La leçon

I — Le théorème de Pythagore

Définition 2.1 : Vocabulaire du triangles rectangle

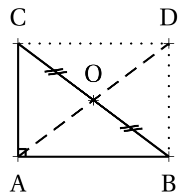
Un triangle ayant un angle droit est un **triangle rectangle** .
Les deux côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle sont les **côtés de l'angle droit** . Le côté restant est l'**hypoténuse** du triangle rectangle. C'est le **côté opposé** à l'angle droit.

Propriété 2.1 : Hypoténuse Admise

Si un triangle est rectangle **alors** son plus grand côté est l'hypoténuse. [1]

Démonstration :

Montrons que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus long côté.
Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse [BC].
On place D le symétrique du point A par rapport au point O.



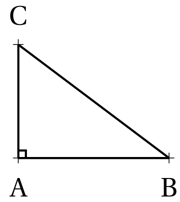
Les diagonales du quadrilatère ABDC se coupent en leur milieu O donc ABCD est un parallélogramme.
De plus ABDC est un parallélogramme ayant un angle droit, il s'agit donc d'un rectangle.
On sait que dans un rectangle les diagonales ont la même longueur, elles ont le même milieu O.
Ainsi OA = OB = OC = OD

Dans le triangle OBA l'inégalité triangulaire affirme que $AB \leqslant AO + OB$ or $AO = OC$ d'où $AB \leqslant OB + OC$. Comme $OB + OC = BC$ on a $AB \leqslant BC$
De même dans le triangle OCA on prouve que $AC \leqslant BC$.
Le segment [BC] est bien le plus grand côté du triangle ABC rectangle en A

CQFD

Théorème 2.1 : Le théorème de Pythagore Admis

Si un triangle est rectangle **alors** la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.

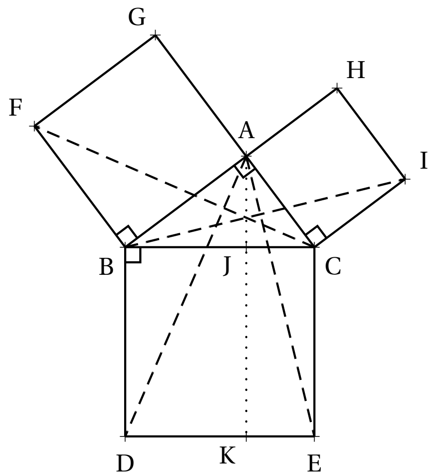


Si ABC est un triangle rectangle en A **alors** $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (**Égalité de Pythagore**)

Démonstration :

Les carrés dans l'égalité de Pythagore correspondent aux aires des carrés construits sur les côtés du triangle rectangle. Les démonstrations proposées ici visent donc à montrer que la somme des aires des deux petits carrés est égale à l'aire du plus grand.

Voici la démonstration que l'on trouve dans les Éléments d'Euclide.



Dans le triangle ABD, l'angle $\widehat{DBA} = 90° + \widehat{CBA}$.
Dans le triangle BCF, l'angle $\widehat{CBF} = 90° + \widehat{CBA}$.
Ainsi $\widehat{DBA} = \widehat{CBF}$. De plus FB = AB et BC = BD.
Les triangles CBF et ABD ont deux angles égaux dont les côtés ont la même longueur. Les triangles ABD et CBF sont donc superposables.
On arrive enfin à $Aire(ABD) = Aire(CBF)$.

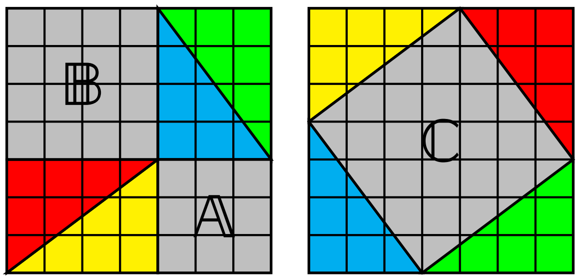
Par le même raisonnement au fait que les triangles BCI et ACE sont aussi superposables.
De même $Aire(BCI) = Aire(ACE)$

Le triangle FBC a pour base le segment [FB] et sa hauteur mesure la longueur AB puisque ABFG est un carré.
Ainsi l'aire du triangle FBC vaut $FB \times AB \div 2$ soit la moitié de l'aire du carré ABFG.
Par le même raisonnement on prouve que l'aire du triangle BCI vaut la moitié de l'aire du carré ACIH

Le triangle ABD a pour base le segment [BD] et sa hauteur mesure la longueur BJ puisque BDKJ est un rectangle.
Ainsi l'aire du triangle ABD vaut la moitié de celle du rectangle BDKJ.
De même l'aire du triangle ACE vaut la moitié de celle du rectangle CEKJ.

Finalement l'aire du carré ABFG vaut le double de celle du triangle FBC donc le double de celle du triangle ABD soit l'aire du rectangle BDKJ.
De même l'aire du carré ACIH est égale à celle du rectangle CEKJ.
On arrive enfin au fait que la somme des aires des petits carrés est égale à l'aire du plus grand.

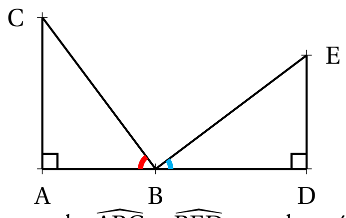
Démonstration par soustraction d'aires égales



On constate l'égalité suivante entre les aires :

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

Pour justifier la construction il peut être utile de faire la remarque suivante :



Les triangles rectangles ABC et BDE sont superposables. Les angles $\widehat{\text{ABC}}$ et $\widehat{\text{BED}}$ sont donc égaux, il en est de même des angles $\widehat{\text{ACB}}$ et $\widehat{\text{EBD}}$.
On sait que dans un triangle rectangles, les angles aigus sont complémentaires, c'est-à-dire que $\widehat{\text{ABC}} + \widehat{\text{ACB}} = 90°$.
On en déduit que $\widehat{\text{ABC}} + \widehat{\text{DBE}} = 90°$. Comme $\widehat{\text{ABD}}$ est plat, on arrive au fait que $\widehat{\text{CBE}}$ est droit.
Cela justifie le fait que l'existence du carré de le seconde figure !

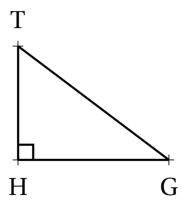
Démonstration de Périgal en 1917
Voir en annexe !

CQFD

Remarque :
$7^2 = \underbrace{7 \times 7}_{\text{2 fois}} = 49$. À ne pas confondre avec $7 \times 2 = \underbrace{7 + 7}_{\text{2 fois}} = 14$

II — Application du théorème de Pythagore et racine carrée

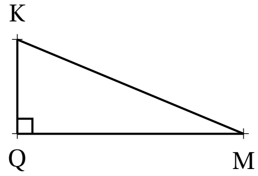
Calcul de l'hypoténuse connaissant les deux côtés de l'angle droit :
On étudie le triangle GHT rectangle en H tel que HG = 4 cm et HT = 3 cm. On trace ce triangle et on constate en mesurant que GT ≈ 5 cm



Dans le triangle GHT rectangle en H, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{HG}^2 + \text{HT}^2 = \text{GT}^2$$
$$4^2 + 3^2 = \text{GT}^2$$
$$\text{GT}^2 = 16 + 9$$
$$\text{GT}^2 = 25$$

GT est donc un nombre dont le carré est 25, GT = 5 car $5^2 = 25$
L'hypoténuse [GT] mesure 5 cm.[2]
Calcul d'un côté de l'angle droit connaissant l'hypoténuse et un autre côté :
On étudie le triangle QMK rectangle en Q tel que QM = 12 cm et MK = 13 cm. On mesure et on constate que QK ≈ 5 cm.



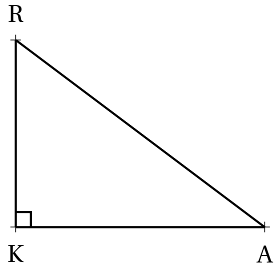
Dans le triangle QMK rectangle en Q, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$QM^2 + QK^2 = MK^2$$
$$12^2 + QK^2 = 13^2$$
$$144 + QK^2 = 169$$
$$QK^2 = 169 - 144$$
$$QK^2 = 25$$

QK est donc un nombre dont le carré est 25, $QK = 5$

Calcul d'un côté dont la mesure au carré ne soit pas un carré parfait :

On étudie le triangle RAK rectangle en K tel que $KR = 4,95\ cm$ et $KA = 6,6\ cm$. Calculons la mesure du côté [AR].



Dans le triangle RAK rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KA^2 + KR^2 = AR^2$$
$$6,6^2 + 4,95^2 = AR^2$$
$$AR^2 = 43,56 + 24,5025$$
$$AR^2 = 68,0625$$

On ne connait pas immédiatement un nombre dont le carré vaut exactement $68,0625$.
Notons x ce nombre.
Comme $8^2 = 64 < 68,0625 < 81 = 9^2$ on en déduit que $8 < x < 9$.[3]
En utilisant la calculatrice on trouve que $8,2^2 = 67,24 < 68,0625 < 68,89 = 8,3^2$ et donc que $8,2 < x < 8,3$.
On constate alors que $8,25^2 = 68,0625$.
Finalement $AR = 8,25\ cm$.

Propriété 2.2 : La racine carrée — Admise

Pour tout nombre positif a, il existe un unique nombre positif dont le carré vaut exactement le nombre a.
Ce nombre s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$.
Par définition $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

Exemples :

$\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.
$\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$.
La plupart des racines carrées ne sont pas des nombres décimaux, ni même des nombres rationnels.
$\sqrt{2} \approx 1,41421$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

Méthode 2.1 : Calculer la mesure du côté d'un triangle rectangle

Pour utiliser le théorème de Pythagore il faut connaître la mesure de deux côtés et vouloir calculer la mesure du troisième.

- Nommer le triangle rectangle et bien repérer l'angle droit;
- invoquer le théorème de Pythagore et écrire l'égalité en veillant à l'angle droit;
- si on cherche la mesure de l'hypoténuse, on effectue la somme des carrés des deux autres côtés;
- si on cherche la mesure d'un autre côté, on fait la différence du carré de l'hypoténuse et de l'autre côté;
- une fois le carré obtenu il suffit de calculer la racine carrée pour obtenir la mesure.

III — La réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 2.2 : Contraposée du théorème de Pythagore *(Admis)*

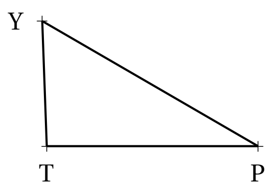
Si dans un triangle l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée **alors** ce triangle n'est pas rectangle.

Démonstration :

C'est une conséquence de la logique des propositions.
Prenons un exemple simple :
Propriété : Si nous sommes le 25 décembre alors je ne vais pas à l'école.
La propriété contraposée est : Si je vais à l'école alors nous ne sommes pas le 25 décembre.
On comprend que quand une propriété est vraie alors la propriété contraposée est également vraie.
Dans le cas du théorème de Pythagore, si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle car s'il était rectangle l'égalité serait vérifiée !

CQFD

Exemple :
Un triangle TYP est tel que $TY = 33\ mm$, $TP = 56\ mm$ et $YP = 66\ mm$
En dessinant ce triangle, il semble rectangle.



Vérifions : comparons $TY^2 + TP^2$ et YP^2

$TY^2 + TP^2 = 33^2 + 56^2$
$TY^2 + TP^2 = 1\,089 + 3\,136$
$TY^2 + TP^2 = 4\,225$

$YP^2 = 66^2$
$YP^2 = 4\,356$

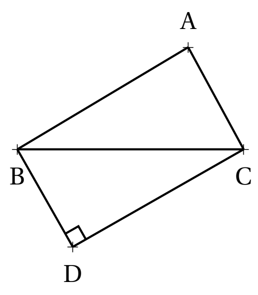
Ainsi $TY^2 + TP^2 \neq YP^2$
D'après **le théorème contraposé de Pythagore**, le triangle TYP n'est pas rectangle.

Théorème 2.3 : Réciproque du théorème de Pythagore *(Admis)*

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore est vérifiée **alors** ce triangle est rectangle.

Démonstration :

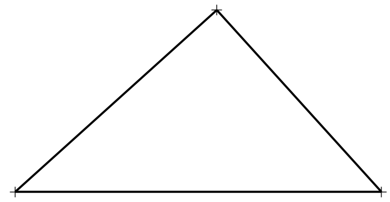
aCe théorème, contrairement au théorème contraposé, demande une démonstration.
Soit ABC un triangle à priori quelconque vérifiant l'égalité de Pythagore, par exemple $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ce qui suppose que BC est le plus long côté.



Plaçons de l'autre côté du segment [BC] un point D tel que BCD soit rectangle en D et BD = AC. (Cela revient à tracer un triangle rectangle connaissant la mesure de l'hypoténuse et un côté de l'angle droit).
Comme BCD est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a :
$DB^2 + DC^2 = BC^2$
Or $BD = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'où $AC^2 + DC^2 = AB^2 + AC^2$ c'est-à-dire $DC^2 = AB^2$ donc $DC = AB$ (ce sont des longueurs !).
Le quadrilatère ABDC a donc ses côtés opposés AB et DC de même longueur, ainsi que les côtés opposés BD et AC
On sait que **Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.**
On en déduit que ABDC est un parallélogramme.
De plus ce parallélogramme a un angle droit en D.
On sait que **Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle**.
Finalement ABDC est un rectangle, ce qui prouve que ABC est un triangle rectangle en A.

CQFD

Exemple :
POI un triangle tel que : $PO = 97\ mm$, $PI = 72\ mm$ et $OI = 65\ mm$.



Ce triangle est-il rectangle ?

Comme PO est le plus long côté, comparons PO^2 et $IP^2 + IO^2$

$$PO^2 = 97^2$$
$$PO^2 = 9\,409$$

$$IP^2 + IO^2 = 72^2 + 65^2$$
$$IP^2 + IO^2 = 5\,184 + 4\,225$$
$$IP^2 + IO^2 = 9\,409$$

Ainsi $IP^2 + IO^2 = PO^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle POI est rectangle en P.

Méthode 2 . 2 : Déterminer si un triangle est rectangle
Étant données les trois mesures des côtés d'un triangle :

— Déterminer le plus grand côté (il est candidat pour être l'hypoténuse);
— calculer le carré de la mesure du plus grand côté;
— calculer la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés;
— vérifier si les deux calculs précédents sont égaux ou non :
  — si les deux calculs sont exactement égaux, l'**égalité de Pythagore** est vérifiée, la réciproque du théorème de Pythagore affirme que le triangle est rectangle;
  — si les deux calculs ne sont pas égaux, l'**égalité de Pythagore** n'est pas vérifiée, la contraposée du théorème de Pythagore affirme que le triangle n'est pas rectangle.

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 29 septembre 2025 à 6:10

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Plucky Puffin (macareux courageux) 25.04 avec la distribution TeX Live 2024.20250309 et LuaHBTex 1.18.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerai beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
Mes pdf ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page, et verticalement sur mes corrections de brevet qui sont très pillés, afin de permettre à tous d'utiliser les documents tels quels.
Les QRCodes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe pas vers une page de mon blog ni sur une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, , a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 29 septembre 2025 à 6:10.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : .