Chapitre V

Le théorème de Thalès

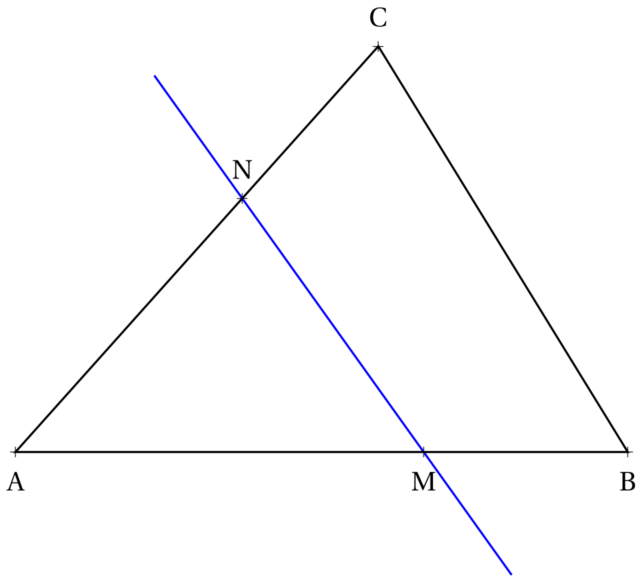
Sommaire

Parallèles et longueurs

Quatrieme

Situation Initiale

Voici deux triangles égaux, ABC et DEF dont les mesures sont AB = DE = 81 mm, BC = EF = 72 mm et AC = DF = 63 mm :



Situation Initiale

Parallèles et longueurs — Correction

Situation initiale : La droite des milieux, la droite des tiers

La droite des milieux

1. Tracer sur une feuille blanche le triangle ABC tel que AB = 8 cm, AC = 12 cm et BC = 14 cm.
Placer M le milieu de [AB] puis la droite parallèle à la droite (BC) passant par M.
Cette droite coupe le segment [AC] en N.

2. Mesurer le segment [MN]. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur la position du point N et sur la longueur MN ?

Nous allons démontrer que N est le milieu du segment [AC] et quelques petites choses en plus...

3. Placer N′ le symétrique du point N par rapport au point M.

4. Que dire du quadrilatère AN′BN ? Démontrer cette conjecture.

5. Que dire du quadrilatère NN′BC ? Démontrer cette conjecture.

6. Expliquer pourquoi AN = N′B et N′B = NC. Que pouvez-vous dire du point N ?

7. Expliquer pourquoi NN′ = BC. Que dire de la longueur MN par rapport la longueur BC ?

8. Calculer les quotients : $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$, $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ et $\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

Quelle est votre conclusion ?

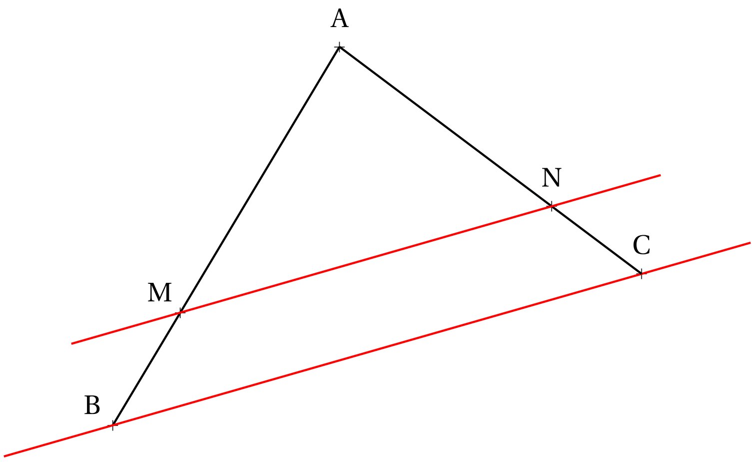
La droite des tiers

1. Tracer sur une feuille blanche un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 9 cm et BC = 12 cm.
Placer M sur le segment [AB] tel que AM = 2 cm.
Tracer la parallèle à (BC) passant par M, elle coupe le segment [AC] en N.

2. En mesurant AM et MN calculer les trois quotients comme à la question **8.** de la première partie.
Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

I — Le théorème de Thalès

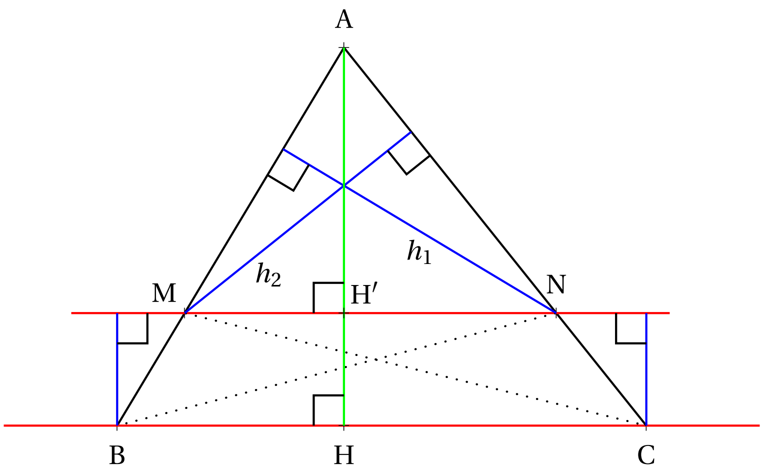
Théorème 5.1 : Théorème de Thalès



Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Démonstration :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.
$\mathscr{A}\rangle\nabla]$(MNB) = $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(MNC)

$\mathscr{A}\rangle\nabla]$(AMN) = AM × h_1 et $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(ABN) = AB × h_1 ainsi $\dfrac{\mathscr{A}\rangle\nabla](AMN)}{\mathscr{A}\rangle\nabla](ABN)} = \dfrac{AM}{AB}$

$\mathscr{A}\rangle\nabla]$(AMN) = AN × h_2 et $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(ACM) = AC × h_2 ainsi $\dfrac{\mathscr{A}\rangle\nabla](AMN)}{\mathscr{A}\rangle\nabla](ACM)} = \dfrac{AN}{AC}$

On constate que $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(ABN) = $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(AMN) + $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(MNB) et que $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(ACM) = $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(AMN) + $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(MNC)
Comme $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(MNB) = $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(MNC) on prouve ainsi que $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(ABN) = $\mathscr{A}\rangle\nabla]$(ACM)

Finalement $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.

On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$
De même dans le triangle AHC, on obtient $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc $\mathscr{A}\rangle\nabla](NH'C) = \mathscr{A}\rangle\nabla](NH'H)$
Ainsi $\mathscr{A}\rangle\nabla](AH'C) = \mathscr{A}\rangle\nabla](AHN)$ c'est-à-dire $\dfrac{AH' \times HC}{2} = \dfrac{AH \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$
$$(H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC)$$
$$MN \times HC = H'N \times BC$$

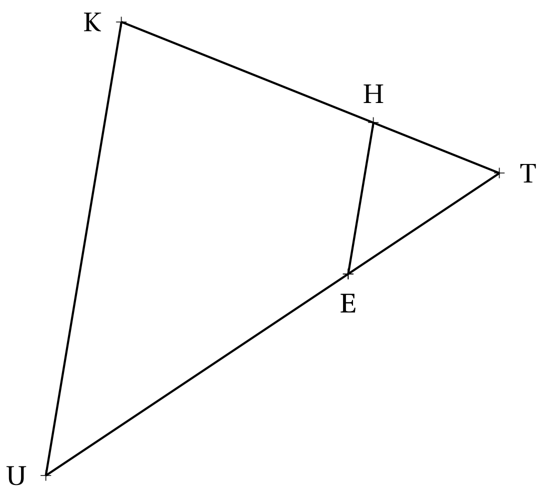
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC} = \dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$

CQFD

II — Usage du théorème de Thalès

Méthode 5.1 : Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès



On sait que :

(TH)//(UK)

TE = 3 cm

TU = 10 cm

UK = 15 cm

TH = 4 cm

On souhaite calculer les longueurs EH et TK

1. Analyse de la figure

Les droites parallèles sont (EH) et (UK).
Dans le triangle TUK le point T est situé « en face »des deux droites parallèles.
Le point T est donc le point important pour appliquer le théorème de Thalès.

2. Recherche des trois quotients égaux

On part du point T : le point important.

Sur le segment [TU] nous avons le point E. Donc en regardant dans l'ordre on a T, E et U.

On écrit dans cet ordre le premier quotient : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}}$.

Sur le segment [TK] nous avons le point H. Donc en regardant dans l'ordre on a : T, H et K.

On écrit dans cet ordre le second quotient : $\frac{\text{TH}}{\text{TK}}$

Nous en sommes à : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}}$.

En observant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux quotients, on obtient le troisième en oubliant T : $\frac{\text{EH}}{\text{UK}}$

Voici donc l'égalité attendue : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$

On vérifie la cohérence de l'écriture : E et H sont au numérateur ; U et K au dénominateur.

3. Rédaction

Dans le triangle TUK, E ∈ [TU] et H ∈ [TK] (cela veut juste dire que E est sur [TU] et H sur [TK] !)
Les droites (EH) et (UK) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$$

Remplaçons par les grandeurs connues :

$$\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{TK} = \frac{4\ cm \times 10\ cm}{3\ cm} = \frac{40}{3}\ cm \approx 13,3\ cm$

Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{\text{EH}}{15\ cm}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{EK} = \frac{15\ cm \times 3\ cm}{10\ cm} = \frac{45}{10}\ cm = 4,5\ cm$

Ainsi $\boxed{\text{TK} \approx 13,3\ cm}$ et $\boxed{\text{EK} = 4,5\ cm}$.

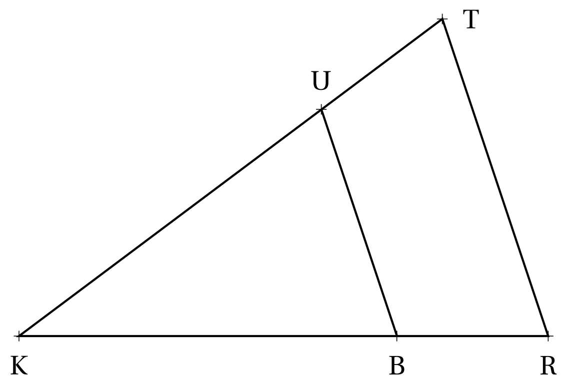
*En pratique, quand on rédige seule la partie **3.** doit apparaître sur une copie !*

Évaluation de mathématiques

Exercice n° 1 : *8 points* ☆☆

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

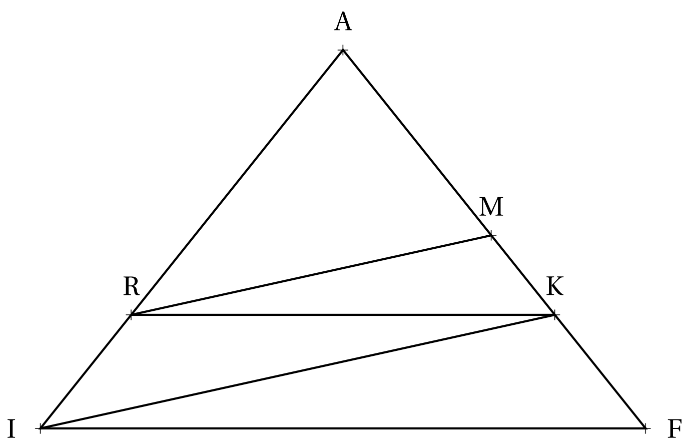
— KTR est un triangle;
— K, B et R sont alignés;
— K, U et T sont alignés;
— KU = 12 cm;
— KT = 15 cm;
— KB = 14 cm;
— UB = 8 cm.



1. Calculer TR et KR.

2. Le triangle KUB est-il rectangle ?

Exercice n° 2 : *6 points* ☆☆



Sur la figure ci-après, nous avons les informations suivantes :

— AIF est un triangle;
— les points A, I et R sont alignés;
— les points A, M, K et F sont alignés;
— AR = 160 mm et AI = 256 mm;
— AK = 180 mm et AF = 288 mm;
— AM = 112 mm.

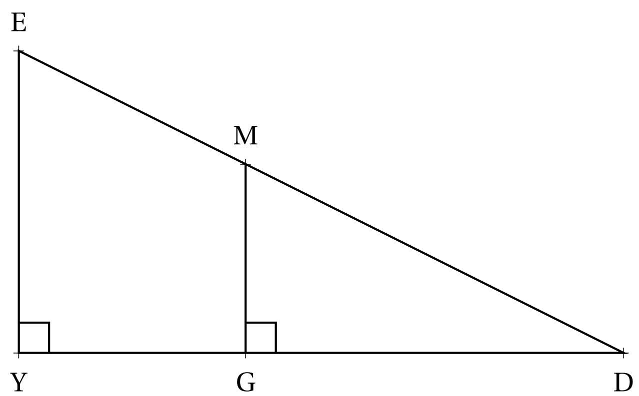
1. Les droites IF et RK sont-elles parallèles ?

2. Les droites IK et RM sont-elles parallèles ?

Exercice n° 3 : *6 points* ☆☆☆

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

— DYE et DGM sont des triangles rectangles;
— DG = 48 dm et DM = 60 dm;
— YE = 54 dm



1. Montrer que MG = 36 dm.

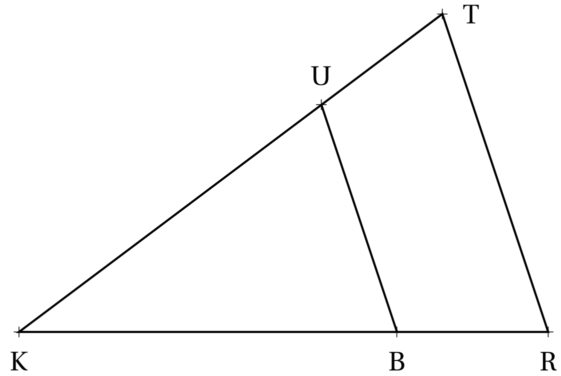
2. Calculer YG et EM.

Évaluation de mathématiques

Exercice n° 1 : *8 points*

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

- KTR est un triangle ;
- K, B et R sont alignés ;
- K, U et T sont alignés ;
- KU = 12 cm ;
- KT = 15 cm ;
- KB = 14 cm ;
- UB = 8 cm.



1. Calculer TR et KR.

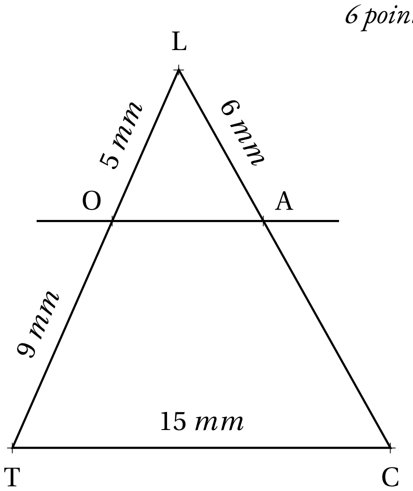
2. Le triangle KUB est-il rectangle ?

Exercice n° 2 : *6 points*

Sur la figure ci-après, qui n'est pas représentée en vraies grandeurs, nous savons que :

- les points L, O et T sont alignés ;
- les points L, A et C sont alignés ;
- les droites (OA) et (TC) sont parallèles.

Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millième près des longueurs OA et AC.



Exercice n° 3 : *6 points*

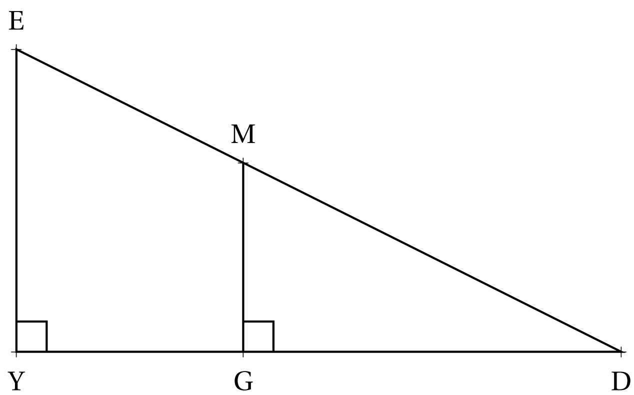
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

- DYE et DGM sont des triangles rectangles ;
- DG = 48 dm et DM = 60 dm ;
- YE = 54 dm

1. Montrer que MG = 36 dm.

2. Expliquer pourquoi les droites (MG) et (EY) sont parallèles.

3. Calculer YG et EM.



Évaluation

Quatrieme

Exercice n° 1 :

8 points

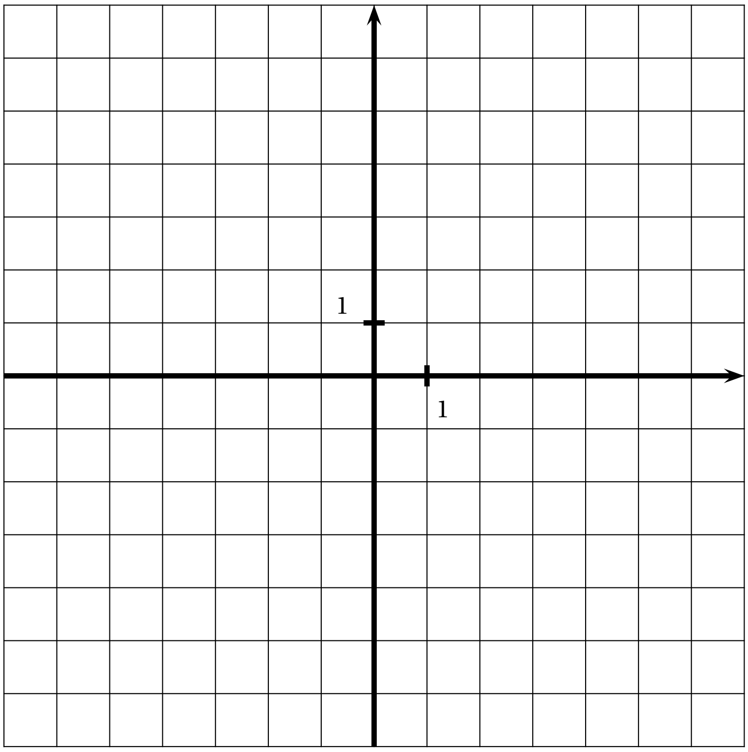
1. Placer les points suivants dans le repère ci-contre :

A(−1; 7) — B(−2; 3) — C(−1; −3)

(D(2; −4) — E(5; −3) — F(6; 3)

G(5; 7) — H(4; 3) — I(2; 4) — J(0; 3)

Relier ces points dans l'ordre alphabétique



2. Placer les points $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1$ obtenus en appliquant les règles suivantes :

— L'abscisse de A_1 est égale à 2 moins l'abscisse de A;
— L'ordonnée de A_1 est égale à −3 plus l'ordonnée de A.

En suivant cette règle le point A_1 a pour coordonnées $A_1(3; 4)$.

Écrire sur votre copie les coordonnées de ces points et placer les dans un repère.

Relier ces points dans l'ordre alphabétique.

Exercice n° 2 :

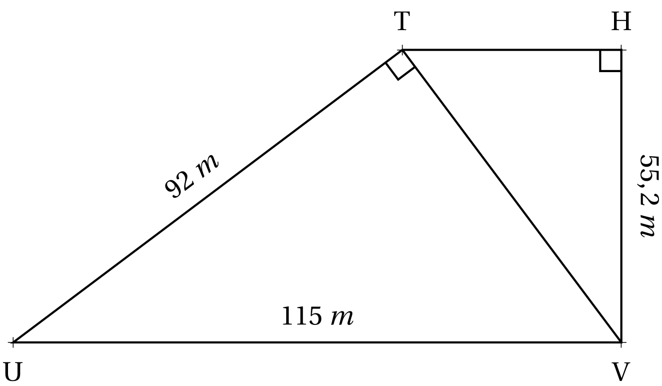
6 points

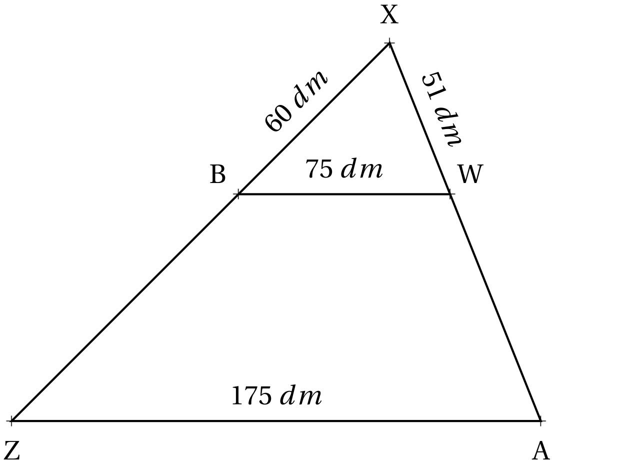
Calculer et simplifier en détaillant votre démarche :

$$A = 2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{30} + \frac{11}{15} \qquad B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{7}{6} - \frac{13}{12}\right) \qquad C = 3 - \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(3 + \frac{7}{4}\right)$$

Exercice n° 3 :

6 points





1. Calculer en détaillant votre raisonnement les longueurs TV et TH.

2. Calculer en détaillant votre raisonnement les longueurs ZX et XA.

Fractions, repère et Thalès — Correction

Exercice n° 1 : Repère
Correction

Repère orthonormé

1. Placer les points suivants dans le repère ci-contre :

A(−1;7) — B(−2;3) — C(−1;−3)

(D(2;−4) — E(5;−3) — F(6;3)

G(5;7) — H(4;3) — I(2;4) — J(0;3)

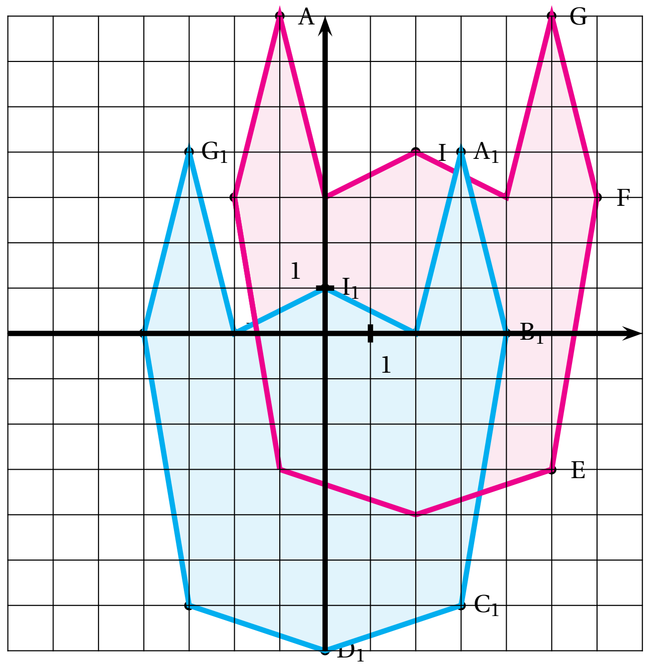
Relier ces points dans l'ordre alphabétique

2. Placer les points $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1$ obtenus en appliquant les règles suivantes :

$A_1(3;4)$ — $B_1(4;0)$ — $C_1(3;-6)$

$D_1(0;-7)$ — $E_1(-3;-6)$ — $F_1(-4;0)$

$G_1(-3;4)$ — $H_1(-2;0)$ — $I_1(0;1)$ — $J_1(2;0)$



Exercice n° 2 : Fractions
Correction

Fractions

Calculer et simplifier en détaillant votre démarche :

$A = 2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{30} + \frac{11}{15}$

$A = \frac{2}{1} - \frac{1\times 10}{3\times 10} + \frac{2\times 6}{5\times 6} - \frac{7}{30} + \frac{11\times 2}{15\times 2}$

$A = \frac{2\times 30}{1\times 30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} - \frac{7}{30} + \frac{22}{30}$

$A = \frac{60}{30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} - \frac{7}{30} + \frac{22}{30}$

$\boxed{A = \frac{77}{30}}$

$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{7}{6} - \frac{13}{12}\right)$

$B = \left(\frac{3\times 3}{4\times 3} - \frac{4\times 4}{3\times 4}\right) - \left(\frac{7\times 2}{6\times 2} - \frac{13}{12}\right)$

$B = \left(\frac{9}{12} - \frac{16}{12}\right) - \left(\frac{14}{12} - \frac{13}{12}\right)$

$B = -\frac{7}{12} - \frac{1}{12}$

$B = -\frac{8}{12}$

$\boxed{B = -\frac{2}{3}}$

$C = 3 - \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(3 + \frac{7}{4}\right)$

$C = 3 - \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{1} + \frac{7}{4}\right)$

$C = 3 - \left(\frac{1\times 7}{1\times 7} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3\times 4}{1\times 4} + \frac{7}{4}\right)$

$C = 3 - \left(\frac{7}{7} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{12}{4} + \frac{7}{4}\right)$

$C = \frac{3}{1} - \frac{5}{7} + \frac{19}{4}$

$C = \frac{3\times 28}{1\times 28} - \frac{5\times 4}{7\times 4} + \frac{19\times 7}{4\times 7}$

$C = \frac{84}{28} - \frac{20}{28} + \frac{133}{28}$

$\boxed{C = \frac{197}{28}}$

Exercice n° 3 : Thalès et Pythagore
Correction

Thalès et Pythagore

1.

Dans le triangle TUV rectangle en T,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TU^2 + TV^2 = UV^2$$
$$92^2 + TV^2 = 115^2$$
$$8\,464 + TV^2 = 13\,225$$
$$TV^2 = 13\,225 - 8\,464$$
$$TV^2 = 4\,761$$
$$TV = \sqrt{4\,761}$$
$$TV = 69$$

Dans le triangle THV rectangle en H,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HT^2 + HV^2 = TV^2$$
$$HT^2 + 55,2^2 = 69^2$$
$$HT^2 + 3\,047{,}04 = 4\,761$$
$$HT^2 = 4\,761 - 3\,047{,}04$$
$$HT^2 = 1\,713{,}96$$
$$HT = \sqrt{1\,713{,}96}$$
$$HT = 41,4$$

$\boxed{TV = 69\ m \text{ et } HT = 41,4\ m}$

2.
Dans le triangle ZAX, les droites (BW) et (ZA) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{XB}{XZ} = \frac{XW}{XA} = \frac{BW}{ZA}$$

$$\frac{60\ dm}{XZ} = \frac{51\ dm}{XA} = \frac{75\ dm}{175\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$XZ = \dfrac{60\ dm \times 175\ dm}{75\ dm}$ d'où $XZ = \dfrac{10\,500\ dm^2}{75\ dm}$ et $XZ = 140\ dm$
$XA = \dfrac{51\ dm \times 175\ dm}{75\ dm}$ d'où $XA = \dfrac{8\,725\ dm^2}{75\ dm}$ et $XA = 119\ dm$

$\boxed{XZ = 140\ dm \text{ et } XA = 119\ dm}$

Exercices

Théorème de Thalès

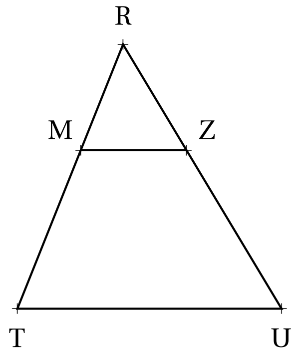
Quatrieme

Exercice n° 1 : Théorème de Thalès — Épisode 1

Situation n° 1

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

- $M \in [RT]$ et $Z \in [RU]$;
- $(MZ)//(TU)$;
- $RM = 8\ m$, $RT = 20\ m$, $RZ = 6,4\ m$ et $TU = 18\ m$

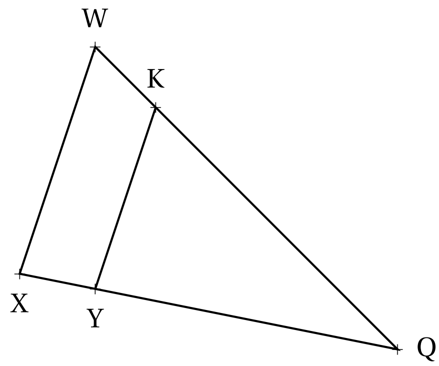


Calculer les valeurs exactes de RU et MZ.

Situation n° 2

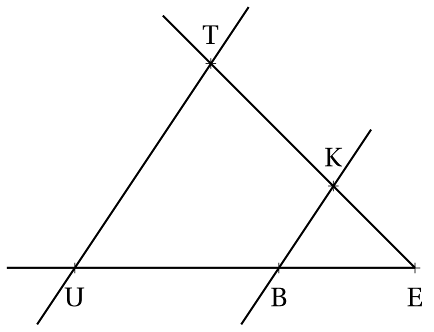
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

- $Y \in [XQ]$ et $K \in [WQ]$;
- $(YK)//(XW)$;
- $KQ = 13\ mm$, $WQ = 17\ mm$;
- $YQ = 11\ mm$ et $WX = 21\ mm$



Calculer les valeurs exactes puis approchée au centième près de XY et YK.

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès — Épisode 2



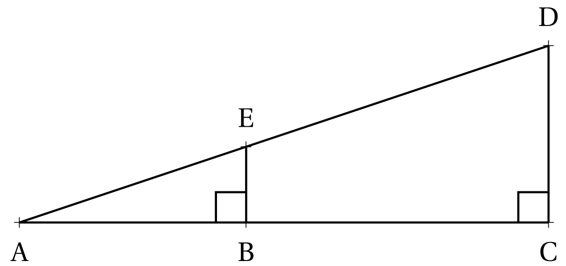
Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

- (TK) et (UB) sont sécantes en E ;
- $BE = 6\ m$, $UB = 9\ m$, $BK = 4\ m$ et $TE = 10\ m$;
- $(UT)//(BK)$

Calculer les valeurs exactes de UT et TK et, le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

Exercice n° 3 : Un soupçon de Thalès et un peu de Pythagore

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



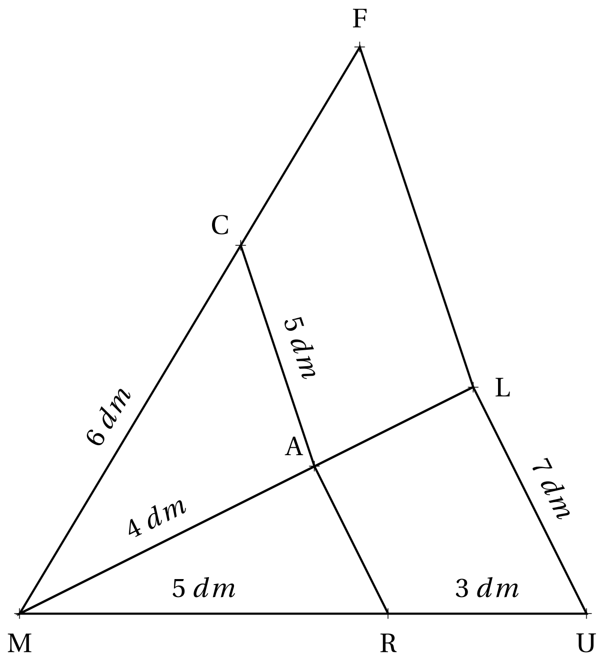
- ABE est rectangle en B ;
- ACD est rectangle en C ;
- $AB = 36\ m$, $AE = 60\ m$, $DC = 72\ m$.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

Exercice n° 4 : Deux fois plus de Thalès

Sur la figure ci-après, qui n'est pas représentée en vraies grandeurs, nous savons que :

- les points M, R et U sont alignés ;
- les points M, A et L sont alignés ;
- les points M, C et F sont alignés ;
- les droites (RA) et (UL) sont parallèles ;
- les droites (CA) et (FL) sont parallèles ;



Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au dixième près des longueurs AR, AL, FL et CF.

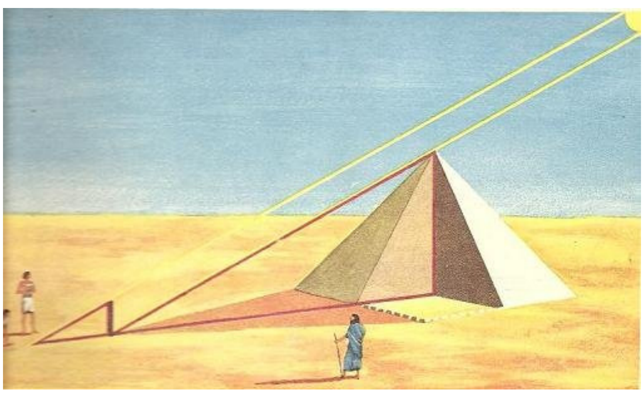
Exercice n° 5 : La légende de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.

Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :

« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».

Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...



- la canne de Thalès mesurait 3 coudées ;
- l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées ;
- la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide ;
- une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer ?

Exercices — Correction

Exercice n° 1

Correction

Situation n° 1

Dans le triangle TRU, M ∈ [RT] et Z ∈ [RU]
Les droites (MZ) et (TU) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{RM}{RT} = \frac{RZ}{RU} = \frac{MZ}{TU}$$

$$\frac{8\,\text{m}}{20\,\text{m}} = \frac{6{,}4\,\text{m}}{RU} = \frac{MZ}{18\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$RU = \frac{6{,}4\,\text{m} \times 20\,\text{m}}{8\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad RU = \frac{128\,\text{m}^2}{8\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{RU = 16\,\text{m}}$$

$$MZ = \frac{18\,\text{m} \times 8\,\text{m}}{20\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad MZ = \frac{144\,\text{m}^2}{8\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{MZ = 18\,\text{m}}$$

Situation n° 2

Dans le triangle QXW, K ∈ [QW] et Y ∈ [QX]
Les droites (KY) et (WX) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{QY}{QX} = \frac{QK}{QW} = \frac{YK}{XW}$$

$$\frac{11\,\text{mm}}{QX} = \frac{13\,\text{mm}}{17\,\text{mm}} = \frac{YK}{21\,\text{mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$QX = \frac{11\,\text{mm} \times 17\,\text{mm}}{13\,\text{mm}} \quad \text{d'où} \quad QX = \frac{187\,\text{mm}^2}{13\,\text{mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{QX \approx 14{,}38\,\text{mm au centième près.}}$$

$$YK = \frac{21\,\text{mm} \times 13\,\text{mm}}{17\,\text{mm}} \quad \text{d'où} \quad YK = \frac{273\,\text{mm}^2}{17\,\text{mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{YK \approx 16{,}06\,\text{mm au centième près.}}$$

Exercice n° 2

Correction

Dans le triangle UET, B ∈ [UE] et K ∈ [TE]
Les droites (TU) et (KB) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EB}{EU} = \frac{EK}{ET} = \frac{BK}{UT}$$

$$\frac{6\,\text{m}}{6\,\text{m}+9\,\text{m}} = \frac{EK}{10\,\text{m}} = \frac{4\,\text{m}}{TU}$$

$$\frac{6\,\text{m}}{15\,\text{m}} = \frac{EK}{10\,\text{m}} = \frac{4\,\text{m}}{TU}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$EK = \frac{10\,\text{m} \times 6\,\text{m}}{15\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad EK = \frac{60\,\text{m}^2}{15\,\text{m}} \quad \text{et} \quad EK = 4\,\text{m}$$

Comme $\boxed{TK = TE - EK = 10\,\text{m} - 4\,\text{m} = 6\,\text{m}}$

$$TU = \frac{4\,\text{m} \times 15\,\text{m}}{6\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad TU = \frac{60\,\text{m}^2}{6\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{TU = 10\,\text{m}}$$

Exercice n° 3

Correction

Dans le triangle ABE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BE^2 + BA^2 = EA^2$$
$$BE^2 + 36^2 = 60^2$$
$$BE^2 + 1296 = 3600$$
$$BE^2 = 3600 - 1296$$
$$BE^2 = 2304$$
$$BE = \sqrt{2304}$$
$$BE = 48$$

$\boxed{BE = 48\,\text{m}}$

Comme ABE est rectangle en E et ACD est rectangle en C, les droites (EB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AC).

On sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Ainsi (EB)//(CD).

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD]
Les droites (EB) et (CD) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{36\,\text{m}}{AC} = \frac{60\,\text{m}}{AD} = \frac{48\,\text{m}}{72\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$AC = \frac{36\,\text{m} \times 72\,\text{m}}{48\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad AC = \frac{2592\,\text{m}^2}{48\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{AC = 54\,\text{m}}$$

$$AD = \frac{60\,\text{m} \times 72\,\text{m}}{48\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad AD = \frac{4320\,\text{m}^2}{48\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{AD = 90\,\text{m}}$$

Exercice n° 4

Correction

Exercice n° 5

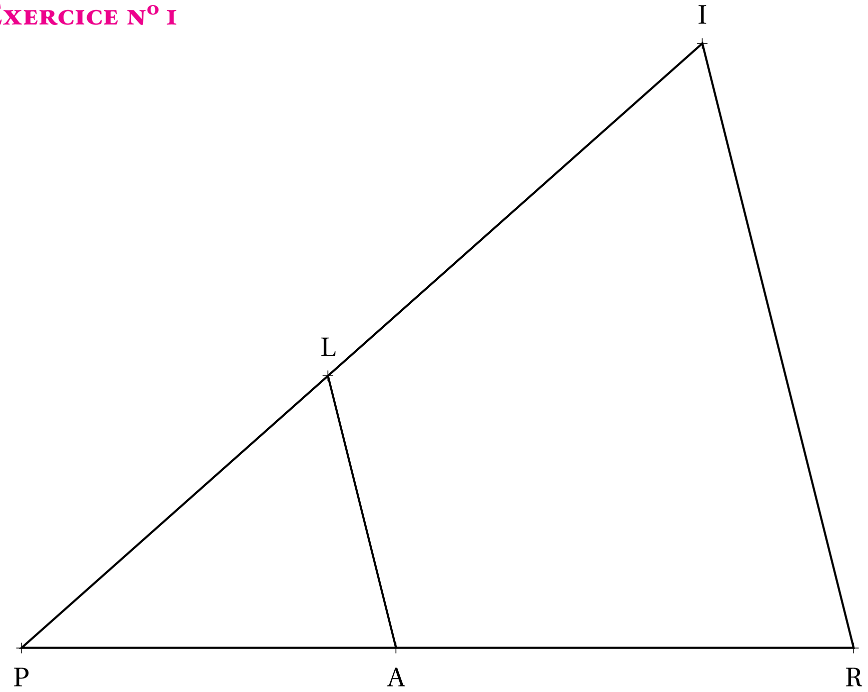
Correction

Évaluation

Quatrieme

Exercice n° 1

(7,5 points)



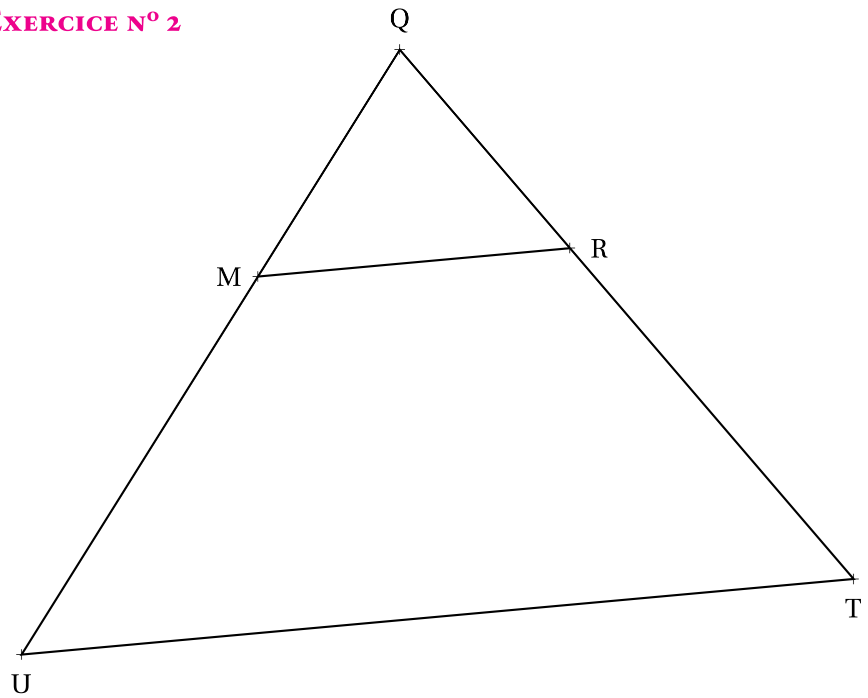
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $L \in [PI]$ et $A \in [PR]$;
- $PA = 70\,\text{dm}$, $PI = 126\,\text{dm}$;
- $LA = 50\,\text{dm}$, $RI = 105\,\text{dm}$;
- $(LA)//(IR)$.

Calculer les valeurs exactes de PR et PL.

Exercice n° 2

(7,5 points)



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $M \in [QU]$ et $R \in [QT]$;
- $QM = 5\,\text{m}$, $MU = 4{,}5\,\text{m}$;
- $QT = 13{,}3\,\text{m}$, $MR = 6\,\text{m}$;
- $(MR)//(UT)$.

Calculer les valeurs exactes de RT et UT.

☞ Évaluation — Correction ☜

Exercice n° 1 — Correction

Dans PIR, L ∈ [PI] et A ∈ [PR].

Les droites (LA) et (IR) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{PL}{PI} = \frac{PA}{PR} = \frac{LA}{IR}$$

$$\frac{PL}{126\,\text{dm}} = \frac{70\,\text{dm}}{PR} = \frac{50\,\text{dm}}{105\,\text{dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$PL = \frac{126\,\text{dm} \times 50\,\text{dm}}{105\,\text{dm}} \quad \text{d'où} \quad PL = \frac{6300\,\text{dm}^2}{105\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{PL = 60\,\text{dm}}$$

$$PR = \frac{70\,\text{dm} \times 105\,\text{dm}}{50\,\text{dm}} \quad \text{d'où} \quad PR = \frac{7350\,\text{dm}^2}{50\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{PR = 147\,\text{dm}}$$

Exercice n° 2 — Correction

Dans QUT, M ∈ [QU] et R ∈ [QT].

Les droites (MR) et (UT) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{QM}{QU} = \frac{QR}{QT} = \frac{MR}{UT}$$

$$\frac{5\,\text{m}}{5\,\text{m} + 4{,}5\,\text{m}} = \frac{QR}{13{,}3\,\text{m}} = \frac{6\,\text{m}}{UT}$$

$$\frac{5\,\text{m}}{9{,}5\,\text{m}} = \frac{QR}{13{,}3\,\text{m}} = \frac{6\,\text{m}}{UT}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$QR = \frac{13{,}3\,\text{m} \times 5\,\text{m}}{9{,}5\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad QR = \frac{66{,}5\,\text{m}^2}{9{,}5\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{QR = 7\,\text{m}}$$

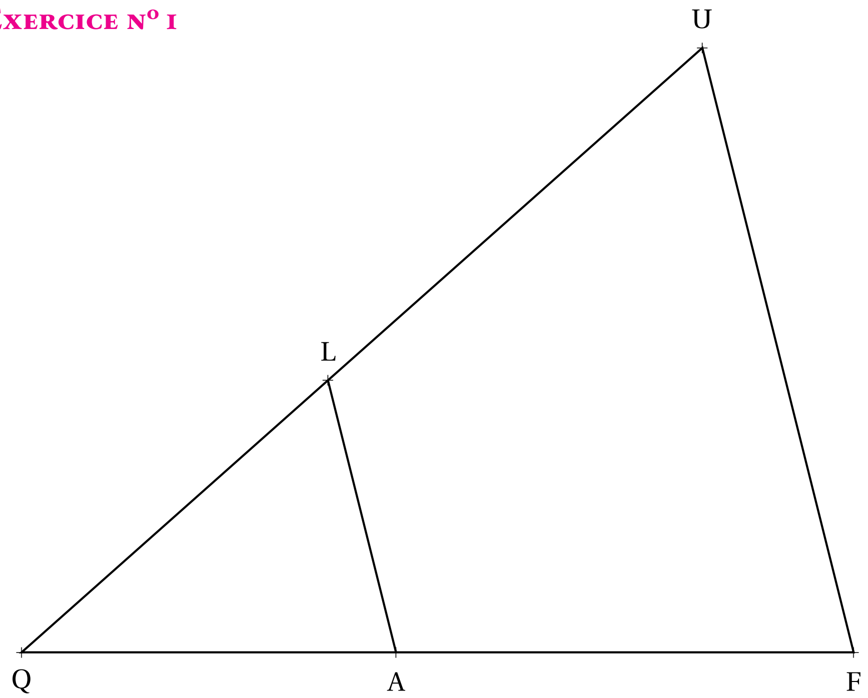
$$UT = \frac{6\,\text{m} \times 9{,}5\,\text{dm}}{5\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad UT = \frac{57\,\text{m}^2}{5\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{UT = 11{,}4\,\text{m}}$$

Évaluation

Quatrieme

Exercice n° 1

(7,5 points)



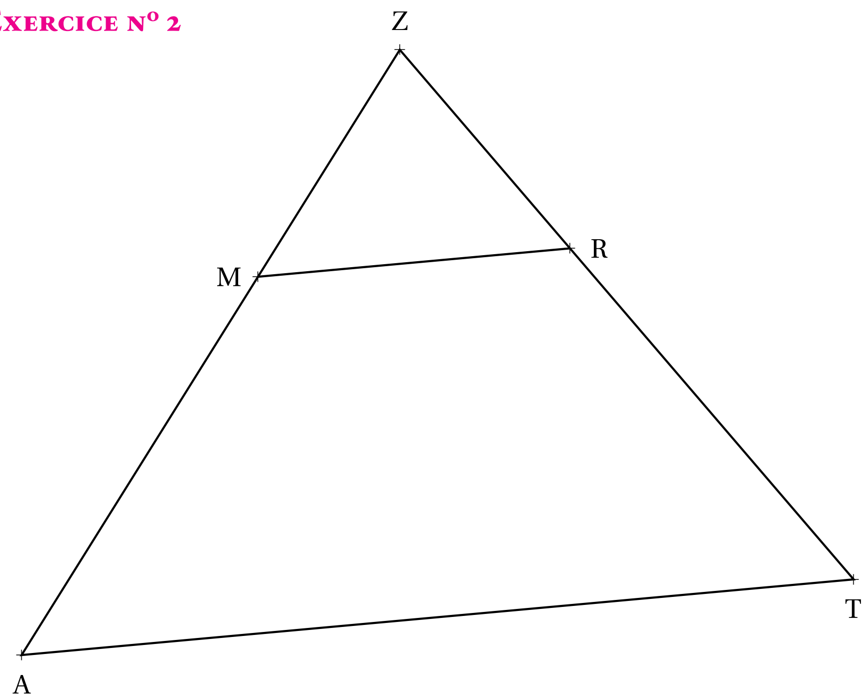
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $L \in [QU]$ et $A \in [QR]$;
- $QA = 80\,dm$, $QU = 168\,dm$;
- $LA = 60\,dm$, $FU = 126\,dm$;
- $(LA)//(UF)$.

Calculer les valeurs exactes de QF et QL.

Exercice n° 2

(7,5 points)



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $M \in [ZA]$ et $R \in [ZT]$;
- $ZM = 7\,m$, $MA = 6{,}3\,m$;
- $ZT = 15{,}2\,m$, $MR = 8\,m$;
- $(MR)//(AT)$.

Calculer les valeurs exactes de RT et AT.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1

Correction

Dans QUF, $L \in [QU]$ et $A \in [QF]$.

Les droites (LA) et (UF) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{QL}{QU} = \frac{QA}{QF} = \frac{LA}{UF}$$

$$\frac{QL}{168\,\text{dm}} = \frac{80\,\text{dm}}{QF} = \frac{60\,\text{dm}}{126\,\text{dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$QL = \frac{168\,\text{dm} \times 60\,\text{dm}}{126\,\text{dm}} \quad \text{d'où} \quad QL = \frac{10\,080\,\text{dm}^2}{126\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{QL = 80\,\text{dm}}$$

$$QF = \frac{80\,\text{dm} \times 126\,\text{dm}}{60\,\text{dm}} \quad \text{d'où} \quad QF = \frac{10\,080\,\text{dm}^2}{60\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{QF = 168\,\text{dm}}$$

Exercice n° 2

Correction

Dans ZAT, $M \in [ZA]$ et $R \in [ZT]$.

Les droites (MR) et (AT) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{ZM}{ZA} = \frac{ZR}{ZT} = \frac{MR}{AT}$$

$$\frac{7\,\text{m}}{7\,\text{m} + 6{,}3\,\text{m}} = \frac{ZR}{15{,}2\,\text{m}} = \frac{8\,\text{m}}{AT}$$

$$\frac{7\,\text{m}}{13{,}3\,\text{m}} = \frac{ZR}{15{,}2\,\text{m}} = \frac{8\,\text{m}}{AT}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

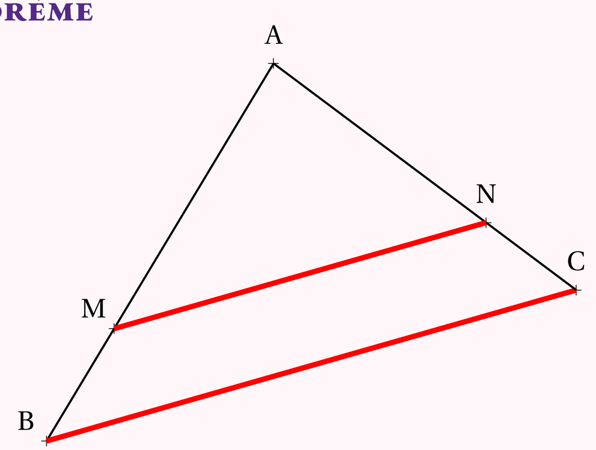
$$ZR = \frac{15{,}2\,\text{m} \times 7\,\text{m}}{13{,}3\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad ZR = \frac{106{,}4\,\text{m}^2}{13{,}3\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{ZR = 8\,\text{m}}$$

$$AT = \frac{8\,\text{m} \times 13{,}3\,\text{dm}}{7\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad AT = \frac{106{,}4\,\text{m}^2}{7\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{AT = 15{,}2\,\text{m}}$$

Le théorème de Thalès

Version quatrième

Le théorème



Si dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN)//(BC)
Alors

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

Remarque :
Cette égalité signifie que les longueurs AM, AN et MN sont proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC. Elle signifie aussi que le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN ou que AMN est une réduction de ABC.

La règle de trois et égalité des produits en croix

Les produits en croix

Deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.

a, b, c et d des nombres non nuls.

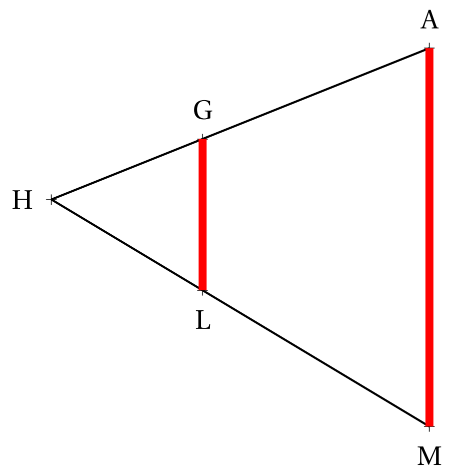
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textbf{ si et seulement si } a \times d = b \times c$$

La règle de trois

a, b et c des nombres connus non nuls.

Le nombre x vérifiant $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ est $x = \frac{b \times c}{a}$

Exemple :



On sait que :

- G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
- (GL)//(AM)
- HL = 4 cm, HA = 12 cm,
- GL = 3 cm, AM = 15 cm

On veut calculer HG **et** HM**.**

Dans le triangle HAM on sait que G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
Les droites (GL) et (AM) sont parallèles,
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{HM}} = \frac{\mathrm{HG}}{\mathrm{HA}} = \frac{\mathrm{LG}}{\mathrm{MA}}$$

$$\frac{4\ cm}{\mathrm{HM}} = \frac{\mathrm{HG}}{12\ cm} = \frac{3\ cm}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{4\ cm}{\mathrm{HM}}$ on a $\mathrm{HM} = \frac{4\ cm \times 15\ cm}{3\ cm} = \frac{60}{3}\ cm = \boxed{20\ cm}$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{\mathrm{HG}}{12\ cm}$ on a $\mathrm{HG} = \frac{12\ cm \times 3\ cm}{15\ cm} = \frac{36}{15}\ cm = \boxed{2{,}4\ cm}$

Remarques et intentions pédagogiques

[1] **Activité — Le mur**

Mes intentions sont claires !

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence !

[2]De plus $\dfrac{15}{5} = 3$ et $\dfrac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\dfrac{a}{b}$ telle que $b \times \dfrac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie !

[5]L'identification précédente entre $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \dfrac{5}{3} = 45$ et $27 \times \dfrac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \dfrac{5}{3} - 27 \times \dfrac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\dfrac{5}{3} = \dfrac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens !

[1] **Activité — Un pavage du plan**

Mes intentions sont claires

[1] **Activité — Parallèles et longueurs**

Mes intentions sont claires

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 23 juin 2024 à 16:21

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

Licence CC BY-NC-SA 4.0

Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats

Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.

Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.

Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.

Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr`

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, , a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 23 juin 2024 à 16:21.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : .