Remarques et intentions pédagogiques

1 Activité — Chiffre de César

En cours de rédaction

2 Activité — Moins c'est rouge et plus c'est noir !

En cours de rédaction

[1] Il aurait été plus judicieux d'utiliser un autre symbole que $-$ pour désigner l'opposé d'un nombre, par exemple $opp(a)$ ce qui aurait pour mérite d'éviter la confusion quand on aborde la soustraction

[2] C'est une des constructions possibles de cet ensemble.

[3] On suppose sans le dire que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe ordonné.

[4] L'idée est de prolonger la somme des nombres positifs aux nombres relatifs. Cette prolongation doit respecter les propriétés usuelles de l'addition dont la commutativité

[5] Une démonstration dans le cas général demande d'utiliser la notation $opp(a)$ pour l'opposé de a un nombre relatif et éviter la confusion avec la soustraction.
a et b deux relatifs, $S = a + b$
$S + opp(a) + opp(b) = a + b + opp(a) + opp(b) = 0$ donc $opp(a) + opp(b)$ est l'opposé de $a + b$ c'est-à-dire $opp(a + b) = opp(a) + opp(b)$

- Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ on a la somme habituelle ;
- Si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ alors $opp(a) \geqslant 0$ et $opp(b) \geqslant 0$ ainsi $opp(a) + opp(b) = opp(a + b) > O$ Ainsi $a + b \leqslant 0$ et sa distance à zéro est la même que celle de $opp(a) + opp(b)$
- Si $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $S = a + b$ donc $S + opp(a) = a + b + opp(a)$ ainsi $S + opp(a) = b$
  - si $b \geqslant opp(a)$ alors S est la différence entre b et $opp(a)$, $S = b - opp(a) \geqslant 0$
  - si $b \leqslant opp(a)$ On a $S + opp(a) = b$ donc $opp(S + opp(a)) = opp(b)$ et $opp(S) + a = opp(b)$ Comme $b \leqslant opp(a)$ on a $opp(b) \geqslant a$ Ainsi $opp(S)$ est la différence entre $opp(b)$ et a, $opp(S) = opp(b) - a \geqslant 0$. Finalement S est négatif.

[6] Une démonstration dans le cas général demanderait pour plus de clarté de noter l'opposé d'un nombre relatif a sous la forme $opp(a)$ par exemple, pour éviter la confusion entre les symboles.
Dans ce cas on obtiendrait pour a et b deux relatifs, $D = a - b$ donc D vérifie $D + b = a$ (par définition étendue de la différence de deux nombres).
Comme $D + b = a$ on arrive à $D + b + opp(b) = a + opp(b)$ et finalement $D = a + opp(b)$

[7] On définit la soustraction comme nombre répondant à la question des « additions à trous ». Dans une théorie plus axiomatique des opérations dans $\mathbb{Z}$, la soustraction n'est pas une opération en tant que telle, elle est définit comme somme de l'opposé.

[8] J'aime à dire à ce moment-là que nous venons de faire disparaître la soustraction. Plus précisément, nous avions quatre opérations fondamentales sur les nombres avant ce chapitre et il n'en reste maintenant plus que trois ! La soustraction n'est qu'une addition particulière. Ce sera bientôt le tour de la division. Cette manière de penser tient à la structure de groupe additif de $\mathbb{Z}$ et celle de corps pour $\mathbb{R}$.

[9] C'est une règle usuelle mais qui peut présenter une difficulté didactique. Cela n'a en effet aucun lien avec la multiplication des nombres relatifs et cela peut contribuer à créer de la confusion entre l'addition et la multiplication des nombres relatifs. Il est nécessaire de bien distinguer à l'oral ces deux notions.
Ainsi « $--5$ devient $+5$ »est une phrase à proscrire. Il est raisonnable de dire « $--5$ revient à soustraire l'opposé de 5 c'est-à-dire ajouter 5 ce qu'on écrit $+5$ »

[10] On souhaite que le produit de deux nombres relatifs ait les mêmes propriétés que le produit habituel sur les nombres décimaux positifs. En particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
Une démonstration dans le cas général est hors de portée du collège.
a et b deux nombres relatifs.
$a \times \big(b + opp(b)\big) = a \times 0 = 0$ en distribuant $a \times b + a \times opp(b) = 0$
Ainsi $a \times b$ est l'opposé de $a \times opp(b)$, ces deux nombres sont donc de signe contraire et $opp(ab) = a \times opp(b)$
En échangeant le rôle de a et b et en invoquant la commutativité de la multiplication on arrive ainsi à :
$opp(a \times b) = a \times opp(b) = b \times opp(a)$.

Développons $\big(a + opp(a)\big)\big(b + opp(b)\big) = 0$
$a \times b + a \times opp(b) + b \times opp(a) + opp(a) \times opp(b) = 0$
Comme $a \times opp(b) = b \times opp(a) = opp(a \times b)$
$a \times b + opp(a \times b) + opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$
$opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$ ce qui signifie que $opp(a) \times opp(b)$ est l'opposé de $opp(a \times b)$
C'est-à-dire $opp(a) \times opp(b) = a \times b$.

Par disjonction de cas sur les signes respectifs de a et b on obtient la propriété précédente.

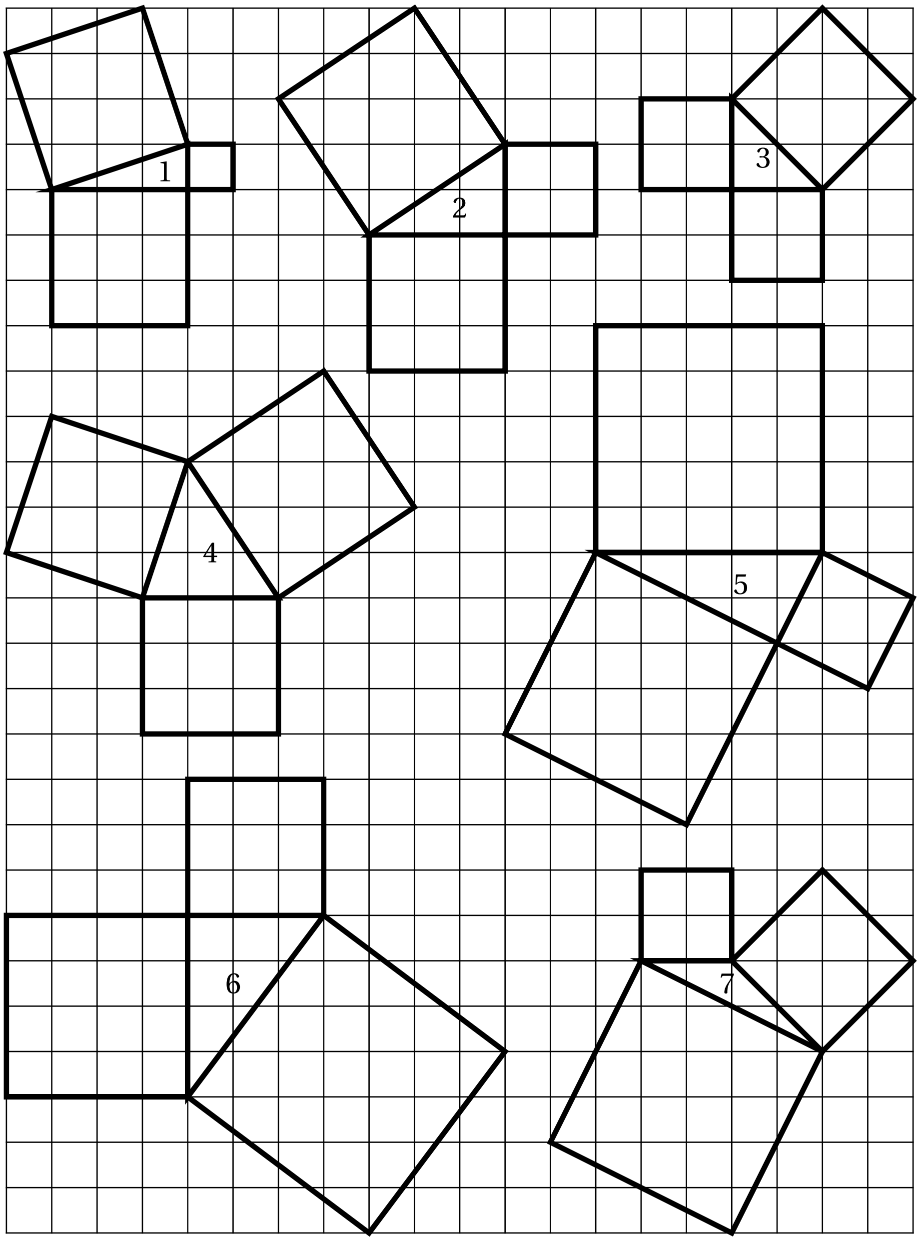
[11] On se gardera bien à l'oral de dire que « $-$ par $+$ égal $-$ »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »

Chapitre II

Le théorème de Pythagore et sa réciproque

Sommaire

Situation initiale : Aire et quadrillage



Compléter le tableau suivant. L'unité de mesure des aires est le carreau.

Figure	Aire du petit carré	Aire du Carré moyen	Aire du grand carré
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

I — Le théorème de Pythagore

Définition 2.1 : Vocabulaire du triangles rectangle

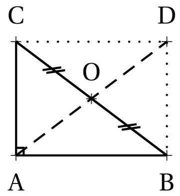
Un triangle ayant un angle droit est un **triangle rectangle** .
Les deux côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle sont les **côtés de l'angle droit** . Le côté restant est l'**hypoténuse** du triangle rectangle. C'est le **côté opposé** à l'angle droit.

Propriété 2.1 : Hypoténuse — Admise

Si un triangle est rectangle **alors** son plus grand côté est l'hypoténuse. [1]

Démonstration :

Montrons que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus long côté.
Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse [BC].
On place D le symétrique du point A par rapport au point O.



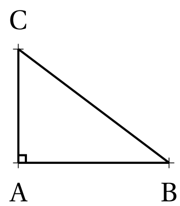
Les diagonales du quadrilatère ABDC se coupent en leur milieu O donc ABCD est un parallélogramme.
De plus ABDC est un parallélogramme ayant un angle droit, il s'agit donc d'un rectangle.
On sait que dans un rectangle les diagonales ont la même longueur, elles ont le même milieu O.
Ainsi $OA = OB = OC = OD$

Dans le triangle OBA l'inégalité triangulaire affirme que $AB \leqslant AO + OB$ or $AO = OC$ d'où $AB \leqslant OB + OC$. Comme $OB + OC = BC$ on a $AB \leqslant BC$
De même dans le triangle OCA on prouve que $AC \leqslant BC$.
Le segment [BC] est bien le plus grand côté du triangle ABC rectangle en A

CQFD

Théorème 2.1 : Le théorème de Pythagore — Admis

Si un triangle est rectangle **alors** la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.

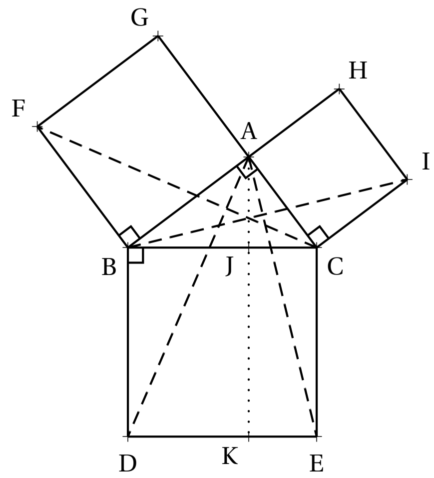


Si ABC est un triangle rectangle en A **alors** $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (**Égalité de Pythagore**)

Démonstration :

Les carrés dans l'égalité de Pythagore correspondent aux aires des carrés construits sur les côtés du triangle rectangle. Les démonstrations proposées ici visent donc à montrer que la somme des aires des deux petits carrés est égale à l'aire du plus grand.

Voici la démonstration que l'on trouve dans les Éléments d'Euclide.



Dans le triangle ABD, l'angle $\widehat{\text{DBA}} = 90° + \widehat{\text{CBA}}$.
Dans le triangle BCF, l'angle $\widehat{\text{CBF}} = 90° + \widehat{\text{CBA}}$.
Ainsi $\widehat{\text{DBA}} = \widehat{\text{CBF}}$. De plus FB = AB et BC = BD.
Les triangles CBF et ABD ont deux angles égaux dont les côtés ont la même longueur. Les triangles ABD et CBF sont donc superposables.
On arrive enfin à $Aire(\text{ABD}) = Aire(\text{CBF})$.

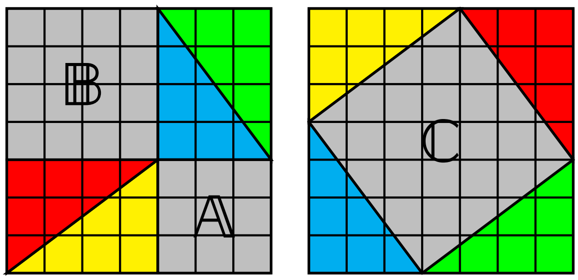
Par le même raisonnement au fait que les triangles BCI et ACE sont aussi superposables.
De même $Aire(\text{BCI}) = Aire(\text{ACE})$

Le triangle FBC a pour base le segment [FB] et sa hauteur mesure la longueur AB puisque ABFG est un carré.
Ainsi l'aire du triangle FBC vaut FB × AB ÷ 2 soit la moitié de l'aire du carré ABFG.
Par le même raisonnement on prouve que l'aire du triangle BCI vaut la moitié de l'aire du carré ACIH

Le triangle ABD a pour base le segment [BD] et sa hauteur mesure la longueur BJ puisque BDKJ est un rectangle.
Ainsi l'aire du triangle ABD vaut la moitié de celle du rectangle BDKJ.
De même l'aire du triangle ACE vaut la moitié de celle du rectangle CEKJ.

Finalement l'aire du carré ABFG vaut le double de celle du triangle FBC donc le double de celle du triangle ABD soit l'aire du rectangle BDKJ.
De même l'aire du carré ACIH est égale à celle du rectangle CEKJ.
On arrive enfin au fait que la somme des aires des petits carrés est égale à l'aire du plus grand.

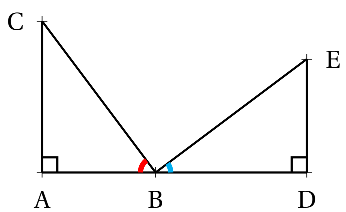
Démonstration par soustraction d'aires égales



On constate l'égalité suivante entre les aires :

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

Pour justifier la construction il peut être utile de faire la remarque suivante :



Les triangles rectangles ABC et BDE sont superposables. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BED}$ sont donc égaux, il en est de même des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EBD}$.
On sait que dans un triangle rectangles, les angles aigus sont complémentaires, c'est-à-dire que $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90°$.
On en déduit que $\widehat{ABC}+\widehat{DBE}=90°$. Comme $\widehat{ABD}$ est plat, on arrive au fait que $\widehat{CBE}$ est droit.
Cela justifie le fait que l'existence du carré de le seconde figure !

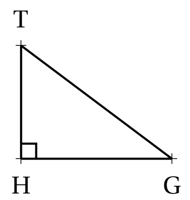
Démonstration de Périgal en 1917
Voir en annexe !

CQFD

Remarque :
$7^2 = \underbrace{7\times 7}_{2 \text{ fois}} = 49$. À ne pas confondre avec $7\times 2 = \underbrace{7+7}_{2 \text{ fois}} = 14$

II — Application du théorème de Pythagore et racine carrée

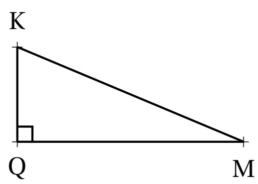
Calcul de l'hypoténuse connaissant les deux côtés de l'angle droit :
On étudie le triangle GHT rectangle en H tel que HG = 4 cm et HT = 3 cm. On trace ce triangle et on constate en mesurant que GT ≈ 5 cm



Dans le triangle GHT rectangle en H, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HG^2 + HT^2 = GT^2$$
$$4^2 + 3^2 = GT^2$$
$$GT^2 = 16 + 9$$
$$GT^2 = 25$$

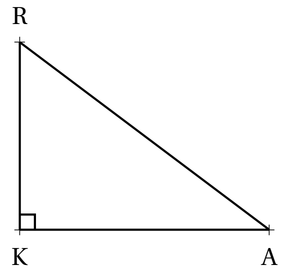
GT est donc un nombre dont le carré est 25, GT = 5 car $5^2 = 25$
L'hypoténuse [GT] mesure 5 cm.[2]
Calcul d'un côté de l'angle droit connaissant l'hypoténuse et un autre côté :
On étudie le triangle QMK rectangle en Q tel que QM = 12 cm et MK = 13 cm. On mesure et on constate que QK ≈ 5 cm.



Dans le triangle QMK rectangle en Q, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$QM^2 + QK^2 = MK^2$$
$$12^2 + QK^2 = 13^2$$
$$144 + QK^2 = 169$$
$$QK^2 = 169 - 144$$
$$QK^2 = 25$$

QK est donc un nombre dont le carré est 25, QK = 5
Calcul d'un côté dont la mesure au carré ne soit pas un carré parfait :
On étudie le triangle RAK rectangle en K tel que KR = 4,95 cm et KA = 6,6 cm. Calculons la mesure du côté [AR].



Dans le triangle RAK rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$KA^2 + KR^2 = AR^2$$

$$6,6^2 + 4,95^2 = AR^2$$

$$AR^2 = 43,56 + 24,5025$$

$$AR^2 = 68,0625$$

On ne connait pas immédiatement un nombre dont le carré vaut exactement 68, 0625.
Notons x ce nombre.
Comme $8^2 = 64 < 68,0625 < 81 = 9^2$ on en déduit que $8 < x < 9$.[3]
En utilisant la calculatrice on trouve que $8,2^2 = 67,24 < 68,0625 < 68,89 = 8,3^2$ et donc que $8,2 < x < 8,3$.
On constate alors que $8,25^2 = 68,0625$.
Finalement $AR = 8,25\ cm$.

Propriété 2.2 : La racine carrée — Admise

Pour tout nombre positif a, il existe un unique nombre positif dont le carré vaut exactement le nombre a.
Ce nombre s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$.
Par définition $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

Exemples :

$\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.
$\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$.
La plupart des racines carrées ne sont pas des nombres décimaux, ni même des nombres rationnels.
$\sqrt{2} \approx 1,41421$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

Méthode 2 . 1 : Calculer la mesure du côté d'un triangle rectangle
Pour utiliser le théorème de Pythagore il faut connaître la mesure de deux côtés et vouloir calculer la mesure du troisième.

— Nommer le triangle rectangle et bien repérer l'angle droit;
— invoquer le théorème de Pythagore et écrire l'égalité en veillant à l'angle droit;
— si on cherche la mesure de l'hypoténuse, on effectue la somme des carrés des deux autres côtés;
— si on cherche la mesure d'un autre côté, on fait la différence du carré de l'hypoténuse et de l'autre côté;
— une fois le carré obtenu il suffit de calculer la racine carrée pour obtenir la mesure.

III — La réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 2.2 : Contraposée du théorème de Pythagore — *(Admis)*

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée **alors** ce triangle n'est pas rectangle.

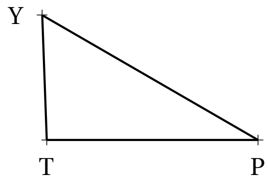
Démonstration :

C'est une conséquence de la logique des propositions.
Prenons un exemple simple :

Propriété : Si nous sommes le 25 décembre alors je ne vais pas à l'école.
La propriété contraposée est : Si je vais à l'école alors nous ne sommes pas le 25 décembre.
On comprend que quand une propriété est vraie alors la propriété contraposée est également vraie.
Dans le cas du théorème de Pythagore, si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle car s'il était rectangle l'égalité serait vérifiée !

CQFD

Exemple :
Un triangle TYP est tel que $TY = 33\ mm$, $TP = 56\ mm$ et $YP = 66\ mm$
En dessinant ce triangle, il semble rectangle.



Vérifions : comparons $TY^2 + TP^2$ et YP^2

$TY^2 + TP^2 = 33^2 + 56^2$
$TY^2 + TP^2 = 1\,089 + 3\,136$
$TY^2 + TP^2 = 4\,225$

$YP^2 = 66^2$
$YP^2 = 4\,356$

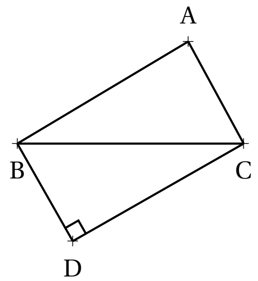
Ainsi $TY^2 + TP^2 \neq YP^2$
D'après **le théorème contraposé de Pythagore**, le triangle TYP n'est pas rectangle.

Théorème 2.3 : Réciproque du théorème de Pythagore *(Admis)*

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore est vérifiée **alors** ce triangle est rectangle.

Démonstration :

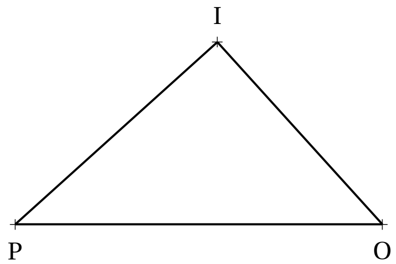
aCe théorème, contrairement au théorème contraposé, demande une démonstration.
Soit ABC un triangle à priori quelconque vérifiant l'égalité de Pythagore, par exemple $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ce qui suppose que BC est le plus long côté.



Plaçons de l'autre côté du segment [BC] un point D tel que BCD soit rectangle en D et $BD = AC$. (Cela revient à tracer un triangle rectangle connaissant la mesure de l'hypoténuse et un côté de l'angle droit).
Comme BCD est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a :
$DB^2 + DC^2 = BC^2$
Or $BD = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'où $AC^2 + DC^2 = AB^2 + AC^2$ c'est-à-dire $DC^2 = AB^2$ donc $DC = AB$ (ce sont des longueurs !).
Le quadrilatère ABDC a donc ses côtés opposés AB et DC de même longueur, ainsi que les côtés opposés BD et AC
On sait que **Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.**
On en déduit que ABDC est un parallélogramme.
De plus ce parallélogramme a un angle droit en D.
On sait que **Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle**.
Finalement ABDC est un rectangle, ce qui prouve que ABC est un triangle rectangle en A.

CQFD

Exemple :
POI un triangle tel que : $PO = 97\ mm$, $PI = 72\ mm$ et $OI = 65\ mm$.



Ce triangle est-il rectangle ?

Comme PO est le plus long côté, comparons PO^2 et $IP^2 + IO^2$

$$PO^2 = 97^2$$

$$PO^2 = 9\,409$$

$$IP^2 + IO^2 = 72^2 + 65^2$$

$$IP^2 + IO^2 = 5\,184 + 4\,225$$

$$IP^2 + IO^2 = 9\,409$$

Ainsi $IP^2 + IO^2 = PO^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle POI est rectangle en P.

MÉTHODE 2 . 2 : Déterminer si un triangle est rectangle

Étant données les trois mesures des côtés d'un triangle :

— Déterminer le plus grand côté (il est candidat pour être l'hypoténuse) ;

— calculer le carré de la mesure du plus grand côté ;

— calculer la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés ;

— vérifier si les deux calculs précédents sont égaux ou non :

  — si les deux calculs sont exactement égaux, l'**égalité de Pythagore** est vérifiée, la réciproque du théorème de Pythagore affirme que le triangle est rectangle ;

  — si les deux calculs ne sont pas égaux, l'**égalité de Pythagore** n'est pas vérifiée, la contraposée du théorème de Pythagore affirme que le triangle n'est pas rectangle.

Question du jour n° 1 : Mesurer et calculer le côté d'un triangle rectangle

Tracer le triangle RIZ rectangle en Z tel que ZR = 6 cm et ZI = 8 cm.
Mesurer la longueur du segment RI puis calculer la longueur exacte de RI.

Question du jour n° 2 : Mesurer et calculer le côté d'un triangle rectangle – Épisode 2

Tracer le triangle GLU rectangle en U tel que UR = 4,5 cm et GL = 7,5 cm.
Mesurer la longueur du segment UL puis calculer la longueur exacte de UL.

Question du jour n° 3 : Mesurer et calculer le côté d'un triangle rectangle – Épisode 3

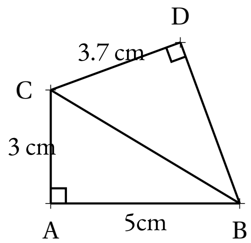
Tracer le triangle AHU rectangle en A tel que AH = 28 mm et AU = 45 mm.
Mesurer la longueur du segment HU puis calculer la longueur exacte de HU.

Question du jour n° 4 : Mesurer et calculer le côté d'un triangle rectangle – Épisode 4

Tracer le triangle KAT rectangle en T tel que TK = 3,3 cm et KA = 6,5 cm.
Mesurer la longueur du segment AT puis calculer la longueur exacte de AT.

Question du jour n° 5 : Deux à la suite

En tenant compte des codages et des longueurs indiquées, calculer la valeur exacte puis la valeur approchée au millimètre près de la longueur BD.



Question du jour n° 6 : Rectangle ou pas ?

Tracer le triangle ZOE tel que ZO = 48 mm, ZE = 55 mm et OE = 73 mm. ZOE est-il rectangle ?

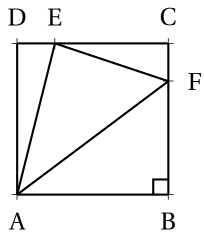
Question du jour n° 7 : Rectangle ou pas ? – Épisode 2

Tracer le triangle KAE tel que KE = 36 mm, KA = 77 mm et AE = 84 mm. KAE est-il rectangle ?

Question du jour n° 8 : Rectangle ou pas ? – Épisode 3

Le carré ABCD a des côtés de 4 cm.
E ∈ [CD] tel que CE = 3 cm
F ∈ [BC] tel que BF = 3 cm

Le triangle AEF est-il rectangle ?



❈ Exercices ❈

Exercice n° 1 : Théorème de Pythagore en mesurant — Épisode 1

☆

Tracer le triangle JHG rectangle en J tel que $\text{JH} = 2,8\ cm$ et $\text{JG} = 4,5\ cm$
Mesurer puis calculer la longueur HG.

Exercice n° 2 : Théorème de Pythagore en mesurant – Épisode 2

☆

Tracer le triangle POL rectangle en P tel que $\text{OL} = 65\ mm$ et $\text{PO} = 33\ mm$
Mesurer puis calculer la longueur LP.

Exercice n° 3 : Théorème de Pythagore sans mesurer — Épisode 1

☆ ☆

Le triangle PHA rectangle en H est tel que $\text{HA} = 60\ km$ et $\text{HP} = 63\ km$.
Tracer un croquis puis calculer la longueur PA.

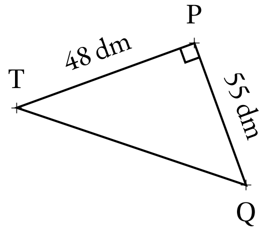
Exercice n° 4 : Théorème de Pythagore sans mesurer — Épisode 2

☆ ☆

Le triangle FAB rectangle en F est tel que $\text{FB} = 39\ m$ et $\text{AB} = 89\ m$.
Tracer un croquis puis calculer la longueur FA.

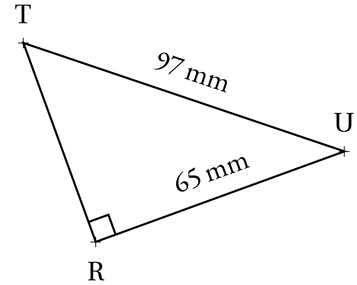
Exercice n° 5 : Théorème de Pythagore avec une figure — Épisode 1

☆ ☆



Le triangle PTQ rectangle en P

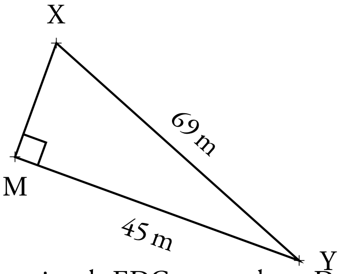
Calculer la valeur exacte de TQ.



Le triangle RUT rectangle en R

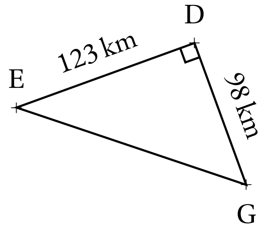
Calculer la valeur exacte de TR.

Exercice nº 6 : Théorème de Pythagore avec une figure — Épisode 2



Le triangle XMY rectangle en M

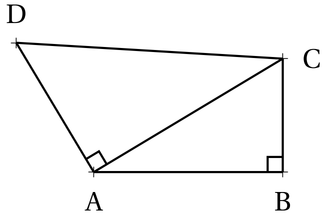
Calculer la valeur exacte de MX puis une valeur approchée au centième près.



Le triangle EDG rectangle en D

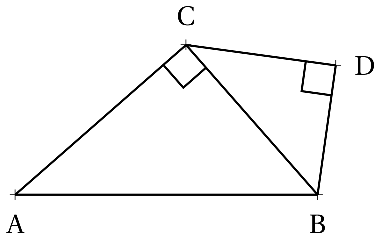
Calculer la valeur exacte de EG.

Exercice nº 7 : Théorème de Pythagore : deux à la suite — Épisode 1



Sur la figure ci-après,
AB = 5 cm, BC = 3 cm et AD = 4 cm.
Calculer la valeur exacte de DC puis donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice nº 8 : Théorème de Pythagore : deux à la suite – Épisode 2

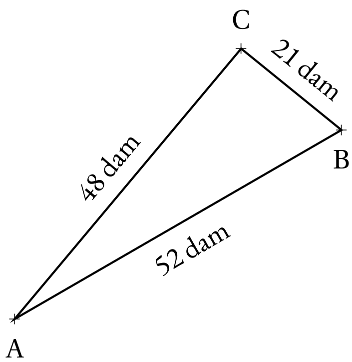


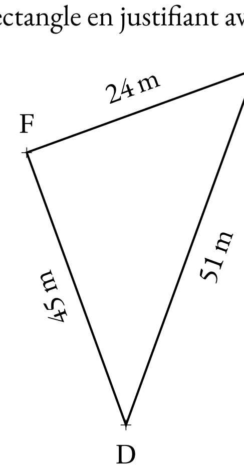
Sur la figure ci-après,
AB = 4 cm, AC = 3 cm et CD = 2 cm.

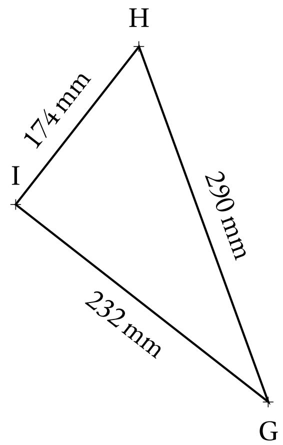
Calculer la valeur exacte de DB puis donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice nº 9 : Rectangle ou pas

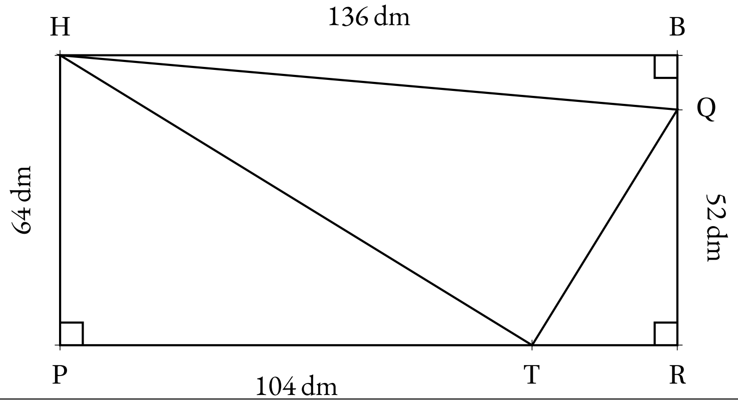
Pour chacune des figures suivantes, indiquer si le triangle est rectangle en justifiant avec soin votre raisonnement.







Exercice n° 10 : Un triangle rectangle dans dans un rectangle



La figure ci-contre n'est pas dessinée en vraie grandeur.

PRBH est un rectangle.

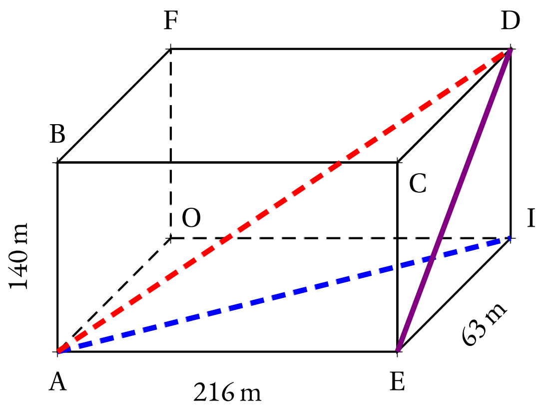
Le triangle HQT est-il rectangle ?

Exercice n° 11 : Un cric

Ce cric, pour changer la roue d'une voiture, a la forme d'un losange dont les côtés mesurent 21 cm de côté.

À quelle hauteur soulève-t-on la voiture quand la grande diagonale mesure 32 cm ?

Exercice n° 12 : La grande diagonale



AEIOBCDF est un pavé droit.

1. Calculer AI.

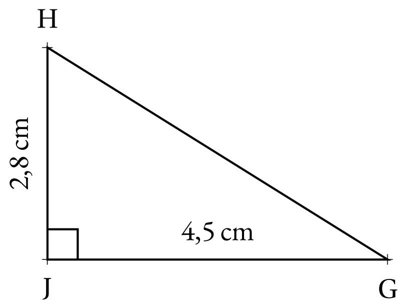
2. Calculer AD.

3. Le triangle AED est-il rectangle ?

À quelle hauteur soulève-t-on la voiture quand la grande diagonale mesure 32 cm ?

EXERCICE N° 1 : Théorème de Pythagore en mesurant — Épisode 1

CORRECTION



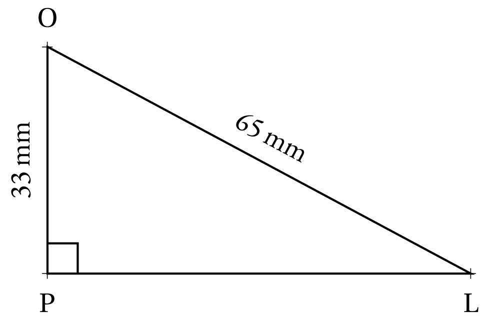
Dans le triangle JHG rectangle en J,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$JH^2 + JG^2 = HG^2$$
$$2,8^2 + 4,5^2 = HG^2$$
$$7,84 + 20,25 = HG^2$$
$$HG^2 = 28,09$$
$$HG = \sqrt{28,09}$$
$$HG = 5,3$$

Ainsi $\boxed{HG = 5,3\,\text{cm}}$

EXERCICE N° 2 : Théorème de Pythagore en mesurant — Épisode 2

CORRECTION



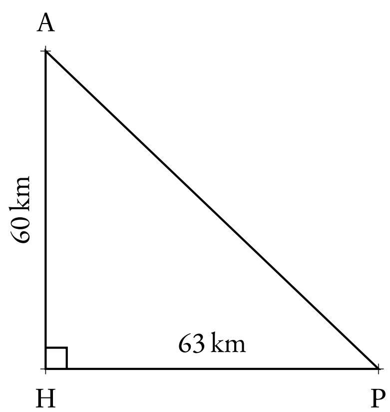
Dans le triangle POL rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PO^2 + PL^2 = OL^2$$
$$33^2 + PL^2 = 65^2$$
$$1089 + PL^2 = 4225$$
$$PL^2 = 4225 - 1089$$
$$PL^2 = 3136$$
$$PL = \sqrt{3136}$$
$$PL = 56$$

Ainsi $\boxed{PL = 56\,\text{mm}}$

EXERCICE N° 3 : Théorème de Pythagore sans mesurer — Épisode 1

CORRECTION



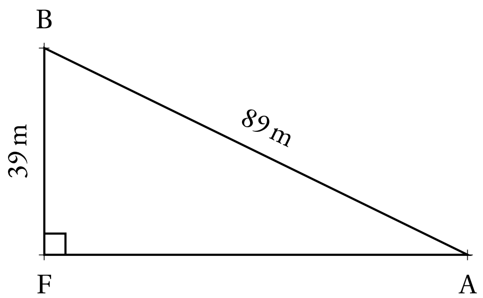
Dans le triangle HPA rectangle en H,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HP^2 + HA^2 = PA^2$$
$$63^2 + 60^2 = PA^2$$
$$3969 + 3600 = PA^2$$
$$PA^2 = 7569$$
$$PA = \sqrt{7569}$$
$$PA = 87$$

Ainsi $\boxed{PA = 87\,\text{km}}$

Exercice n° 4 : Théorème de Pythagore sans mesurer — Épisode 2

Correction



Dans le triangle BFA rectangle en F,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$FB^2 + FA^2 = BA^2$$
$$39^2 + FA^2 = 89^2$$
$$1521 + FA^2 = 7921$$
$$FA^2 = 7921 - 1521$$
$$FA^2 = 6400$$
$$FA = \sqrt{6400}$$
$$FA = 80$$

Ainsi $\boxed{FA = 80\,\text{m}}$

Exercice n° 5 : Théorème de Pythagore avec une figure — Épisode 1

Correction

Dans le triangle PTQ rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PT^2 + PQ^2 = TQ^2$$
$$48^2 + 55^2 = TQ^2$$
$$2304 + 3025 = TQ^2$$
$$TQ^2 = 5329$$
$$TQ = \sqrt{5329}$$
$$TQ = 73$$

$\boxed{TQ = 73\,\text{dm}}$

Dans le triangle TRU rectangle en R,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$RT^2 + RU^2 = TU^2$$
$$RT^2 + 65^2 = 97^2$$
$$RT^2 + 4225 = 9409$$
$$RT^2 = 9409 - 4225$$
$$RT^2 = 5184$$
$$RT = \sqrt{5184}$$
$$RT = 72$$

$\boxed{RT = 72\,\text{mm}}$

Exercice n° 6 : Théorème de Pythagore avec une figure — Épisode 2

Correction

Dans le triangle MXY rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$MX^2 + MY^2 = XY^2$$
$$MX^2 + 45^2 = 69^2$$
$$MX^2 + 2025 = 4761$$
$$MX^2 = 4761 - 2025$$
$$MX^2 = 2736$$
$$MX = \sqrt{2736}$$
$$MX \approx 52{,}31$$

$\boxed{MX = \sqrt{2736}\ m \approx 52{,}31\,\text{m}}$

Dans le triangle EDG rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DE^2 + DG^2 = EG^2$$
$$123^2 + 98^2 = EG^2$$
$$15\,129 + 9604 = EG^2$$
$$EG^2 = 24\,733$$
$$EG = \sqrt{24\,733}$$
$$EG \approx 157{,}28$$

$\boxed{EG = \sqrt{24\,733}\ km \approx 157{,}28\,\text{km}}$

Exercice n° 7 : Théorème de Pythagore : deux à la suite — Épisode 1

Correction

Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$5^2 + 3^2 = AC^2$$
$$25 + 9 = AC^2$$
$$AC^2 = 34$$
$$AC = \sqrt{34}$$
$$AC \approx 5,83$$

$\boxed{AC = \sqrt{34}\ cm \approx 5{,}83\,\text{cm}}$

Dans le triangle CAD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AC^2 + AD^2 = CD^2$$
$$34 + 4^2 = CD^2$$
$$34 + 16 = CD^2$$
$$CD^2 = 50$$
$$CD = \sqrt{50}$$
$$CD \approx 7{,}07$$

$\boxed{CD = \sqrt{50}\ cm \approx 7{,}07\,\text{cm}}$

Exercice n° 8 : Théorème de Pythagore : deux à la suite — Épisode 1

Correction

Dans le triangle ACB rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CA^2 + CB^2 = AB^2$$
$$3^2 + CB^2 = 4^2$$
$$9 + CB^2 = 16$$
$$CB^2 = 16 - 9$$
$$CB^2 = 7$$
$$CB = \sqrt{7}$$
$$CB \approx 2,64$$

$\boxed{CB = \sqrt{7}\ cm \approx 2{,}64\,\text{cm}}$

Dans le triangle CDB rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DB^2 + DC^2 = BC^2$$
$$DB^2 + 2^2 = 7$$
$$DB^2 + 4 = 7$$
$$DB^2 = 7 - 4$$
$$DB^2 = 3$$
$$DB = \sqrt{3}$$
$$DB \approx 1,73$$

$\boxed{DB = \sqrt{3}\ cm \approx 1{,}73\,\text{cm}}$

Exercice n° 9 : Rectangle ou pas

Correction

Le triangle ABC **est-il rectangle ?**

Comparons $CA^2 + CB^2$ et AB^2 :

$CA^2 + CB^2$	AB^2
$48^2 + 21^2$	52^2
$2304 + 441$	
2745	2704

Comme $CA^2 + CB^2 \neq AB^2$,
D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle ABC n'est pas rectangle}}$.

Le triangle FED **est-il rectangle ?**

Comparons $FE^2 + FD^2$ et ED^2 :

$FE^2 + FD^2$	ED^2
$24^2 + 45^2$	51^2
$576 + 2025$	
2601	2601

Comme $FE^2 + FD^2 = ED^2$,
D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle FED est rectangle en F}}$.

Le triangle IHG **est-il rectangle ?**

Comparons $IH^2 + IG^2$ et HG^2 :

$IH^2 + IG^2$	HG^2
$174^2 + 232^2$	290^2
$20\,276 + 53\,824$	
$84\,100$	$84\,100$

Comme $IH^2 + IG^2 = HG^2$,
D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle IHG est rectangle en I}}$.

Dans le triangle HPT rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PH^2 + PT^2 = HT^2$$
$$64^2 + 104^2 = HT^2$$
$$4096 + 10\,816 = HT^2$$
$$HT^2 = 14\,912$$
$$HT = \sqrt{14\,912}$$
$$HT = \approx 122,11$$

Dans le triangle TRQ rectangle en R,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$RT^2 + RQ^2 = TQ^2$$
$$32^2 + 52^2 = TQ^2$$
$$1024 + 2704 = TQ^2$$
$$TQ^2 = 3728$$
$$TQ = \sqrt{3728}$$
$$TQ = \approx 61,06$$

Dans le triangle HBQ rectangle en B,

D’après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BH^2 + BQ^2 = HQ^2$$
$$136^2 + 12^2 = HQ^2$$
$$18\,496 + 144 = HQ^2$$
$$HQ^2 = 18\,640$$
$$HQ = \sqrt{18\,640}$$
$$HQ = \approx 136,53$$

Comparons $TH^2 + TQ^2$ et HQ^2 :

$TH^2 + TQ^2$	HQ^2
$14\,912 + 3728$	
$18\,640$	$18\,640$

Comme

$$TH^2 + TQ^2 = HQ^2$$

D’après **la réciproque du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle THQ est rectangle en T}}$.

Attention, en prenant, les valeurs approchées, on peut obtenir un résultat différent et faux !

$TH^2 + TQ^2 \approx 122,11^2 + 61,06^2 \approx 14\,910{,}85 + 3728{,}32 \approx 18\,639{,}17$
Et $HQ^2 \approx 136,53^2 \approx 18\,640{,}44$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

1. Tracer le triangle UYR rectangle en Y tel que UY = 28 mm et RY = 45 mm. Calculer UR.

---

2. Tracer le triangle MLO rectangle en O tel que ML = $8,9$ cm et OL = $3,9$ cm. Calculer MO.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

1. Tracer le triangle ZER rectangle en Z tel que ZE = 33 mm et ZR = 56 mm. Calculer ER.

---

2. Tracer le triangle PUT rectangle en P tel que UT = $9,7$ cm et PU = $7,2$ cm. Calculer PT.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

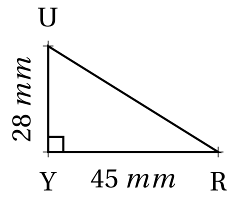
1. Tracer le triangle ATH rectangle en A tel que AT = 36 mm et AH = 77 mm. Calculer TH.

---

2. Tracer le triangle KWX rectangle en W tel que KX = $8,9$ cm et WX = 8 cm. Calculer KW.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

1. Tracer le triangle UYR rectangle en Y tel que UY = 28 mm et RY = 45 mm. Calculer UR.



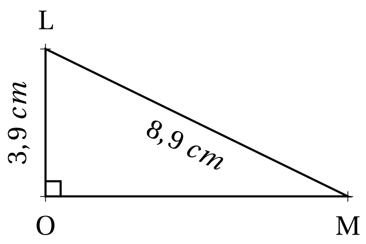
Dans le triangle YUR rectangle en Y,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$YU^2 + YR^2 = UR^2$$
$$28^2 + 45^2 = UR^2$$
$$784 + 2\,025 = UR^2$$
$$UR^2 = 2\,809$$
$$UR = \sqrt{2\,809}$$
$$UR = 53$$

$\boxed{UR = 53\ mm}$

---

2. Tracer le triangle MLO rectangle en O tel que ML = 8,9 cm et OL = 3,9 cm. Calculer MO.



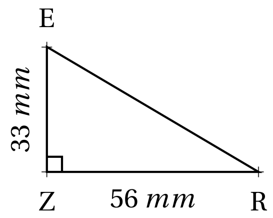
Dans le triangle MLO rectangle en O,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$OM^2 + OL^2 = ML^2$$
$$OM^2 + 3{,}9^2 = 8{,}9^2$$
$$OM^2 + 15{,}21 = 79{,}21$$
$$OM^2 = 79{,}21 - 15{,}21$$
$$OM^2 = 64$$
$$OM = \sqrt{64}$$
$$OM = 8$$

$\boxed{OM = 8\ cm}$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

1. Tracer le triangle ZER rectangle en Z tel que ZE = 33 mm et ZR = 56 mm. Calculer ER.



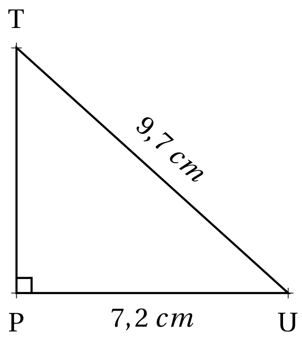
Dans le triangle ZER rectangle en Z,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$ZR^2 + ZE^2 = ER^2$$
$$56^2 + 33^2 = ER^2$$
$$3\,136 + 1\,089 = ER^2$$
$$ER^2 = 4\,225$$
$$ER = \sqrt{4\,225}$$
$$ER = 65$$

$\boxed{ER = 65\ mm}$

---

2. Tracer le triangle PUT rectangle en P tel que UT = 9,7 cm et PU = 7,2 cm. Calculer PT.



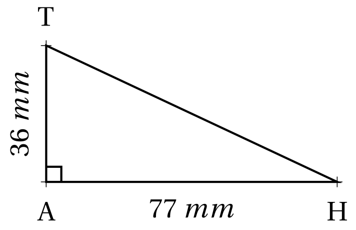
Dans le triangle PUT rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PU^2 + PT^2 = UT^2$$
$$7,2^2 + PT^2 = 9,7^2$$
$$51,84 + PT^2 = 94,09$$
$$PT^2 = 94,09 - 51,85$$
$$PT^2 = 42,25$$
$$PT = \sqrt{42,25}$$
$$PT = 6,5$$

$\boxed{PT = 6,5\ cm}$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

1. Tracer le triangle ATH rectangle en A tel que AT = 36 mm et AH = 77 mm. Calculer TH.



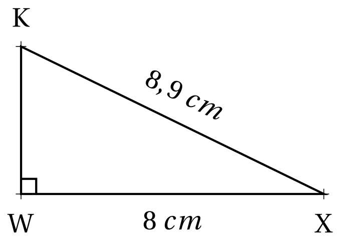
Dans le triangle ATH rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AT}^2 = \mathrm{TH}^2$$
$$77^2 + 36^2 = \mathrm{TH}^2$$
$$5\,929 + 1\,296 = \mathrm{TH}^2$$
$$\mathrm{TH}^2 = 7\,225$$
$$\mathrm{TH} = \sqrt{7\,225}$$
$$\mathrm{TH} = 85$$

$\boxed{\mathrm{TH} = 85\ mm}$

---

2. Tracer le triangle KWX rectangle en W tel que KX = 8,9 cm et WX = 8 cm. Calculer KW.



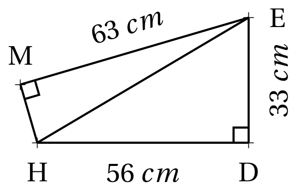
Dans le triangle KWX rectangle en W,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{WK}^2 + \mathrm{WX}^2 = \mathrm{KX}^2$$
$$\mathrm{WK}^2 + 8^2 = 8{,}9^2$$
$$\mathrm{WK}^2 + 64 = 79{,}21$$
$$\mathrm{WK}^2 = 79{,}21 - 64$$
$$\mathrm{WK}^2 = 15{,}21$$
$$\mathrm{WK} = \sqrt{15{,}21}$$
$$\mathrm{WK} = 3{,}9$$

$\boxed{\mathrm{WK} = 3{,}9\ cm}$

Contrôle de mathématiques

Exercice 1



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

1. Démontrer en détaillant votre raisonnement que HE = 65 cm.

2. Démontrer en détaillant votre raisonnement que MH = 16 cm.

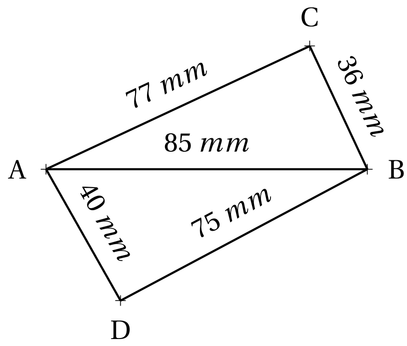
Exercice 2

1. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

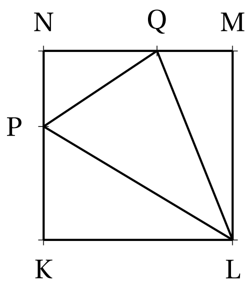
2. Le triangle ABD est-il rectangle ?

Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

Exercice 3



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

KLMN est un carré de côté 5 cm

P $\in$ [KN] tel que KP = 3 cm
Q $\in$ [NM] tel que QM = 2 cm

1. Calculer en justifiant votre raisonnement les longueurs QP, PL et LQ

2. Le triangle PLQ est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

Exercice 4

Voici deux expressions littérales : M = $(x - y) - (y - x)$ et N = $x - (y - x) - y$

1. Calculer M et N pour $x = -1$ et $y = 3$ en détaillant vos calculs.

2. Calculer M et N pour $x = 5$ et $y = -5$ en détaillant vos calculs.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Correction

Exercice 1

1. Dans le triangle HDE rectangle en D, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DH^2 + DE^2 = EH^2$$
$$56^2 + 33^2 = EH^2$$
$$EH^2 = 3\,136 + 1\,089$$
$$EH^2 = 4\,225$$
$$EH = \sqrt{4\,225}$$
$$EH = 65$$

Donc EH = 65 cm.

2. Dans le triangle HME rectangle en M, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$MH^2 + ME^2 = EH^2$$
$$MH^2 + 63^2 = 65^2$$
$$MH^2 + 3\,969 = 4\,225$$
$$MH^2 = 4\,225 - 3\,969$$
$$MH^2 = 256$$
$$MH = \sqrt{256}$$
$$MH = 16$$

Donc MH = 16 cm.

Exercice 2

1. Comparons $CA^2 + CB^2$ et AB^2

$$CA^2 + CB^2 = 77^2 + 36^2$$
$$CA^2 + CB^2 = 5\,929 + 1\,296$$
$$CA^2 + CB^2 = 7\,225$$

$$AB^2 = 85^2$$
$$AB^2 = 7\,225$$

Comme $CA^2 + CB^2 = AB^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ABC est rectangle C.

2. Comparons $DA^2 + DB^2$ et AB^2

$$DA^2 + DB^2 = 75^2 + 40^2$$
$$DA^2 + DB^2 = 5\,625 + 1\,600$$
$$DA^2 + DB^2 = 7\,225$$

$$AB^2 = 85^2$$
$$AB^2 = 7\,225$$

Comme $DA^2 + DB^2 = AB^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ADC est rectangle D.

Exercice 3

1. Comme KLMN est un carré, les triangles NPQ, QML et PKL sont rectangles respectivement en N, M et K.

Dans le triangle NPQ rectangle en N, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$NQ^2 + NP^2 = QP^2$$
$$3^2 + 2^2 = QP^2$$
$$QP^2 = 9 + 4$$
$$QP^2 = 13$$
$$QP = \sqrt{13}$$

Dans le triangle QLM rectangle en M, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$MQ^2 + ML^2 = QL^2$$
$$2^2 + 5^2 = QL^2$$
$$QL^2 = 4 + 25$$
$$QL^2 = 29$$
$$QL = \sqrt{29}$$

Dans le triangle PKL rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$KL^2 + KP^2 = PL^2$$
$$5^2 + 3^2 = PL^2$$
$$PL^2 = 25 + 9$$
$$PL^2 = 34$$
$$PL = \sqrt{34}$$

2. Comparons $QP^2 + QL^2$ et PL^2

$$QP^2 + QL^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{29})^2$$
$$QP^2 + QL^2 = 13 + 29$$
$$QP^2 + QL^2 = 42$$

$$Pl^2 = (\sqrt{34})^2$$
$$PL^2 = 34$$

Comme $QP^2 + QL^2 \neq PL^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, le triangle PQL n'est pas rectangle.

Exercice 4

1. Pour $x = -1$ et $y = 3$

$M = (-1-3) - (3-(-1))$
$M = -4 - (3+1)$
$M = -4 - 4$
$M = -8$

$N = -1 - (3-(-1)) - 3$
$N = -1 - (3+1) - 3$
$N = -1 - 4 - 3$
$N = -8$

2. Pour $x = 5$ et $y = -5$

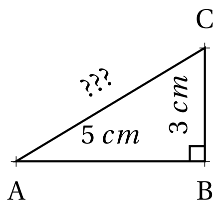
$M = (5-(-5)) - (-5-5)$
$M = (5+5) - (-10)$
$M = 10 + 10$
$M = 20$

$N = 5 - (-5-5) - (-5)$
$N = 5 - (-10) + 5$
$N = 5 + 10 + 5$
$N = 20$

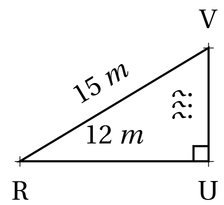
3. Conjecture : les expressions M et N sont équivalentes !

Contrôle de mathématiques

EXERCICE 1 | *Les deux figures ci-dessous ne sont pas en vraie grandeur.* **(5 points)**

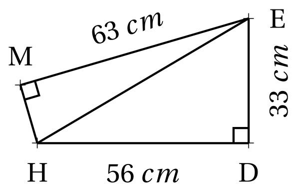


Donner une valeur approchée au dixième près de AC.



Donner une valeur approchée au centième près de UV.

EXERCICE 2 **(5 points)**



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

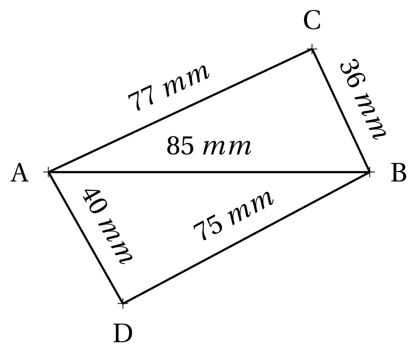
1. Démontrer en détaillant votre raisonnement que HE = 65 cm.

2. Démontrer en détaillant votre raisonnement que MH = 16 cm.

EXERCICE 3 **(5 points)**

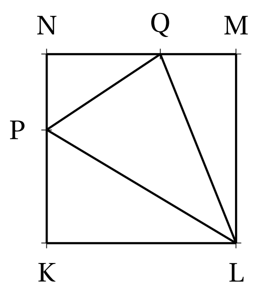
1. Le triangle ABC est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

2. Le triangle ABD est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

EXERCICE 4 **(5 points)**



Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !

KLMN est un carré de côté 5 cm

P ∈ [KN] tel que KP = 3 cm
Q ∈ [NM] tel que QM = 2 cm

1. Calculer en justifiant votre raisonnement les longueurs QP, PL et LQ

2. Le triangle PLQ est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

Correction

Exercice 1

Calcul de AC **dans le triangle** ABC

Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$$
$$5^2 + 3^2 = \mathrm{AC}^2$$
$$25 + 9 = \mathrm{AC}^2$$
$$\mathrm{AC}^2 = 34$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{34}$$
$$\mathrm{BC} \approx 5,8$$

$\boxed{\mathrm{AC} \approx 5,8\ cm}$

Calcul de VU **dans le triangle** VUR

Dans le triangle RUV rectangle en U,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{UR}^2 + \mathrm{UV}^2 = \mathrm{RV}^2$$
$$12^2 + \mathrm{UV}^2 = 15^2$$
$$144 + \mathrm{UV}^2 = 225$$
$$\mathrm{UV}^2 = 225 - 144$$
$$\mathrm{UV}^2 = 81$$
$$\mathrm{UV} = \sqrt{81}$$
$$\mathrm{UV} = 9$$

$\boxed{\mathrm{UV} = 9\ m}$

Exercice 2
1. Dans le triangle HDE rectangle en D, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{DH}^2 + \mathrm{DE}^2 = \mathrm{EH}^2$$
$$56^2 + 33^2 = \mathrm{EH}^2$$
$$\mathrm{EH}^2 = 3\,136 + 1\,089$$
$$\mathrm{EH}^2 = 4\,225$$
$$\mathrm{EH} = \sqrt{4\,225}$$
$$\mathrm{EH} = 65$$

Donc $\mathrm{EH} = 65\ cm$.

2. Dans le triangle HME rectangle en M, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{MH}^2 + \mathrm{ME}^2 = \mathrm{EH}^2$$
$$\mathrm{MH}^2 + 63^2 = 65^2$$
$$\mathrm{MH}^2 + 3\,969 = 4\,225$$
$$\mathrm{MH}^2 = 4\,225 - 3\,969$$
$$\mathrm{MH}^2 = 256$$
$$\mathrm{MH} = \sqrt{256}$$
$$\mathrm{MH} = 16$$

Donc $\mathrm{MH} = 16\ cm$.

Exercice 3

1. Comparons $CA^2 + CB^2$ et AB^2

$$CA^2 + CB^2 = 77^2 + 36^2$$
$$CA^2 + CB^2 = 5\,929 + 1\,296$$
$$CA^2 + CB^2 = 7\,225$$

$$AB^2 = 85^2$$
$$AB^2 = 7\,225$$

Comme $CA^2 + CB^2 = AB^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ABC est rectangle C.

2. Comparons $DA^2 + DB^2$ et AB^2

$$DA^2 + DB^2 = 75^2 + 40^2$$
$$DA^2 + DB^2 = 5\,625 + 1\,600$$
$$DA^2 + DB^2 = 7\,225$$

$$AB^2 = 85^2$$
$$AB^2 = 7\,225$$

Comme $DA^2 + DB^2 = AB^2$ d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ADC est rectangle D.

Exercice 4

1. Comme KLMN est un carré, les triangles NPQ, QML et PKL sont rectangles respectivement en N, M et K.

Dans le triangle NPQ rectangle en N, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$NQ^2 + NP^2 = QP^2$$
$$3^2 + 2^2 = QP^2$$
$$QP^2 = 9 + 4$$
$$QP^2 = 13$$
$$QP = \sqrt{13}$$

Dans le triangle QLM rectangle en M, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$MQ^2 + ML^2 = QL^2$$
$$2^2 + 5^2 = QL^2$$
$$QL^2 = 4 + 25$$
$$QL^2 = 29$$
$$QL = \sqrt{29}$$

Dans le triangle PKL rectangle en K, d'après **le théorème de Pythagore** :

$$KL^2 + KP^2 = PL^2$$
$$5^2 + 3^2 = PL^2$$
$$PL^2 = 25 + 9$$
$$PL^2 = 34$$
$$PL = \sqrt{34}$$

2. Comparons $QP^2 + QL^2$ et PL^2

$$QP^2 + QL^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{29})^2$$
$$QP^2 + QL^2 = 13 + 29$$
$$QP^2 + QL^2 = 42$$

$$Pl^2 = (\sqrt{34})^2$$
$$PL^2 = 34$$

Comme $QP^2 + QL^2 \neq PL^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, le triangle PQL n'est pas rectangle.

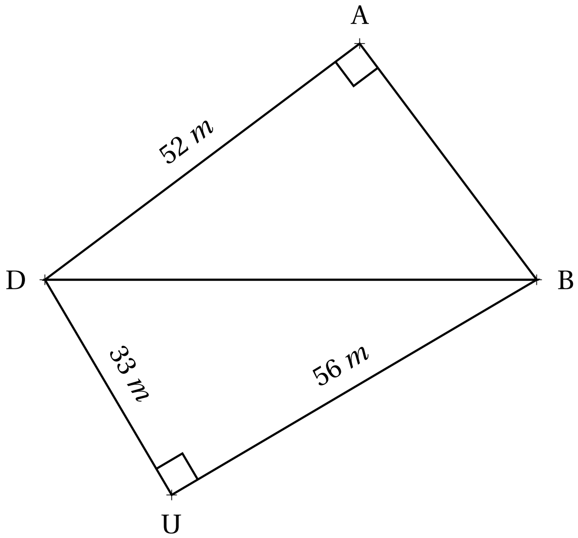
Évaluation

Exercice n° 1 : *6 points*

On pose A = (−3), B = (+7), C = (−11) et D = (+9). Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$W = A + B + C + D$ $\quad X = A - B - C - D$ $\quad Y = (A + B) - (C - D)$ $\quad Z = (B - A - D) - (D - C + B)$

Exercice n° 2 : *4 points*



La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

1. Démontrer que DB = 65 m.

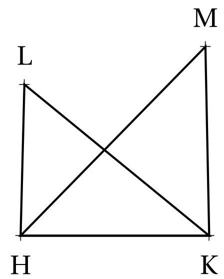
2. Calculer la valeur exacte de AB.

Exercice n° 3 : *6 points*

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.

On sait que :

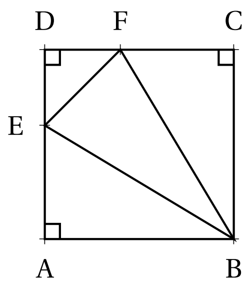
- HK = 24 mm ;
- HL = 18 mm et LK = 30 mm ;
- HM = 40 mm et MK = 33 mm ;



1. Le triangle HLK est-il rectangle ?

2. Le triangle HMK est-il rectangle ?

Exercice n° 4 : *4 points + 2 points BONUS*



La figure ci-contre n'est pas tracée en vraie grandeur.

On sait que :

- ABCD est un carré de côté 10 cm
- DF = 3 cm
- DE = 4 cm

1. Calculer les valeurs exactes de EF, FB et EB

2. Le triangle EFB est-il rectangle ?

Évaluation — CORRECTION

Exercice n° 1 : Nombres relatif CORRECTION

Somme et différence de relatifs

On pose $A = (-3)$, $B = (+7)$, $C = (-11)$ et $D = (+9)$. Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$W = A + B + C + D$

$W = (-3) + (+7) + (-11) + (+9)$

$W = (-14) + (+16)$

$\boxed{W = (+2)}$

$X = A - B - C - D$

$X = (-3) - (+7) - (-11) - (+9)$

$X = (-3) + (-7) + (+11) + (-9)$

$X = (-19) + (+11)$

$X = (-8)$

$Y = (A + B) - (C - D)$

$Y = ((-3) + (+7)) - ((-11) - (+9))$

$Y = (+4) - ((-11) + (-9))$

$Y = (+4) - (-20)$

$Y = (+4) + (+20)$

$\boxed{Y = (+24)}$

$Z = (B - A - D) - (D - C + B)$

$Z = ((+7) - (-3) - (+9)) - ((+9) - (-11) + (+7))$

$Z = ((+7) + (+3) + (-9)) - ((+9) + (+11) + (+7))$

$Z = (+1) - (+27)$

$Z = (+1) + (-27)$

$\boxed{Z = (-26)}$

Exercice n° 2 : Pythagore CORRECTION

Théorème de Pythagore

1. Dans le triangle DBU rectangle en U,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$UD^2 + UB^2 = DB^2$$
$$33^2 + 56^2 = DB^2$$
$$1089 + 3136 = DB^2$$
$$DB^2 = 4225$$
$$DB = \sqrt{4225}$$
$$DB = 65$$

$\boxed{DB = 65\,\text{m}}$

2. Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$
$$AB^2 + 52^2 = 65^2$$
$$AB^2 + 2704 = 4225$$
$$AB^2 = 4225 - 2704$$
$$AB^2 = 1521$$
$$AB = \sqrt{1521}$$
$$AB = 39$$

$\boxed{AB = 39\,m}$

Exercice n° 3 : Pythagore

CORRECTION

Réciproque et contraposée du théorème de Pythagore

1. Comparons $HL^2 + HK^2$ et LK^2 :

$HL^2 + HK^2$	LK^2
$18^2 + 24^2$	30^2
$324 + 576$	
900	900

Comme $HL^2 + HK^2 = LK^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle HLK est rectangle en H}}$.

2. Comparons $KH^2 + KM^2$ et HM^2 :

$KH^2 + KM^2$	HM^2
$24^2 + 33^2$	40^2
$576 + 1089$	
1665	1600

Comme $KH^2 + KM^2 \neq HM^2$, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle KHM n'est pas rectangle}}$.

Exercice n° 4 : Pythagore

CORRECTION

Réciproque et théorème de Pythagore

1. Dans le triangle EDF rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DE^2 + DF^2 = EF^2$$
$$4^2 + 3^2 = EF^2$$
$$16 + 9 = EF^2$$
$$EF^2 = 25$$
$$EF = \sqrt{25}$$
$$EF = 5$$

$\boxed{EF = 5\,cm}$

Dans le triangle FCB rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CB^2 + CF^2 = BF^2$$
$$10^2 + 7^2 = BF^2$$
$$100 + 49 = BF^2$$
$$BF^2 = 149$$
$$BF = \sqrt{149}$$

$\boxed{\mathrm{BF} = \sqrt{149}\ cm}$

Dans le triangle EAB rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{EB}^2$$
$$6^2 + 10^2 = \mathrm{EB}^2$$
$$36 + 100 = \mathrm{EB}^2$$
$$\mathrm{EB}^2 = 136$$
$$\mathrm{EB} = \sqrt{136}$$

$\boxed{\mathrm{EB} = \sqrt{136}\ cm}$

2. Comparons $\mathrm{EB}^2 + \mathrm{EF}^2$ et FB^2 :

$\mathrm{EB}^2 + \mathrm{EF}^2$	FB^2
$136 + 5^2$	
$136 + 25$	
161	149

Comme $\mathrm{EB}^2 + \mathrm{EF}^2 \neq \mathrm{FB}^2$, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EFB n'est pas rectangle}}$.

Évaluation

Exercice n° 1 : *6 points*

Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$A = (7-9-13)-(1-6+3)$

$B = 3\times(-2)+(-7)\times 3-3\times(-4)$

$C = (1-3)(6-10)(1-2-3)$

$D = -1-(-1-1-3)-(-1-1)(3-5)$

Exercice n° 2 : *6 points*

On pose $x=-3$, $y=5$ et $z=-2$.

Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$E = (x-y+z)(z-x-y)$

$F = (x-y)(x-z)(y-z)$

$C = 1-x-y-z+x+y+z$

Exercice n° 3 : *4 points*

1.a. Tracer un triangle HYT rectangle en Y tel que $HY = 5,7\ cm$ et $YT = 7,6\ cm$.

1.b. Calculer la valeur exacte de la longueur HT.

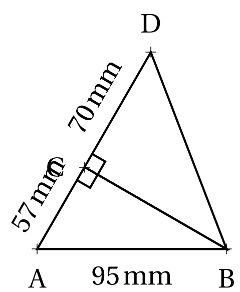
2.a. Tracer un triangle RFG rectangle en G tel que $GF = 6,6\ cm$ et $RF = 11\ cm$.

2.b. Calculer la valeur exacte de la longueur GR.

Exercice n° 4 : *4 points*

1. Démontrer que $CB = 76\ mm$.

2. Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième de millimètre près de la longueur DB.



Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Nombres relatifs Correction

Nombres relatifs et priorités opératoires
Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$A=(7-9-13)-(1-6+3)$
$A=(7-22)-(4-6)$
$A=-15-(-2)$
$A=-15+2$
$\boxed{A=-13}$

$B=3\times(-2)+(-7)\times3-3\times(-4)$
$B=-6+(-21)+12$
$B=-27+12$
$\boxed{B=-15}$

$C=(1-3)(6-10)(1-2-3)$
$C=(-2)(-4)(1-5)$
$C=8(-4)$
$\boxed{C=-32}$

$D=-1-(-1-1-3)-(-1-1)(3-5)$
$D=-1-(-5)-(-2)(-2)$
$D=-1+5-4$
$D=-5+5$
$\boxed{D=0}$

Exercice n° 2 : Nombres relatifs Correction

Nombres relatifs et calcul littéral
On pose $x=-3$, $y=5$ et $z=-2$.

Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$E=(x-y+z)(z-x-y)$
$E=(-3-5+(-2))(-2-(-3)-5)$
$E=(-8-2)(-2+3-5)$
$E=-10(-7+3)$
$E=-10(-4)$
$\boxed{E=40}$

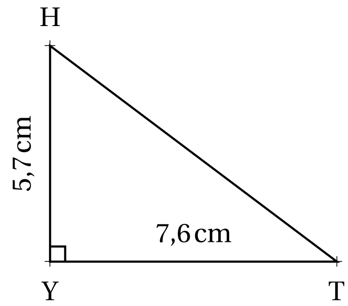
$F=(x-y)(x-z)(y-z)$
$F=(-3-5)(-3-(-2))(5-(-2))$
$F=(-8)(-3+2)(5+2)$
$F=-8(-1)\times7$
$\boxed{F=56}$

$C=1-x-y-z+x+y+z$
$C=-1-(-3)-5-(-2)+(-3)+5+(-2)$
$C=-1+3-5+2-3+5-2$
$C=-11+10$
$\boxed{C=-1}$

Exercice n° 3 : Pythagore CORRECTION

Théorème de Pythagore et tracé géométrique

1.a. Tracer un triangle HYT rectangle en Y tel que HY = 5,7 cm et YT = 7,6 cm.



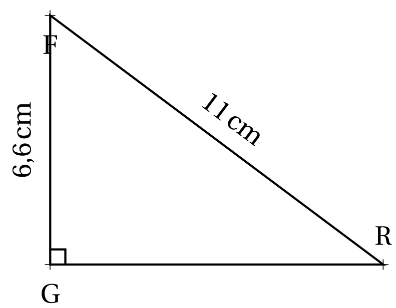
1.b. Calculer la valeur exacte de la longueur HT.

Dans le triangle HYT rectangle en Y,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{YH}^2 + \mathrm{YT}^2 &= \mathrm{HT}^2 \\
5,7^2 + 7,6^2 &= \mathrm{HT}^2 \\
32,49 + 57,76 &= \mathrm{HT}^2 \\
\mathrm{HT}^2 &= 90,25 \\
\mathrm{HT} &= \sqrt{90,25} \\
\mathrm{HT} &= 9,5
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{HT} = 9{,}5\,\mathrm{cm}}$

2.a. Tracer un triangle RFG rectangle en G tel que GF = 6,6 cm et RF = 11 cm.



2.b. Calculer la valeur exacte de la longueur GR.

Dans le triangle RFG rectangle en G,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{GF}^2 + \mathrm{GR}^2 &= \mathrm{RF}^2 \\
6,6^2 + \mathrm{GR}^2 &= 11^2 \\
43,56 + \mathrm{GR}^2 &= 121 \\
\mathrm{GR}^2 &= 121 - 43,56 \\
\mathrm{RF} &= \sqrt{77,44} \\
\mathrm{RF} &= 8,8
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{RF} = 8{,}8\,\text{cm}}$

Exercice n° 4 : Pythagore Correction

Théorème de Pythagore deux fois

1. Démontrer que $\text{CB} = 76\ mm$.

Dans le triangle ABC rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{CA}^2 + \text{CB}^2 = \text{AB}^2$$
$$57^2 + \text{CB}^2 = 95^2$$
$$3\,249 + \text{CB}^2 = 9\,025$$
$$\text{CB}^2 = 9\,025 - 3\,249$$
$$\text{CB}^2 = 5\,776$$
$$\text{CB} = \sqrt{5\,776}$$
$$\text{CB} = 76$$

$\boxed{\text{CB} = 76\,\text{mm}}$

2. Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième de millimètre près de la longueur DB.

Dans le triangle DCB rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{CD}^2 + \text{CB}^2 = \text{BD}^2$$
$$70^2 + 76^2 = \text{BD}^2$$
$$4\,900 + 5\,776 = \text{BD}^2$$
$$\text{BD}^2 = 10\,676$$
$$\text{BD} = \sqrt{10\,676}$$
$$\text{BD} \approx 103{,}3$$

$\boxed{\text{BD} \approx 103{,}3\,\text{mm au dixième de millimètre près.}}$

Évaluation

Exercice n° 1 : *6 points*

Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$A = (7 - 9 - 13) - (1 - 6 + 3)$

$B = 3 \times (-2) + (-7) \times 3 - 3 \times (-4)$

$C = (1 - 3) \times (6 - 10) \times (1 - 2 - 3)$

$D = [2 - (-5) \times 3 + (-3) \times (-1)] - [-1 - 1 \times 2 + 3 \times (-1)]$

Exercice n° 2 : *6 points*

On pose $a = -3$, $b = 5$ et $c = -2$.

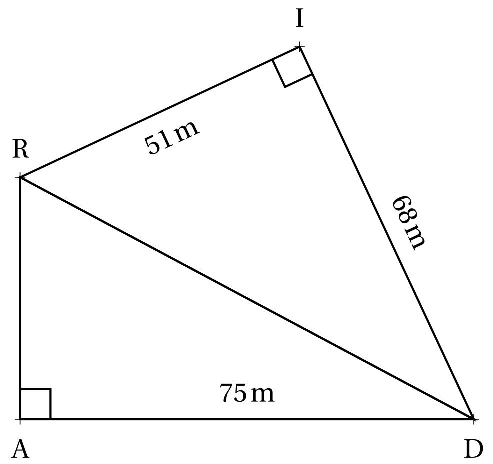
Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$E = (a - b + c) - (-a + b - c)$

$F = a \times b + a \times c - b \times c + a \times b \times c$

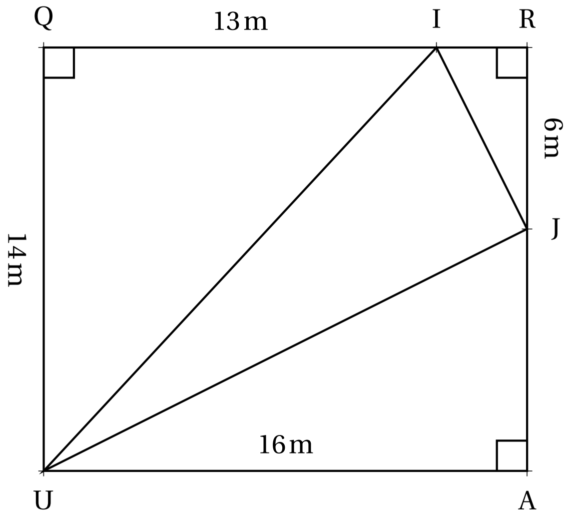
$G = 3 + a \times (b - c) - c \times (1 - a - b)$

Exercice n° 3 : *4 points*



Calculer la valeur exacte de RD puis de AR

Exercice n° 4 : *4 + 2 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraies grandeurs, on sait que QRAU est un rectangle et que les points Q, I et R sont alignés ainsi que les points R, J et A.

1. Calculer, en justifiant soigneusement votre réponse, la longueur des côtés [UI], [IJ] et [UJ].
Donner la valeur exacte ainsi qu'une valeur approchée au millimètre près.

2. Le triangle UIJ est-il rectangle ? Justifier votre réponse.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Nombres relatifs Correction

Nombres relatifs et priorités opératoires

Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$A = (7-9-13)-(1-6+3)$
$A = (7-22)-(4-6)$
$A = -15-(-2)$
$A = -15+2$

$\boxed{A = -7}$

$B = 3\times(-2)+(-7)\times 3-3\times(-4)$
$B = -3-21+12$
$B = -24+12$

$\boxed{B = -12}$

$C = (1-3)\times(6-10)\times(1-2-3)$
$C = (-2)\times(-4)\times(1-5)$
$C = 8\times(-4)$

$\boxed{C = -32}$

$D = [2-(-5)\times 3+(-3)\times(-1)]-[-1-1\times 2+3\times(-1)]$
$D = [2-(-15)+3]-[-1-2-3]$
$D = (2+15+3)-(-6)$
$D = 20+6$

$\boxed{D = 26}$

Exercice n° 2 : Nombres relatifs Correction

Nombres relatifs et calcul littéral

On pose $a=-3$, $b=5$ et $c=-2$.

Calculer les expressions suivantes en détaillant les étapes.

$E = (a-b+c)-(-a+b-c)$
$E = (-3-5-2)-(-(-3)+5-(-2))$
$E = -10-(3+5+2)$
$E = -10-10$

$\boxed{E = -20}$

$F = a\times b+a\times c-b\times c+a\times b\times c$
$F = -3\times 5+(-3)\times(-2)-5\times(-2)+(-3)\times 5\times(-2)$
$F = -15+6+10+(-3)\times(-10)$
$F = -15+16+30$

$\boxed{F = 31}$

$G = 3+a\times(b-c)-c\times(1-a-b)$

$G = 3 + (-3) \times (5 - (-2)) - (-2) \times (1 - (-3) - 5)$
$G = 3 - 3 \times (5 + 2) + 2 \times (1 + 3 - 5)$
$G = 3 - 3 \times 7 + 2 \times (4 - 5)$
$G = 3 - 21 + 2 \times (-1)$
$G = -18 - 2$

$\boxed{G = -20}$

Exercice n° 3 : Pythagore CORRECTION

Théorème de Pythagore deux fois de suite

Dans le triangle RID rectangle en I,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$IR^2 + ID^2 = RD^2$$
$$51^2 + 68^2 = RD^2$$
$$2601 + 4624 = RD^2$$
$$RD^2 = 7225$$
$$RD = \sqrt{7225}$$
$$RD = 85$$

$\boxed{RD = 85\,\text{m}}$

Dans le triangle RAD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AR^2 + AD^2 = RD^2$$
$$AR^2 + 75^2 = 85^2$$
$$AR^2 + 5625 = 7225$$
$$AR^2 = 7225 - 5625$$
$$AR^2 = 1600$$
$$AR = \sqrt{1600}$$
$$AR = 40$$

$\boxed{AR = 40\,\text{m}}$

Exercice n° 4 : Pythagore CORRECTION

Théorème de Pythagore et réciproque

1.

Dans le triangle UQI rectangle en Q,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$QU^2 + QI^2 = UI^2$$
$$14^2 + 13^2 = UI^2$$
$$196 + 169 = UI^2$$

$$UI^2 = 365$$
$$UI = \sqrt{365}$$
$$UI \approx 19{,}105\,\text{m au millième de mètre près}$$

$\boxed{UI = \sqrt{365}\ \text{m} \approx 19{,}105\,\text{m au millième de mètre près}}$

Dans le triangle IRJ rectangle en R,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$RI^2 + RJ^2 = IJ^2$$
$$3^2 + 6^2 = IJ^2$$
$$9 + 36 = IJ^2$$
$$IJ^2 = 45$$
$$IJ = \sqrt{45}$$
$$IJ \approx 6{,}708\,\text{m au millième de mètre près}$$

$\boxed{IJ = \sqrt{45}\ \text{m} \approx 6{,}708\,\text{m au millième de mètre près}}$

Dans le triangle UAJ rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AU^2 + AJ^2 = UJ^2$$
$$16^2 + 8^2 = UJ^2$$
$$256 + 64 = UJ^2$$
$$UJ^2 = 320$$
$$UJ = \sqrt{320}$$
$$UJ \approx 17{,}889\,\text{m au millième de mètre près}$$

$\boxed{UJ = \sqrt{320}\ \text{m} \approx 17{,}889\,\text{m au millième de mètre près}}$

2.
Comparons $JU^2 + JI^2$ et UI^2 :
On commence par rédiger en utilisant les valeurs approchées !

$JU^2 + JI^2$	UI^2
$17{,}889^2 + 6{,}708^2$	$19{,}105^2$
$320{,}016\,321 + 44{,}997\,264$	
$365{,}013\,585$	$365{,}001\,025$

Les valeurs sont proches, mais différentes !
Voyons ce même raisonnement en utilisant les valeurs exactes.

$JU^2 + JI^2$	UI^2
$\sqrt{320}^2 + \sqrt{45}^2$	$\sqrt{365}$
$320 + 45$	
365	365

On constate que les valeurs sont égales !

Comme

$$\mathrm{JU}^2 + \mathrm{JI}^2 = \mathrm{UI}^2$$

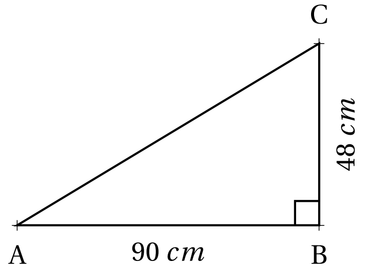
, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle UIJ est rectangle en I}}$.

Évaluation

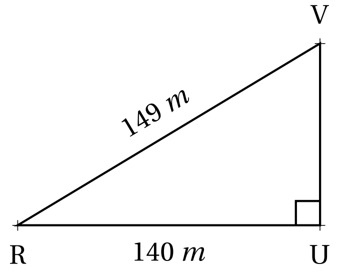
Exercice n° 1 :

4 points

Les deux figures ci-dessous ne sont pas tracées en vraies grandeurs.



Calculer AC.



Calculer UV.

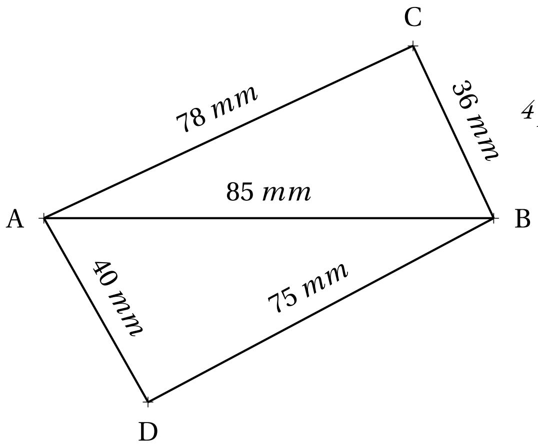
Exercice n° 2 :

4 points

1. Le triangle ABC est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

2. Le triangle ABD est-il rectangle ?
Justifier votre réponse par un raisonnement détaillé.

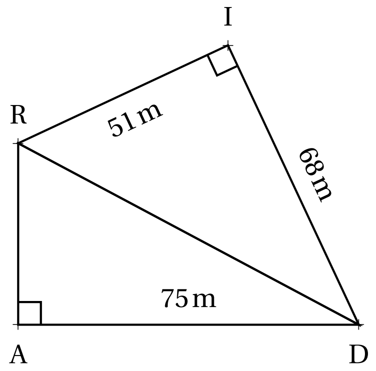
Cette figure n'est pas réalisée en vraies grandeurs !



Exercice n° 3 :

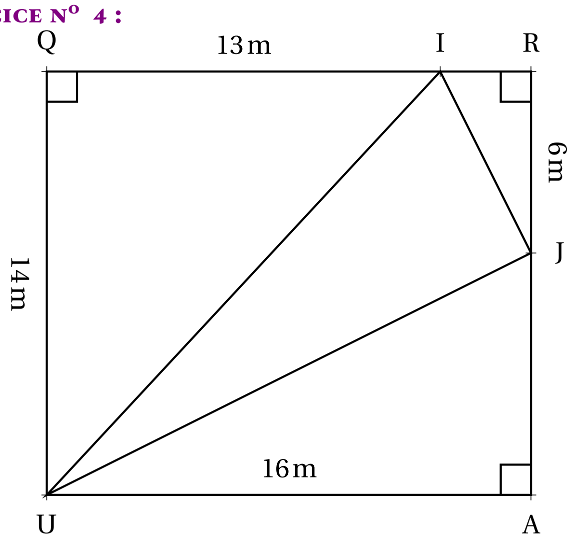
6 points

Calculer la valeur exacte de RD puis de AR



Exercice n° 4 :

6 points



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraies grandeurs, on sait que QRAU est un rectangle et que les points Q, I et R sont alignés ainsi que les points R, J et A.

1. Calculer, en justifiant soigneusement votre réponse, la longueur des côtés [UI], [IJ] et [UJ].
Donner la valeur exacte ainsi qu'une valeur approchée au millimètre près.

2. Le triangle UIJ est-il rectangle ? Justifier votre réponse.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 : Pythagore

Correction

Pythagore direct

Calculons AC :
Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$90^2 + 48^2 = AC^2$$
$$8100 + 2304 = AC^2$$
$$AC^2 = 10\,404$$
$$AC = \sqrt{10\,404}$$
$$AC = 102$$

$\boxed{AC = 102\,\text{cm}}$

Calculons VU :
Dans le triangle RUV rectangle en U,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$UV^2 + UR^2 = VR^2$$
$$UV^2 + 140^2 = 149^2$$
$$UV^2 + 19\,600 = 22\,201$$
$$UV^2 = 22\,201 - 19\,600$$
$$UV^2 = 2601$$
$$UV = \sqrt{2601}$$
$$UV = 51$$

$\boxed{UV = 102\,\text{cm}}$

Exercice n° 2 : Pythagore

Correction

Réciproque et contraposée de Pythagore

1. Comparons $CA^2 + CB^2$ et AB^2 :

$CA^2 + CB^2$	AB^2
$78^2 + 36^2$	85^2
$6084 + 1296$	
7380	7225

Comme
$$CA^2 + CB^2 \neq AB^2$$
D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle ABC n'est pas rectangle}}$.

2. Comparons $DA^2 + DB^2$ et AB^2 :

$DA^2 + DB^2$	AB^2
$40^2 + 75^2$	85^2
$1600 + 5625$	
7225	7225

Comme
$$DA^2 + DB^2 = AB^2$$
D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle ABD est rectangle en D}}$.

Exercice n° 3 : Pythagore

Correction

Théorème de Pythagore deux fois de suite

Dans le triangle RID rectangle en I,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$IR^2 + ID^2 = RD^2$$
$$51^2 + 68^2 = RD^2$$

$$2601 + 4624 = RD^2$$
$$RD^2 = 7225$$
$$RD = \sqrt{7225}$$
$$RD = 85$$

$\boxed{RD = 85\,\text{m}}$

Dans le triangle RAD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AR^2 + AD^2 = RD^2$$
$$AR^2 + 75^2 = 85^2$$
$$AR^2 + 5625 = 7225$$
$$AR^2 = 7225 - 5625$$
$$AR^2 = 1600$$
$$AR = \sqrt{1600}$$
$$AR = 40$$

$\boxed{AR = 40\,\text{m}}$

Exercice n° 4 : Pythagore Correction

Théorème de Pythagore et réciproque

1.

Dans le triangle UQI rectangle en Q,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$QU^2 + QI^2 = UI^2$$
$$14^2 + 13^2 = UI^2$$
$$196 + 169 = UI^2$$
$$UI^2 = 365$$
$$UI = \sqrt{365}$$
$$UI \approx 19{,}105\,\text{m au millième de mètre près}$$

$\boxed{UI = \sqrt{365}\ \text{m} \approx 19{,}105\,\text{m au millième de mètre près}}$

Dans le triangle IRJ rectangle en R,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$RI^2 + RJ^2 = IJ^2$$
$$3^2 + 6^2 = IJ^2$$
$$9 + 36 = IJ^2$$
$$IJ^2 = 45$$
$$IJ = \sqrt{45}$$
$$IJ \approx 6{,}708\,\text{m au millième de mètre près}$$

$\boxed{IJ = \sqrt{45}\text{ m} \approx 6{,}708\text{ m au millième de mètre près}}$

Dans le triangle UAJ rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AU^2 + AJ^2 = UJ^2$$
$$16^2 + 8^2 = UJ^2$$
$$256 + 64 = UJ^2$$
$$UJ^2 = 320$$
$$UJ = \sqrt{320}$$
$$UJ \approx 17{,}889\text{ m au millième de mètre près}$$

$\boxed{UJ = \sqrt{320}\text{ m} \approx 17{,}889\text{ m au millième de mètre près}}$

2.
Comparons $JU^2 + JI^2$ et UI^2 :
On commence par rédiger en utilisant les valeurs approchées !

$JU^2 + JI^2$	UI^2
$17{,}889^2 + 6{,}708^2$	$19{,}105^2$
$320{,}016\,321 + 44{,}997\,264$	
$365{,}013\,585$	$365{,}001\,025$

Les valeurs sont proches, mais différentes !
Voyons ce même raisonnement en utilisant les valeurs exactes.

$JU^2 + JI^2$	UI^2
$\sqrt{320}^2 + \sqrt{45}^2$	$\sqrt{365}$
$320 + 45$	
365	365

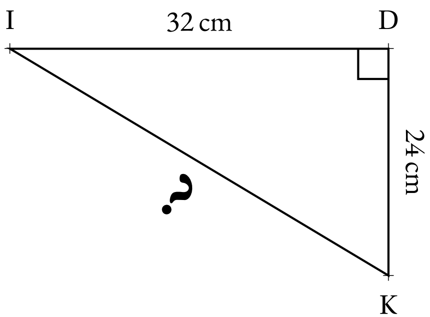
On constate que les valeurs sont égales !

Comme
$$JU^2 + JI^2 = UI^2$$
, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle UIJ est rectangle en I}}$.

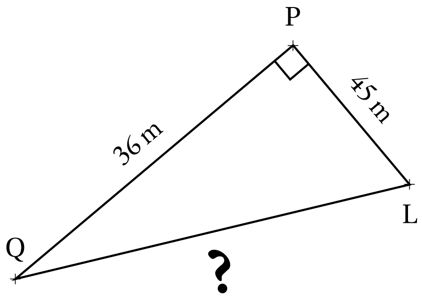
NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la valeur exacte et éventuellement une valeur approchée au centième près du côté marqué par un point d'interrogation.
Attention à rédiger comme nous l'avons fait en classe !

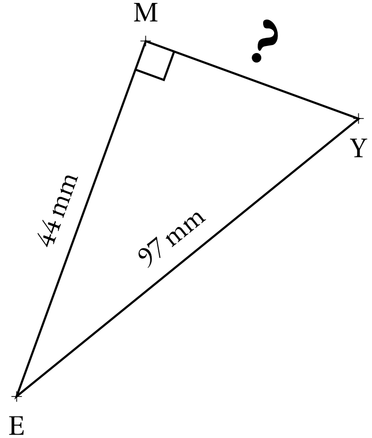
Situation n° 1



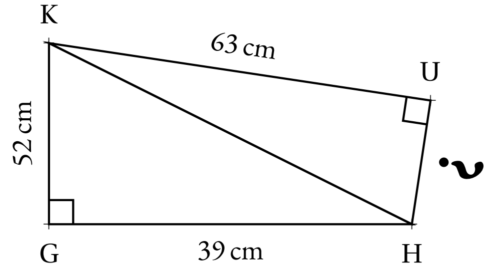
Situation n° 2



Situation n° 3



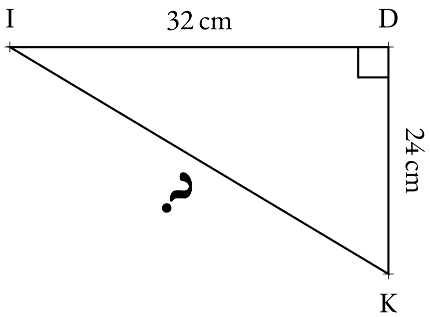
Bonus



NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la valeur exacte et éventuellement une valeur approchée au centième près du côté marqué par un point d'interrogation.
Attention à rédiger comme nous l'avons fait en classe !

Situation nº 1



Dans le triangle IDK rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DI^2 + DK^2 = IK^2$$

$$32^2 + 24^2 = IK^2$$

$$1024 + 576 = IK^2$$

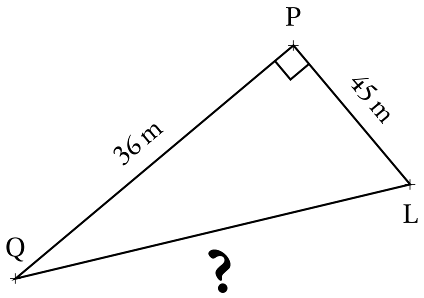
$$IK^2 = 1600$$

$$IK = \sqrt{1600}$$

$$IK = 40$$

$\boxed{IK = 40\,\text{cm}}$

Situation nº 2



Dans le triangle PQL rectangle en P,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$PQ^2 + PL^2 = QL^2$$

$$36^2 + 45^2 = QL^2$$

$$1296 + 2025 = QL^2$$

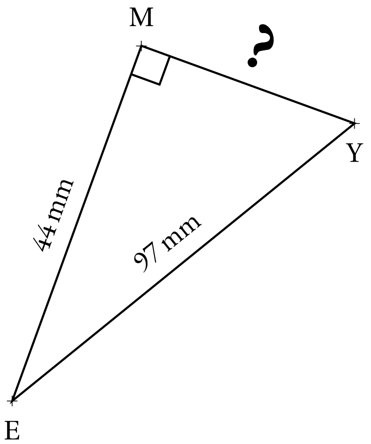
$$QL^2 = 3321$$

$$QL = \sqrt{3321}$$

$$QL \approx 57,63$$

$\boxed{QL \approx 57{,}63\,\text{m}}$

Situation nº 3



Dans le triangle MYE rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$MY^2 + ME^2 = YE^2$$

$$MY^2 + 44^2 = 97^2$$

$$MY^2 + 1936 = 9409$$

$$MY^2 = 9409 - 1936$$

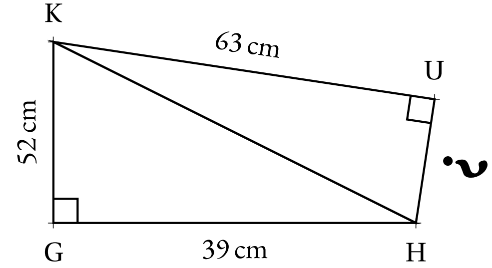
$$MY^2 = 7473$$

$$MY = \sqrt{7473}$$

$$MY \approx 86,45$$

$\boxed{MY \approx 86{,}45\,\text{mm}}$

Bonus



Dans le triangle KGH rectangle en G,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$GK^2 + GH^2 = KH^2$$

$$52^2 + 39^2 = KH^2$$

$$2704 + 1521 = KH^2$$

$$KH^2 = 4225$$

$$KH = \sqrt{4225}$$

$$KH = 65$$

Dans le triangle KHU rectangle en U,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$UK^2 + UH^2 = KH^2$$

$$63^2 + UH^2 = 65^2$$

$$3969 + UH^2 = 4225$$

$$UH^2 = 4225 - 3969$$

$$UH^2 = 256$$

$$UH = \sqrt{256}$$

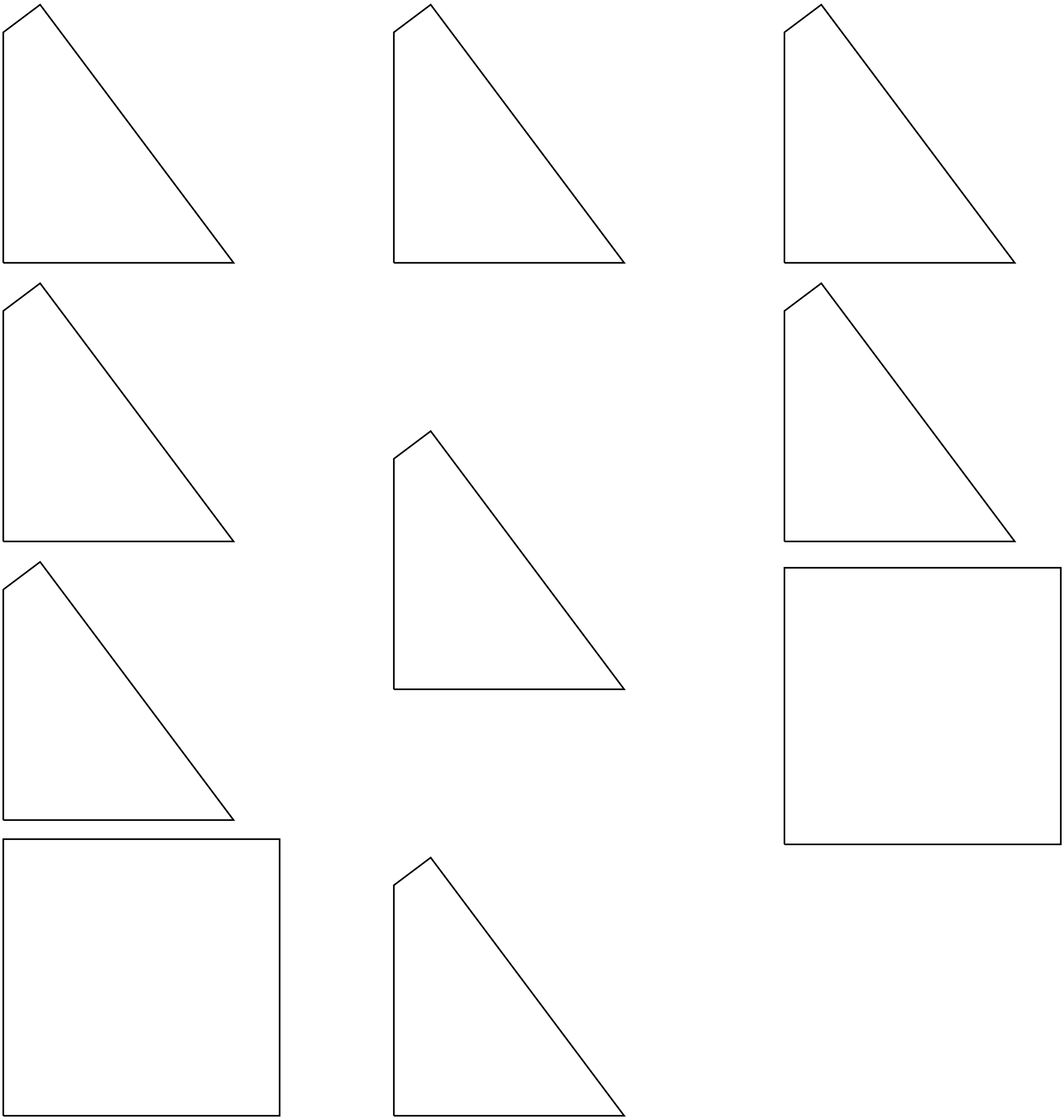
$$UH = 16$$

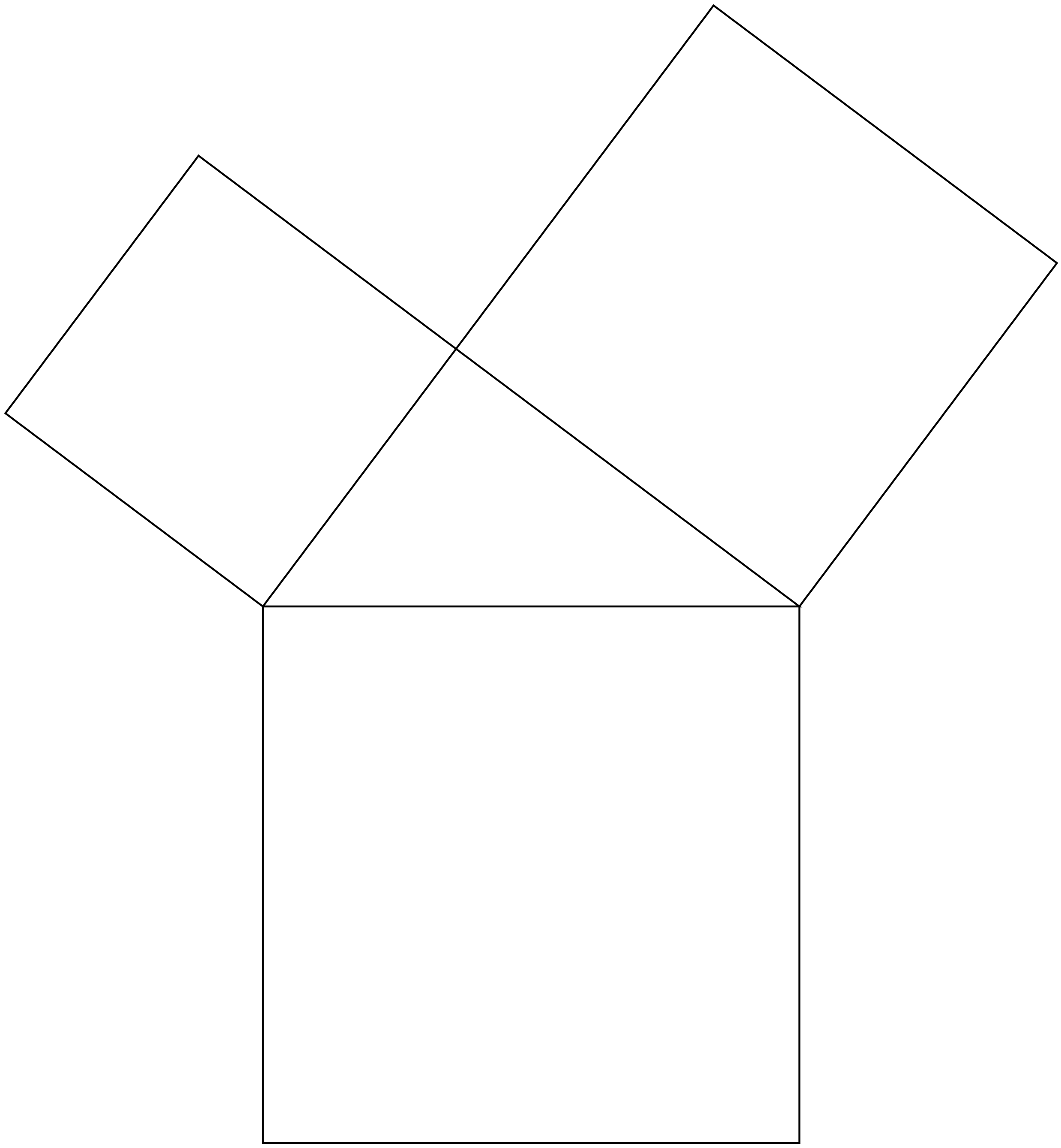
$\boxed{UH = 16\,\text{cm}}$

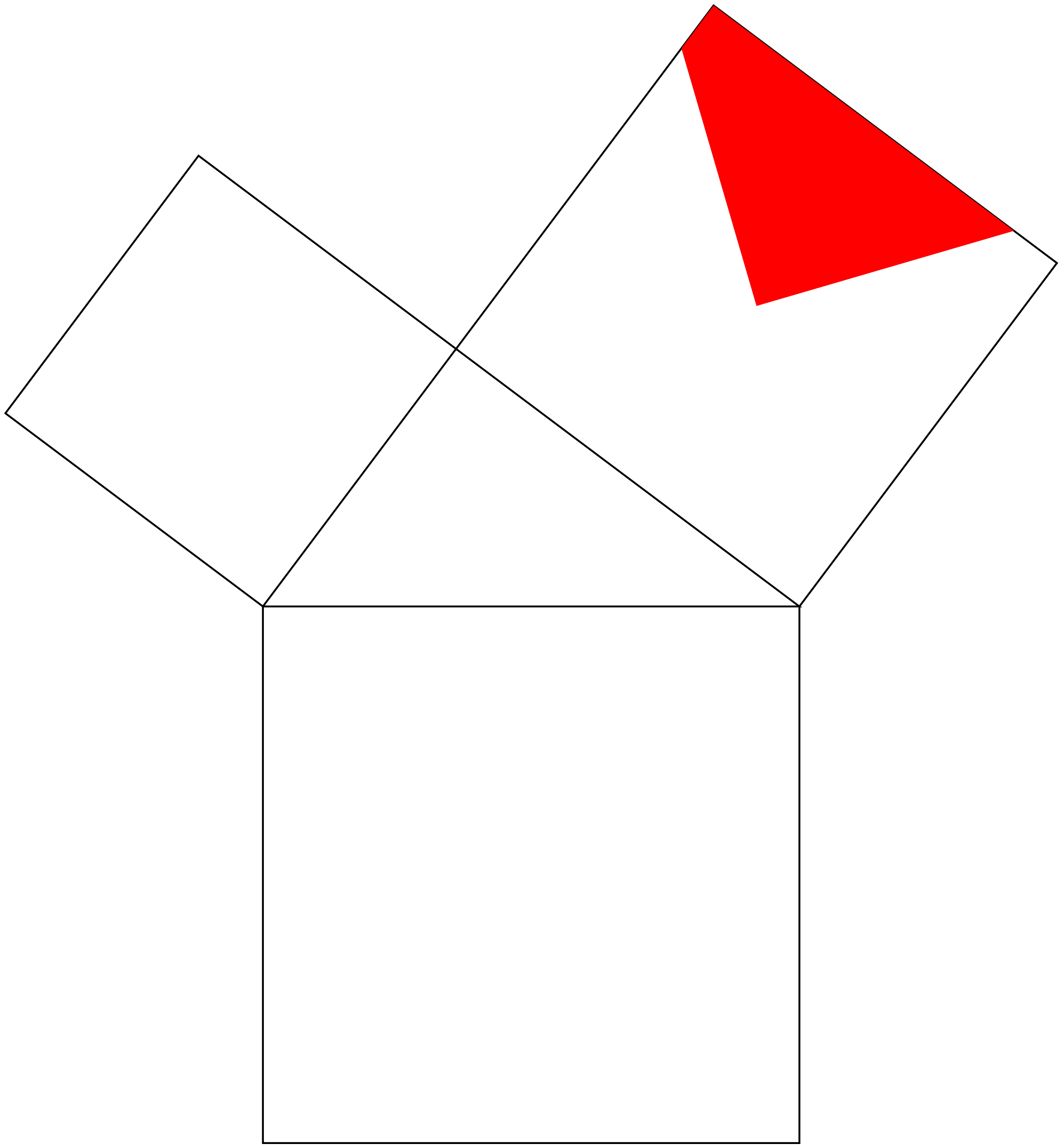
Puzzle de Perigal

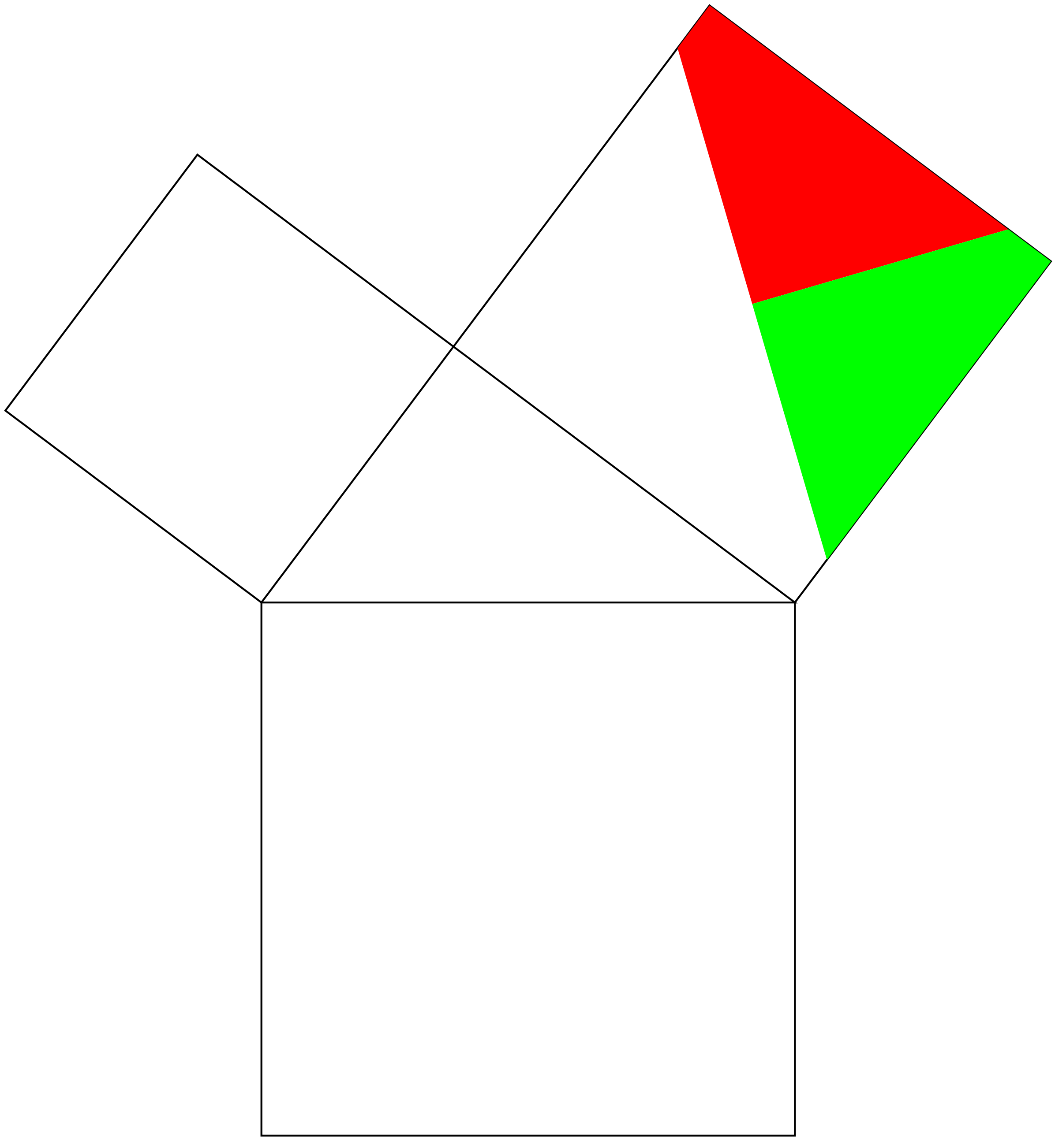
Ce puzzle a été crée en 1873 par le mathématicien Henry Perigal.

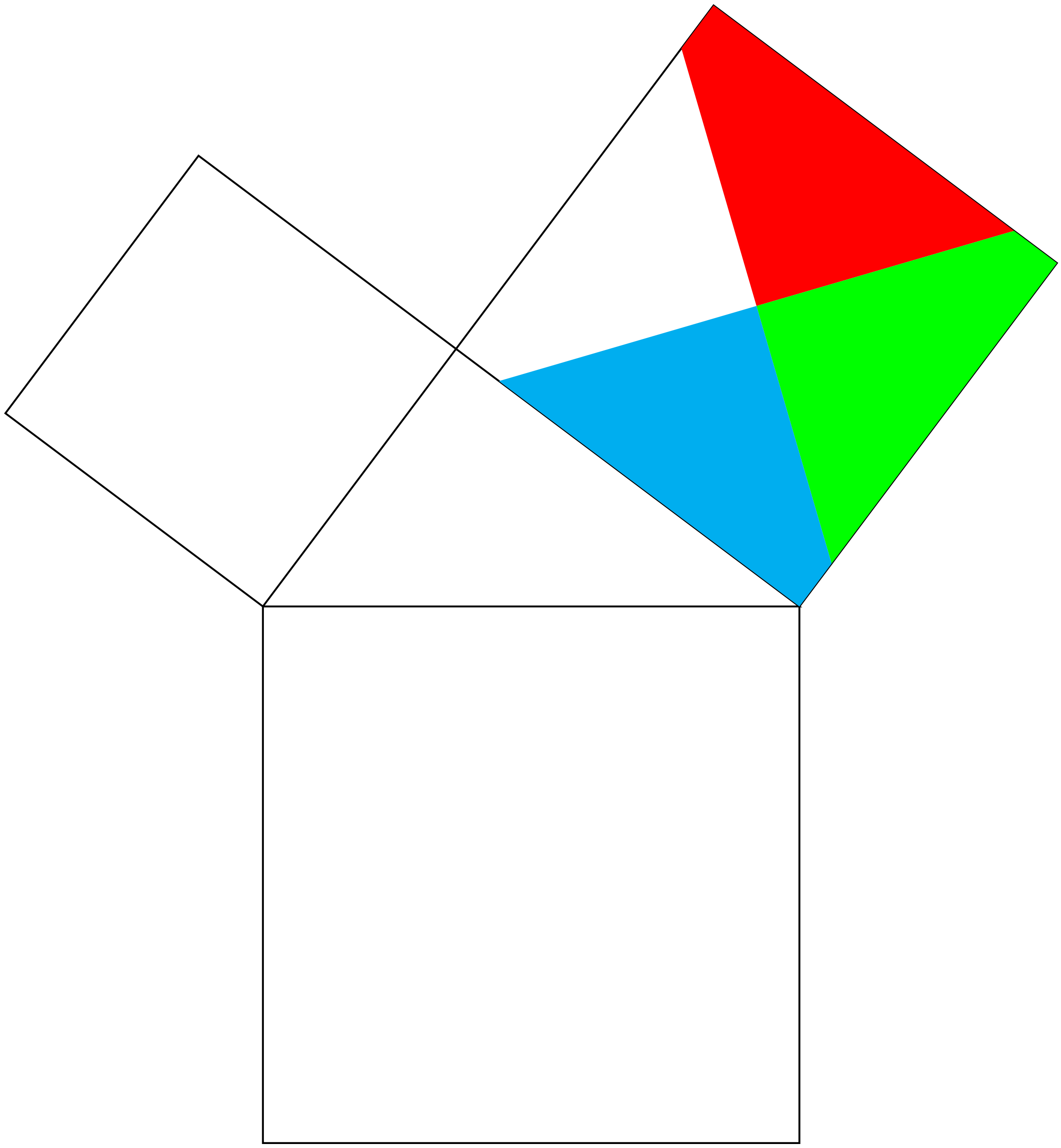
Positionner les 10 pièces sur la figure constituée d'un triangle rectangle et des carrés construits sur chacun de ses côtés.

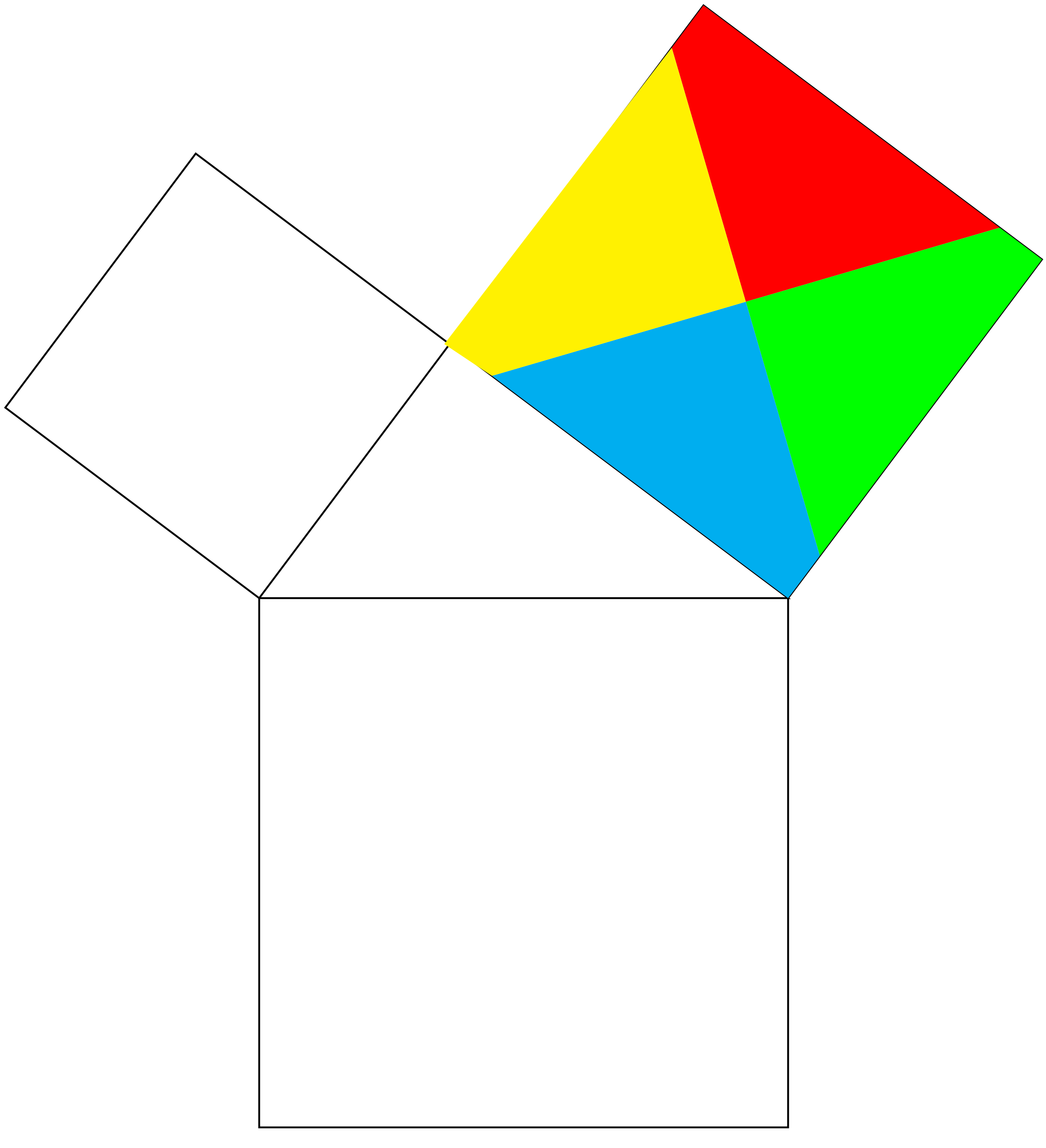


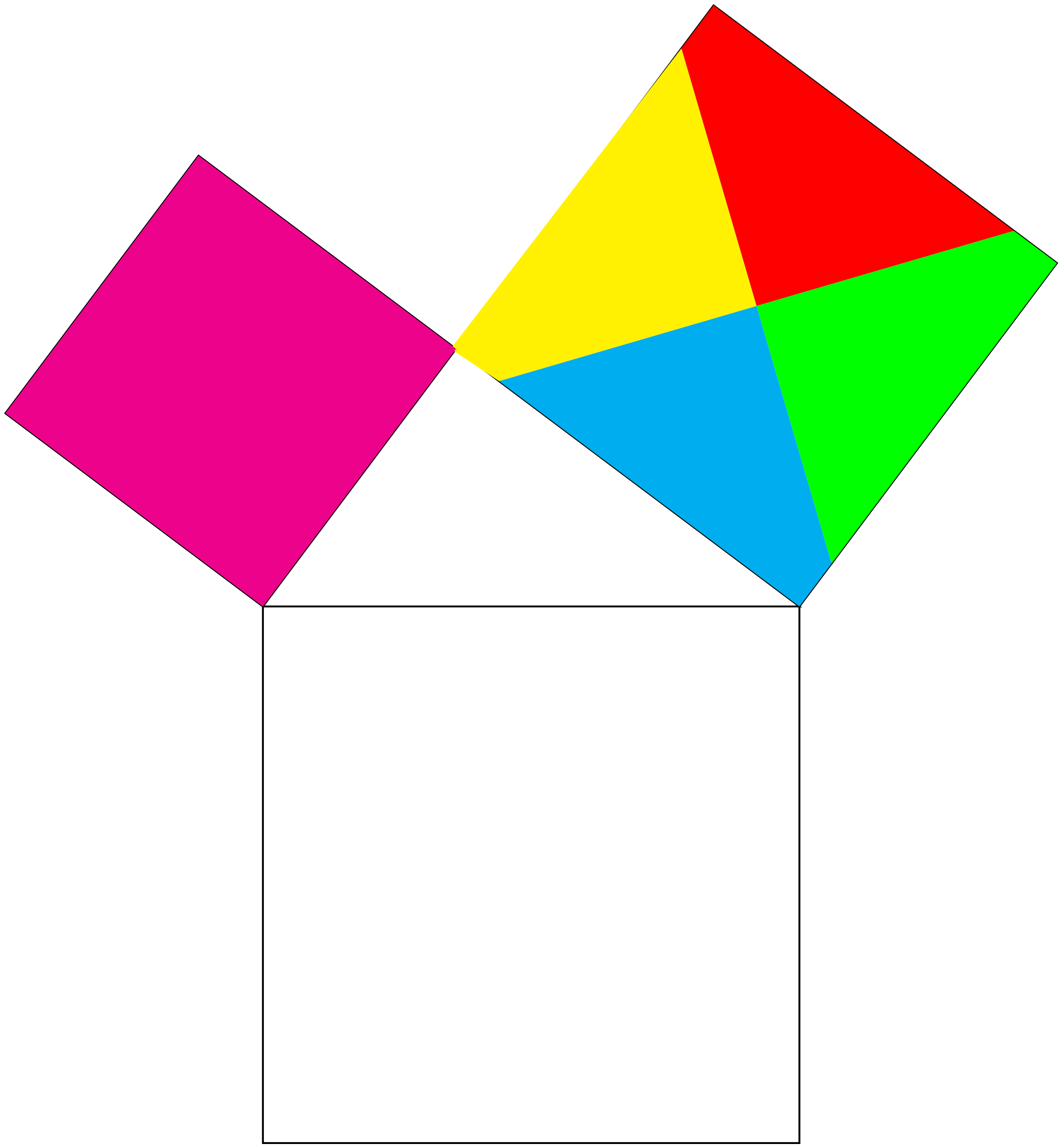


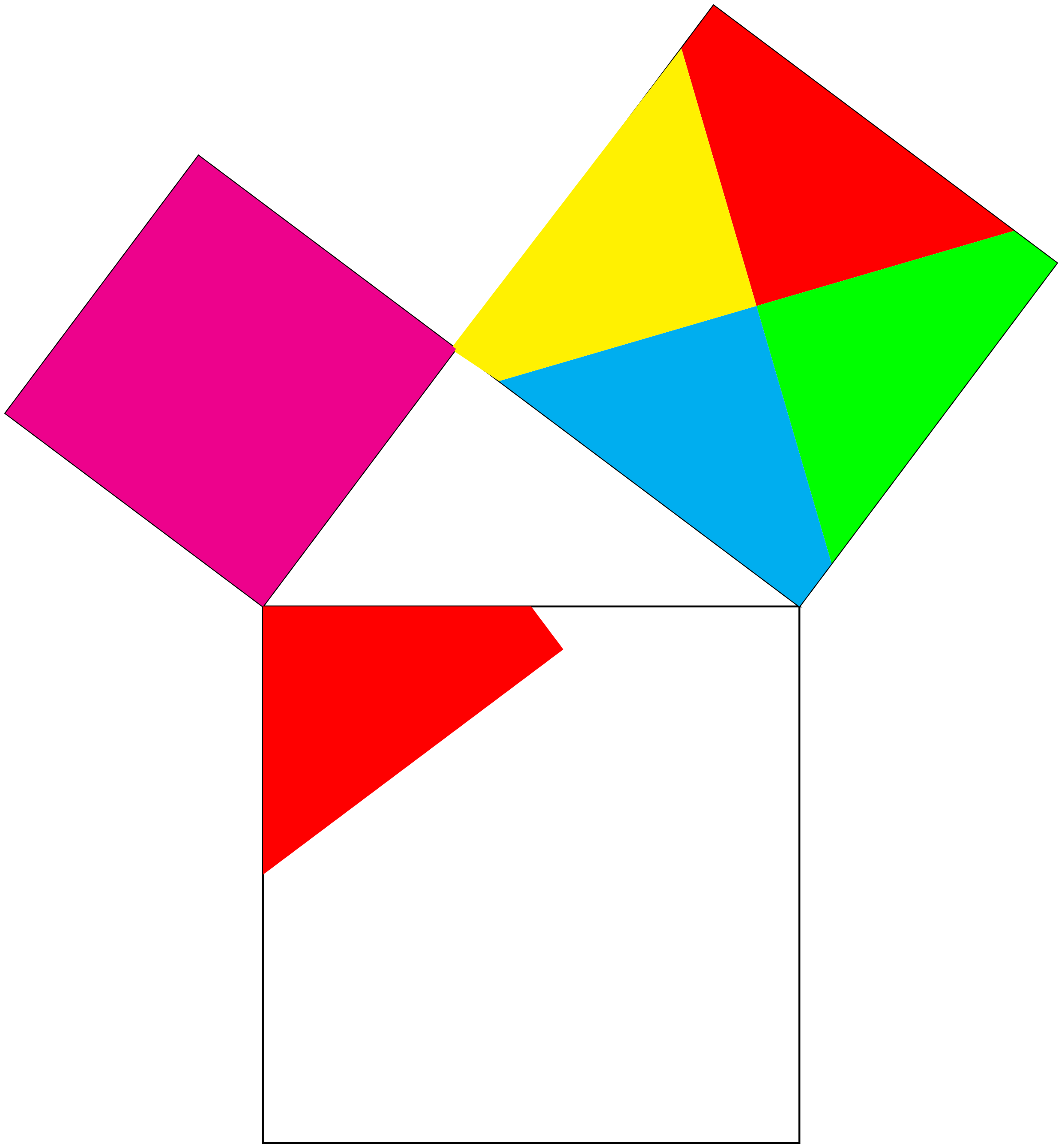


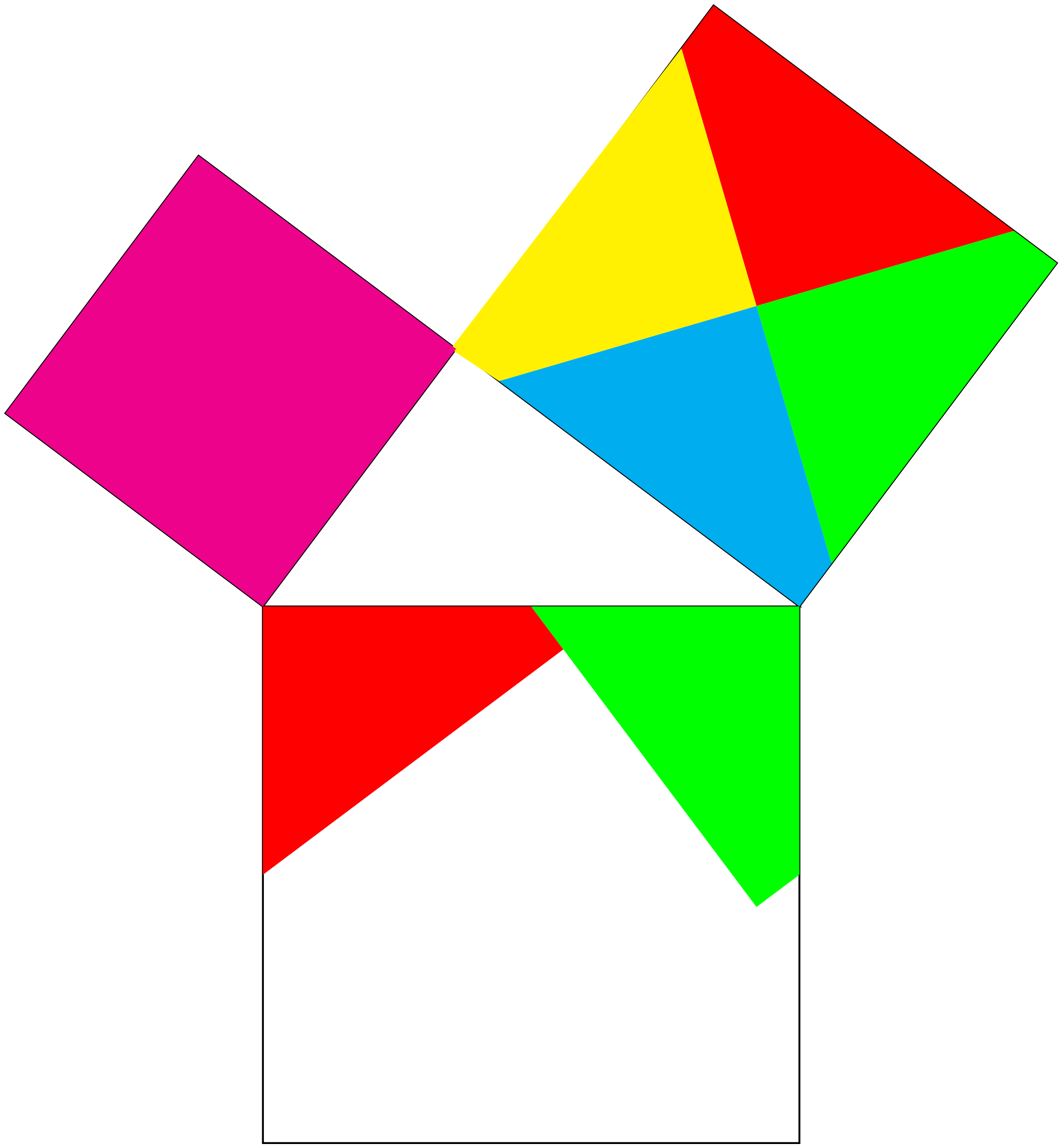


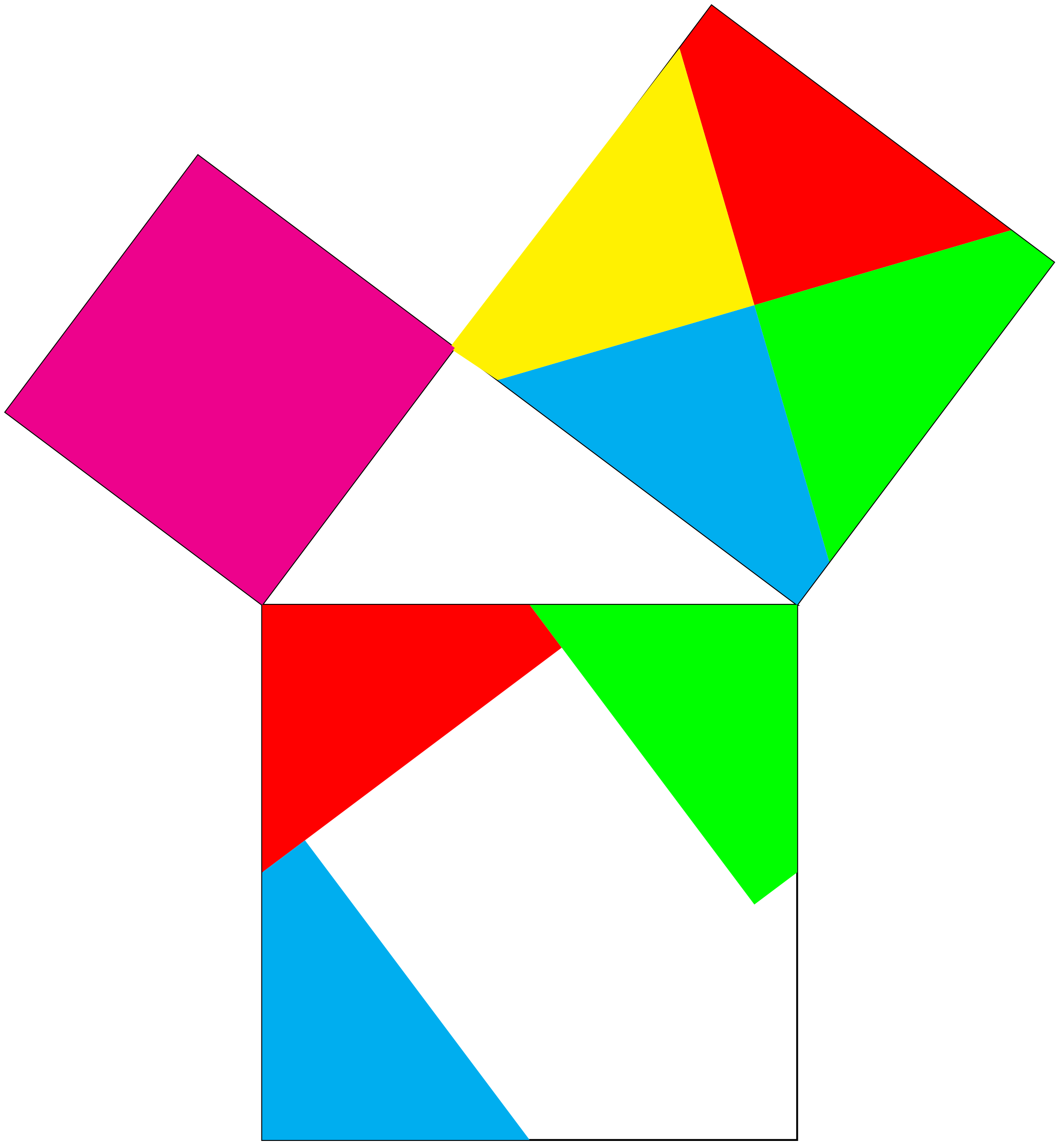


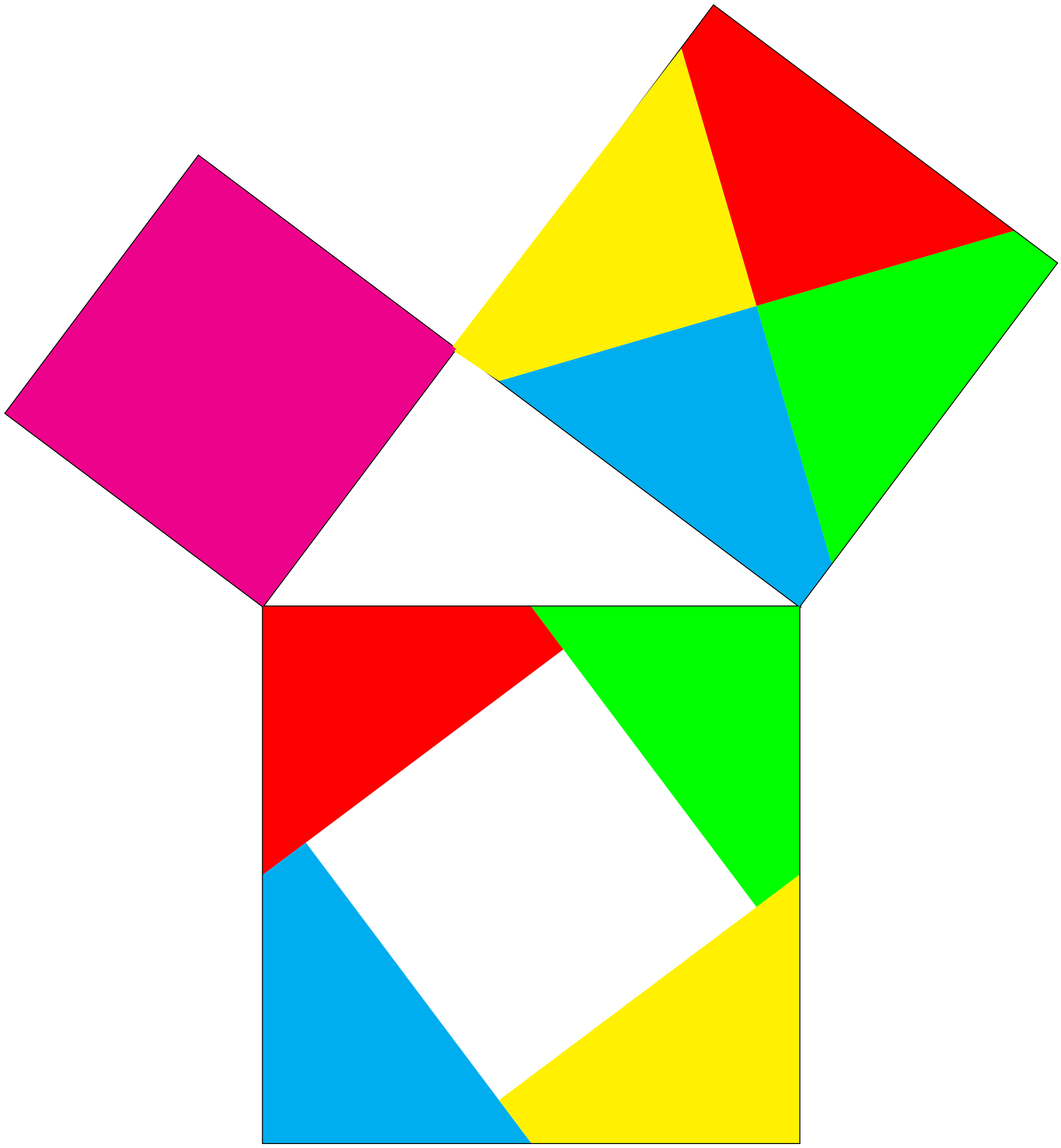


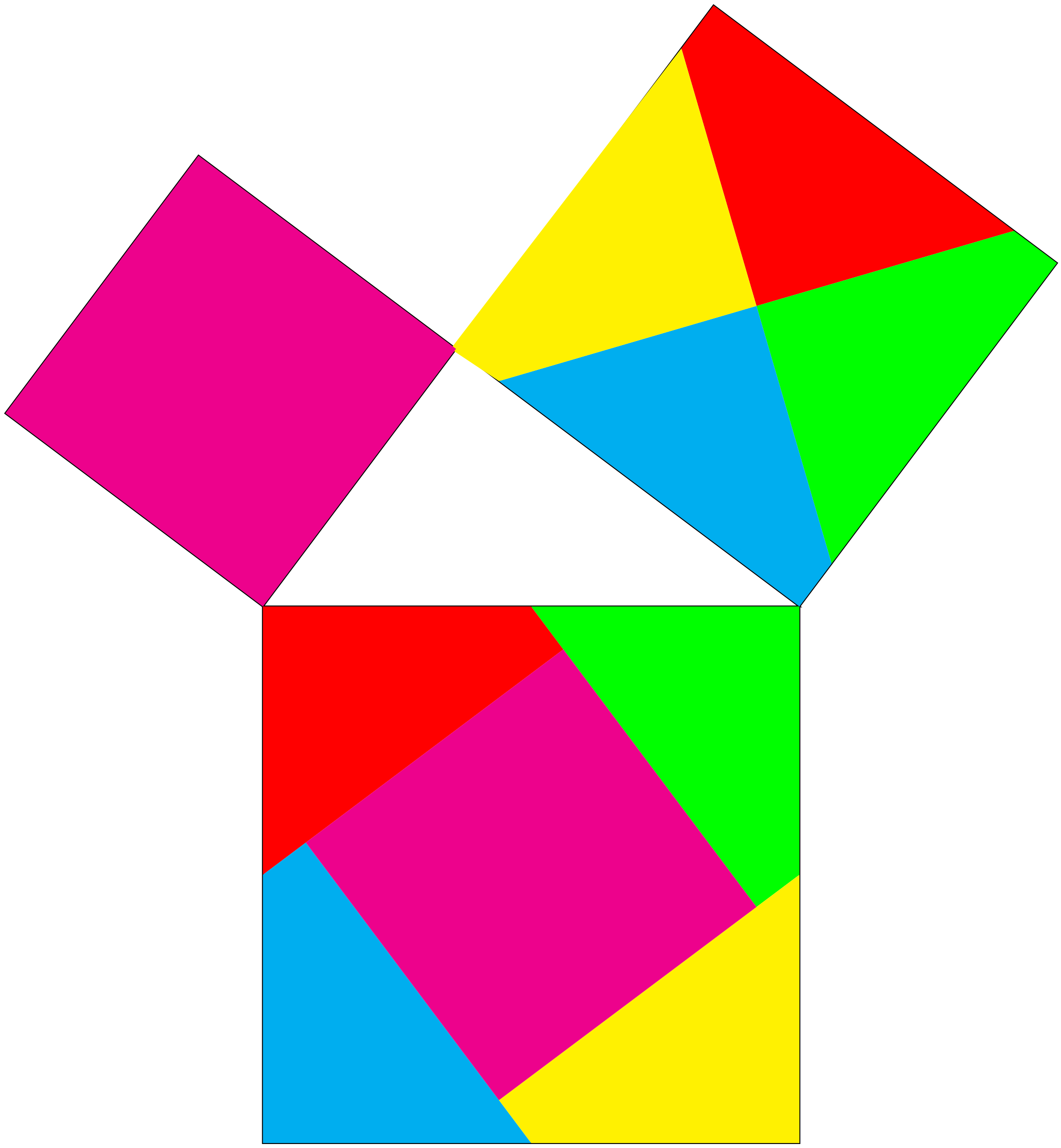


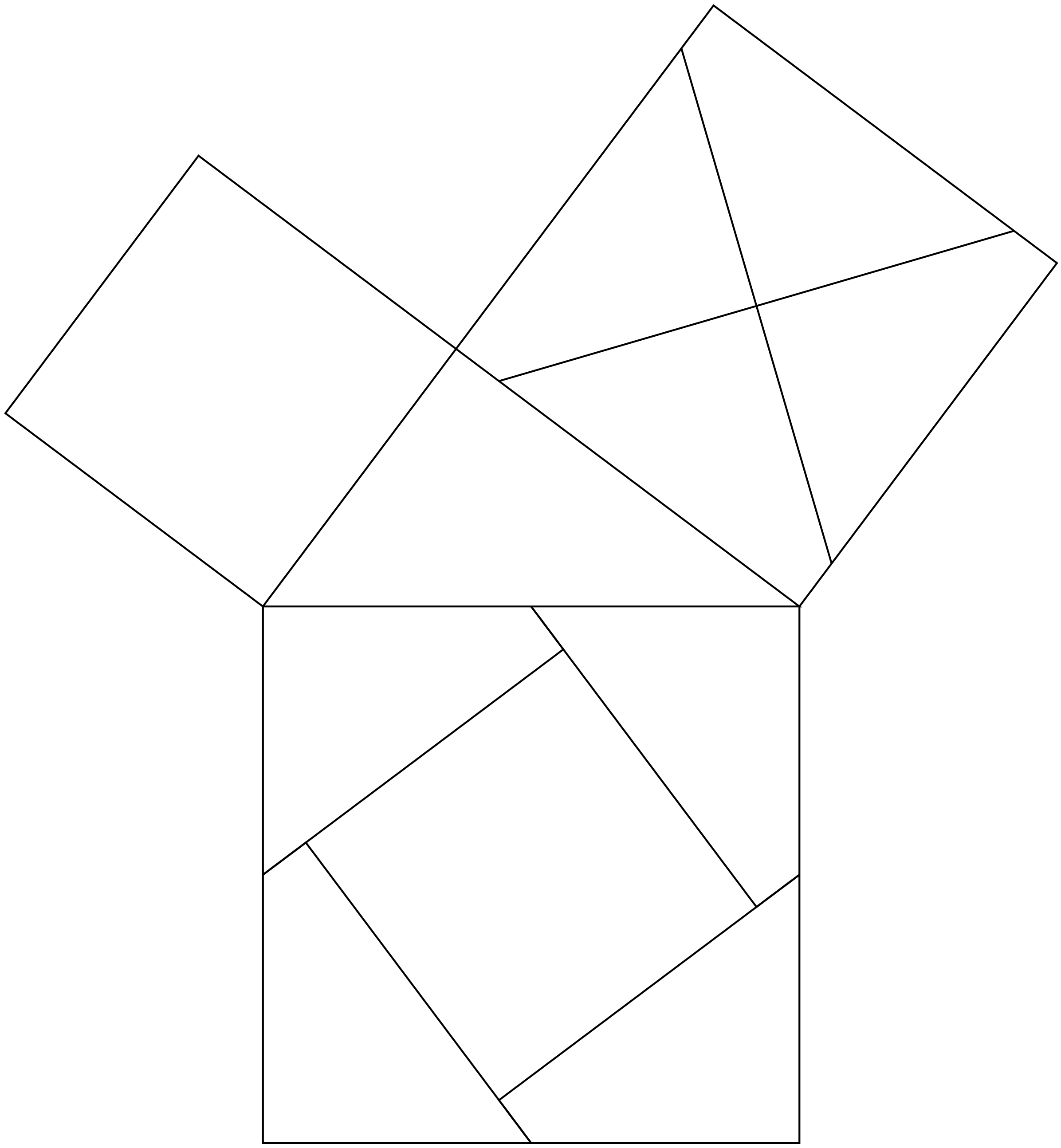












Infox

Le puzzle de Lewis Carrol

Quatrieme

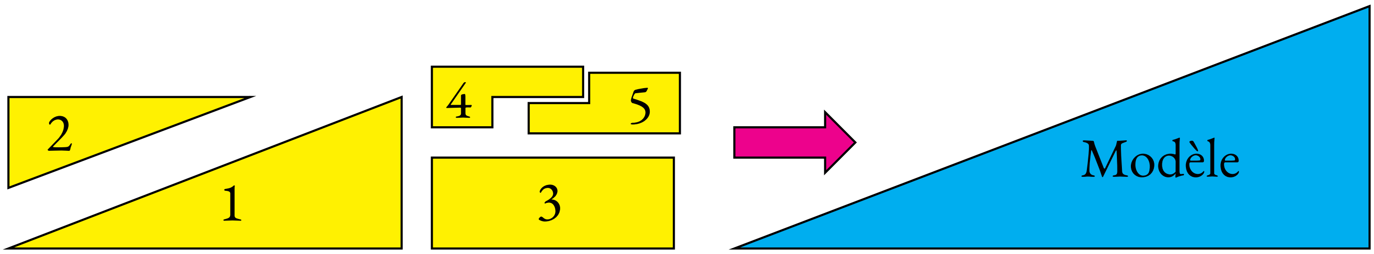
Première partie : les deux puzzles

Sur le document fourni en annexe se trouve deux rectangles quadrillés et les pièces nécessaires pour construire deux puzzles.

Découper les cinq pièces identiques de chaque puzzle et les deux rectangles quadrillés.

Les pièces du puzzle A et du puzzle B permettent de construire la même figure par **deux méthodes différentes**, plus précisément aucune des pièces du puzzle A et du puzzle B ne doivent se situer au même endroit.

À vous de trouver ces deux méthodes puis de coller les pièces sur les rectangles quadrillés une fois votre construction validée.



Que constatez-vous ?

Deuxième partie : comparaison des aires

1. Indiquez la nature géométrique de chacune des pièces de ce puzzle et du modèle.

2. En utilisant pour unité d'aire un carreau du quadrillage, déterminer l'aire du modèle.

3. Déterminer les aires de chacune des pièces du puzzle en utilisant la même unité.

4. En observant chacune des constructions obtenues avec les puzzles, déterminer à nouveau l'aire du grand modèle.

5. Quel paradoxe observe-t-on ?

Troisième partie : démonstration

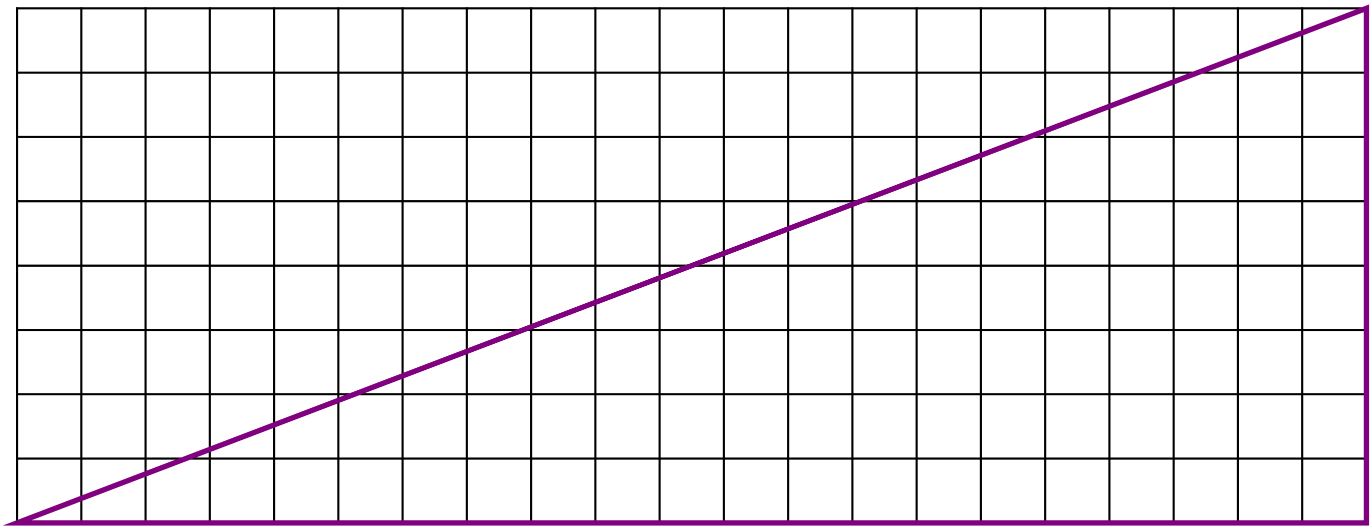
L'unité de mesure utilisée dans cette partie est la mesure du côté d'un carreau du quadrillage.

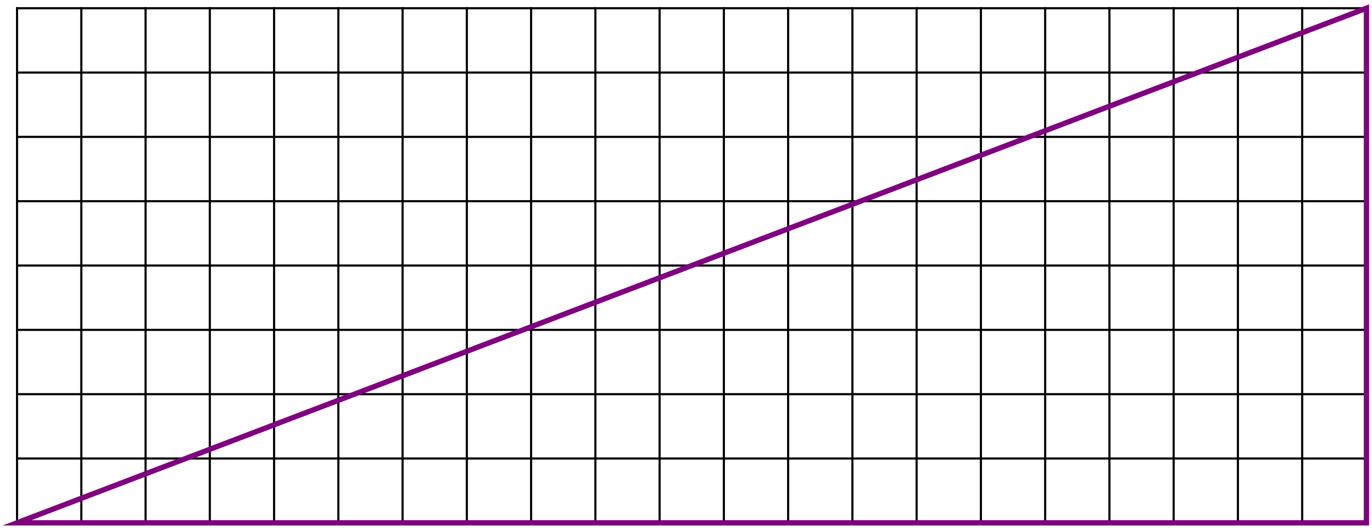
1. Calculer la mesure de l'hypoténuse du grand triangle rectangle obtenu après la construction du puzzle.

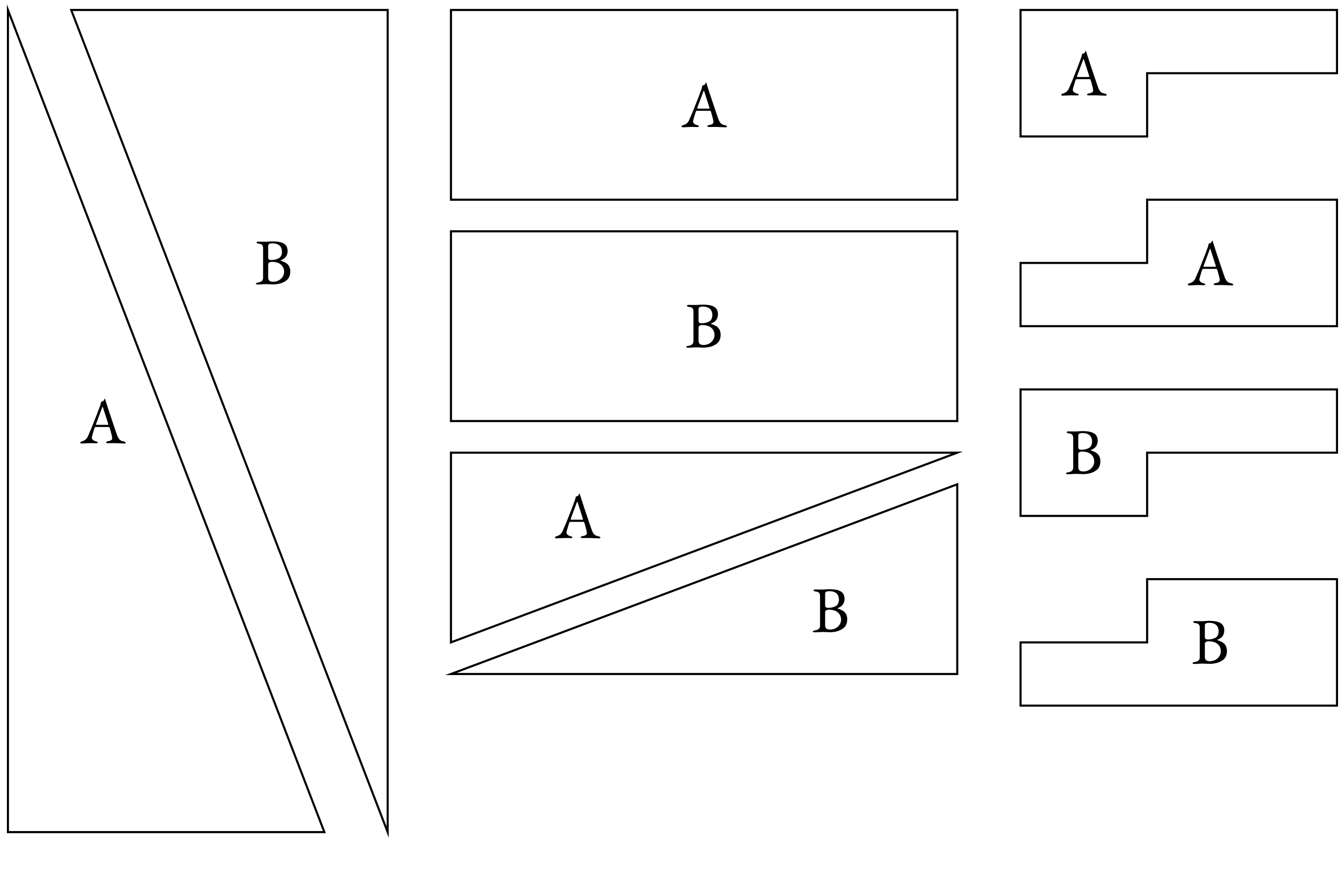
2. Calculer la mesure de l'hypoténuse de chacune des deux pièces en forme de triangle rectangle du puzzle.

3. Quelle relation devrait-on trouver entre les mesures calculées aux questions **1.** et **2.**.

4. Voyez-vous une explication au paradoxe observé dans la deuxième partie ?






B
A
A
B
A
B
A
A
B
B

Infox

Le puzzle de Lewis Carrol — Correction

Première partie : les deux puzzles

Voir page précédente.

Seconde partie : comparaison des aires

1. Il y a deux triangles rectangles, un rectangle et deux hexagones.

2. Le grand triangle rectangle a une base qui mesure 21 carreaux et une hauteur qui mesure 8 carreaux.

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = \frac{21 \times 8}{2} = \frac{168}{2} = 84$$

3. En unité d'aire on obtient pour le puzzle :

$$\text{Aire(petit triangle rectangle)} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = \frac{13 \times 5}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$$

$$\text{Aire(rectangle)} = 8 \times 3 = 24$$

$$\text{Aire(petit hexagone)} = 7$$

$$\text{Aire(grand hexagone)} = 8$$

4. On obtient pour l'un des puzzles :

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = 32,5 + 12 + 24 + 7 + 8 = 83,5$$

Et pour l'autre :

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = 32,5 + 12 + 24 + 7 + 8 + +1 = 84,5$$

5. Nous avons obtenu trois mesures différentes de l'aire avec trois méthodes différentes !!

Troisième partie : démonstration

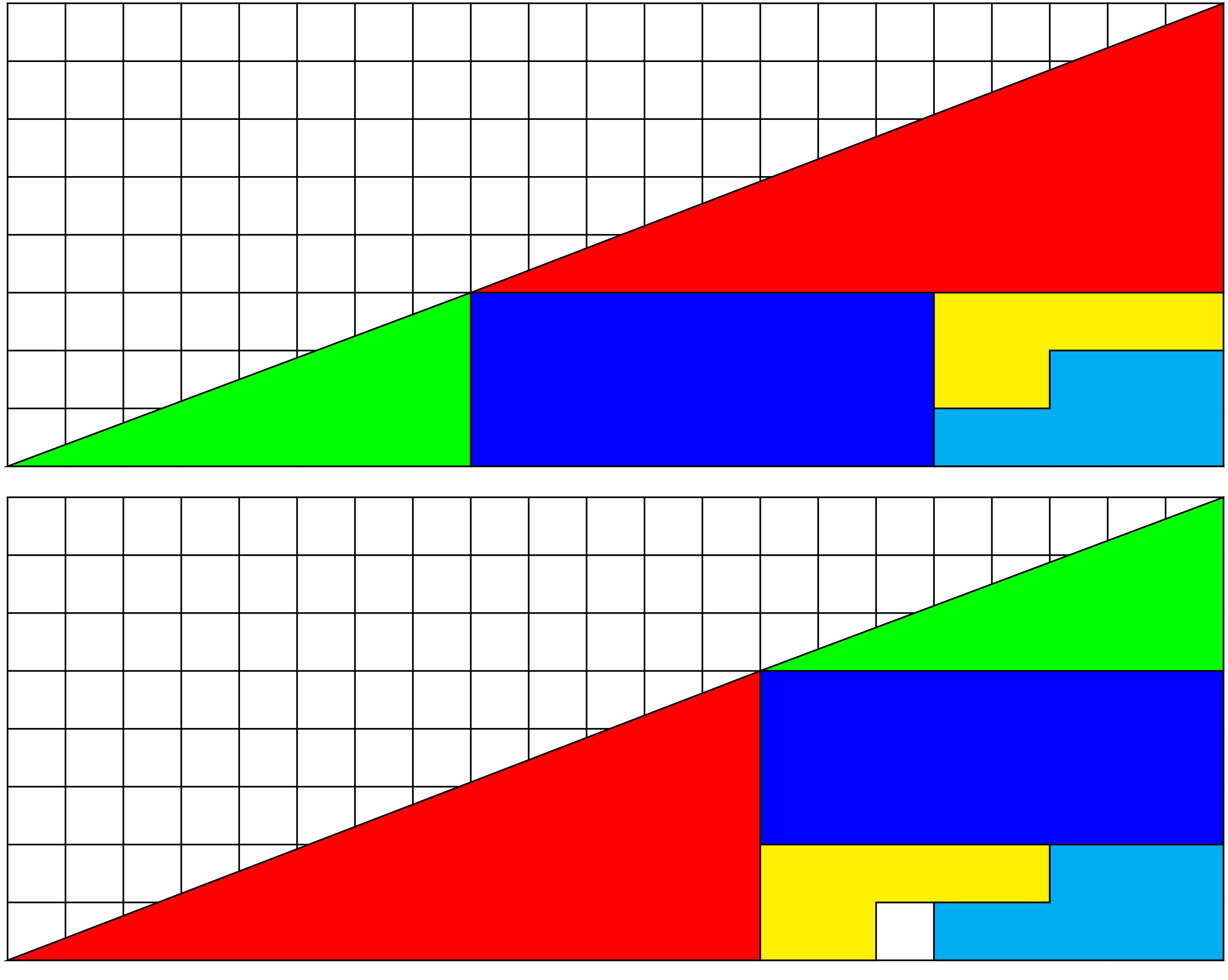
1. La grand triangle rectangle a une base qui mesure 21 et une hauteur de 8.
En utilisant le théorème de Pythagore on obtient :
Comme $21^2 + 8^2 = 441 + 64 = 505$ son hypoténuse mesure $\sqrt{505} \approx 22,47$

2. Les deux triangles rectangles du puzzle ont respectivement des côtés de l'angle droit dont les mesures sont :
8 et 3 pour l'un et 13 et 8 pour l'autre.
En utilisant le théorème de Pythagore dans ces deux cas on obtient :
Comme $8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$ l'un des hypoténuses mesure $\sqrt{73} \approx 8,54$
Et $13^2 + 8^2 = 169 + 64 = 233$ l'autre mesure $\sqrt{233} \approx 15,26$

3. La somme des mesures des deux hypoténuses des pièces du puzzle devrait être égale à l'hypoténuse du grand triangle rectangle.
Or on constate que $\sqrt{73} + \sqrt{233} \approx 23,8$

Donc $\sqrt{73} + \sqrt{233} > \sqrt{505}$

4. Le plus court chemin entre deux points est le segment. Nous déduisons des calculs précédents que les deux hypoténuses des triangles des pièces du puzzle ne sont pas alignés avec l'hypoténuse du grand triangle.
Contrairement à ce que nous voyons, les pièces du puzzle proposés ne permettent pas de construire un triangle rectangle.
Les angles des deux pièces en forme de triangle rectangle ne sont pas superposables. C'est invisible à l'oeil nu ! Le tracé imparfait et le découpage empêchent d'observer ce décalage !



La connaissance scientifique

La **connaissance scientifique** est fondée sur quatre piliers :

— **Premier pilier** : **La question initiale** .
À l'origine de toute connaissance scientifique se trouve une **question** qui interroge le monde dans lequel nous vivons. Une connaissance est une réponse à une question.
« Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on en dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » — Gaston Bachelard

— **Deuxième pilier** : **Le réalisme** .
Le monde des idées n'a pas la priorité sur le monde physique. Le monde là dehors existe indépendamment et antérieurement à la perception que j'en ai et aux descriptions que l'on en fait.

— **Troisième pilier** : **La rationnalité** .
Cela consiste à respecter les lois de la logique fournies par les mathématiques. Cela demande également d'accepter seulement les théories les plus économiques en hypothéses de départ.

— **Quatrième pilier** : **Le matérialisme** .
Les expériences scientifiques n'utilisent que des éléments du monde réel et matériel, cela exclu les définitions immatérielles comme les esprits.

Croyance et opinion

Croyance :
« La croyance est le processus mental expérimenté par une personne qui adhère à une thèse ou une hypothèse, de façon qu'elle les considère comme vérité, indépendamment des faits, ou de l'absence de faits, confirmant ou infirmant cette thèse ou cette hypothèse. Ainsi, les croyances sont souvent des certitudes sans preuve. » — Wikipédia

Opinion :
*« L'opinion est un jugement que l'on porte sur un individu, un être vivant, un phénomène, un fait, un objet ou une chose.
Elle peut être considérée comme bonne ou mauvaise. »* — Wikipédia

Biais cognitifs

**Je suis le frère de deux aveugles.
Pourtant, ces deux aveugles ne sont pas mes frères.
Comment est-ce possible ?**

Biais cognitif :
Ce sont des **heuristiques** ou raccourci mentaux qui nous conduisent presque toujours à porter un faux jugement.
Nous utilisons les biais cognitifs lorsque :

— il y a un trop grand nombre d'informations à traiter ;
— nous avons besoin de donner du sens au monde qui nous entoure ;
— nous avons besoin d'agir vite ;
— nous avons besoin de mémoriser les choses pour plus tard.

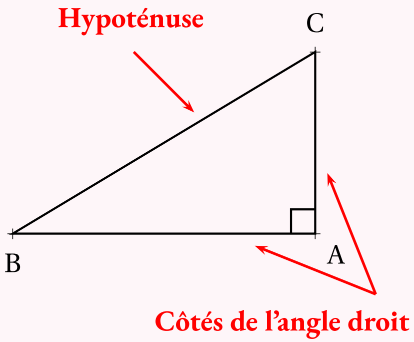
Voici quatre exemples :

Biais d'ancrage	Effet d'entraînement	Biais de confirmation	Biais de Blind-Spot
On a tendance à être trop dépendant de la première information entendue ou observée.	La probabilité pour qu'une personne adopte une croyance augmente proportionnellement au nombre de personnes qui ont cette croyance.	Tendance à ne porter attention qu'aux informations qui confirment nos opinions.	Le fait de ne pas réussir à identifier ses propres biais est un biais en lui-même.

Égalité de Pythagore

Vocabulaire du triangle rectangle

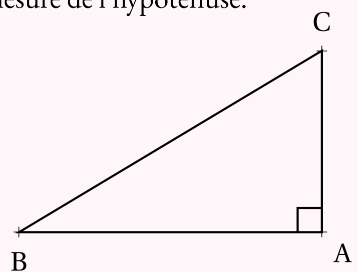
Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** désigne le côté qui n'est pas adjacent à l'angle droit. L'**hypoténuse** est le plus long côté d'un triangle rectangle.



Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle

alors la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.



Si ABC est rectangle en A

alors

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Contraposée du théorème de Pythagore

Si un dans un triangle la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés **n'est pas égale** au carré de la mesure du plus grand côté

alors ce triangle n'est pas rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore

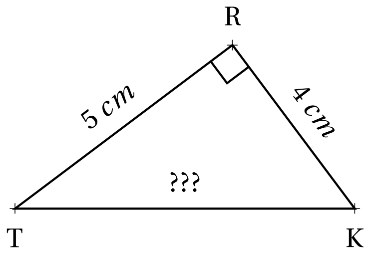
Si un dans un triangle la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés **est égale** au carré de la mesure du plus grand côté

alors ce triangle est rectangle.

Calculer la mesure de l'hypoténuse :

Dans le triangle TKR rectangle en R, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

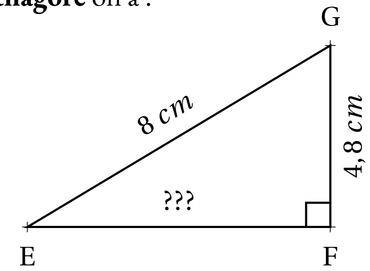
$$\begin{aligned} RT^2 + RK^2 &= TK^2 \\ 5^2 + 4^2 &= TK^2 \\ 25 + 16 &= TK^2 \\ TK^2 &= 41 \\ TK &= \sqrt{41} \\ \boxed{TK \approx 6{,}4\ cm} \end{aligned}$$



Calculer la mesure d'un côté de l'angle droit :

Dans le triangle EFG rectangle en F, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned} FG^2 + FE^2 &= GE^2 \\ 4{,}8^2 + FE^2 &= 8^2 \\ 23{,}04 + FE^2 &= 64 \\ FE^2 &= 64 - 23{,}04 \\ FE^2 &= 40{,}96 \\ FE &= \sqrt{40{,}96} \\ \boxed{FE = 6{,}4\ cm} \end{aligned}$$



Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

MNO un triangle tel que :

- $MN = 78\ mm$
- $MO = 103\ mm$
- $NO = 130\ mm$

MNO **est-il rectangle ?**

[NO] est le plus grand côté, comparons $MN^2 + MO^2$ et NO^2

$MN^2 + MO^2$	NO^2
$78^2 + 103^2$	130^2
$6\,084 + 10\,609$	$16\,900$
$16\,693$	

$$MN^2 + MO^2 \neq NO^2$$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle MNO n'est pas rectangle}}$.

Démontrer qu'un triangle est rectangle :

LKU un triangle tel que :

- $LK = 11{,}7\ m$
- $KU = 10{,}8\ m$
- $LU = 4{,}5\ m$

LKU **est-il rectangle ?**

[LK] est le plus grand côté, comparons $UK^2 + UL^2$ et LK^2

$UL^2 + UK^2$	LK^2
$4{,}5^2 + 10{,}8^2$	$11{,}7^2$
$20{,}25 + 116{,}64$	$136{,}89$
$136{,}89$	

$$UK^2 + UL^2 = LK^2$$

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle LKU est rectangle en U}}$.

Remarques et intentions pédagogiques

[1]du latin hypotenusa venant du grec hypoteinousa, c'est le participe présent de hypoteínô qui signifie sous-tendre ou soutenir. Dans la proposition I.19 des Éléments d'Euclide, il est dit que « Dans tout triangle, le plus grand côté est celui opposé au plus grand angle. »

[2]Les nombres $(3;4;5)$ forment un triplet Pythagoricien. C'est un triplet primitif au sens où ces trois nombres n'ont pas de diviseurs communs. Voici les triplets primitifs inférieurs à 100

$$(3;4;5)--(5;12;13)--(8;15;17)--(7;24;25)--(20;21;29)--(12;35;37)--(9;40;41)--(28;45,53)--(11;60;61)--(16;63;65)--(33;56;65)--(48;55;73)--(13$$

[3]Il faut bien sur supposer connu le fait que la fonction racine carrée est croissante. Le raisonnement suivant demanderait d'utiliser la continuité et la stricte croissante de la fonction carrée pour obtenir son inverse et la continuité de la fonction racine. C'est hors de propos en troisième...

1 **Activité — Le puzzle de Lewis Carrol**

Mes intentions sont claires

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD

— **Web :** pi.ac3j.fr

— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 23 juin 2024 à 16:21

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.