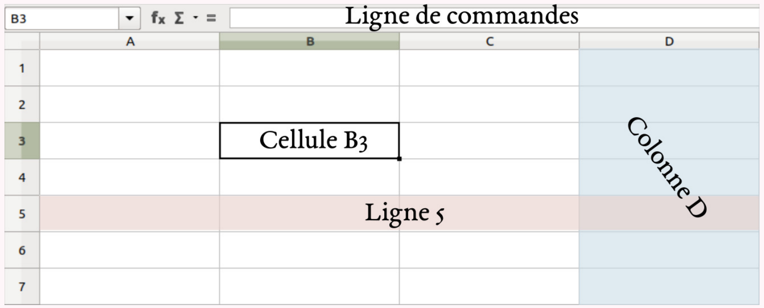
Distance	$2 \times 37,767\,km = 75,534\,km$	$\dfrac{75,534\,km \times 60\,min}{65\,min} \approx 69,72\,km$
Temps	28 min+37 min=65 min	1 h=60 min

J'ai roulé à environ la vitesse de $70\,km\,h^{-1}$ au retour.

Tableur

Description générale

Un **tableur** est logiciel capable de manipuler des **feuilles de calcul**. Une feuille de calcul est un tableau constitué de lignes numérotées par un nombre et de colonnes reperées par une lettre.



Une case d'une feuille de calcul s'appelle une **cellule**.
Une cellule est repérée par la lettre de la colonne et le nombre de la ligne.
Dans une case on peut saisir une information numérique ou textuelle.
On peut aussi saisir une formule de calul qu'il est possible de recopier dans d'autres cases. La ligne de commande permet de saisir des informations.

Les formules

Pour programmer une cellule d'une feuille de calcul, il faut saisir une formule qui permet par exemple de modéliser une fonction ou une expression littérale.

MOYENNE =5*B1-3

	A	B	C	D
1	*x*	*0*	*1*	*2*
2				
3	*5x-3*	=5*B1-3		
4				

Dans une feuille de calcul, une formule s'écrit en commençant par le symbole =.
Une formule s'exprime en utilisant les coordonnées de la cellule, par exemple B1.
Les opérations mathématiques peuvent être codées d'une manière différente :

- addition, soustraction : + et − ;
- multiplication : ∗ ;
- division : ;
- parenthèses : ( ) ;

Exemple :
On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre ;
- Ajouter 5 ;
- Mettre ce résultat au carré ;
- Enlever 16.

On note f la fonction qui a x un nombre de départ associe $f(x)$ le résultat final du programme.
Voici une feuille de calcul obtenue à partir de ce programme de calcul et la fonction f.
Analysons cette feuille de calcul :

E8 =E1^2+10*E1+9

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Étape n°1	2	3	4	5	6	7	8
3	Étape n°2	4	9	16	25	36	49	64
4	Étape n°3	-12	-7	0	9	20	33	48
5								
6	f(x)	-12	-7	0	9	20	33	48
7								
8	g(x)	-12	-7	0	9	20	33	48

Notons x le nombre de départ, à l'étape 1 on obtient $x+5$.
Dans la cellule B2 on a saisi la formule : $= \mathrm{B1}+5$.
À l'étape 2 on obtient $(x+5)^2$.
Dans la cellule B3 on a saisi la formule $= \mathrm{B2} * \mathrm{B2}$ ou $= \mathrm{B2}^2$.
À l'étape 3 on obtient $(x+5)^2-16$.
Dans la cellule B4 on a saisi la formule $= \mathrm{B3}-16$.

La fonction f s'exprime donc sous la forme $f(x) = (x+5)^2-16$
Dans la cellule B6 on a saisi la formule $= (\mathrm{B1}+5)^2-16$ ou $= (\mathrm{B1}+5)*(\mathrm{B1}+5)-16$

On remarque que dans la case E8 a été saisi $= \mathrm{E1}^2+10*\mathrm{E1}+9$
En effet si on développe $f(x) = (x+5)^2-16$
$f(x) = (x+5)(x+5)-16$
$f(x) = x^2+5x+5x+25-16$
$f(x) = x^2+10x+9$ cela correspond bien à la formule saisie en E8 !

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 23 juin 2024 à 16:22

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 23 juin 2024 à 16:22

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.